Università di Udine
Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche

L'integrale

Gianluca Gorni

1 giugno 2022

Cap. 1
Aree e trapezoidi

Aree

Aree

- *Il problema originario della **geometria** è la misurazione dei terreni*

Aree

- ***Il problema originario della geometria è la misurazione dei terreni***
  - come dice l'etimologia della parola stessa.

Aree

- ***Il problema originario della geometria è la misurazione dei terreni***
  - come dice l'etimologia della parola stessa.
- ***Misurazione di cosa?***

Aree

- ***Il problema originario della geometria è la misurazione dei terreni***
  - come dice l'etimologia della parola stessa.
- ***Misurazione di cosa?***
  - di lunghezze

Aree

- ***Il problema originario della geometria è la misurazione dei terreni***
  - come dice l'etimologia della parola stessa.
- ***Misurazione di cosa?***
  - di lunghezze
  - di aree

Aree

- ***Il problema originario della geometria è la misurazione dei terreni***
  - come dice l'etimologia della parola stessa.
- ***Misurazione di cosa?***
  - di lunghezze
  - di aree
- ***La misura di lunghezze si può fare riportando una lunghezza base più volte***

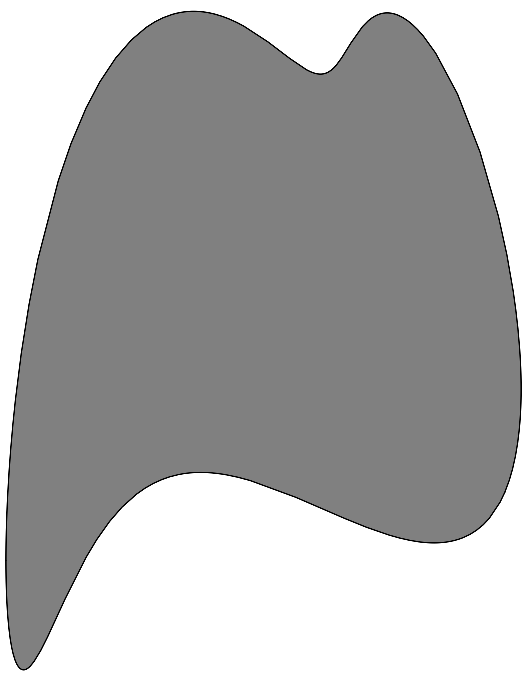
- ***Il problema originario della geometria è la misurazione dei terreni***
  - come dice l'etimologia della parola stessa.
- ***Misurazione di cosa?***
  - di lunghezze
  - di aree
- ***La misura di lunghezze si può fare riportando una lunghezza base più volte***
  - stando solo attenti di andare dritti.

Aree

- L'area di campi quadrati o rettangolari è facile.

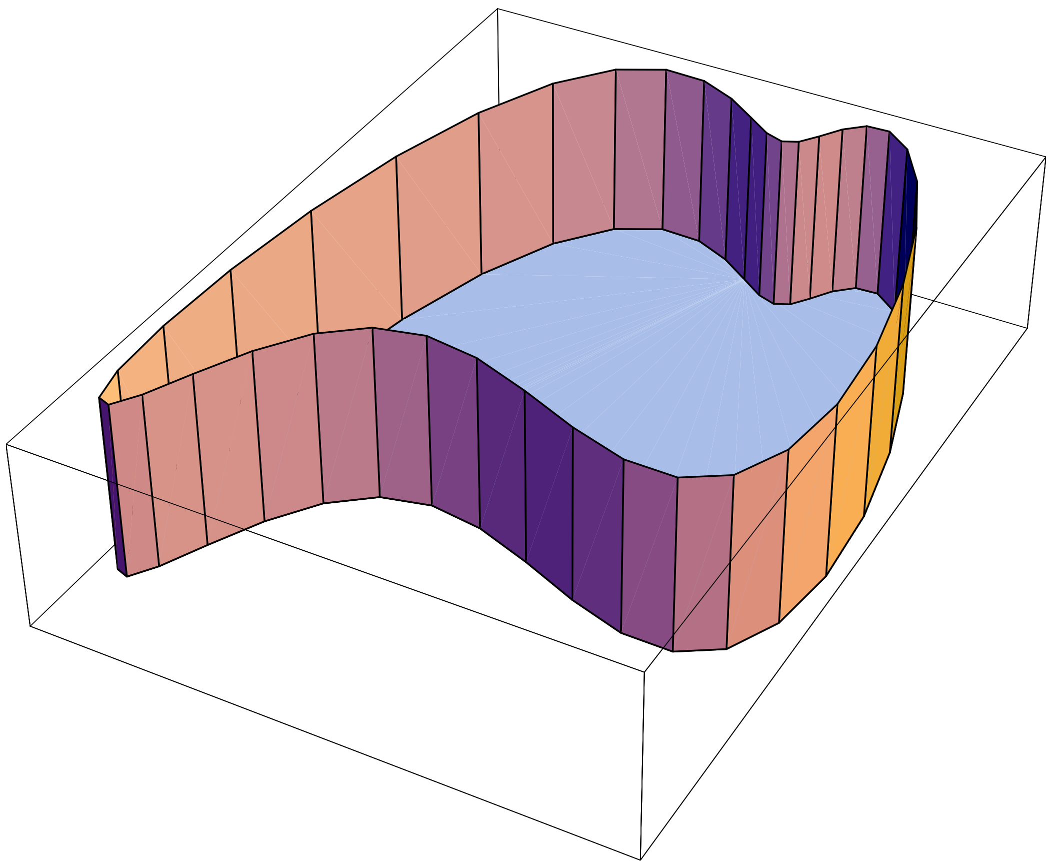
Aree

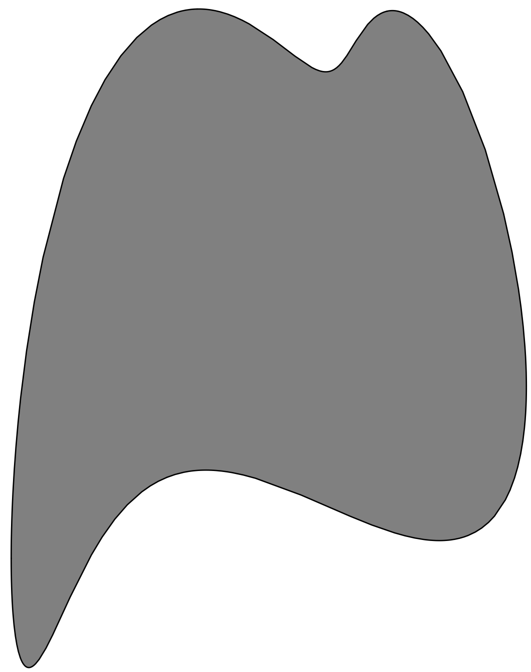
- L'area di campi quadrati o rettangolari è facile.
- Trovare l'area di campi di altre forme può non esserlo.



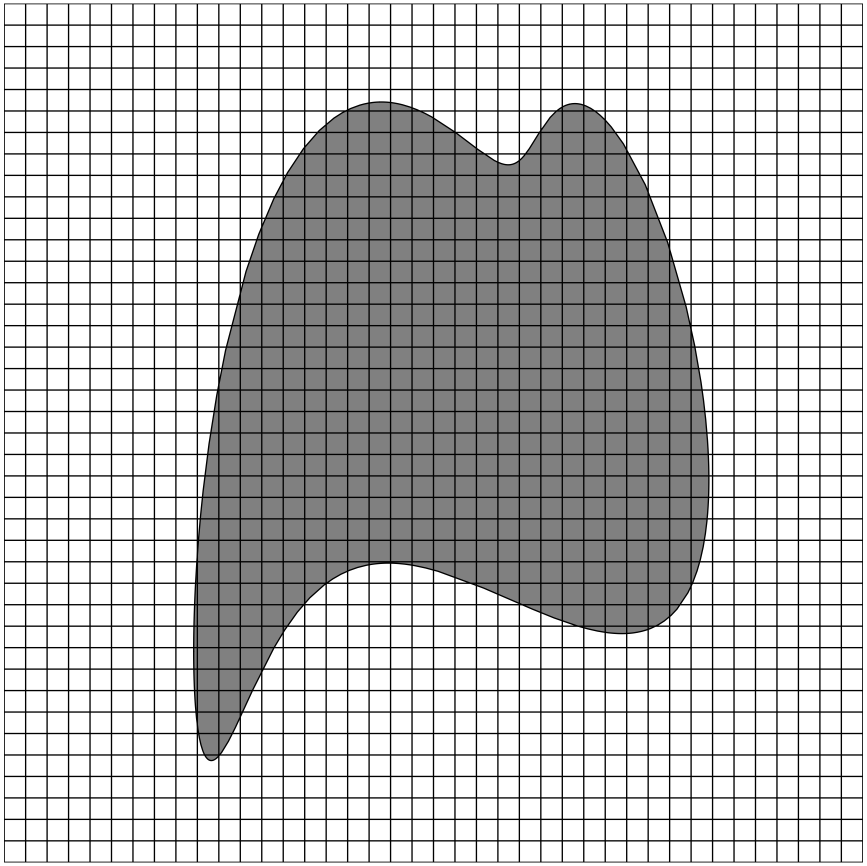
- **Se il terreno è piano, impermeabile, e con un muro di cinta, che ne dite di pesare quanta acqua ci vuole per allagarlo fino a un metro d'acqua?**

- Se il terreno è piano, impermeabile, e con un muro di cinta, che ne dite di pesare quanta acqua ci vuole per allagarlo fino a un metro d'acqua?
- Cioè, riportare l'area a un volume (o a un peso).



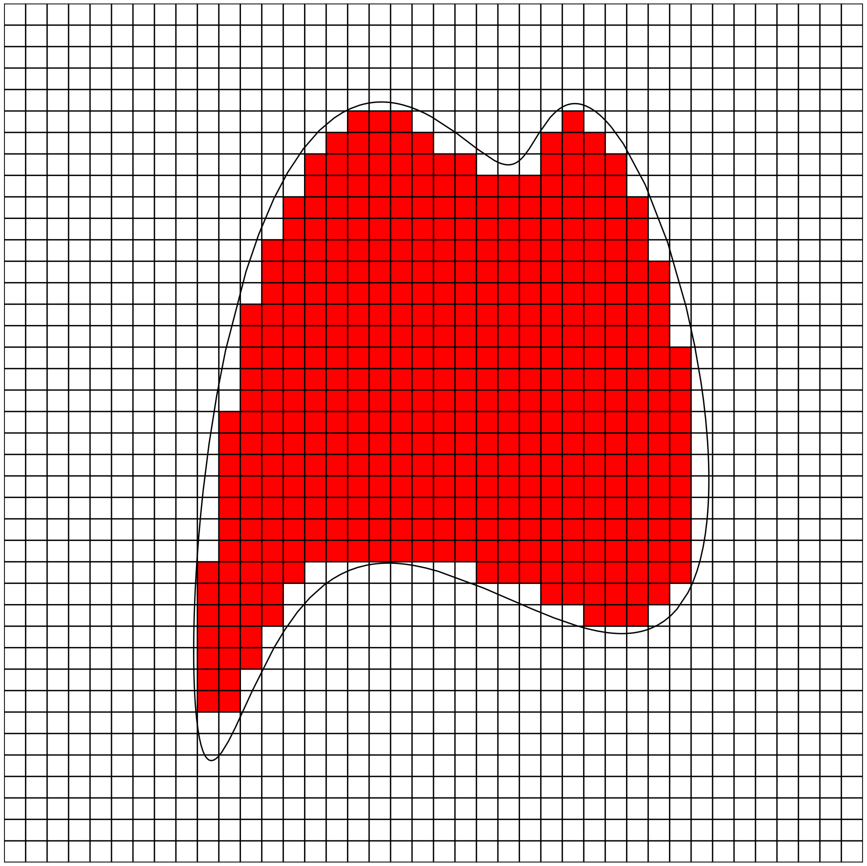


- **Oppure, potremmo prendere il campo,**

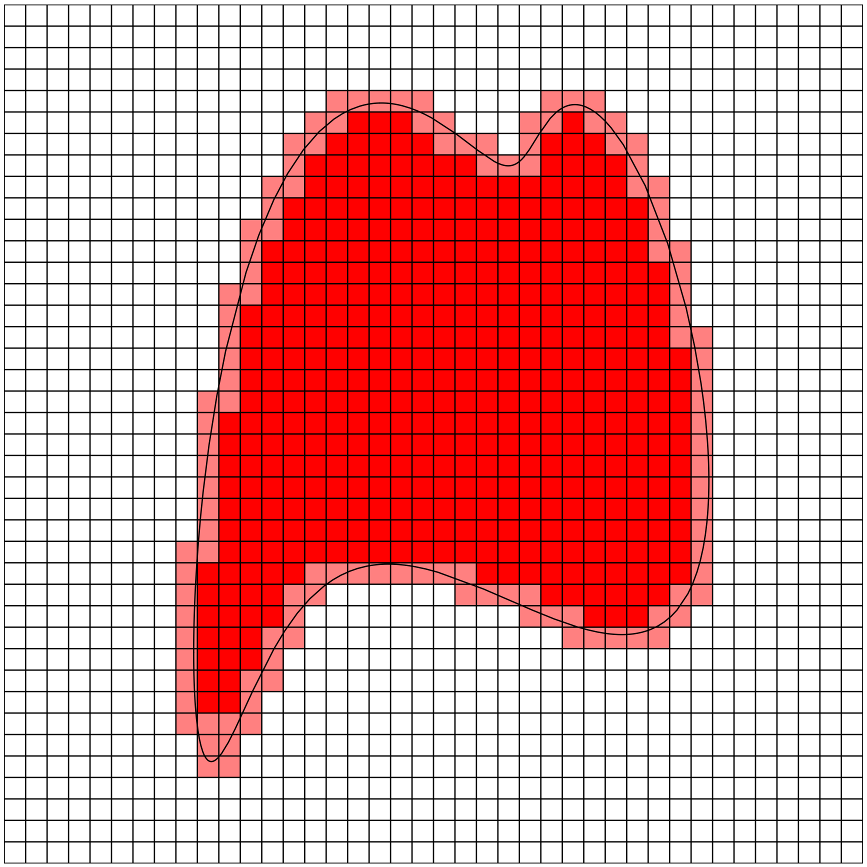


- Oppure, potremmo prendere il campo,
- quadrettarlo,

Aree



- Oppure, potremmo prendere il campo,
- quadrettarlo,
- e poi contare i quadratini che stanno dentro



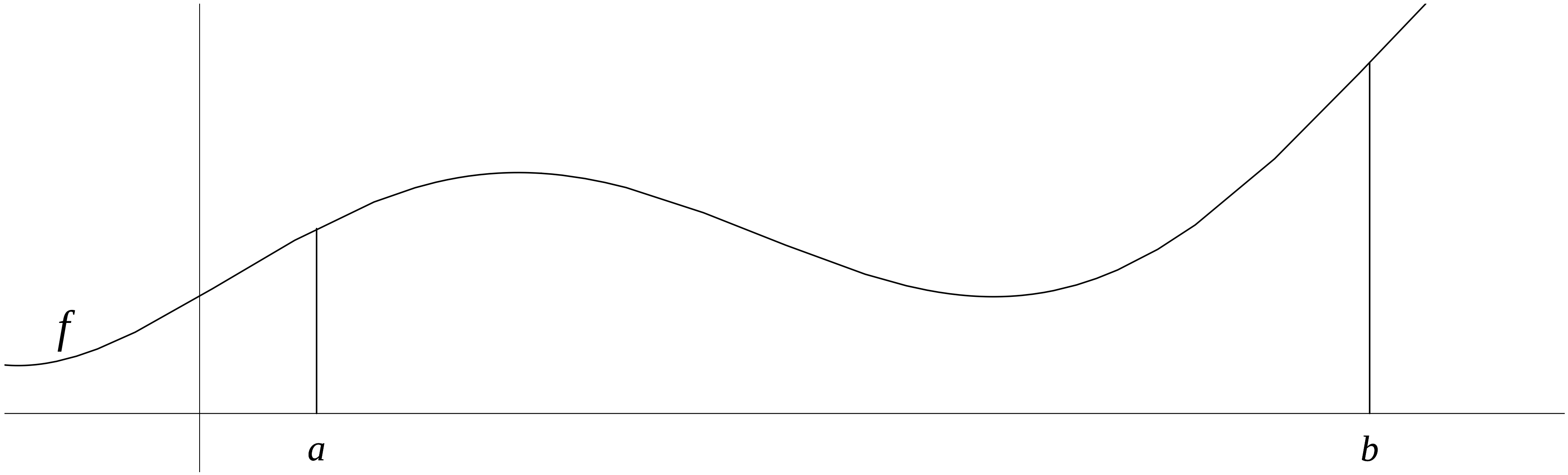
- Oppure, potremmo prendere il campo,
- quadrettarlo,
- e poi contare i quadratini che stanno dentro
- e quelli che stanno in po' dentro e un po' fuori.

- L'idea che seguiremo è affine alla quadrettatura: faremo una **rettangolatura**.

- L'idea che seguiremo è affine alla quadrettatura: faremo una **rettangolatura**.
- Il problema è più maneggevole se ci limitiamo, almeno per il momento, a un tipo particolare di figure piane, i **trapezoidi**.

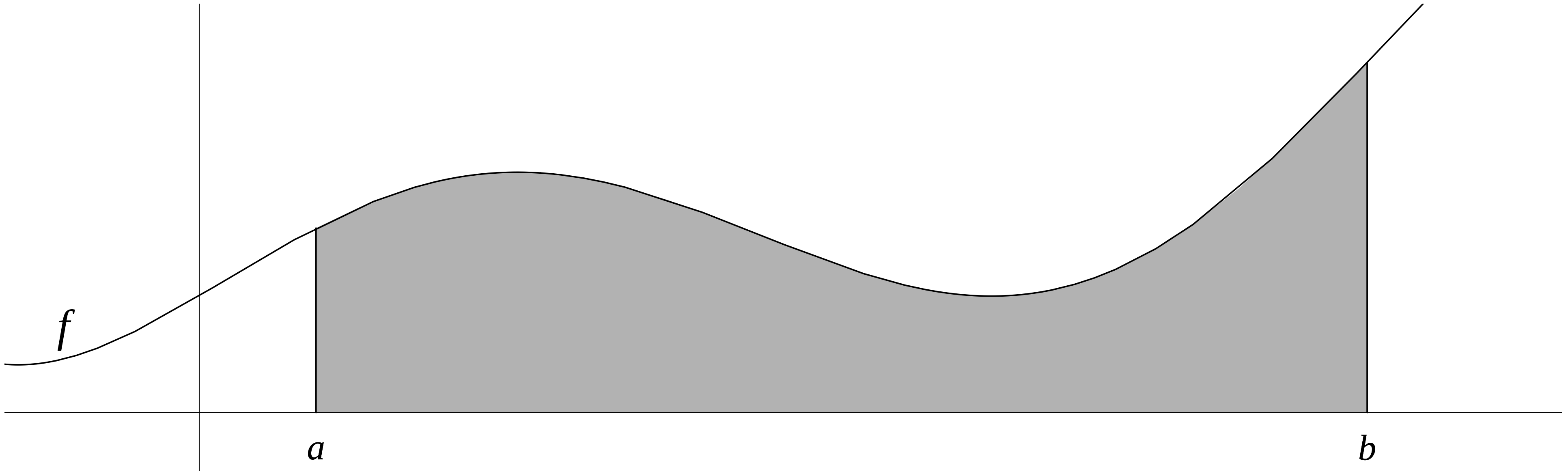
Trapezoidi

Trapezoidi

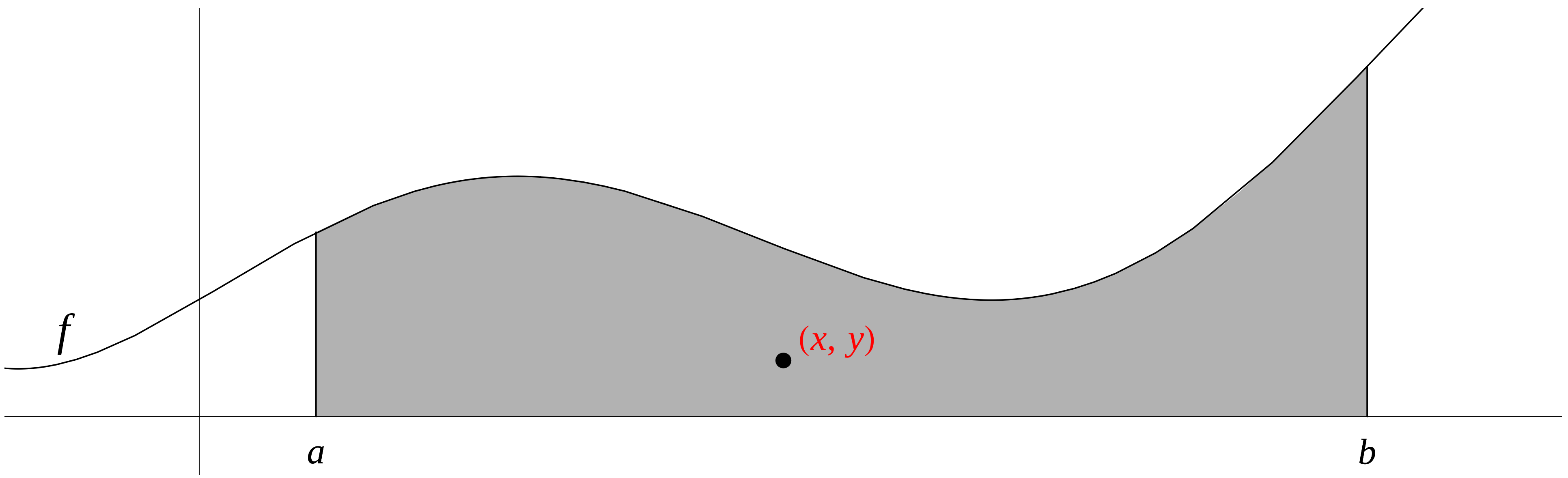


- ***Definizione:*** *data una funzione f definita e positiva sull'intervallo $[a, b]$,*

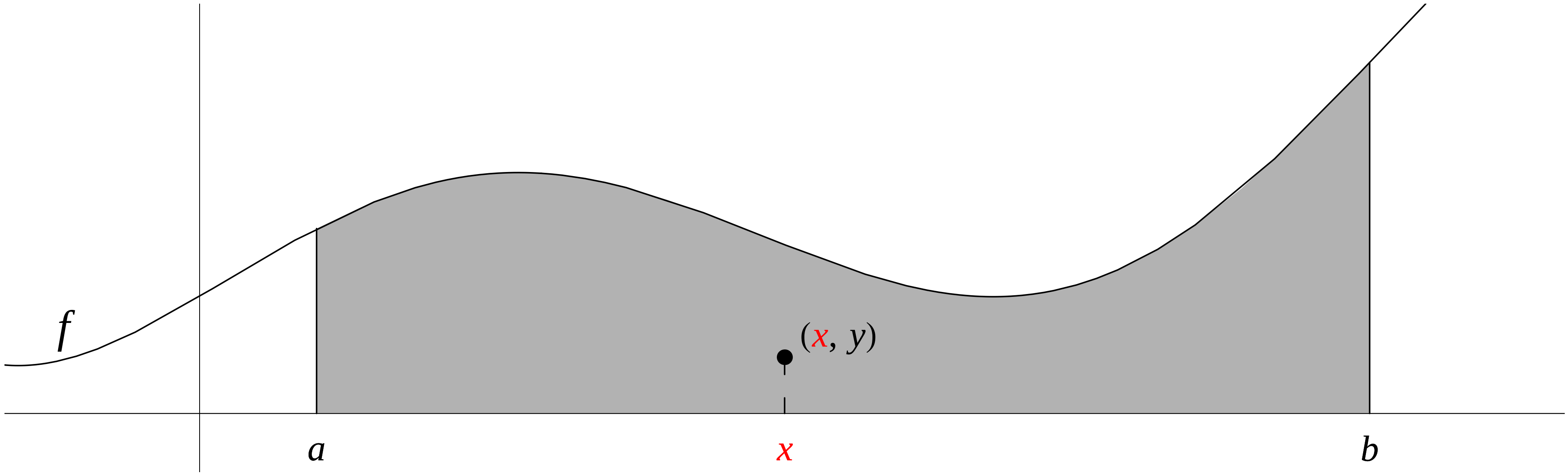
Trapezoidi



- **Definizione:** ***data una funzione f definita e positiva sull'intervallo $[a, b]$,***
  - diciamo *trapezoide* di f su $[a, b]$

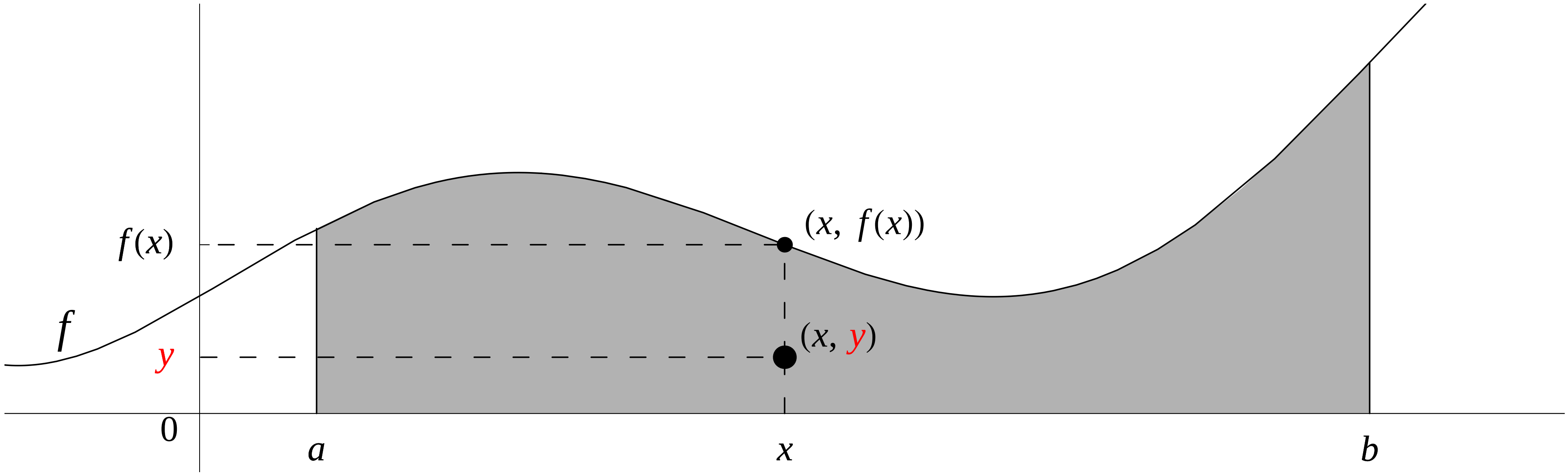


- **Definizione:** ***data una funzione f definita e positiva sull'intervallo $[a, b]$,***
  - diciamo *trapezoide* di f su $[a, b]$
  - l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$



- ***Definizione:*** ***data una funzione f definita e positiva sull'intervallo $[a, b]$,***
  - diciamo *trapezoide* di f su $[a, b]$
  - l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per i quali
    - $a \leq x \leq b$

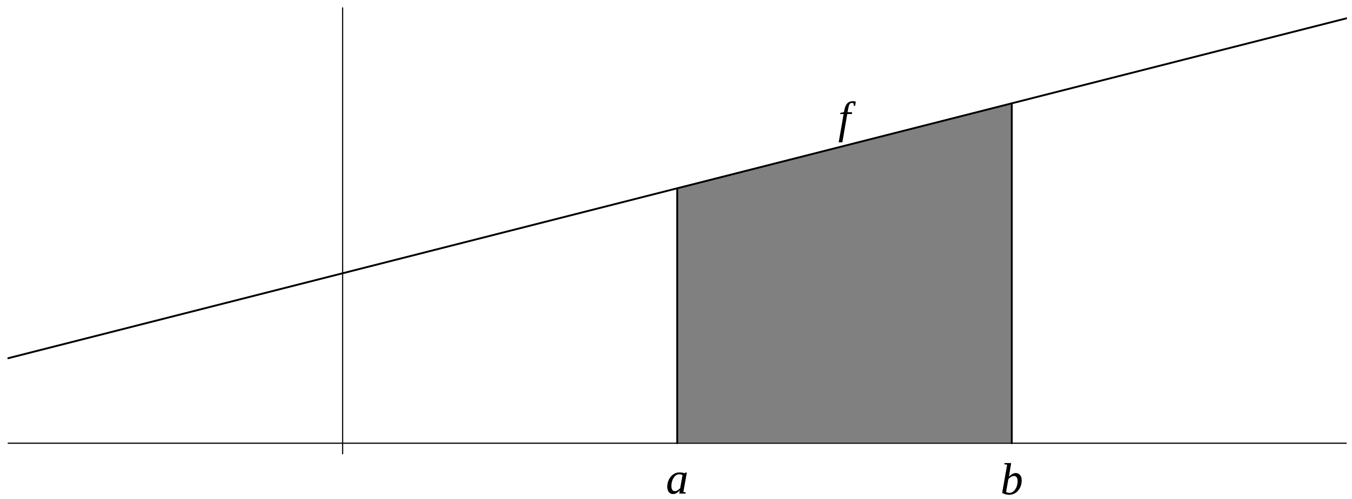
Trapezoidi



- **Definizione:** ***data una funzione f definita e positiva sull'intervallo $[a, b]$,***
  - diciamo *trapezoide* di f su $[a, b]$
  - l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per i quali
    - $a \leq x \leq b$, **e**
    - $0 \leq y \leq f(x)$.

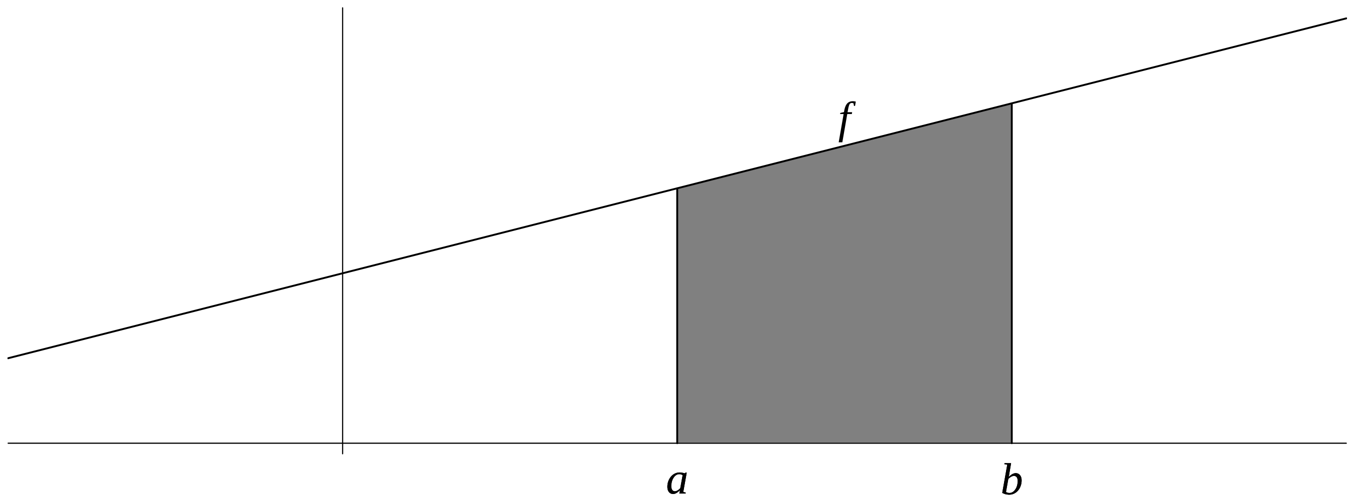
Trapezoidi

- Quando la f è un polinomio di primo grado, il trapezoide è un trapezio:



Trapezoidi

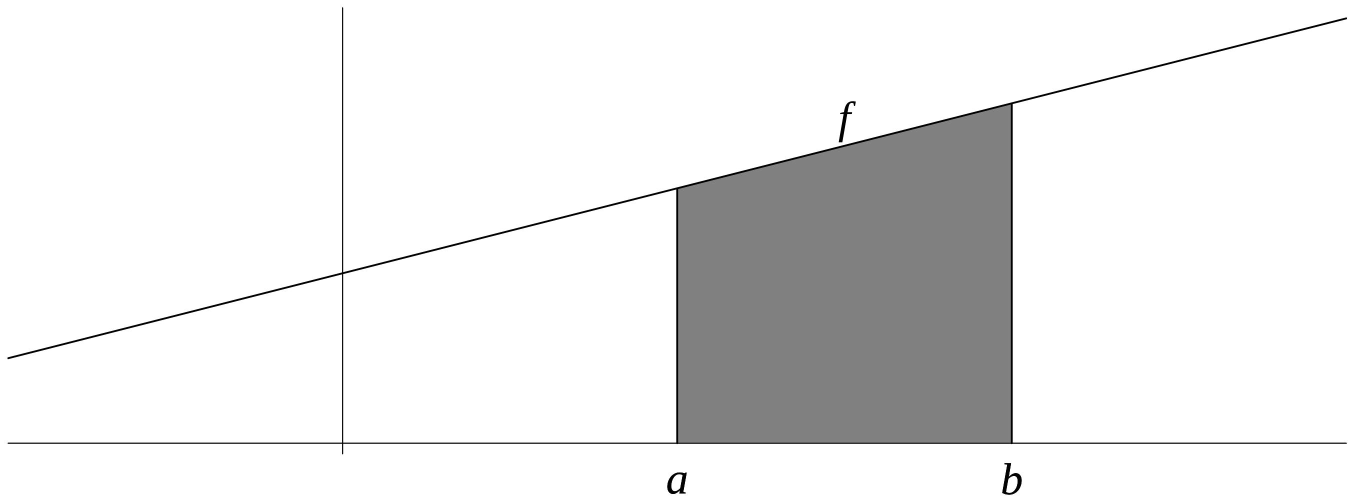
- Quando la f è un polinomio di primo grado, il trapezoide è un trapezio:



- Il trapezoide è una *generalizzazione del trapezio*:

Trapezoidi

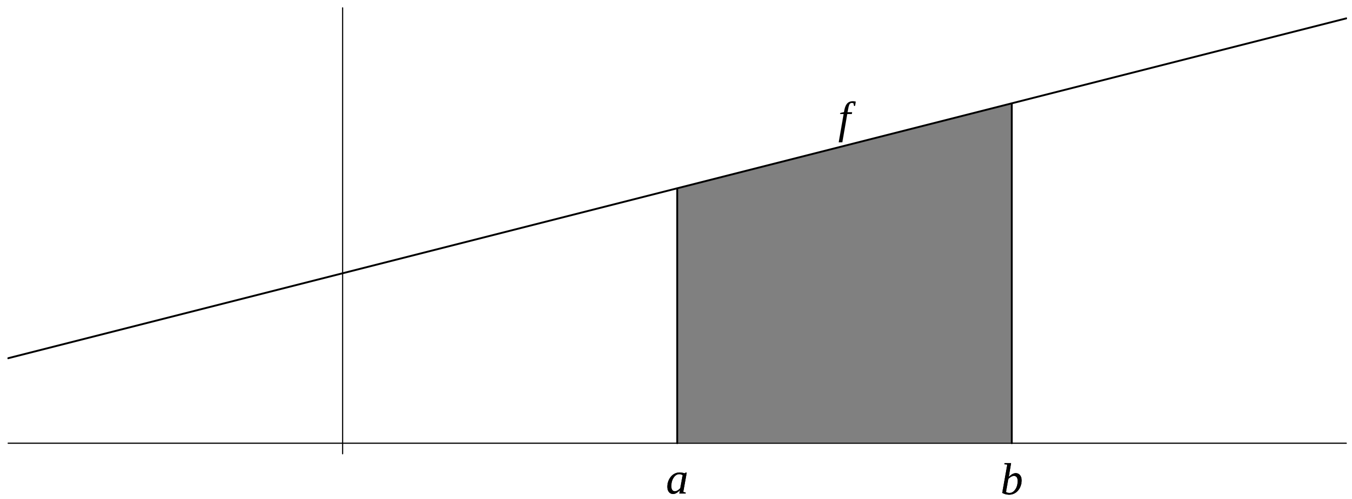
- Quando la f è un polinomio di primo grado, il trapezoide è un trapezio:



- Il trapezoide è una *generalizzazione del trapezio*:
  - **i tre lati rettilinei ortogonali rimangono,**

Trapezoidi

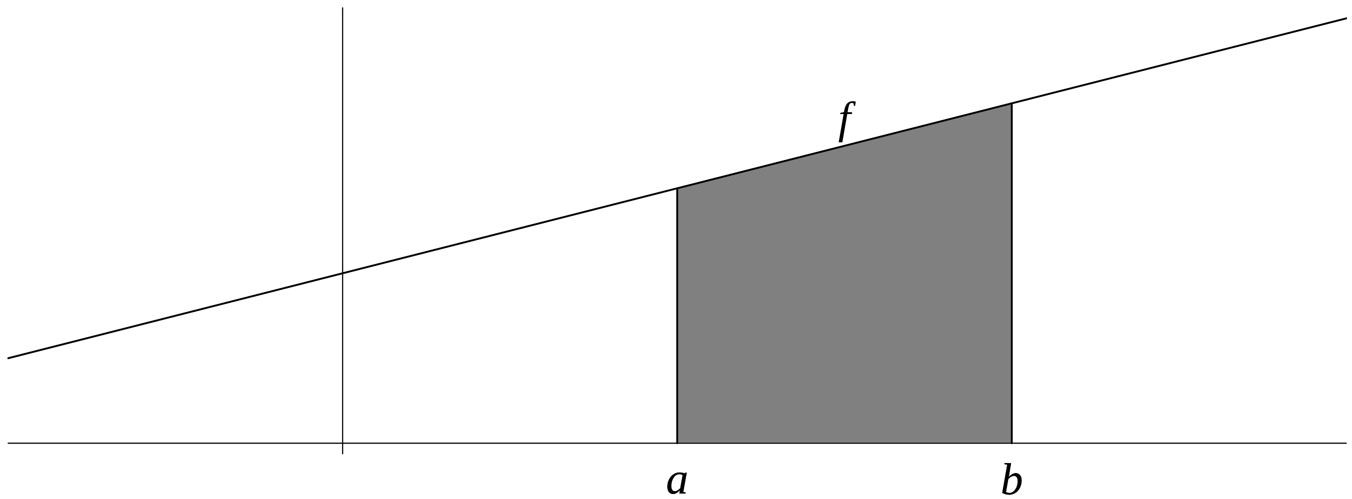
- Quando la f è un polinomio di primo grado, il trapezoide è un trapezio:



- Il trapezoide è una *generalizzazione del trapezio*:
  - **i tre lati rettilinei ortogonali rimangono,**
  - **ma il quarto lato può non essere rettilineo.**

Trapezoidi

- Quando la f è un polinomio di primo grado, il trapezoide è un trapezio:



- Il trapezoide è una *generalizzazione del trapezio*:
  - **i tre lati rettilinei ortogonali rimangono,**
  - **ma il quarto lato può non essere rettilineo.**
- Queste lezioni sono una teoria dell'area dei trapezoidi.

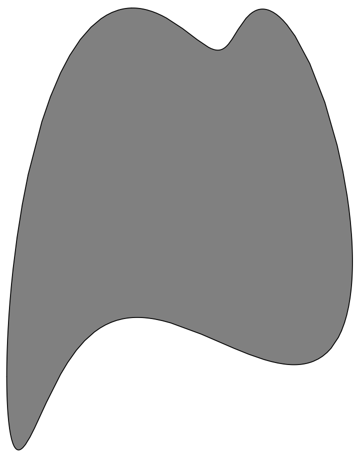
Scomposizioni

Scomposizioni

- Però limitarsi ai trapezoidi non è una restrizione grave.

Scomposizioni

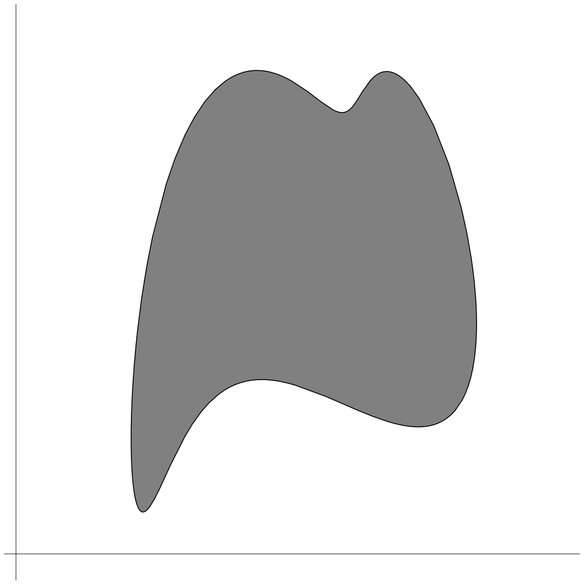
- Però limitarsi ai trapezoidi non è una restrizione grave.



- **Prendiamo per esempio il *non trapezoide* grigio.**

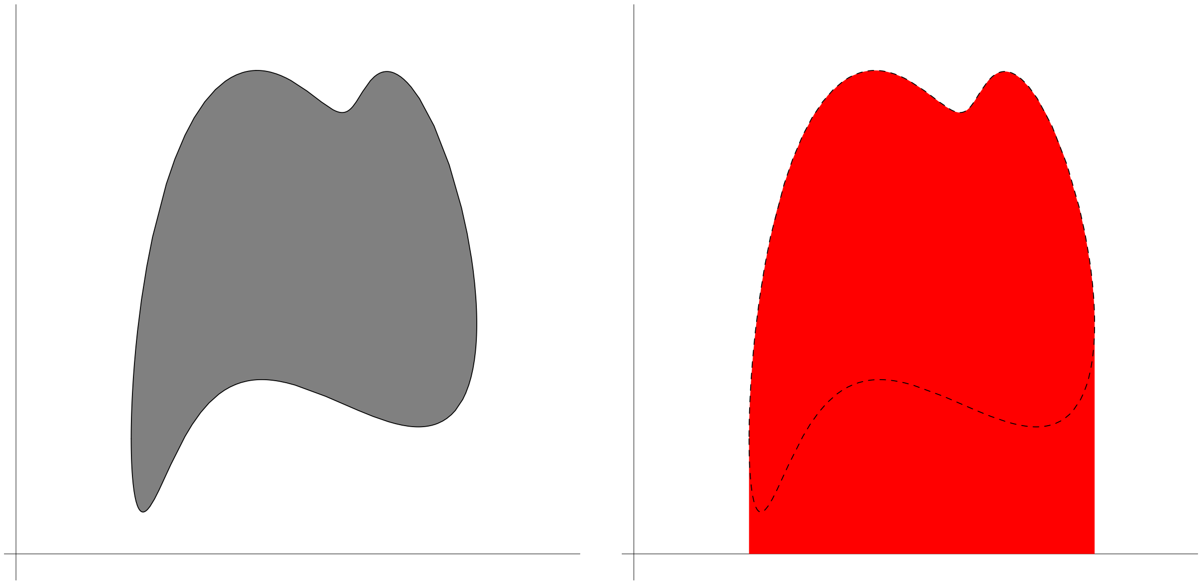
Scomposizioni

- Però limitarsi ai trapezoidi non è una restrizione grave.



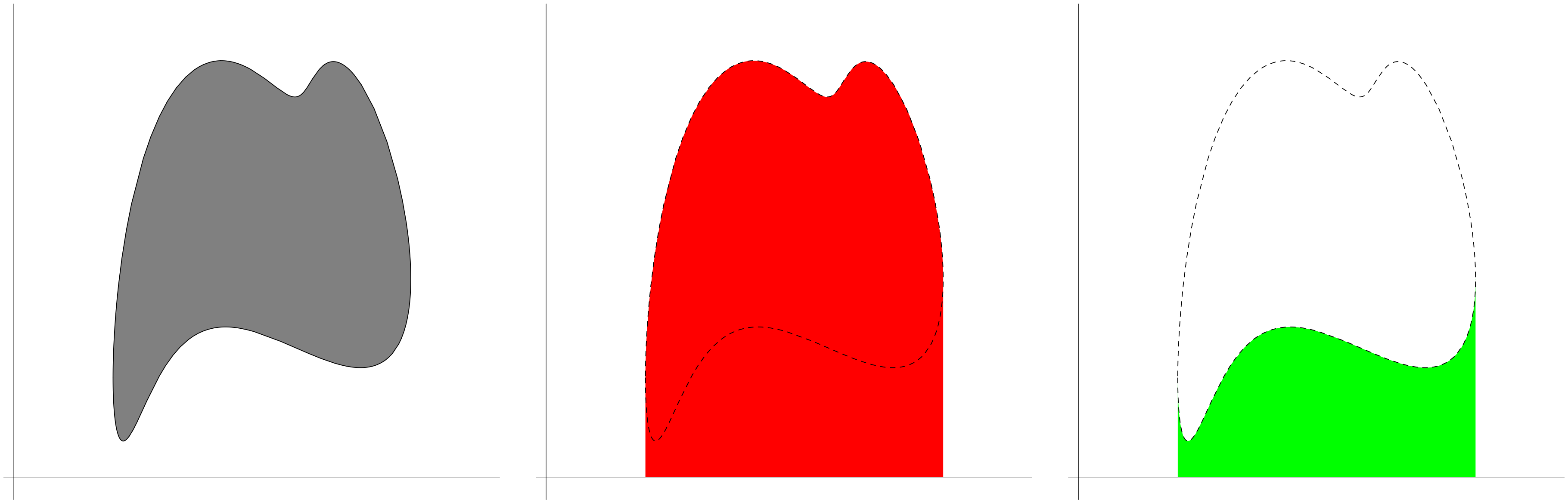
- **Prendiamo per esempio il *non trapezoide* grigio.**
  - Fissiamo degli assi cartesiani.

- Però limitarsi ai trapezoidi non è una restrizione grave.



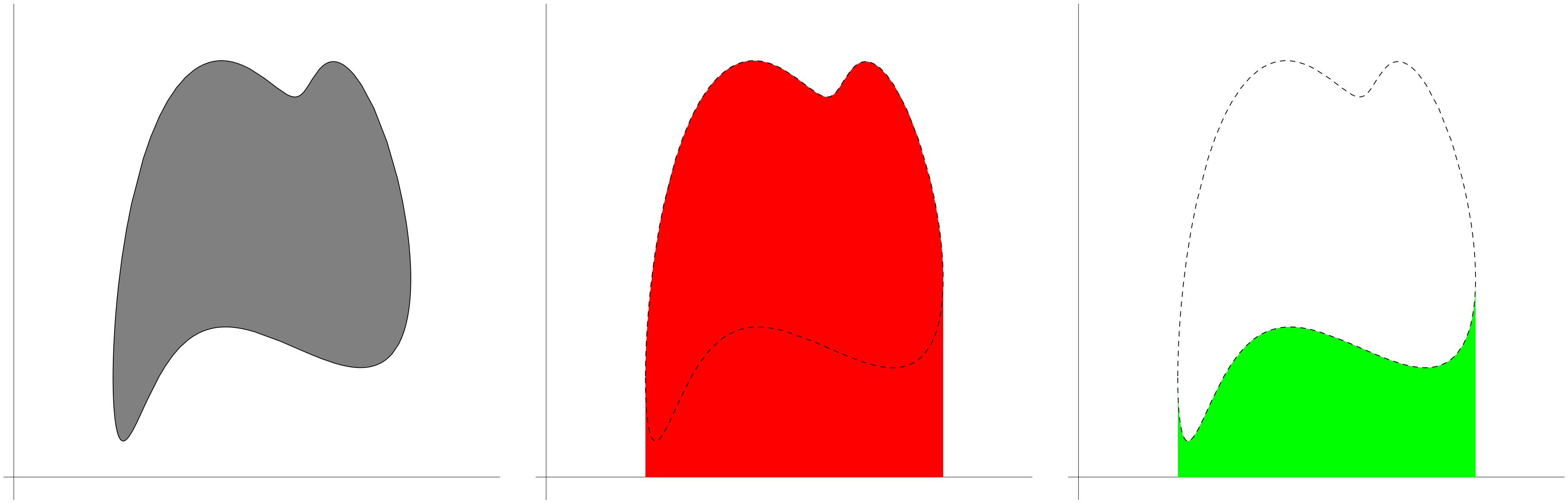
- **Prendiamo per esempio il *non trapezoide* grigio.**
  - Fissiamo degli assi cartesiani.
  - Consideriamo la figura in rosso più grande, che è un trapezoide.

□ Però limitarsi ai trapezoidi non è una restrizione grave.



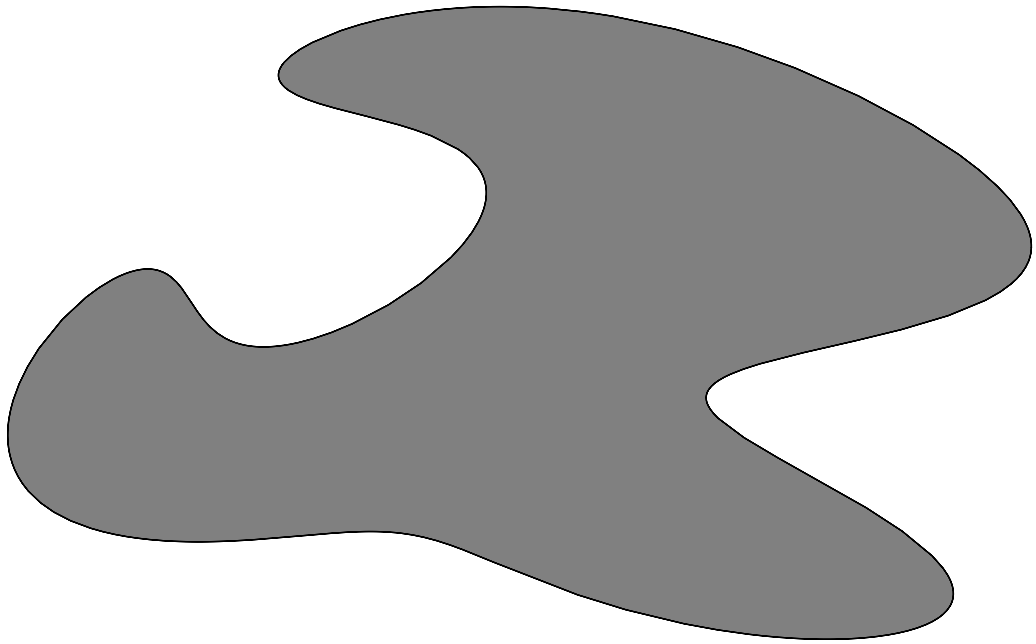
- **Prendiamo per esempio il *non trapezoide* grigio.**
  - Fissiamo degli assi cartesiani.
  - Consideriamo la figura in rosso più grande, che è un trapezoide.
  - e quest'altra verde, che è pure un trapezoide.

- Però limitarsi ai trapezoidi non è una restrizione grave.



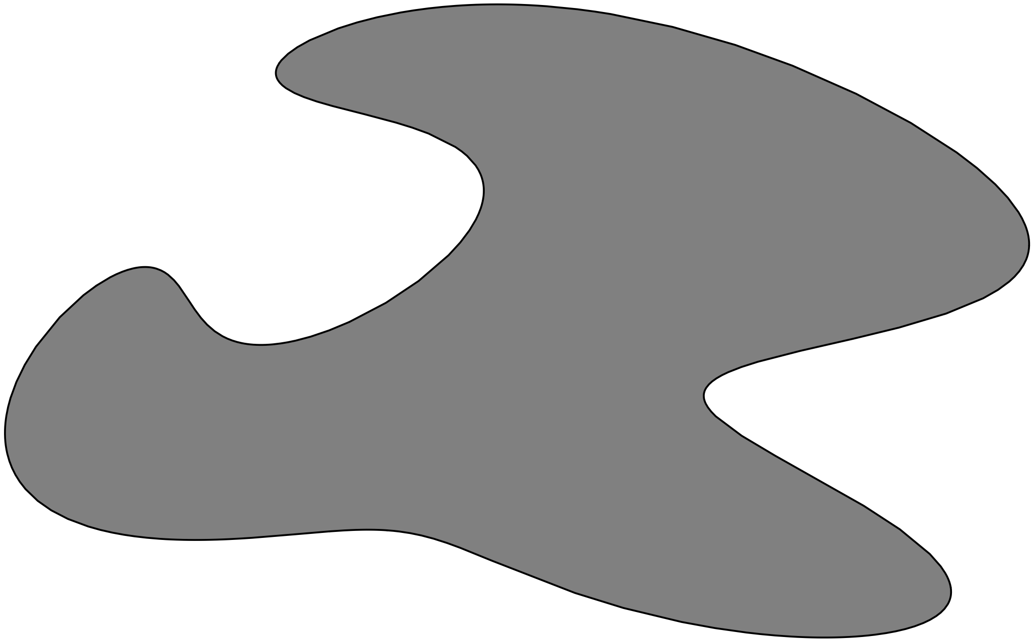
- **Prendiamo per esempio il *non trapezoide* grigio.**
  - Fissiamo degli assi cartesiani.
  - Consideriamo la figura in rosso più grande, che è un trapezoide.
  - e quest'altra verde, che è pure un trapezoide.
- **L'area grigia è la *differenza* fra l'area dei trapezoidi rosso e verde.**

- Altre figure



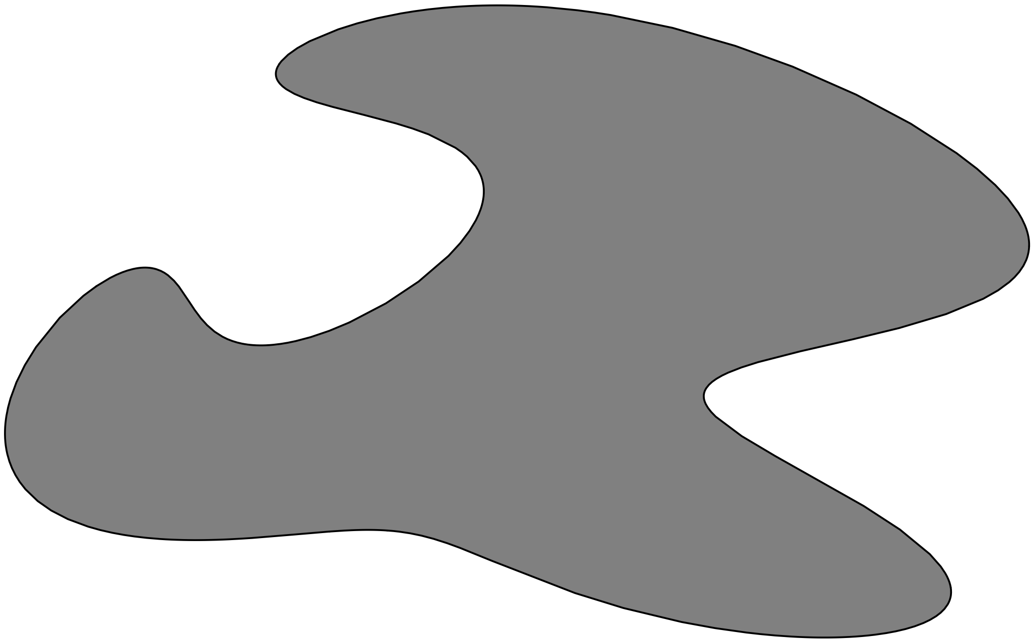
Scomposizioni

□ Altre figure



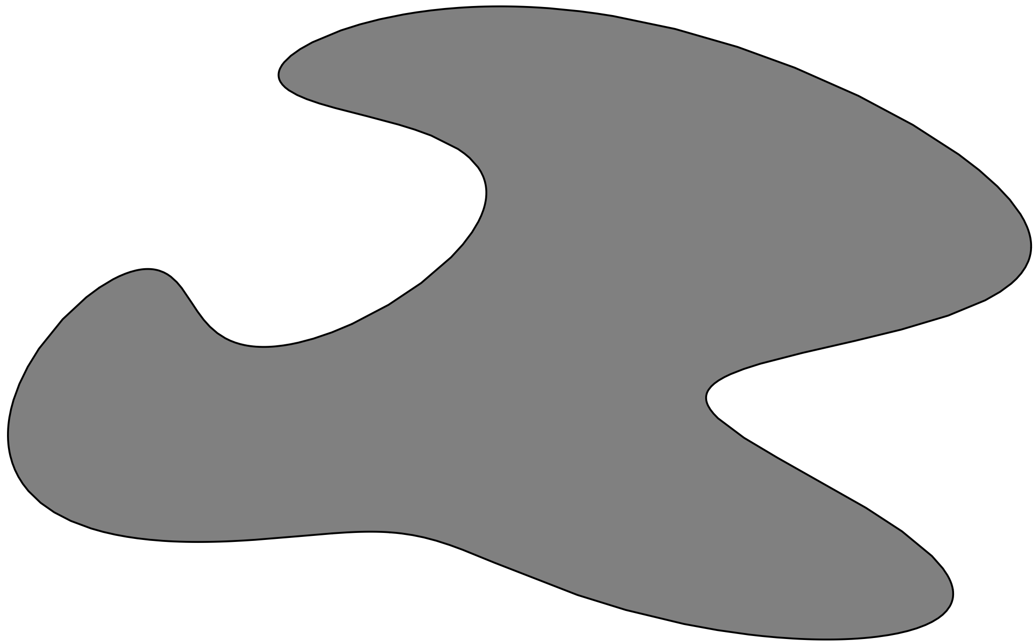
- **si possono scomporre in somme e differenze di trapezoidi,**

- Altre figure



- si possono scomporre in somme e differenze di trapezoidi,
- anche se magari meno facilmente.

- Altre figure



  - **si possono scomporre in somme e differenze di trapezoidi,**
  - **anche se magari meno facilmente.**

- Insomma: chi sa calcolare l'area dei trapezoidi è ben equipaggiato per calcolare anche le altre aree.

Cap. 2

Plurirettangoli, suddivisioni, somme di Riemann

Plurirettangoli

Plurirettangoli

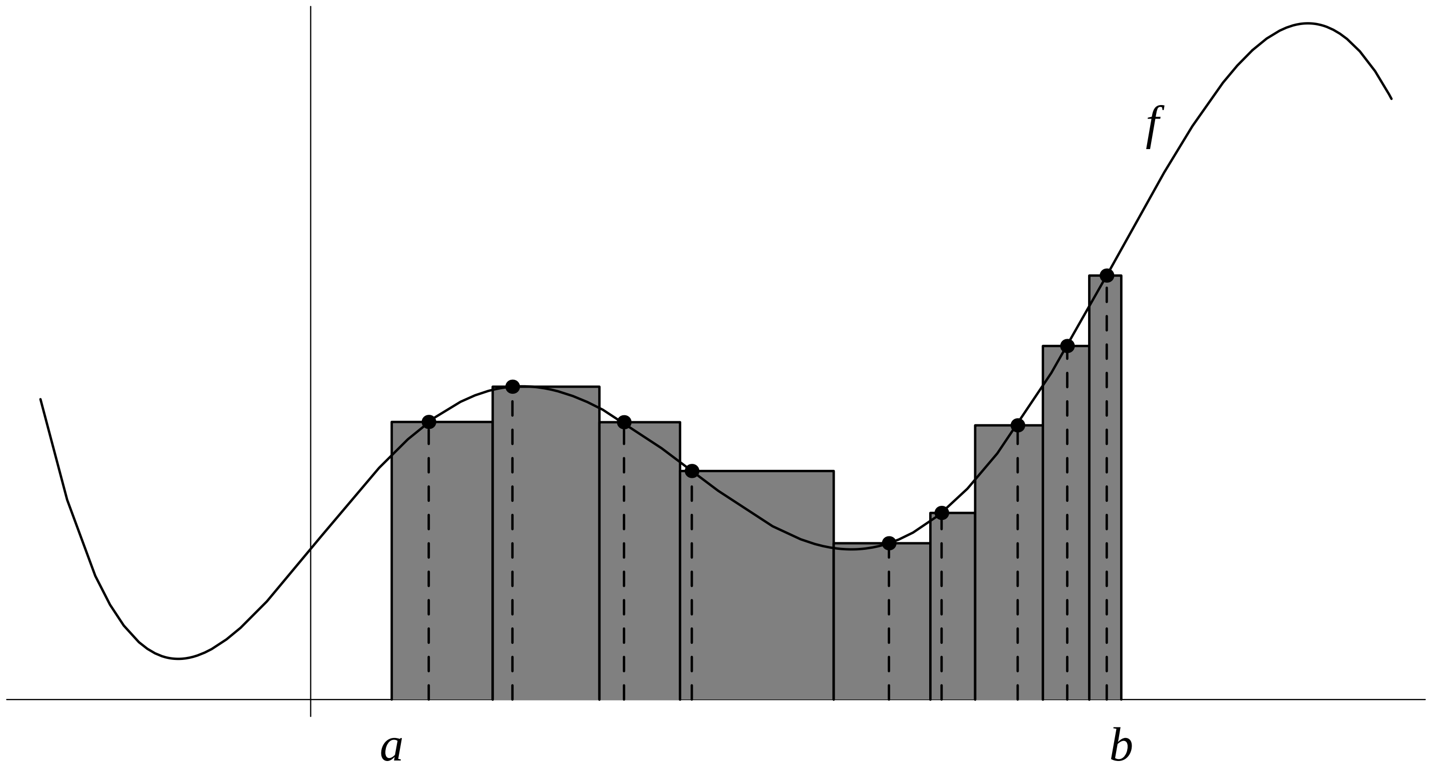
- *Approssimeremo un trapezoide*

Plurirettangoli

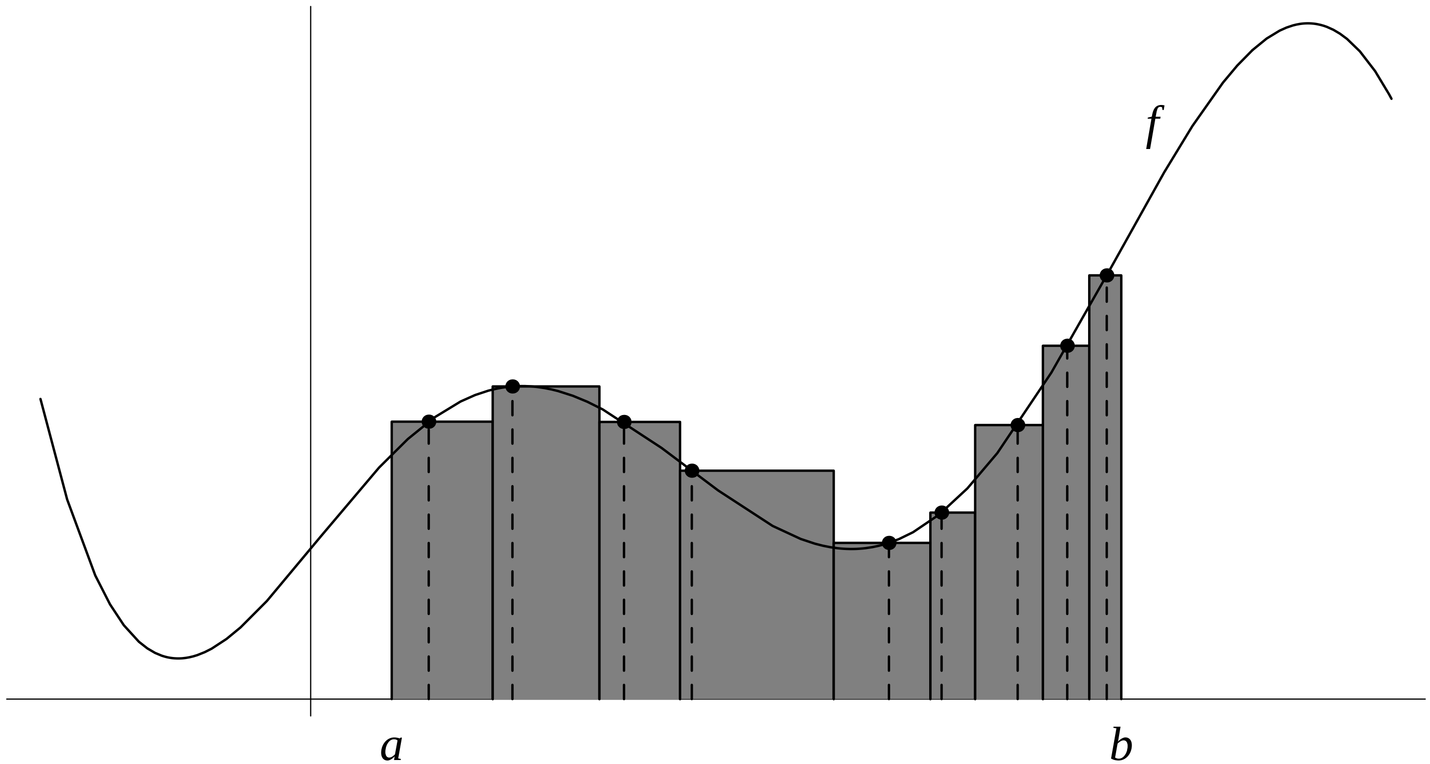
- *Approssimeremo un trapezoide*
- *con i **plurirettangoli**,*

Plurirettangoli

- ***Approssimeremo un trapezoide***
- ***con i plurirettangoli,***
  - cioè con figure di questo genere:



- ***Approssimeremo un trapezoide***
- ***con i plurirettangoli,***
  - cioè con figure di questo genere:



  - La definizione formale passa per dei preliminari.

Suddivisioni

- Diremo suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ un'intercalazione di a, b con degli altri punti in ordine strettamente crescente:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

Suddivisioni

- Diremo suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ un'intercalazione di a, b con degli altri punti in ordine strettamente crescente:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

- **All'estremo a si dà indice zero: $a = a_0$,**

Suddivisioni

□ Diremo suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ un'intercalazione di a, b con degli altri punti in ordine strettamente crescente:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

- **All'estremo a si dà indice zero: $a = a_0$,**
- **l'estremo b prende indice enne: $b = a_n$.**

Suddivisioni

□ Diremo suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ un'intercalazione di a, b con degli altri punti in ordine strettamente crescente:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

- **All'estremo a si dà indice zero: $a = a_0$,**
- **l'estremo b prende indice enne: $b = a_n$.**
- **I successivi a_i delimitano degli intervallini:**

Suddivisioni

- Diremo suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ un'intercalazione di a, b con degli altri punti in ordine strettamente crescente:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

- **All'estremo a si dà indice zero: $a = a_0$,**
- **l'estremo b prende indice enne: $b = a_n$.**
- **I successivi a_i delimitano degli intervallini:**
  - $[a_0, a_1]$ è il primo intervallino,

Suddivisioni

□ Diremo suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ un'intercalazione di a, b con degli altri punti in ordine strettamente crescente:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

- **All'estremo a si dà indice zero: $a = a_0$,**
- **l'estremo b prende indice enne: $b = a_n$.**
- **I successivi a_i delimitano degli intervallini:**
  - $[a_0, a_1]$ è il primo intervallino,
  - $[a_1, a_2]$ è il secondo intervallino,

Suddivisioni

- Diremo suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ un'intercalazione di a, b con degli altri punti in ordine strettamente crescente:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

- **All'estremo a si dà indice zero: $a = a_0$,**
- **l'estremo b prende indice enne: $b = a_n$.**
- **I successivi a_i delimitano degli intervallini:**
  - $[a_0, a_1]$ è il primo intervallino,
  - $[a_1, a_2]$ è il secondo intervallino,
  - $[a_{i-1}, a_i]$ è l'i-esimo intevallino,

Suddivisioni

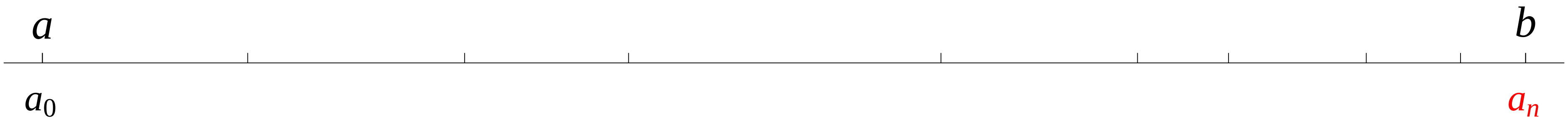
□ Diremo suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ un'intercalazione di a, b con degli altri punti in ordine strettamente crescente:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

- **All'estremo a si dà indice zero: $a = a_0$,**
- **l'estremo b prende indice enne: $b = a_n$.**
- **I successivi a_i delimitano degli intervallini:**
  - $[a_0, a_1]$ è il primo intervallino,
  - $[a_1, a_2]$ è il secondo intervallino,
  - $[a_{i-1}, a_i]$ è l'i-esimo intevallino,
  - $[a_{n-1}, a_n]$ è l'n-esimo e ultimo intevallino.

Punti marcati

Punti marcati



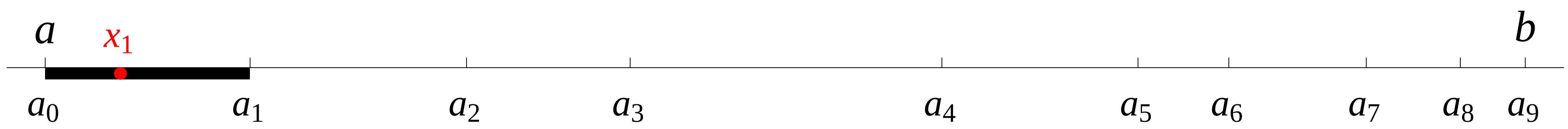
- In ognuno degli intervallini $[a_{i-1}, a_i]$

Punti marcati

- In ognuno degli intervallini $[a_{i-1}, a_i]$
- scegliamo un punto x_i

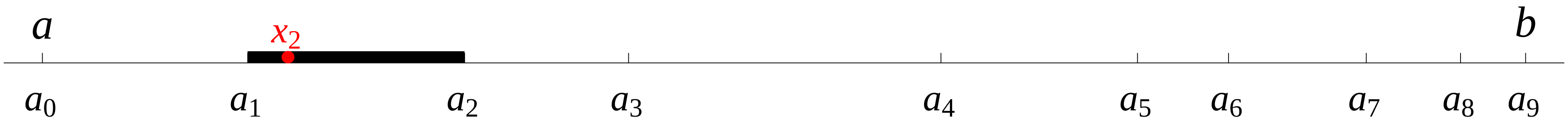
- In ognuno degli intervallini $[a_{i-1}, a_i]$
- scegliamo un punto x_i
- che chiameremo *punto marcato*,

Punti marcati



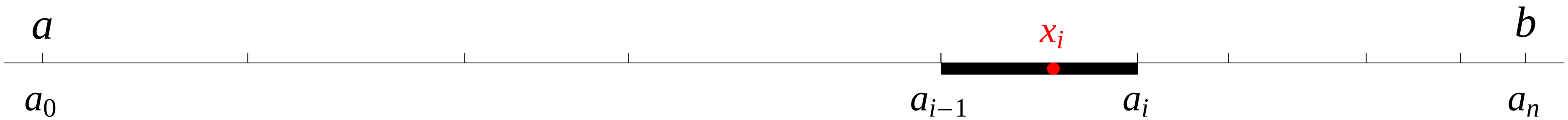
- In ognuno degli intervallini $[a_{i-1}, a_i]$
- scegliamo un punto x_i
- che chiameremo *punto marcato*,
  - $x_1 \in [a_0, a_1]$ nel primo intervallino,

Punti marcati



- In ognuno degli intervallini $[a_{i-1}, a_i]$
- scegliamo un punto x_i
- che chiameremo *punto marcato*,
  - $x_1 \in [a_0, a_1]$ nel primo intervallino,
  - $x_2 \in [a_1, a_2]$ nel secondo intervallino,

Punti marcati

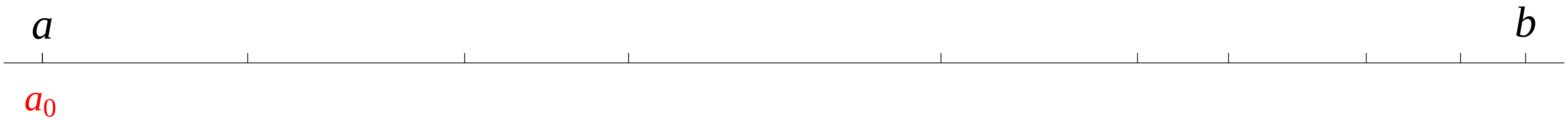


- In ognuno degli intervallini $[a_{i-1}, a_i]$
- scegliamo un punto x_i
- che chiameremo *punto marcato*,
  - $x_1 \in [a_0, a_1]$ nel primo intervallino,
  - $x_2 \in [a_1, a_2]$ nel secondo intervallino,
  - $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$ nell'i-esimo intervallino,

- In ognuno degli intervallini $[a_{i-1}, a_i]$
- scegliamo un punto x_i
- che chiameremo *punto marcato*,
  - $x_1 \in [a_0, a_1]$ nel primo intervallino,
  - $x_2 \in [a_1, a_2]$ nel secondo intervallino,
  - $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$ nell'i-esimo intervallino,
  - $x_n \in [a_{n-1}, a_n]$ nell'n-esimo e ultimo intervallino.

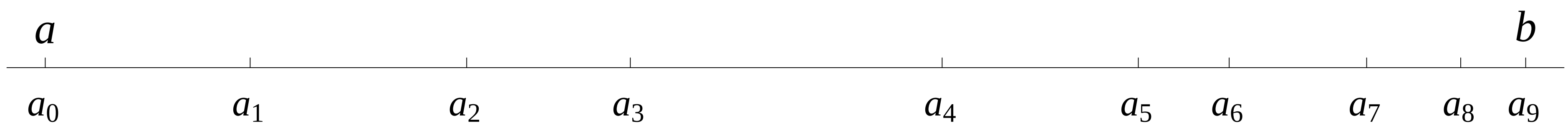
Suddivisioni marcate

Suddivisioni marcate



- Mettendo insieme

Suddivisioni marcate



- Mettendo insieme
  - **gli estremi degli intervallini**

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

- Mettendo insieme
  - **gli estremi degli intervallini**

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

  - **e i punti marcati** $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$

- Mettendo insieme
  - **gli estremi degli intervallini**

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

  - **e i punti marcati** $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$

si ha una struttura chiamata suddivisione marcata

Suddivisioni marcate

- Mettendo insieme
  - **gli estremi degli intervallini**

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

  - **e i punti marcati** $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$

si ha una struttura chiamata suddivisione marcata

- o anche *partizione* marcata;

- Mettendo insieme
  - **gli estremi degli intervallini**

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

  - **e i punti marcati** $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$

si ha una struttura chiamata suddivisione marcata

- o anche *partizione* marcata;
- l'aggettivo "marcata" si può di solito sottintendere.

- Mettendo insieme
  - **gli estremi degli intervallini**

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

  - **e i punti marcati** $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$

si ha una struttura chiamata suddivisione marcata

  - o anche *partizione* marcata;
  - l'aggettivo "marcata" si può di solito sottintendere.

- Una suddivisione marcata riguarda solo l'intervallo $[a, b]$;

- Mettendo insieme
  - **gli estremi degli intervallini**

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

  - **e i punti marcati** $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$

  si ha una struttura chiamata suddivisione marcata
  - o anche *partizione* marcata;
  - l'aggettivo "marcata" si può di solito sottintendere.
- Una suddivisione marcata riguarda solo l'intervallo $[a, b]$;
- non dipende dalla funzione f.

- Come simbolo per una suddivisione marcata si usa Π (pi greca maiuscola, iniziale di partizione).

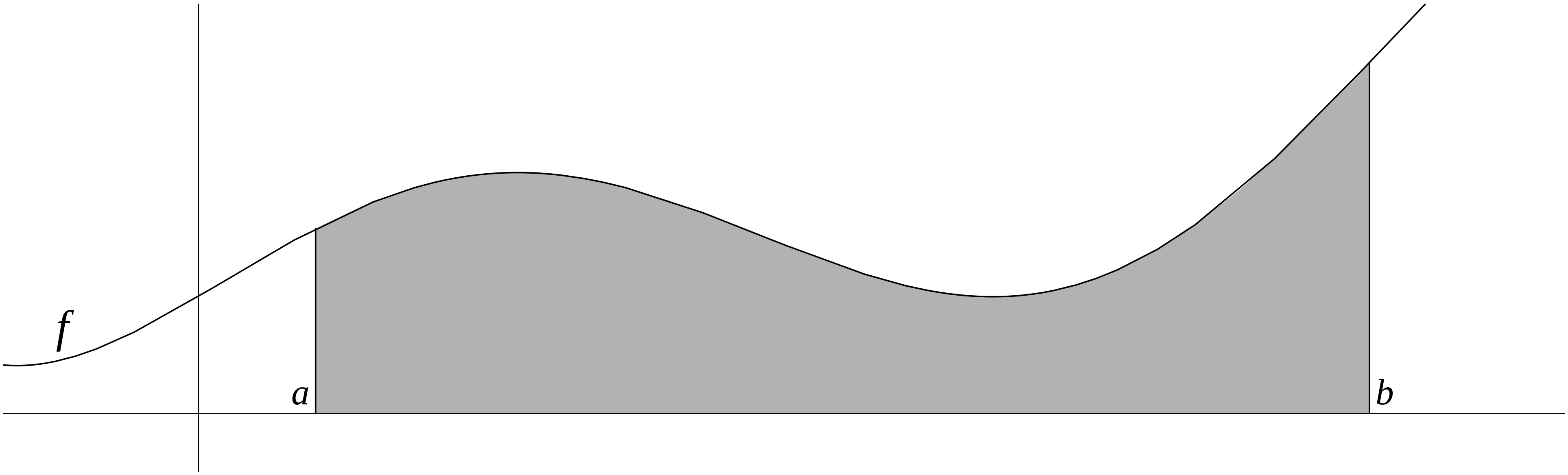
Suddivisioni marcate

- Come simbolo per una suddivisione marcata si usa Π (pi greca maiuscola, iniziale di partizione).
- La specifica numerica di una Π in forma di tabella:

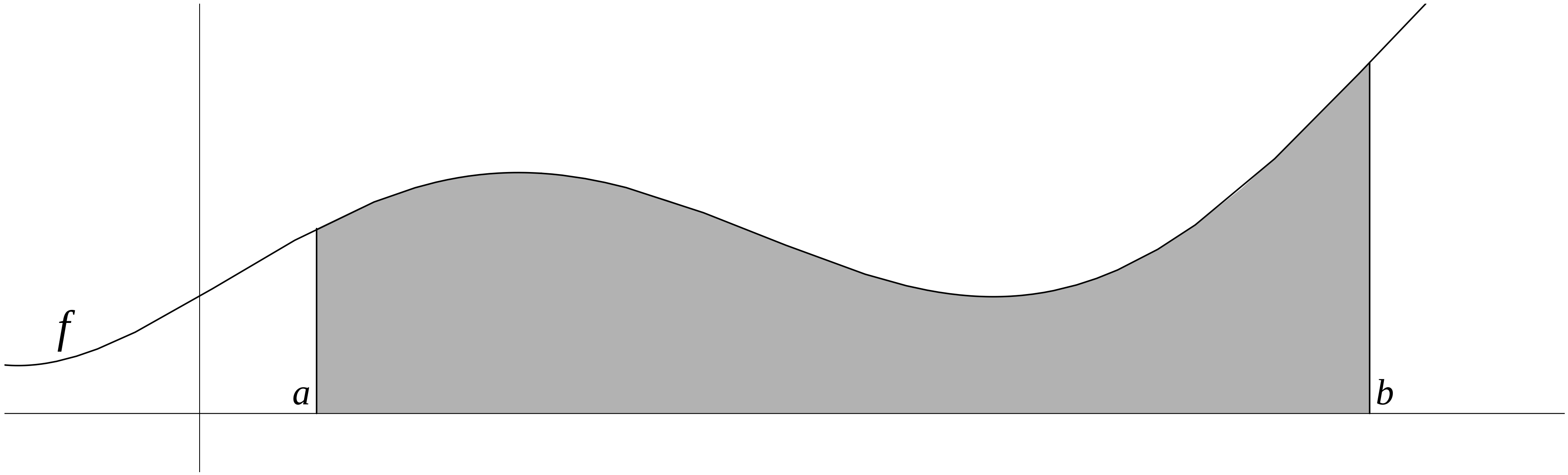
Π			**verifica**	
i	a_i	x_i	$a_{i-1} < a_i$	$a_{i-1} \leq x_i \leq a_i$
0	0,30000			
1	0,67372	0,43692	**vero**	**vero**
2	1,06861	0,74672	**vero**	**vero**
3	1,36708	1,15961	**vero**	**vero**
4	1,93574	1,41053	**vero**	**vero**
5	2,29350	2,14013	**vero**	**vero**
6	2,45922	2,33497	**vero**	**vero**
7	2,70993	2,61651	**vero**	**vero**
8	2,88152	2,79996	**vero**	**vero**
9	3,00000	2,94618	**vero**	**vero**
$n = 9$				Π **è OK**

Plurirettangoli

Plurirettangoli

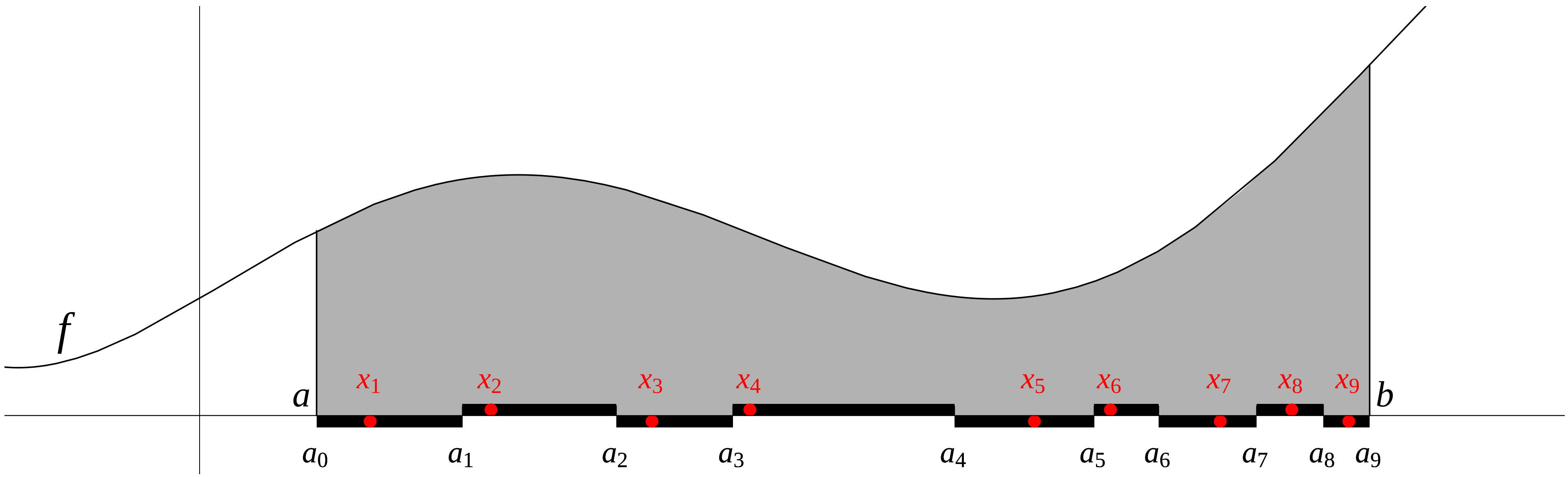


- Mettendo insieme



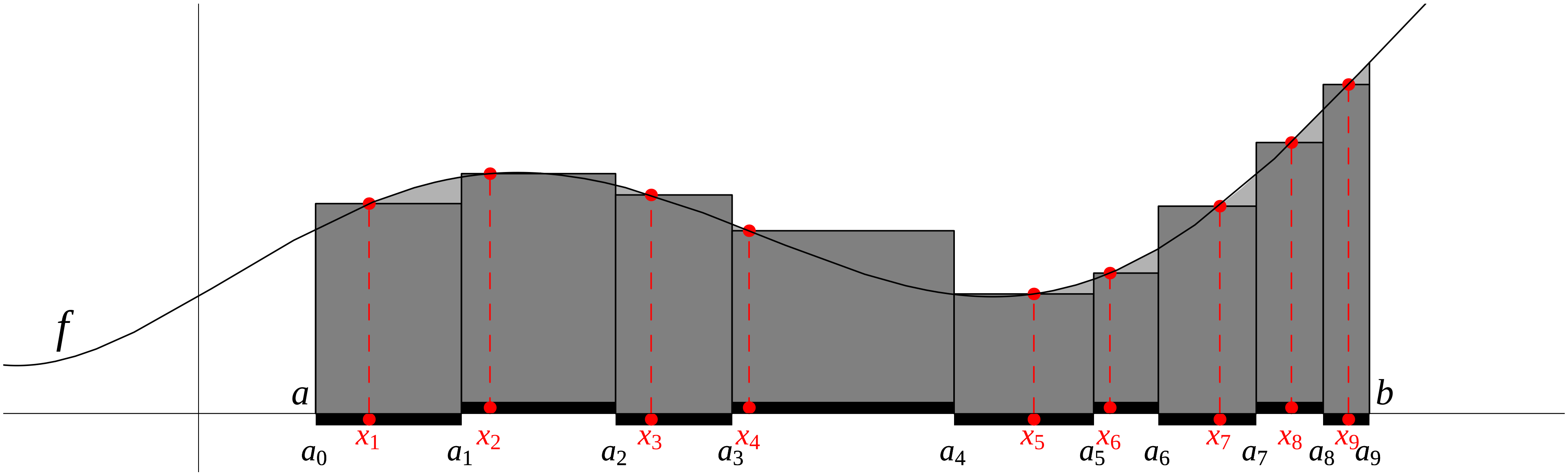
- Mettendo insieme
  - **la funzione** f **su** $[a, b]$

Plurirettangoli



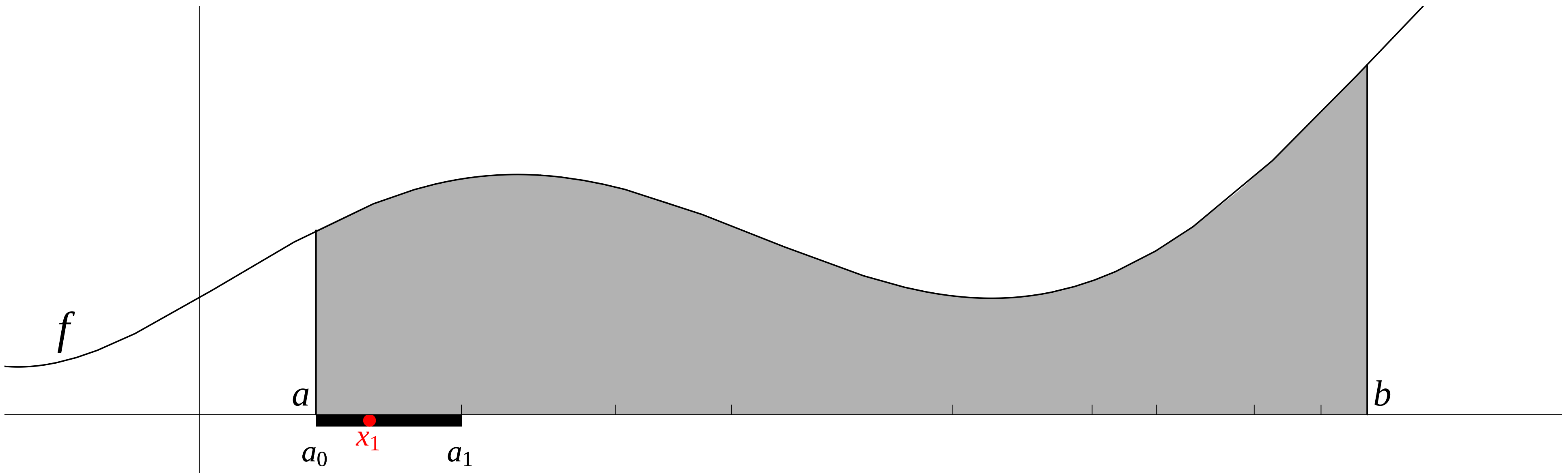
- Mettendo insieme
  - **la funzione** f **su** $[a, b]$
  - **con la partizione marcata** Π **di** $[a, b]$

Plurirettangoli



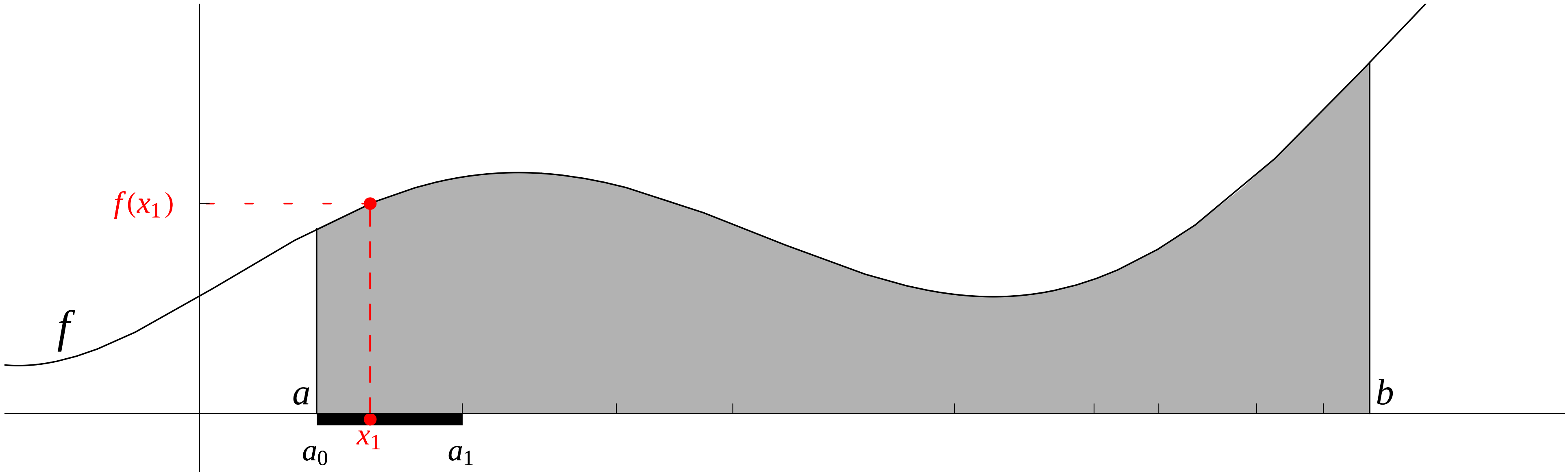
- Mettendo insieme
  - **la funzione** f **su** $[a, b]$
  - **con la partizione marcata** Π **di** $[a, b]$

costruiamo il plurirettangolo che abbiamo annunciato nella maniera che andiamo a spiegare.



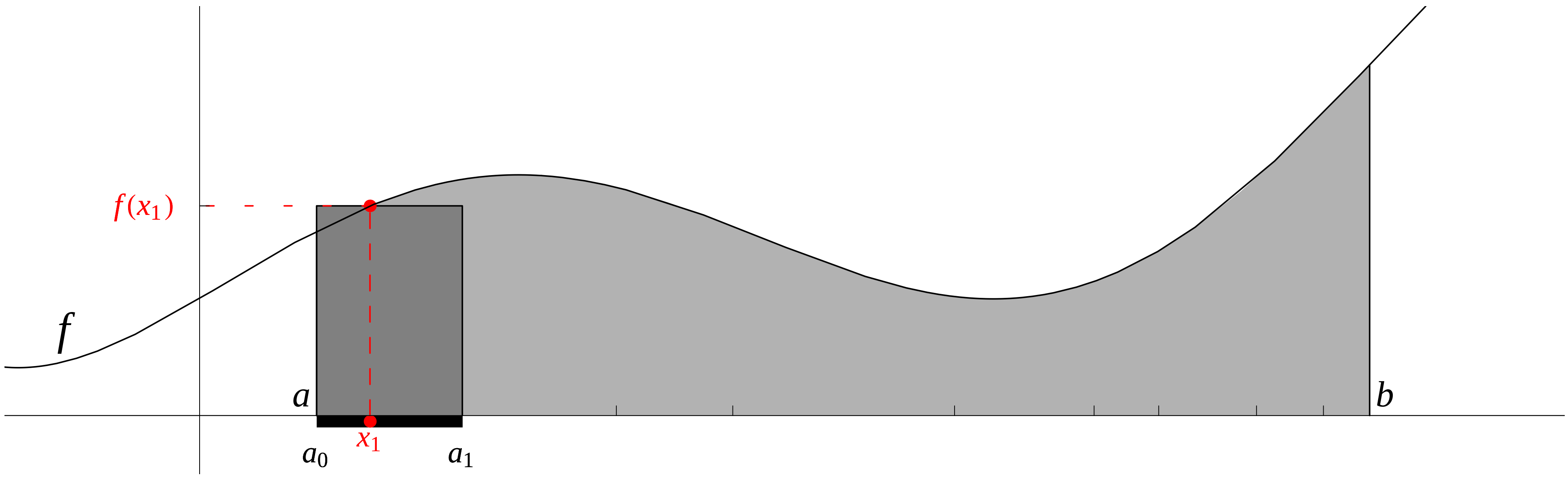
- Consideriamo il primo intervallino $[a_0, a_1]$.

Plurirettangoli



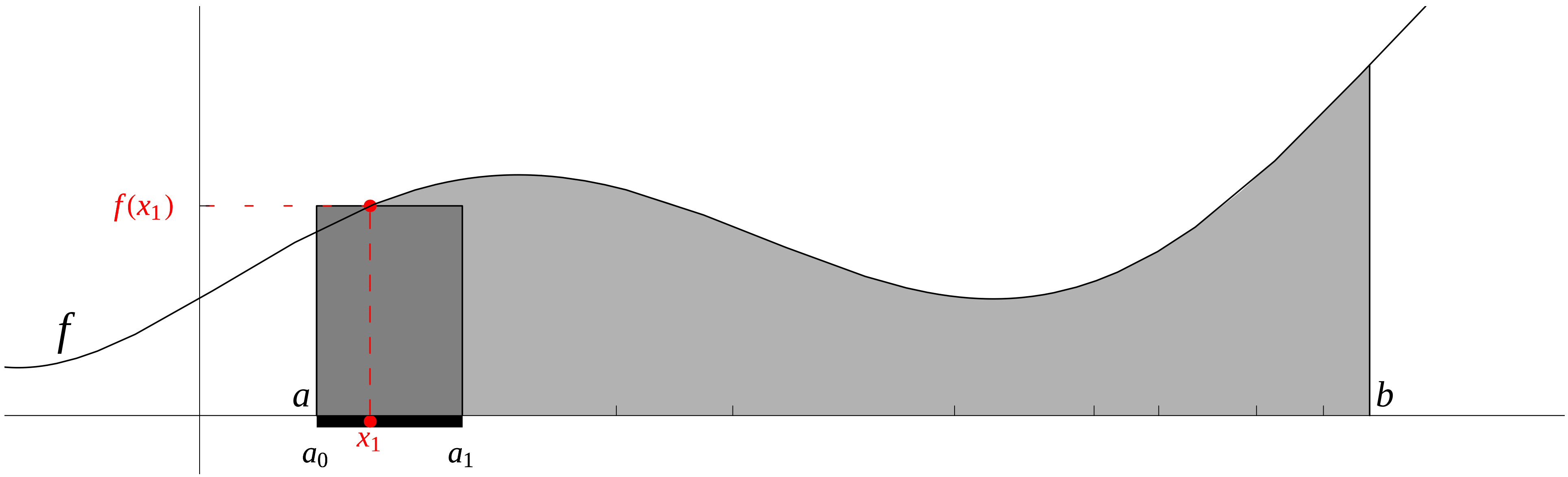
- Consideriamo il primo intervallino $[a_0, a_1]$.
  - **calcoliamo** f **nel punto marcato** x_1

Plurirettangoli

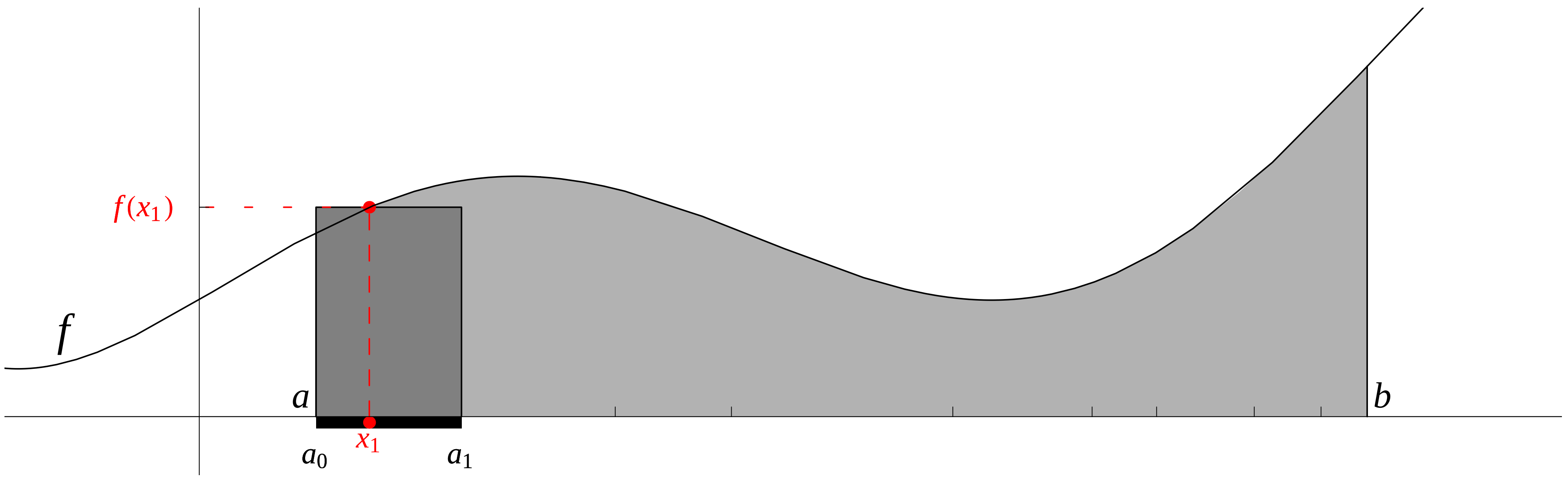


- Consideriamo il primo intervallino $[a_0, a_1]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_1**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_0, a_1]$ e altezza $f(x_1)$.**

Plurirettangoli

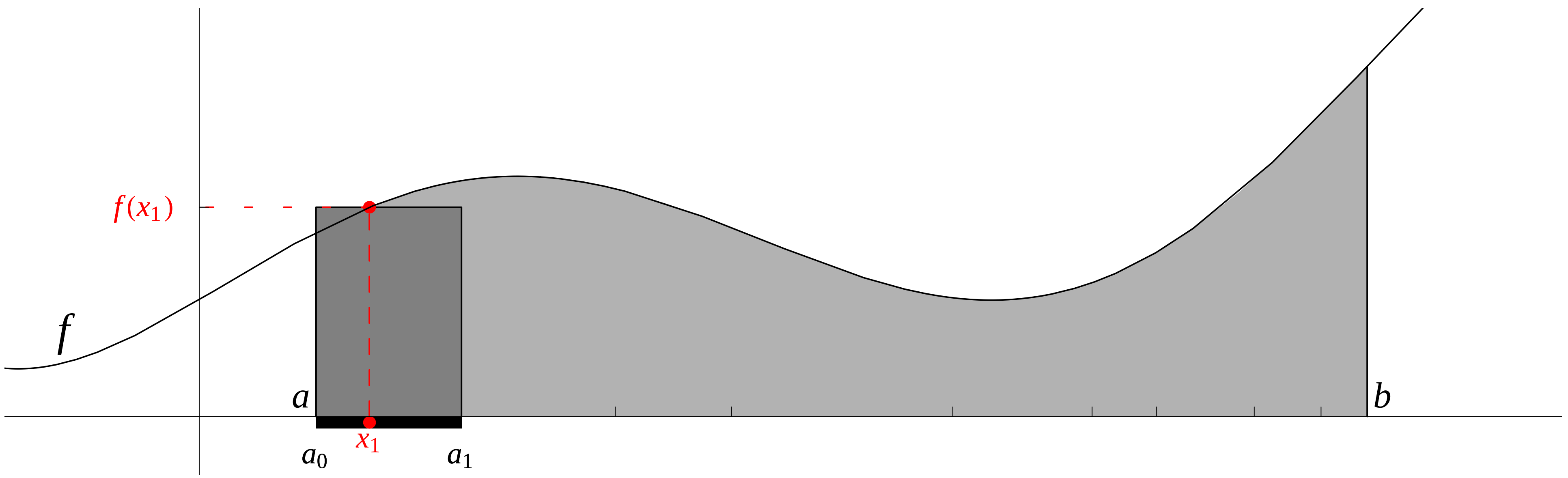


- Consideriamo il primo intervallino $[a_0, a_1]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_1**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_0, a_1]$ e altezza $f(x_1)$.**
  - **L'area del rettangolino è $f(x_1)(a_1 - a_0)$**

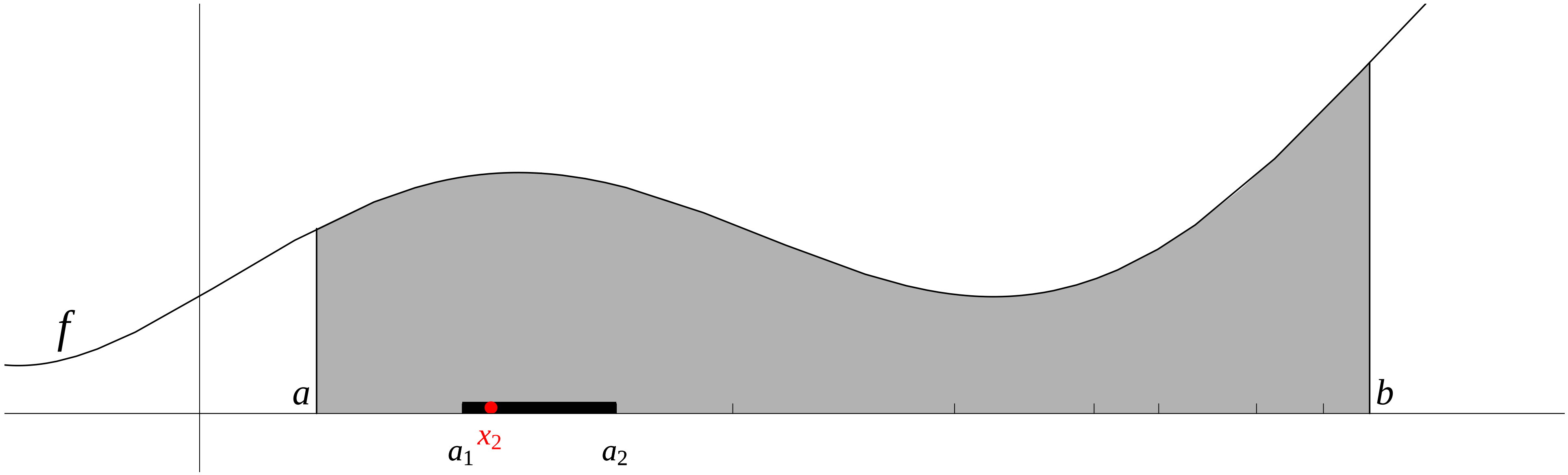


- Consideriamo il primo intervallino $[a_0, a_1]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_1**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_0, a_1]$ e altezza $f(x_1)$.**
  - **L'area del rettangolino è $f(x_1)(a_1 - a_0)$**
    - $a_1 - a_0$ è la *lunghezza* della base,

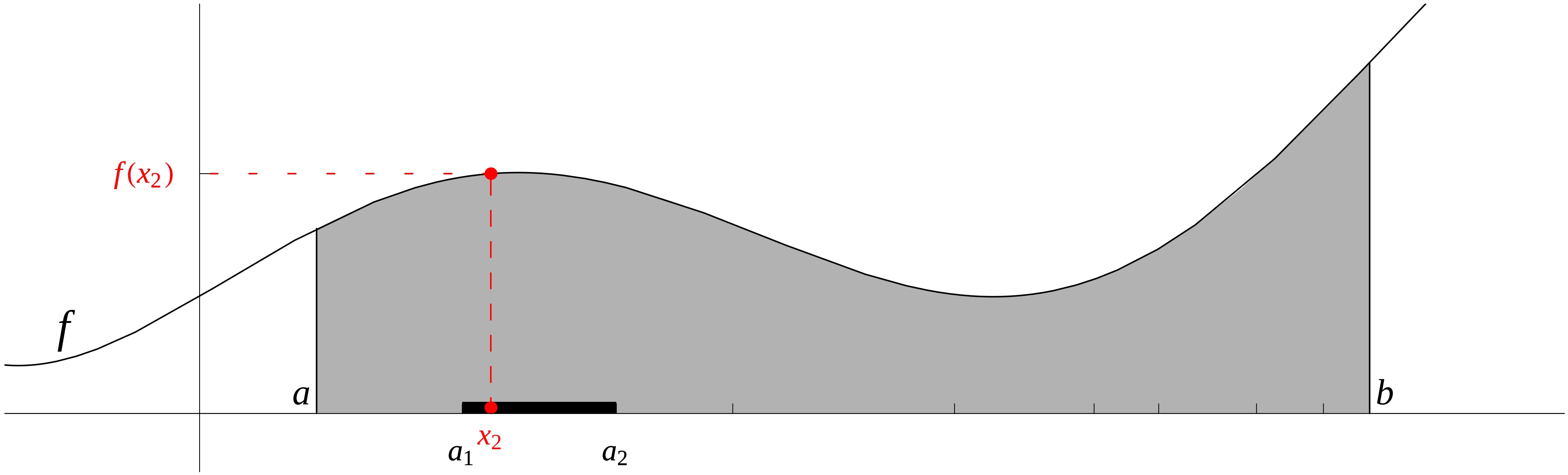
Plurirettangoli



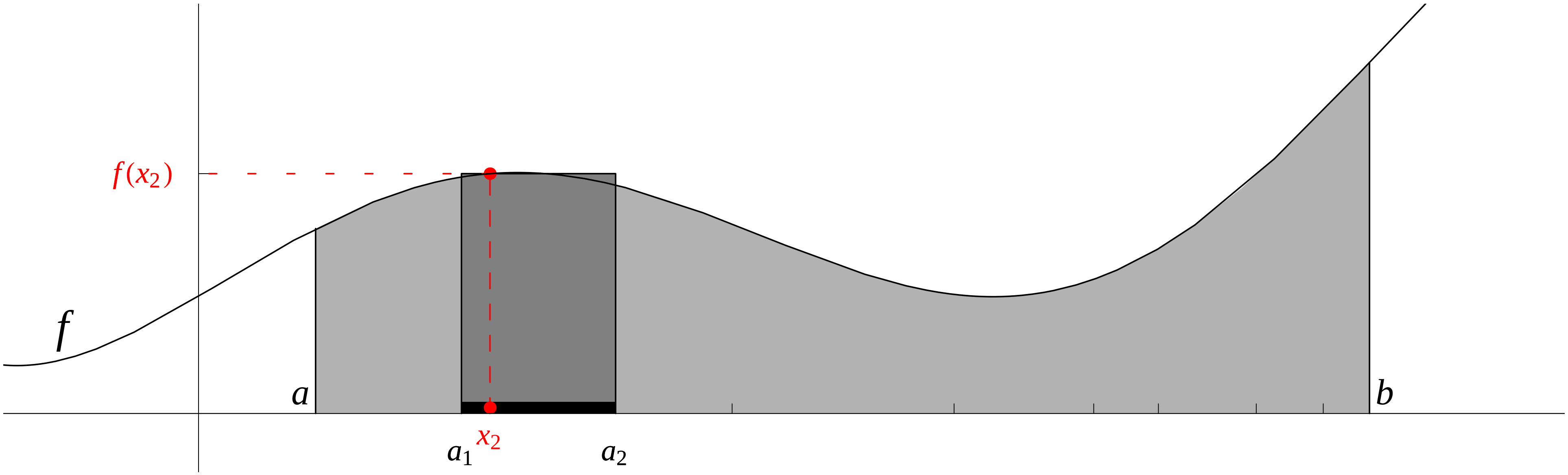
- Consideriamo il primo intervallino $[a_0, a_1]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_1**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_0, a_1]$ e altezza $f(x_1)$.**
  - **L'area del rettangolino è $f(x_1)(a_1 - a_0)$**
    - $a_1 - a_0$ è la *lunghezza* della base,
    - $f(x_1)$ è l'altezza;



- Consideriamo il secondo intervallino $[a_1, a_2]$.

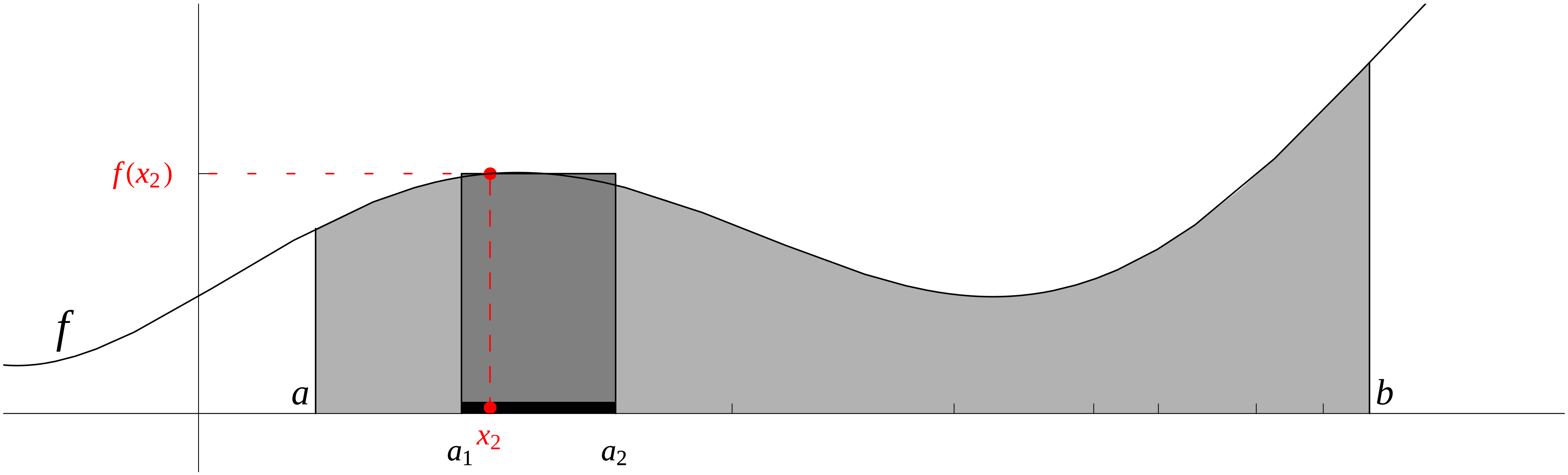


- Consideriamo il secondo intervallino $[a_1, a_2]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_2**



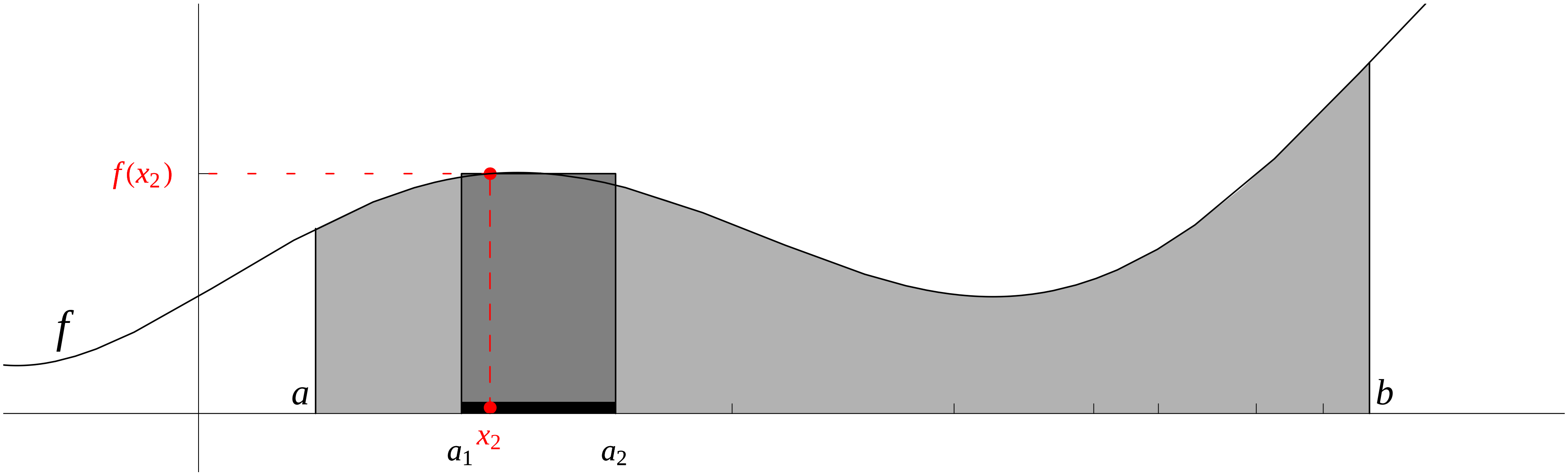
- Consideriamo il secondo intervallino $[a_1, a_2]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_2**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_1, a_2]$ e altezza $f(x_2)$.**

Plurirettangoli



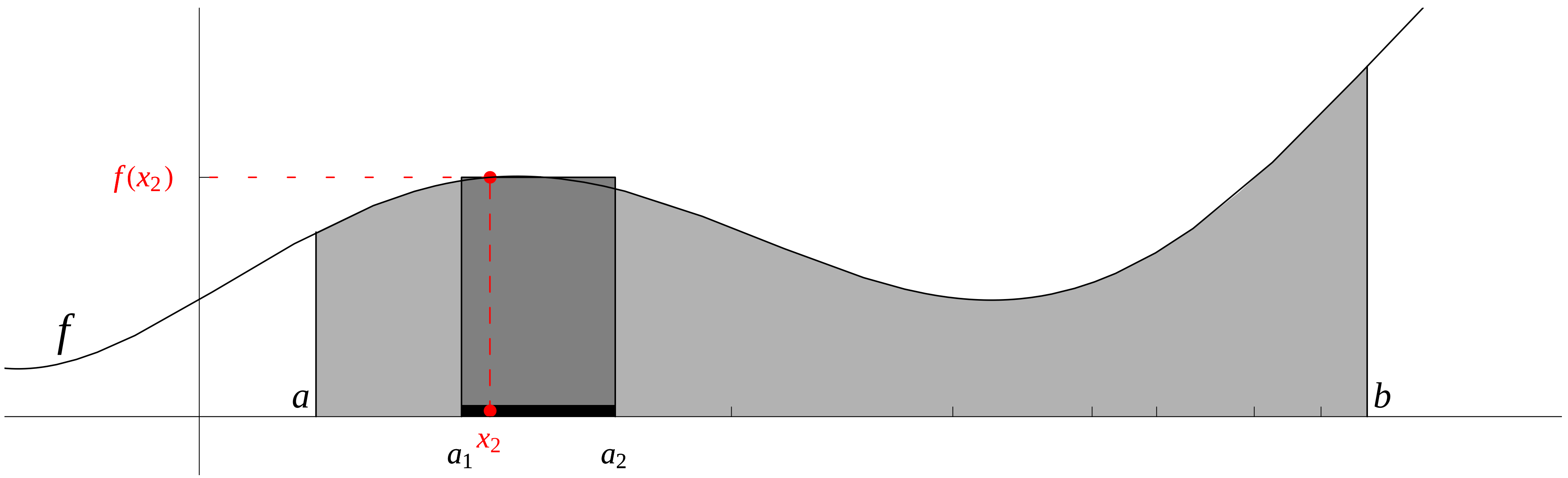
- Consideriamo il secondo intervallino $[a_1, a_2]$.
  - **calcoliamo** f **nel punto marcato** x_2
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo** $[a_1, a_2]$ **e altezza** $f(x_2)$.
  - **L'area del rettangolino è** $f(x_2)(a_2 - a_1)$

Plurirettangoli



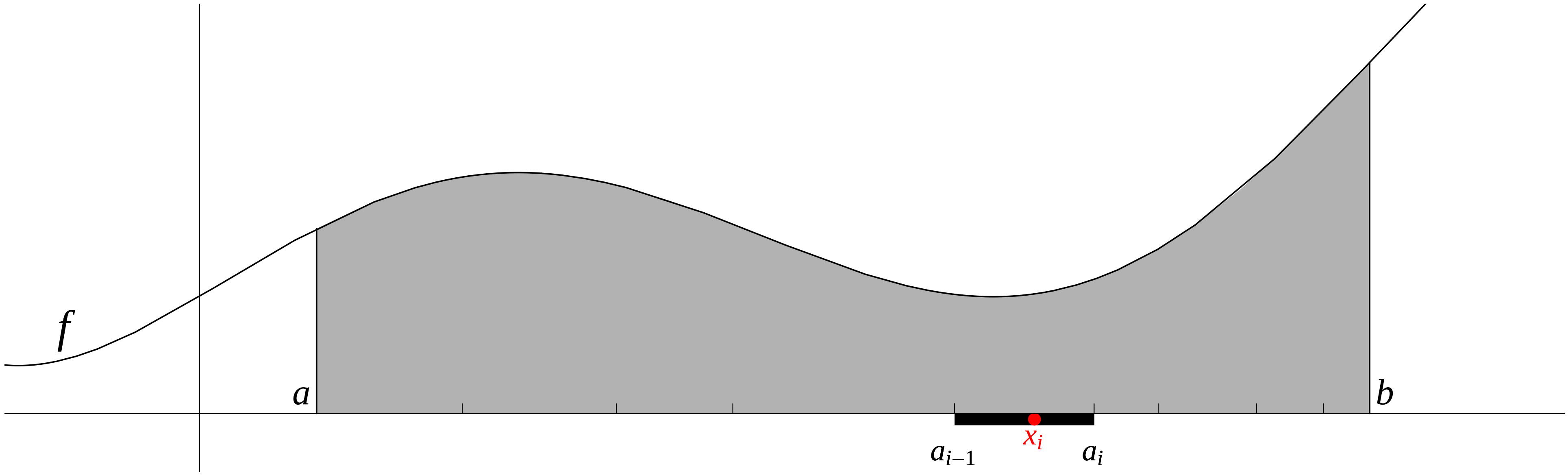
- Consideriamo il secondo intervallino $[a_1, a_2]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_2**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_1, a_2]$ e altezza $f(x_2)$.**
  - **L'area del rettangolino è $f(x_2)(a_2 - a_1)$**
    - $a_2 - a_1$ è la *lunghezza* della base,

Plurirettangoli



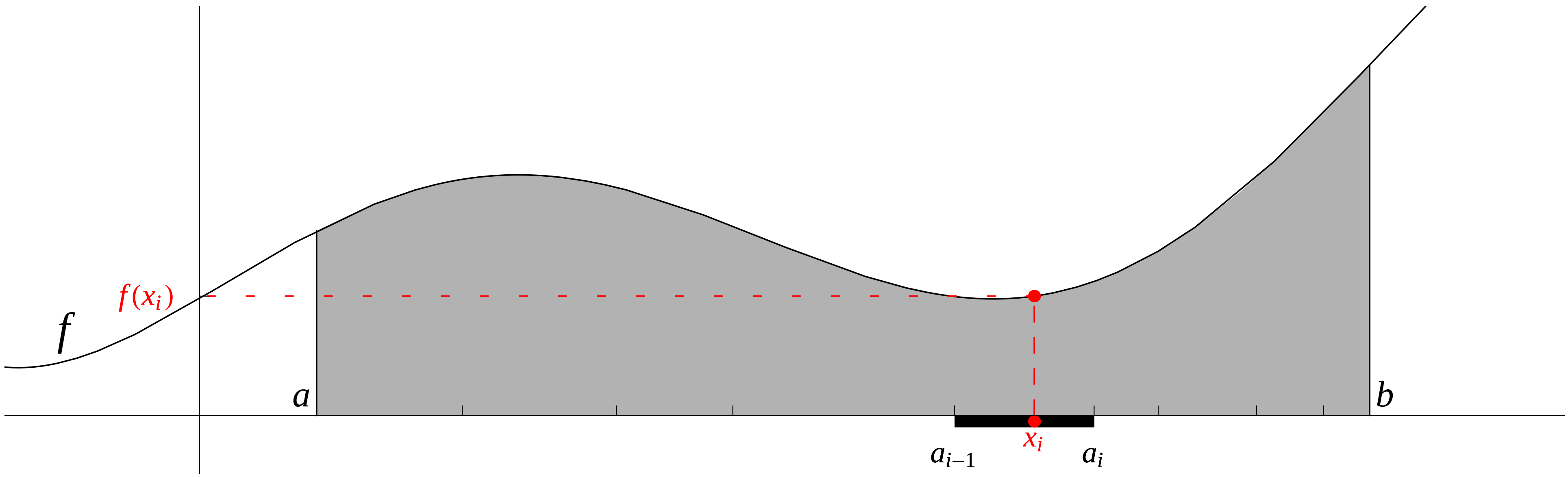
- Consideriamo il secondo intervallino $[a_1, a_2]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_2**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_1, a_2]$ e altezza $f(x_2)$.**
  - **L'area del rettangolino è $f(x_2)(a_2 - a_1)$**
    - $a_2 - a_1$ è la *lunghezza* della base,
    - $f(x_2)$ è l'altezza;

Plurirettangoli



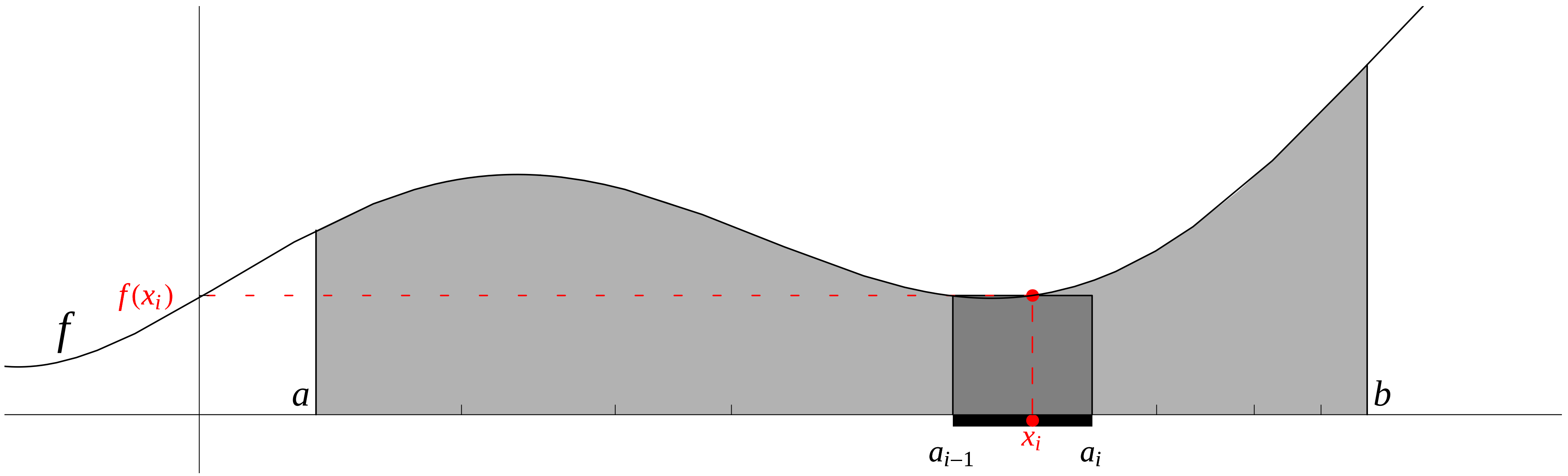
- Consideriamo l'i-esimo intervallino $[a_{i-1}, a_i]$.

Plurirettangoli

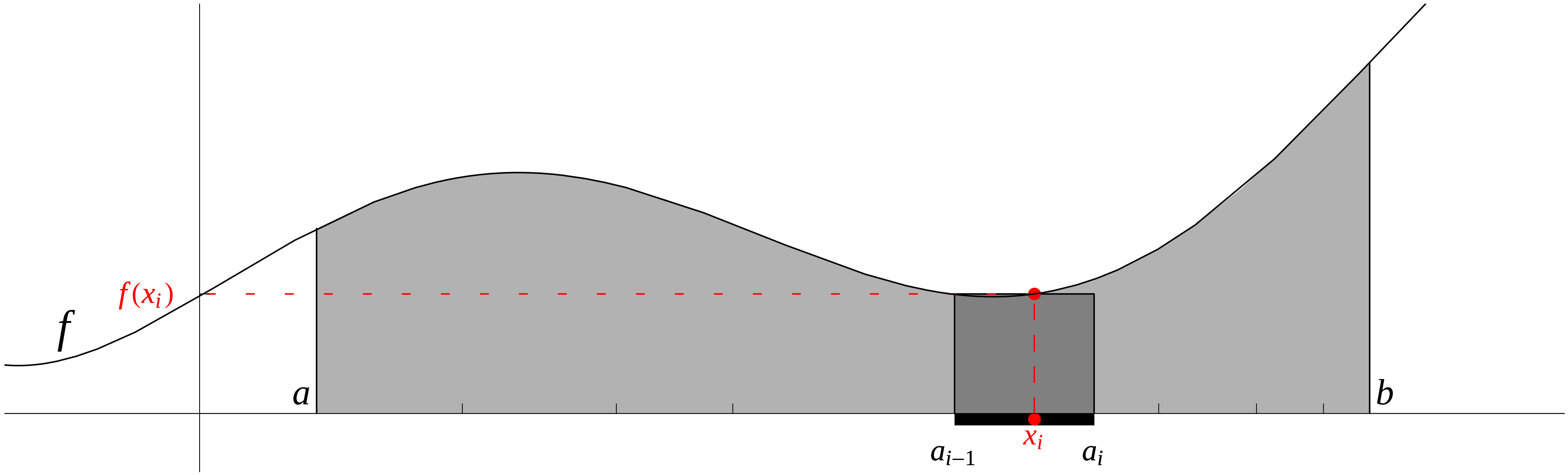


- Consideriamo l'i-esimo intervallino $[a_{i-1}, a_i]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_i**

Plurirettangoli

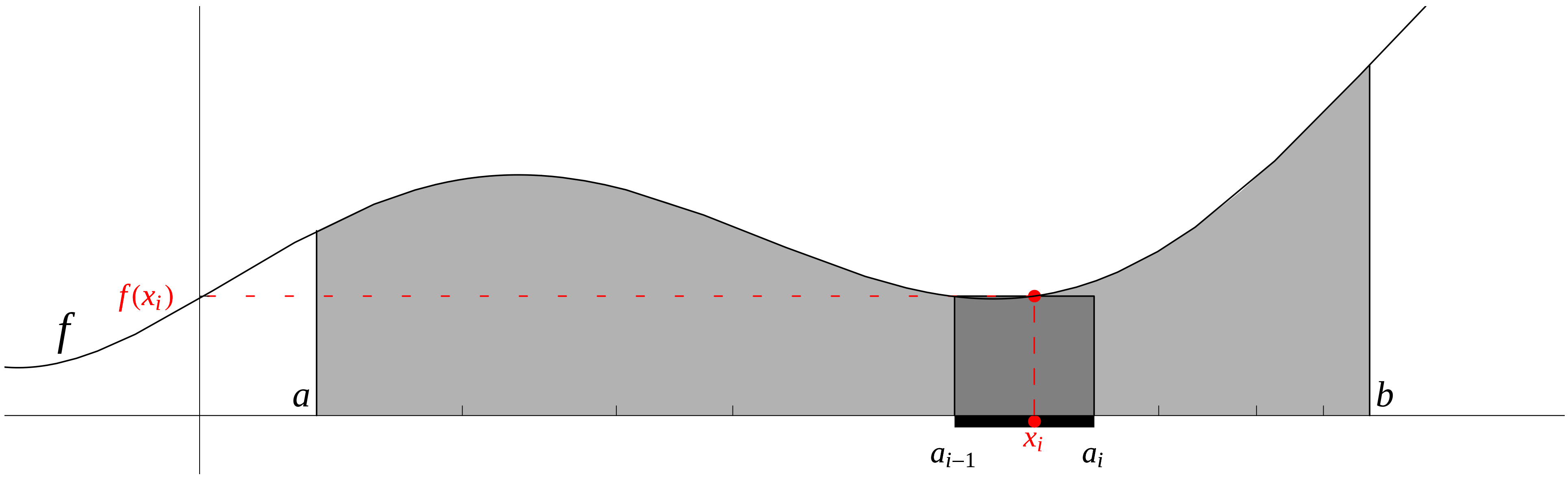


- Consideriamo l'i-esimo intervallino $[a_{i-1}, a_i]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_i**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_{i-1}, a_i]$ e altezza $f(x_i)$.**

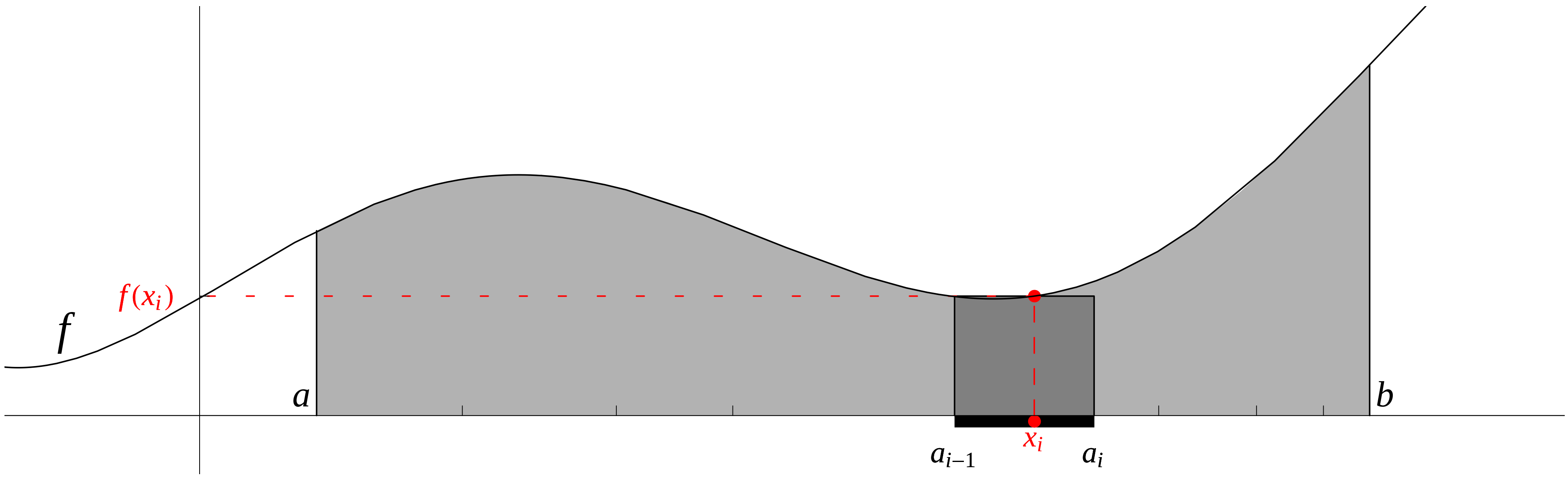


- Consideriamo l'i-esimo intervallino $[a_{i-1}, a_i]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_i**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_{i-1}, a_i]$ e altezza $f(x_i)$.**
  - **L'area del rettangolino è $f(x_i)(a_i - a_{i-1})$**

Plurirettangoli

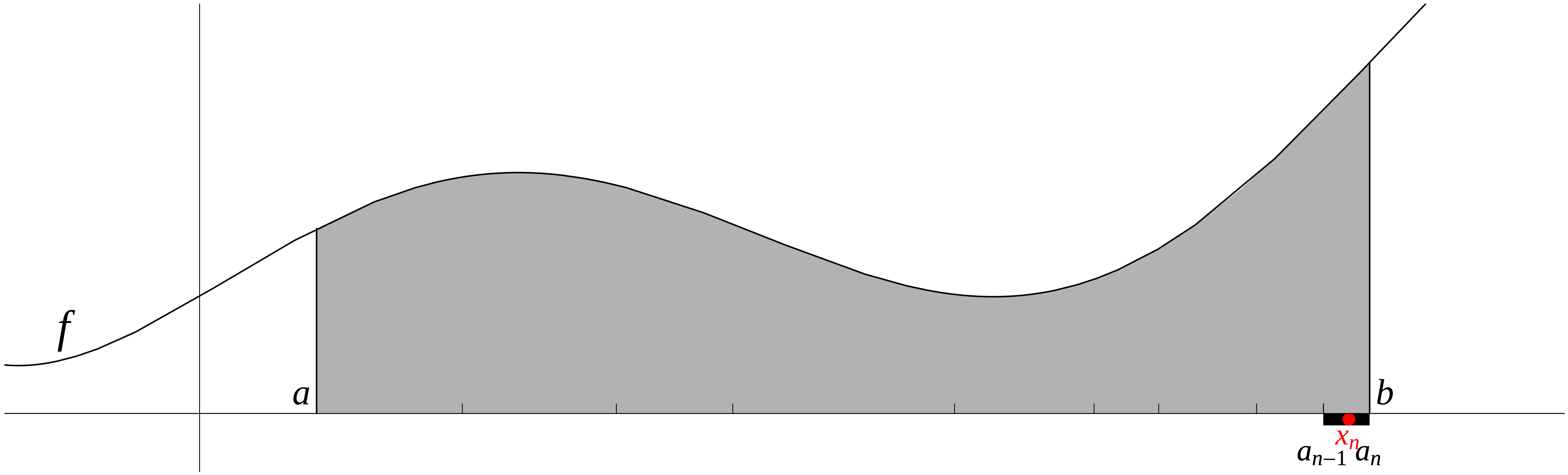


- Consideriamo l'i-esimo intervallino $[a_{i-1}, a_i]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_i**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_{i-1}, a_i]$ e altezza $f(x_i)$.**
  - **L'area del rettangolino è $f(x_i)(a_i - a_{i-1})$**
    - $a_i - a_{i-1}$ è la *lunghezza* della base,



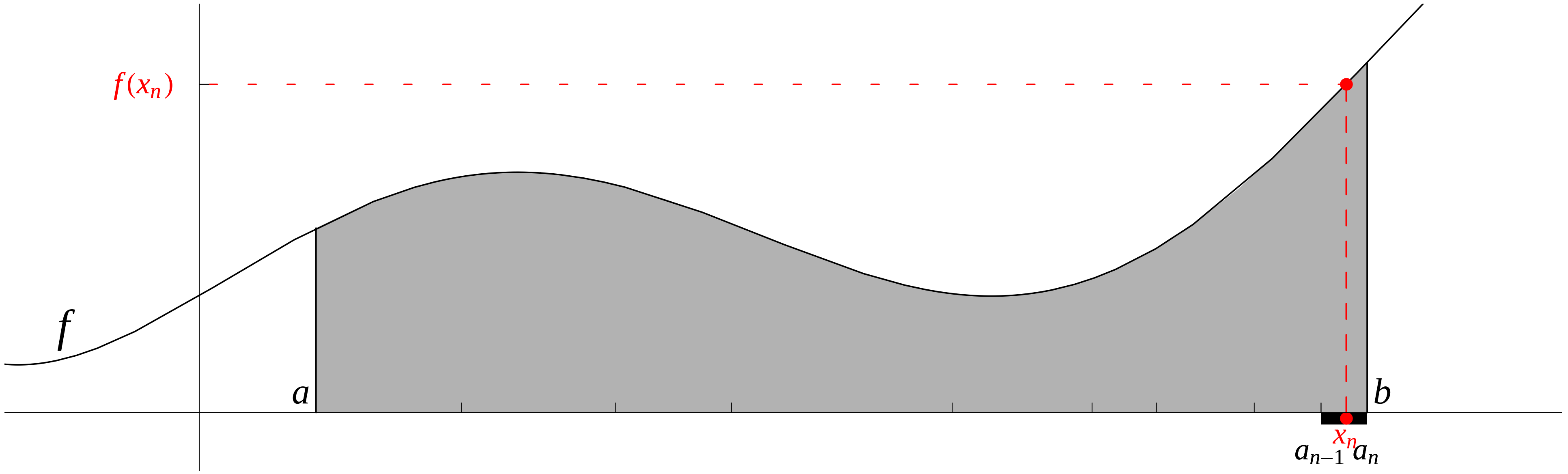
- Consideriamo l'i-esimo intervallino $[a_{i-1}, a_i]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_i**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_{i-1}, a_i]$ e altezza $f(x_i)$.**
  - **L'area del rettangolino è $f(x_i)(a_i - a_{i-1})$**
    - $a_i - a_{i-1}$ è la *lunghezza* della base,
    - $f(x_i)$ è l'altezza;

Plurirettangoli

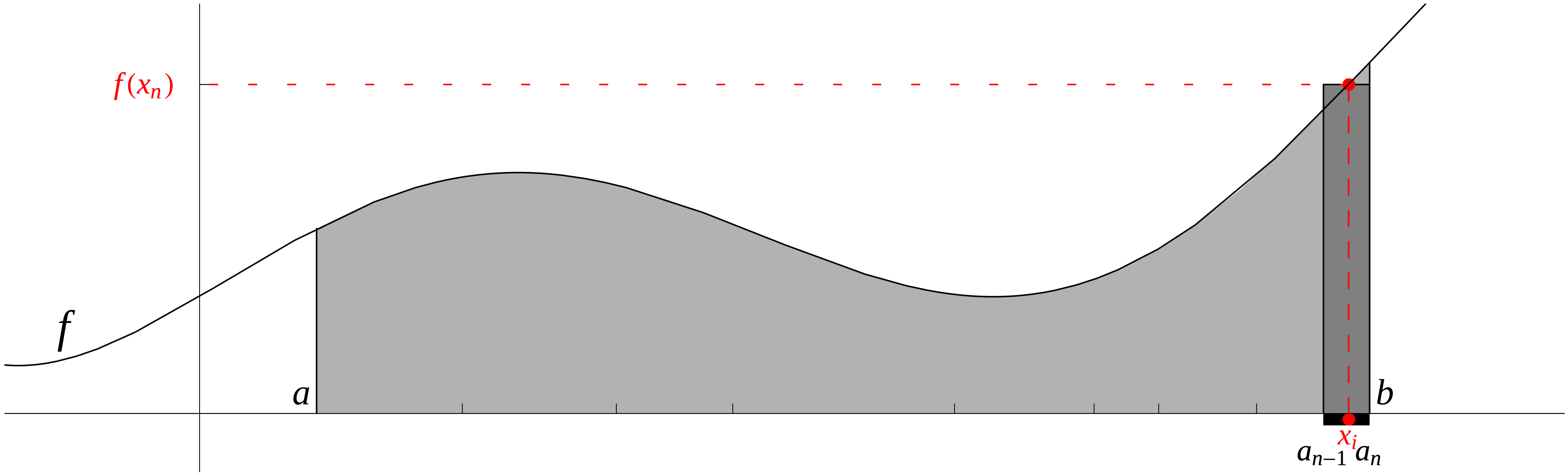


- Consideriamo l'n-esimo e ultimo intervallino $[a_{n-1}, a_n]$.

Plurirettangoli

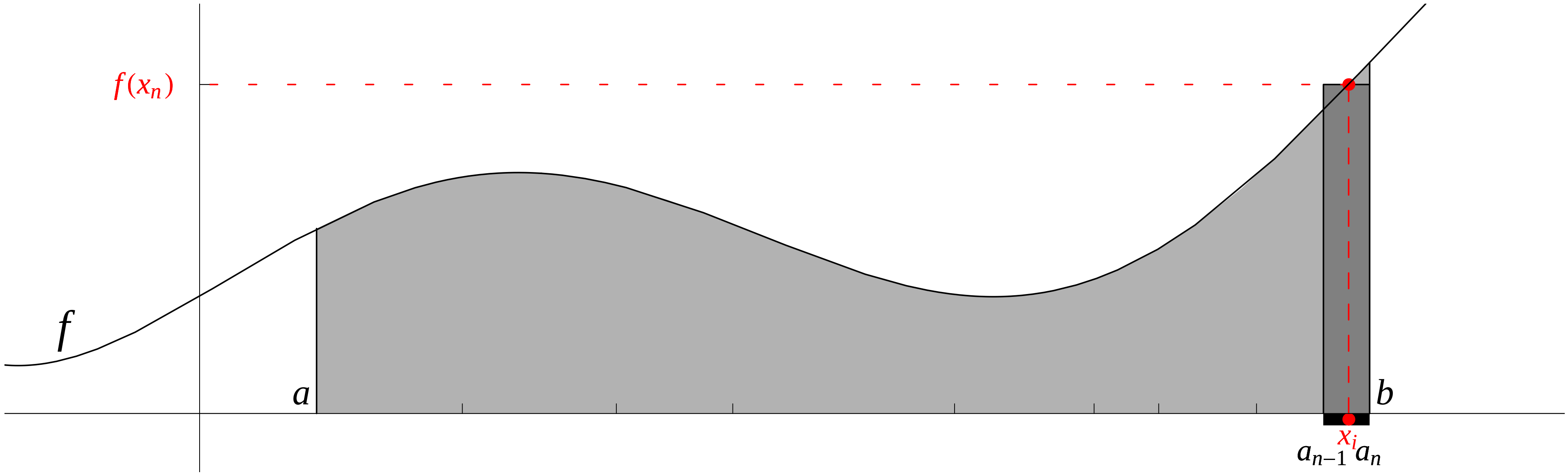


- Consideriamo l'n-esimo e ultimo intervallino $[a_{n-1}, a_n]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_n**

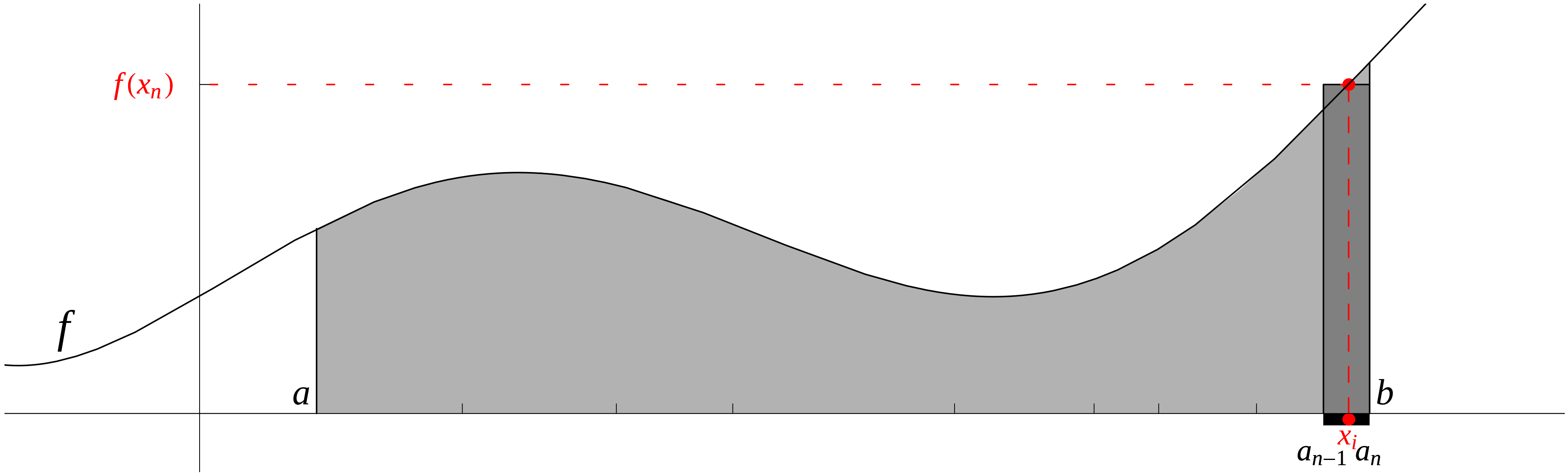


- Consideriamo l'n-esimo e ultimo intervallino $[a_{n-1}, a_n]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_n**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_{n-1}, a_n]$ e altezza $f(x_n)$.**

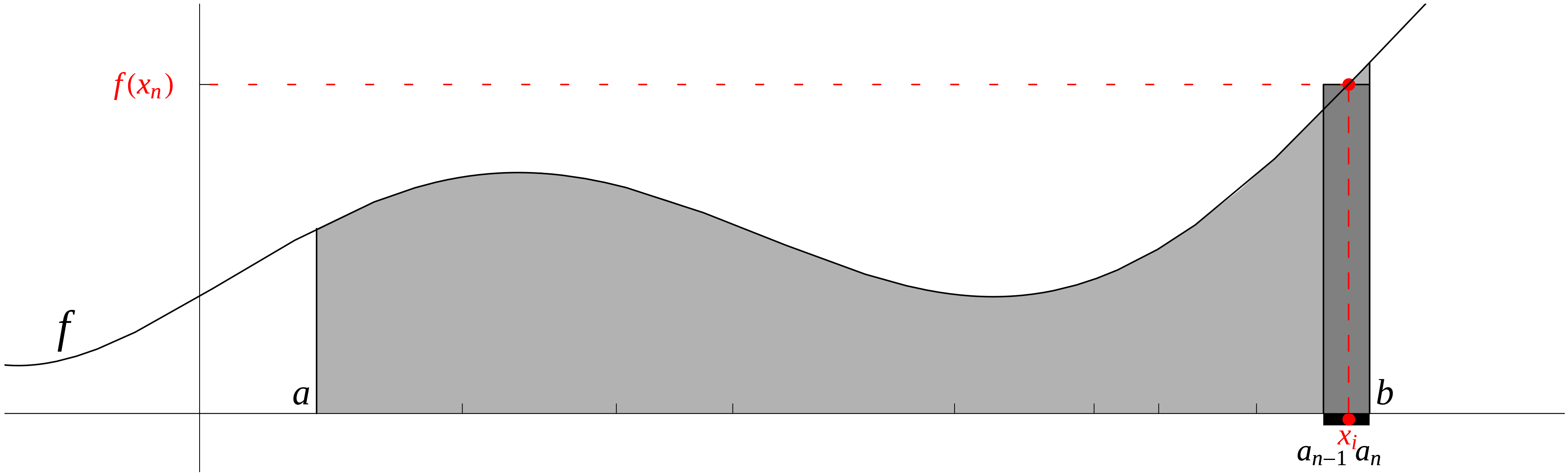
Plurirettangoli



- Consideriamo l'n-esimo e ultimo intervallino $[a_{n-1}, a_n]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_n**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_{n-1}, a_n]$ e altezza $f(x_n)$.**
  - **L'area del rettangolino è $f(x_n)(a_n - a_{n-1})$**

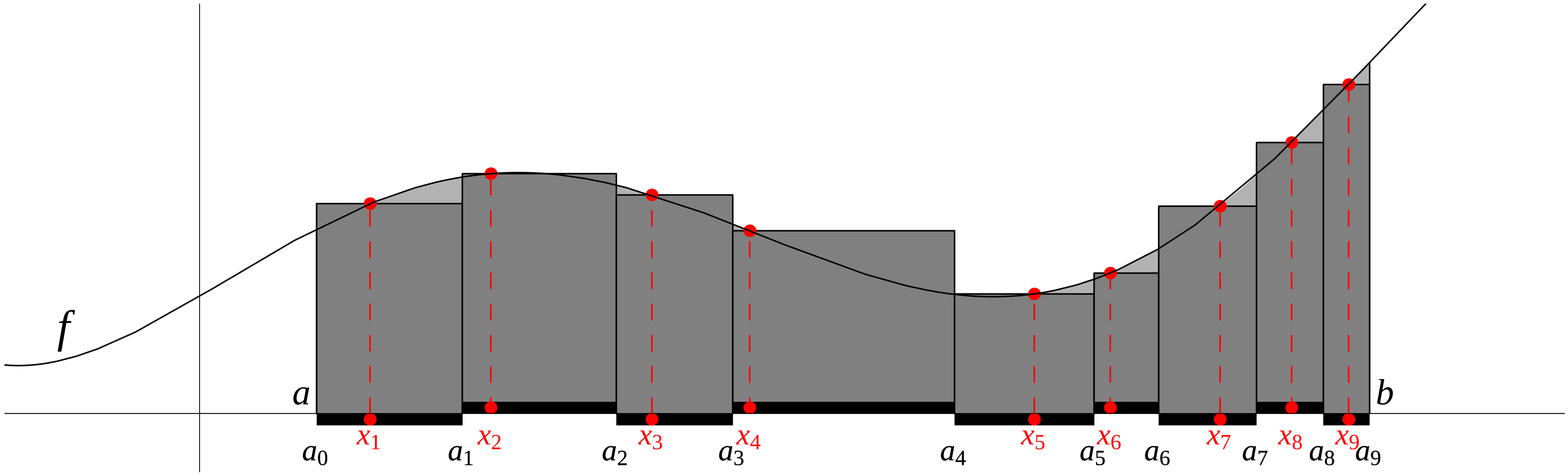


- Consideriamo l'n-esimo e ultimo intervallino $[a_{n-1}, a_n]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_n**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_{n-1}, a_n]$ e altezza $f(x_n)$.**
  - **L'area del rettangolino è $f(x_n)(a_n - a_{n-1})$**
    - $a_n - a_{n-1}$ è la *lunghezza* della base,



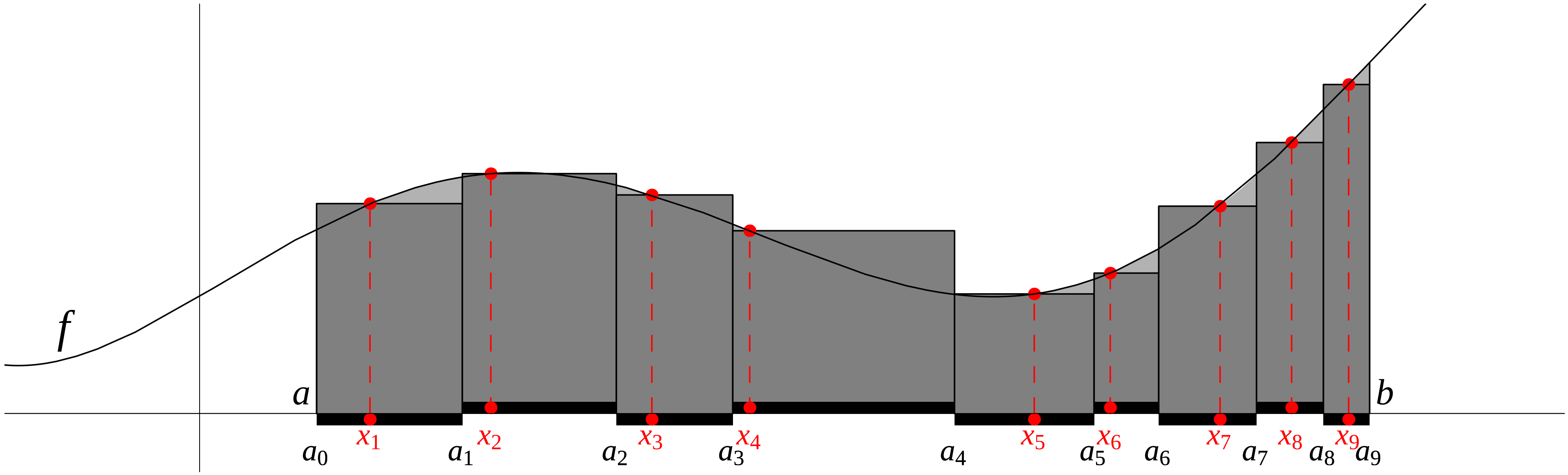
- Consideriamo l'n-esimo e ultimo intervallino $[a_{n-1}, a_n]$.
  - **calcoliamo f nel punto marcato x_n**
  - **costruiamo il rettangolo di base l'intervallo $[a_{n-1}, a_n]$ e altezza $f(x_n)$.**
  - **L'area del rettangolino è $f(x_n)(a_n - a_{n-1})$**
    - $a_n - a_{n-1}$ è la *lunghezza* della base,
    - $f(x_n)$ è l'altezza;

Plurirettangoli



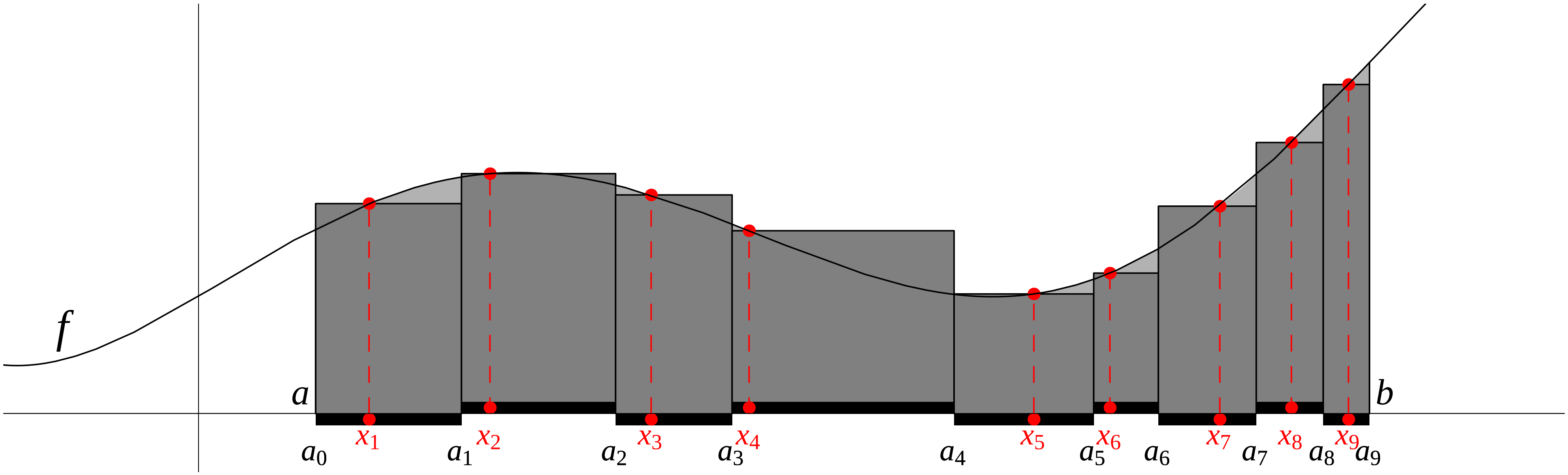
- L'unione degli n rettangolini è il *plurirettangolo* associato

Plurirettangoli

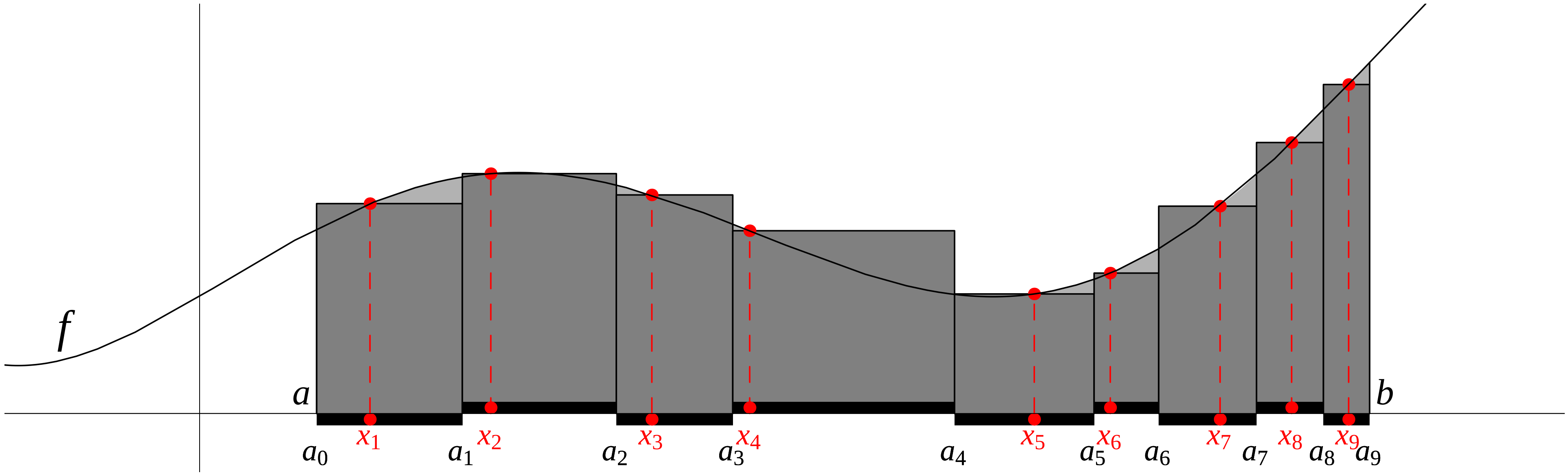


- L'unione degli n rettangolini è il *plurirettangolo* associato
  - **alla funzione f**

Plurirettangoli

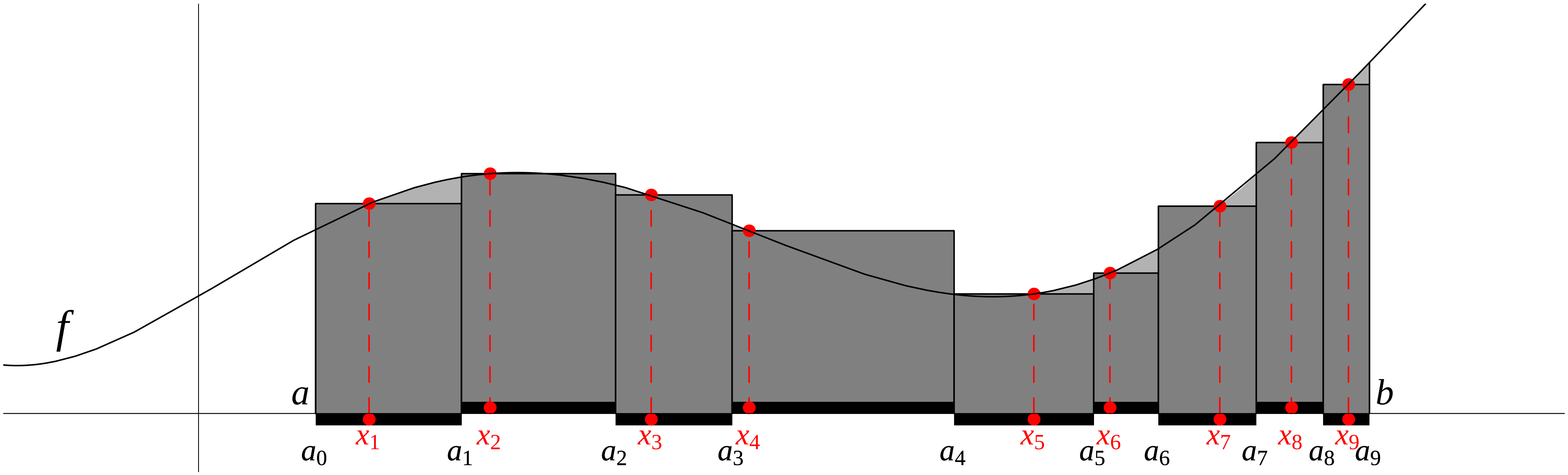


- L'unione degli n rettangolini è il *plurirettangolo* associato
  - **alla funzione f**
  - **e alla suddivisione marcata Π.**



- L'*area* di un plurirettangolo è la somma delle aree dei rettangolini:

$$f(x_1)(a_1 - a_0) + f(x_2)(a_2 - a_1) + \ldots + \\ + f(x_i)(a_i - a_{i-1}) + \ldots + f(x_n)(a_n - a_{n-1}),$$



- L'*area* di un plurirettangolo è la somma delle aree dei rettangolini:

$$f(x_1)(a_1 - a_0) + f(x_2)(a_2 - a_1) + \ldots + \\ + f(x_i)(a_i - a_{i-1}) + \ldots + f(x_n)(a_n - a_{n-1}),$$

e la indichiamo con $S(f, \Pi)$.

Somme di Riemann

- Usando la notazione della sommatoria:

$$S(f, \Pi) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}).$$

Somme di Riemann

- Usando la notazione della sommatoria:

$$S(f,\Pi) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}).$$

- Questa quantità $S(f,\Pi)$, che dipende

- Usando la notazione della sommatoria:

$$S(f,\Pi) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}).$$

- Questa quantità $S(f,\Pi)$, che dipende
  - **dalla funzione** f

Somme di Riemann

- Usando la notazione della sommatoria:

$$S(f,\Pi) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}).$$

- Questa quantità $S(f,\Pi)$, che dipende
  - **dalla funzione f**
  - **e dalla suddivisione marcata Π,**

- Usando la notazione della sommatoria:

$$S(f,\Pi) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}).$$

- Questa quantità $S(f,\Pi)$, che dipende
  - **dalla funzione f**
  - **e dalla suddivisione marcata Π,**

  è detta *somma di Riemann* relativa a f e a Π.

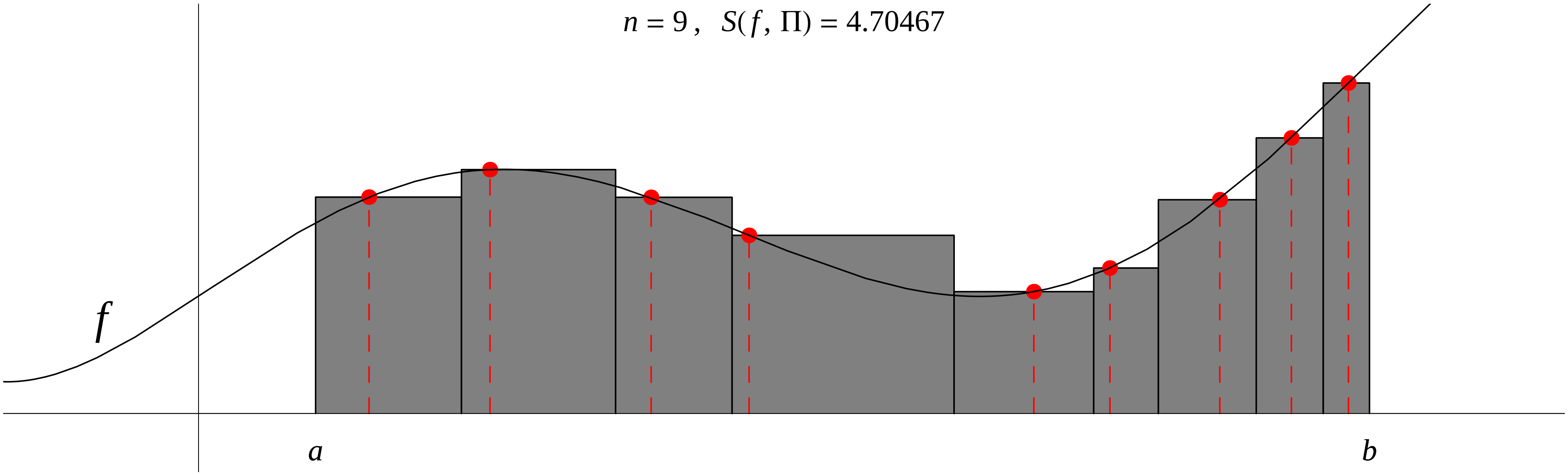
- Usando la notazione della sommatoria:

$$S(f, \Pi) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}).$$

- Questa quantità $S(f, \Pi)$, che dipende
  - **dalla funzione f**
  - **e dalla suddivisione marcata Π,**

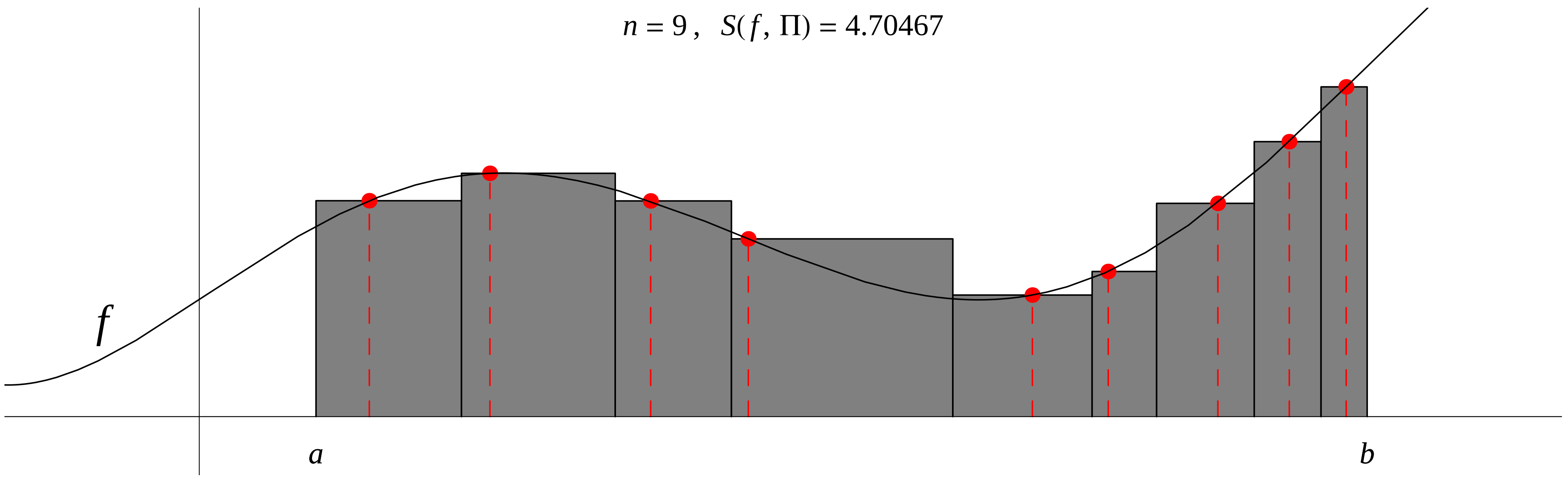
  è detta *somma di Riemann* relativa a f e a Π.

  - Il numero n dipende da Π, anche se la nostra notazione non lo mette in risalto.



- Per esempio, con le funzioni e la suddivisione marcata usata in tutte le figure finora, viene

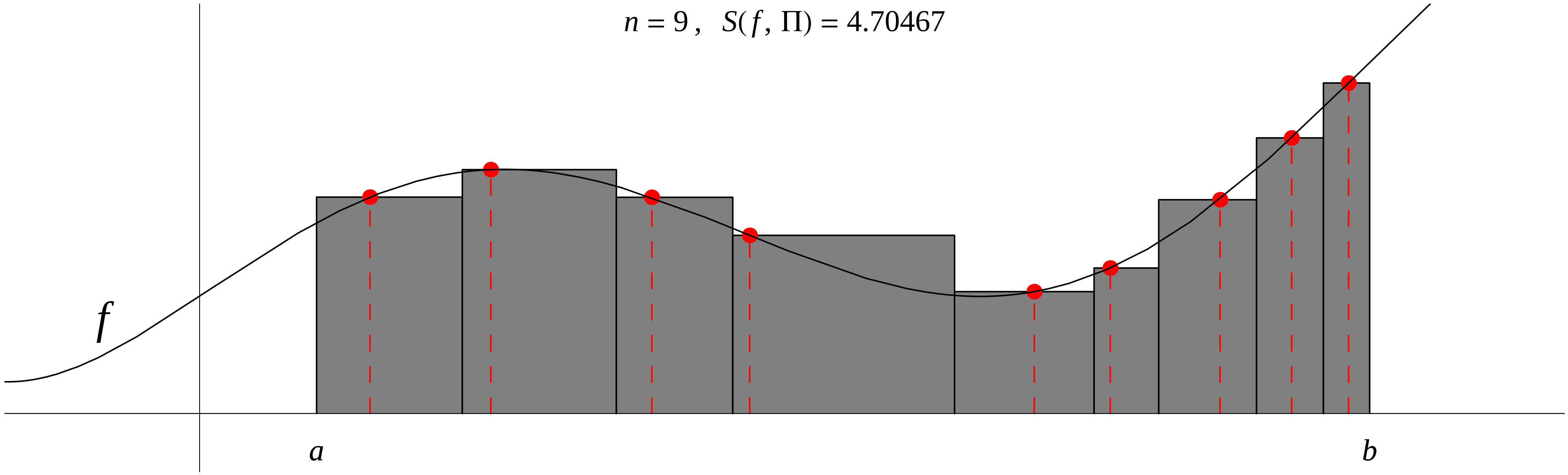
$$S(f,\Pi) = 4{,}70467.$$



- Per esempio, con le funzioni e la suddivisione marcata usata in tutte le figure finora, viene

$$S(f,\Pi) = 4{,}70467.$$

  - La f è ottenuta con un'interpolazione; ha una formula, ma è complicata; non è il caso di mostrarla.



- Per esempio, con le funzioni e la suddivisione marcata usata in tutte le figure finora, viene

$$S(f,\Pi) = 4{,}70467.$$

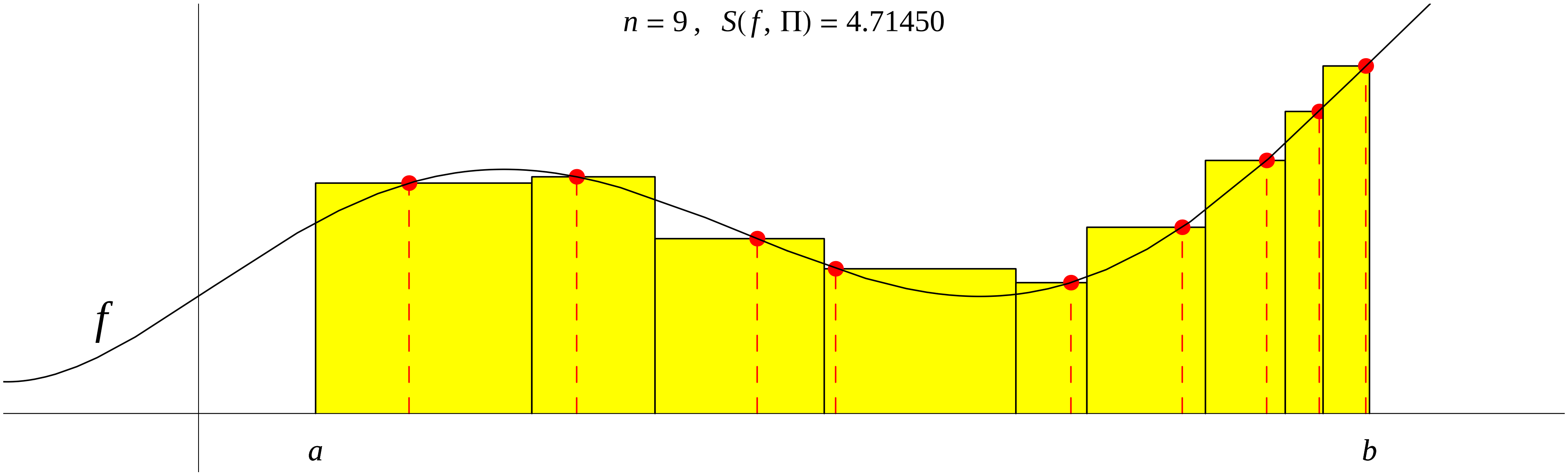
  - La f è ottenuta con un'interpolazione; ha una formula, ma è complicata; non è il caso di mostrarla.
  - Π è generata con numeri pseudocasuali. Ha $n = 9$ intervallini.

- Lo procedura dei conti numerici è esemplificata nella tabella seguente:

Π			**calcolo di** $S(f,\Pi)$		
i	a_i	x_i	$a_i - a_{i-1}$	$f(x_i)$	$f(x_i)(a_i - a_{i-1})$
0	0.30000				
1	0.67372	0.43692	0.37372	1.84857	0.69085
2	1.06861	0.74672	0.39489	2.08325	0.82265
3	1.36708	1.15961	0.29846	1.84678	0.55120
4	1.93574	1.41053	0.56867	1.52183	0.86541
5	2.29350	2.14013	0.35776	1.04074	0.37234
6	2.45922	2.33497	0.16571	1.24270	0.20593
7	2.70993	2.61651	0.25072	1.82596	0.45780
8	2.88152	2.79996	0.17159	2.35433	0.40397
9	3.00000	2.94618	0.11848	2.82340	0.33451
					$S(f,\Pi) = 4.70467$

Esempi

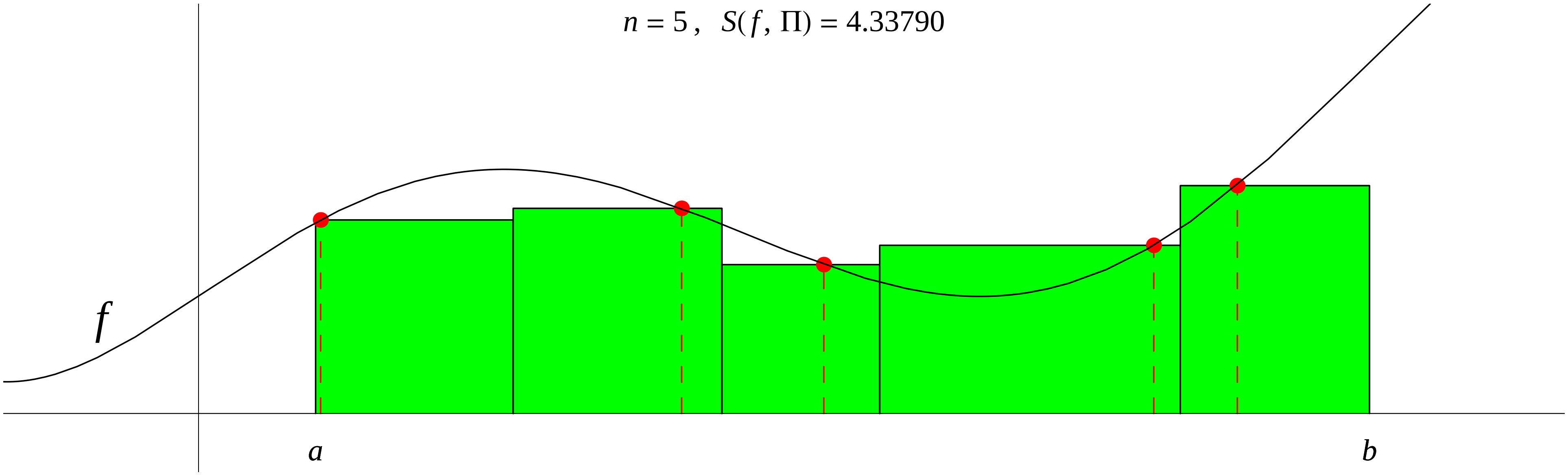
Esempi



- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π diversa, ma sempre con $n = 9$ intervallini. Viene

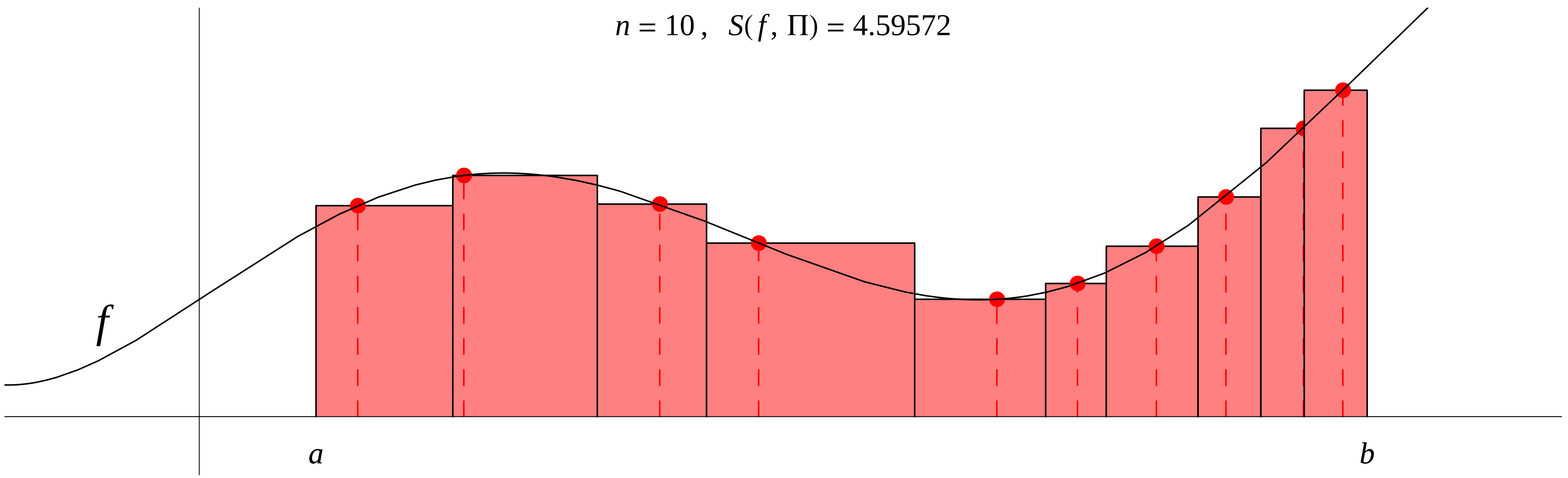
$$S(f, \Pi) = 4{,}71450.$$

Esempi



- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con solo $n = 5$ intervallini. Viene

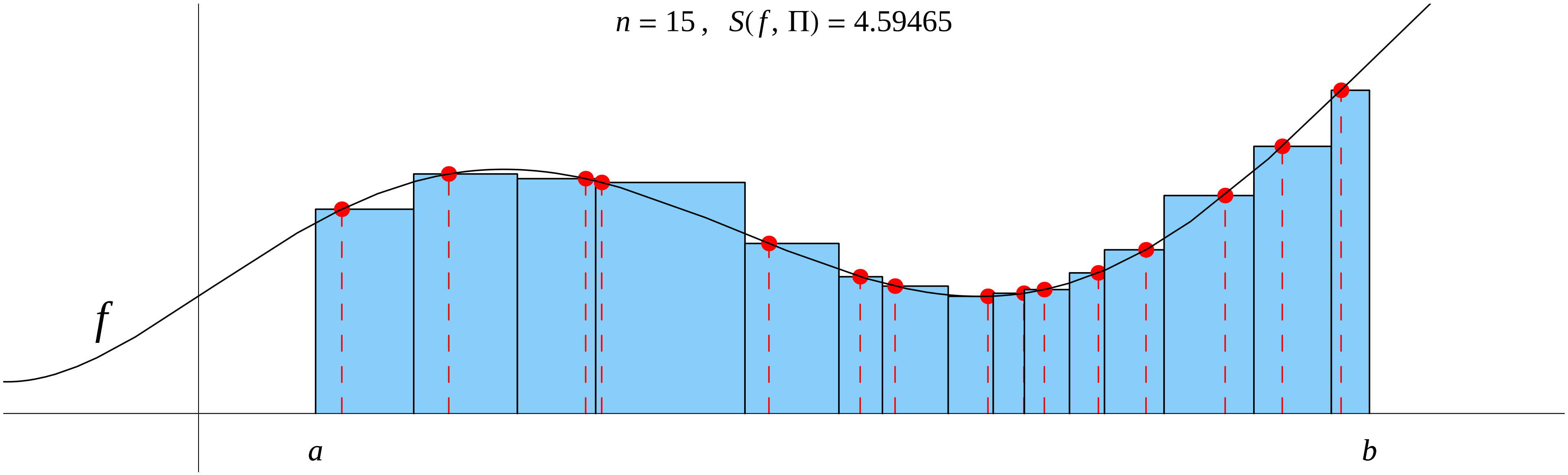
$$S(f, \Pi) = 4{,}33790.$$



- La stessa f e lo stesso $[a,b]$, e una suddivisione Π con $n = 10$ intervallini. Viene

$$S(f,\Pi) = 4{,}59572.$$

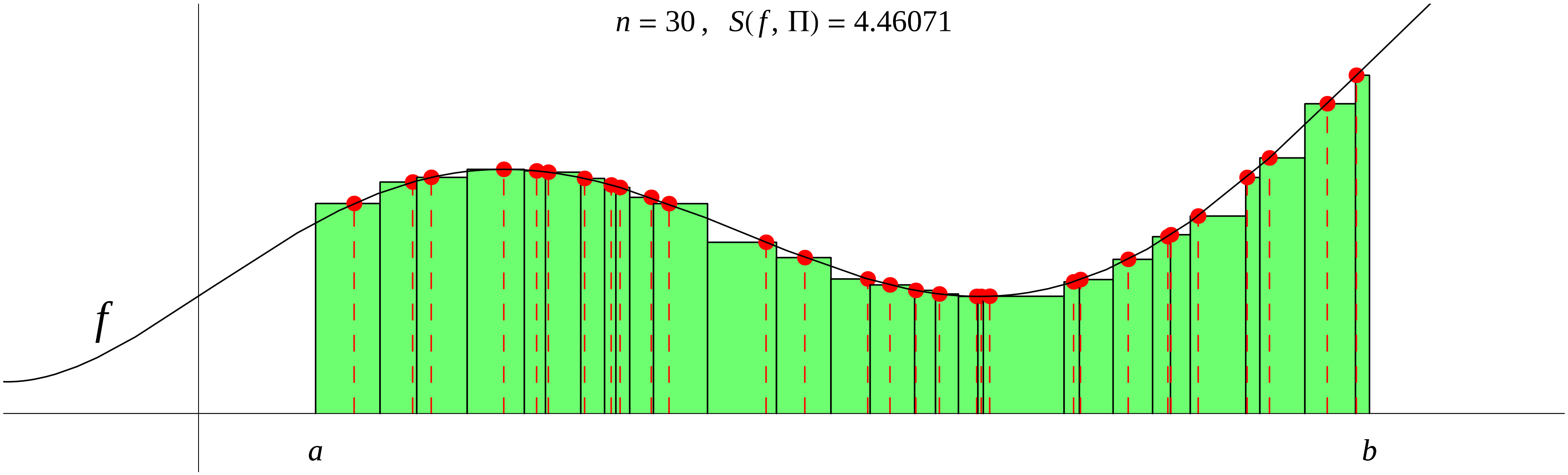
Esempi



- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con $n = 15$ intervallini. Viene

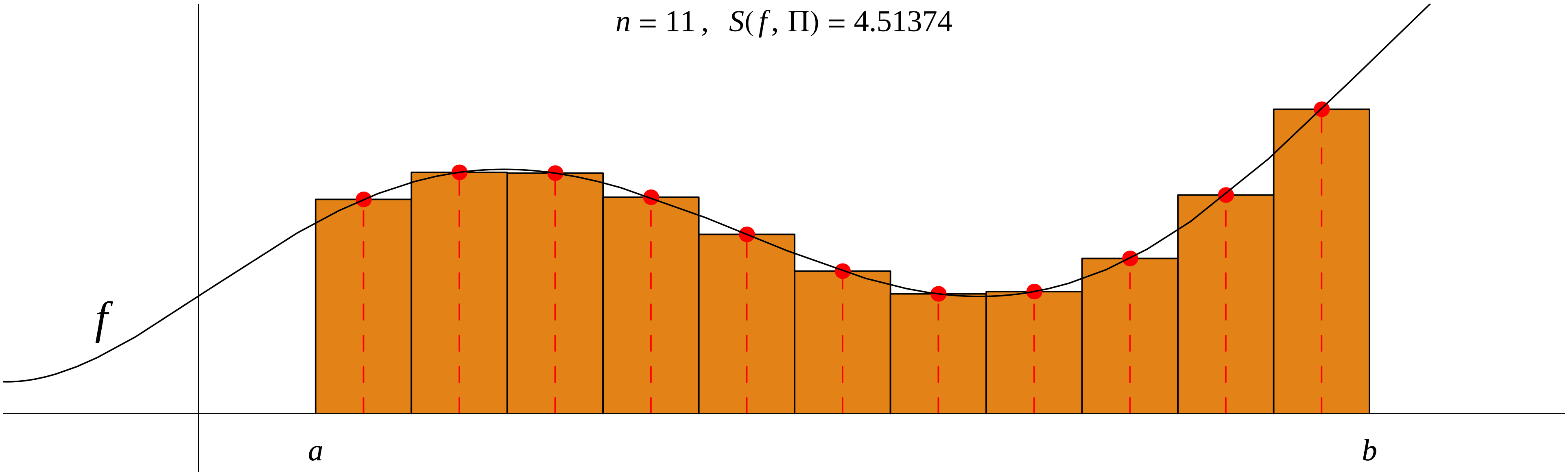
$$S(f, \Pi) = 4{,}59465.$$

Esempi



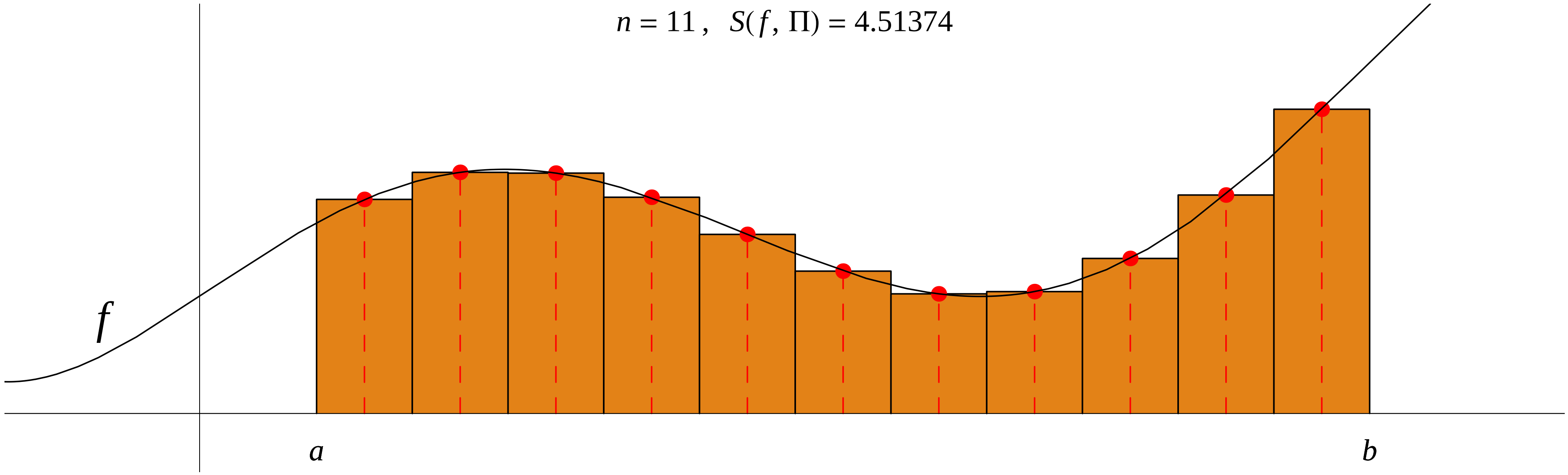
- La stessa f e lo stesso $[a,b]$, e una suddivisione Π con $n = 30$ intervallini. Viene

$$S(f,\Pi) = 4{,}46071.$$



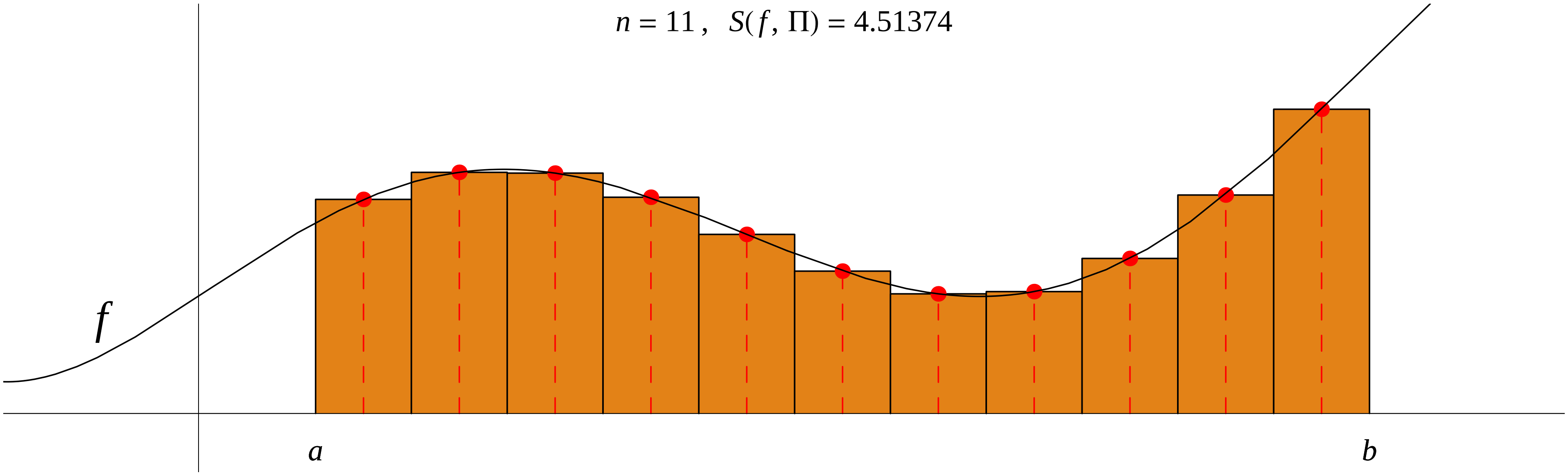
- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con

Esempi

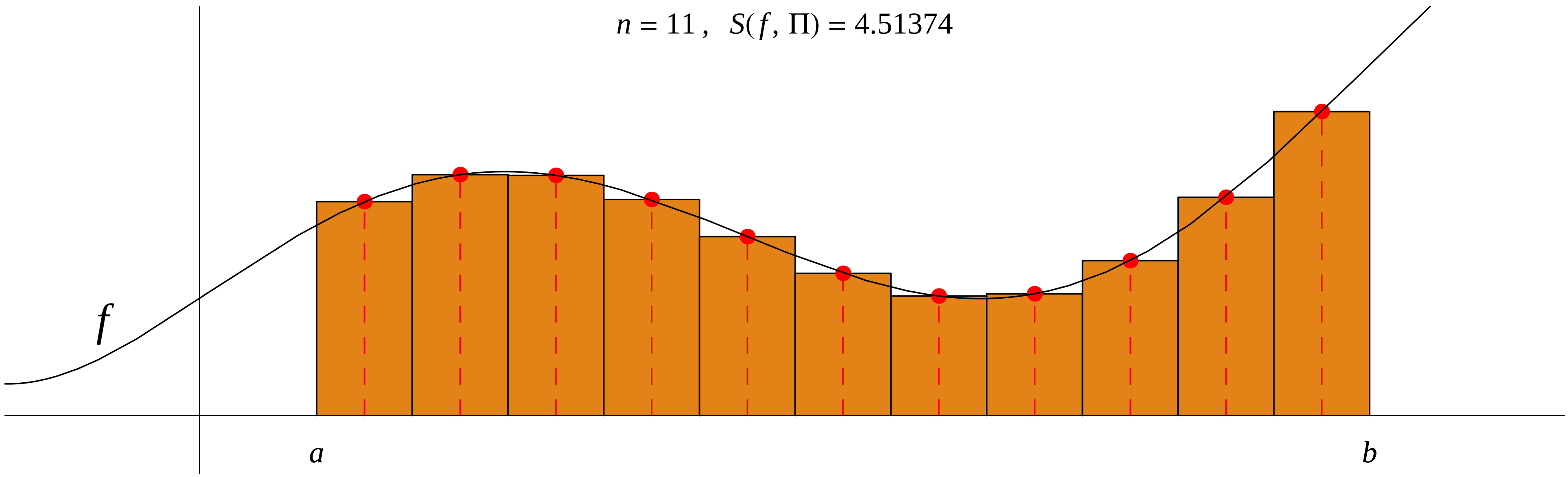


- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**

Esempi



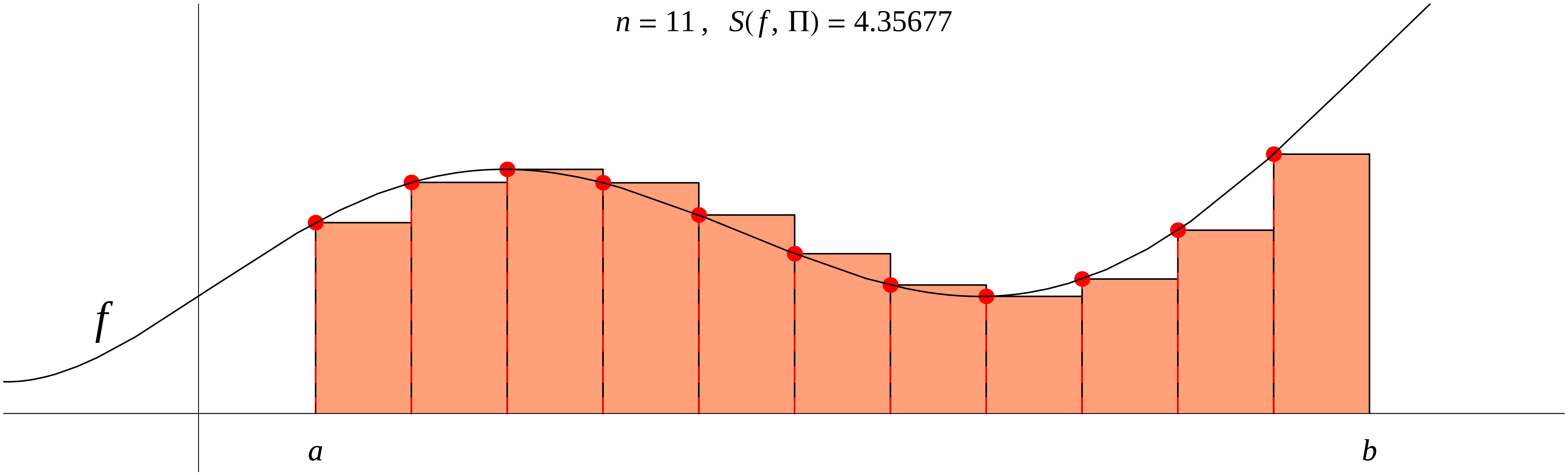
- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**
  - **e i punti marcati esattamente a metà degli intervallini;**



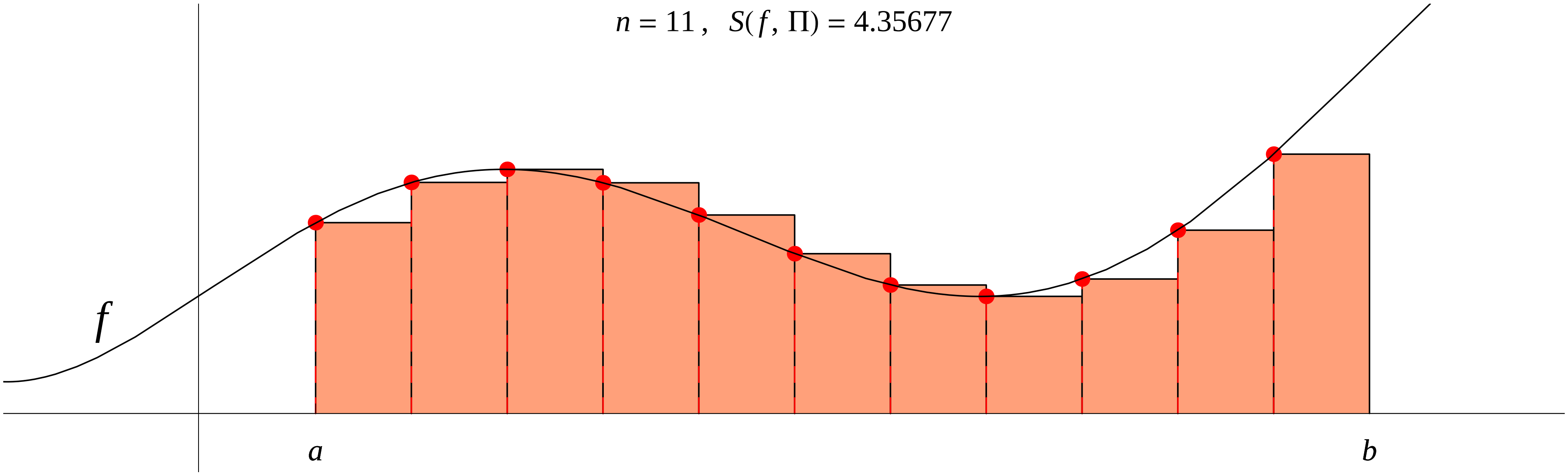
- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**
  - **e i punti marcati esattamente a metà degli intervallini;**
- Viene

$$S(f, \Pi) = 4{,}51374.$$

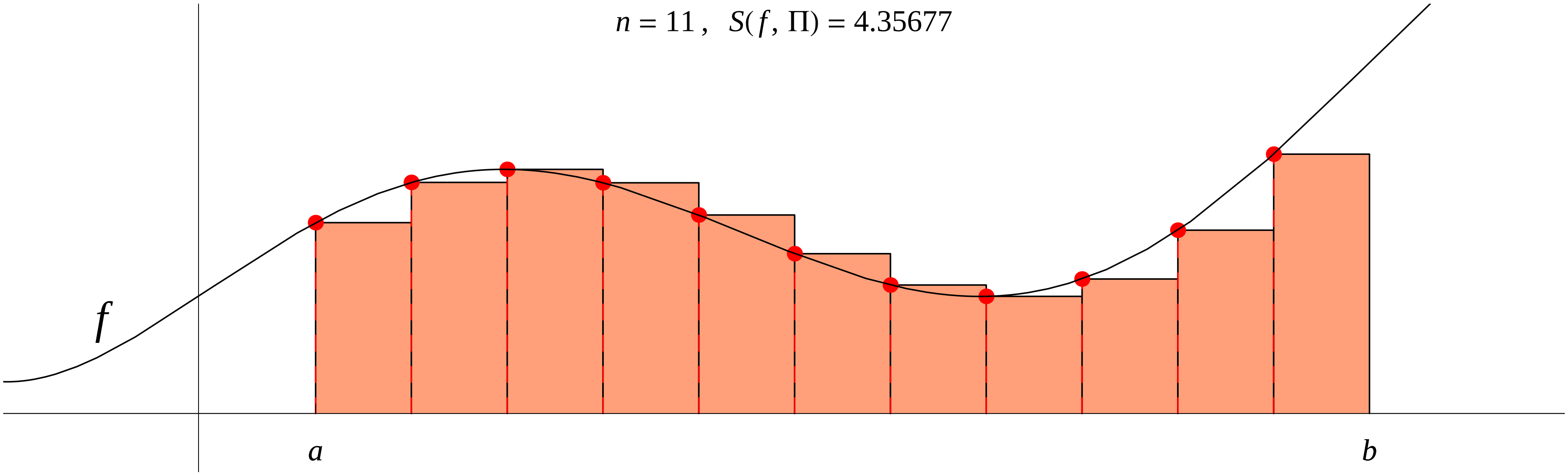
Esempi



- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con

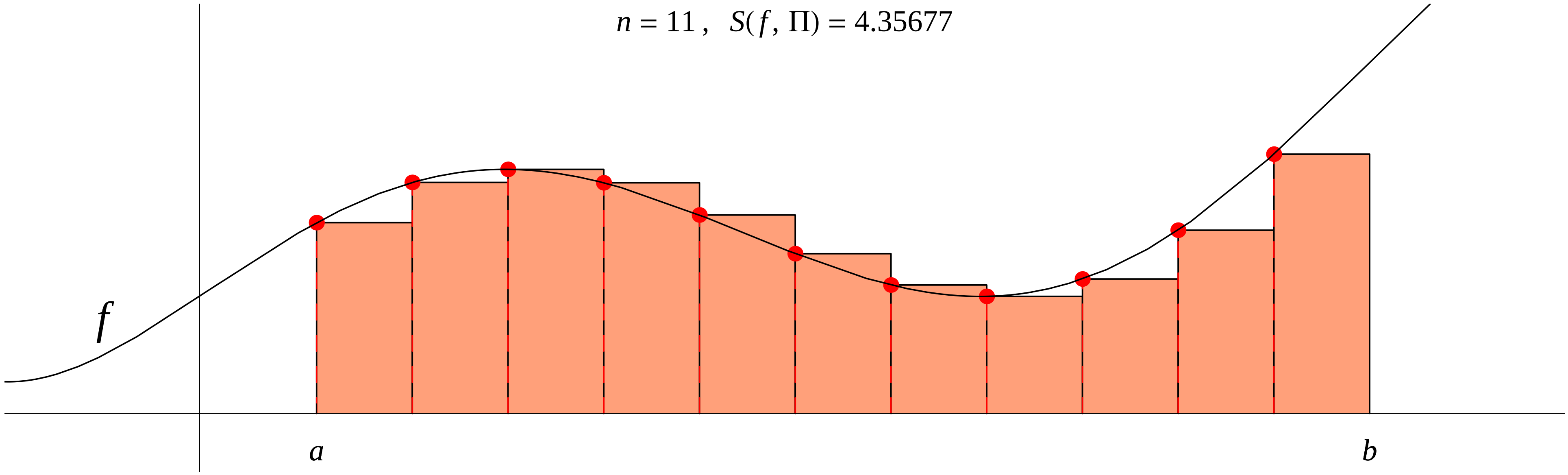


- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**



- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**
  - **e i punti marcati nell'estremo sinistro di ciascun intervallini;**

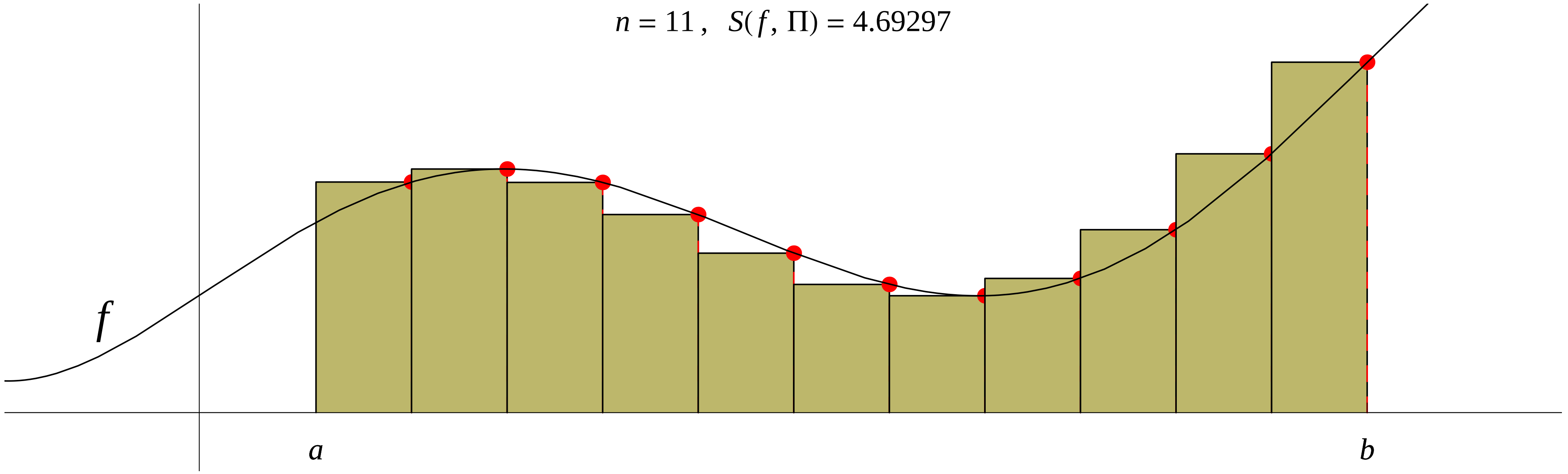
Esempi



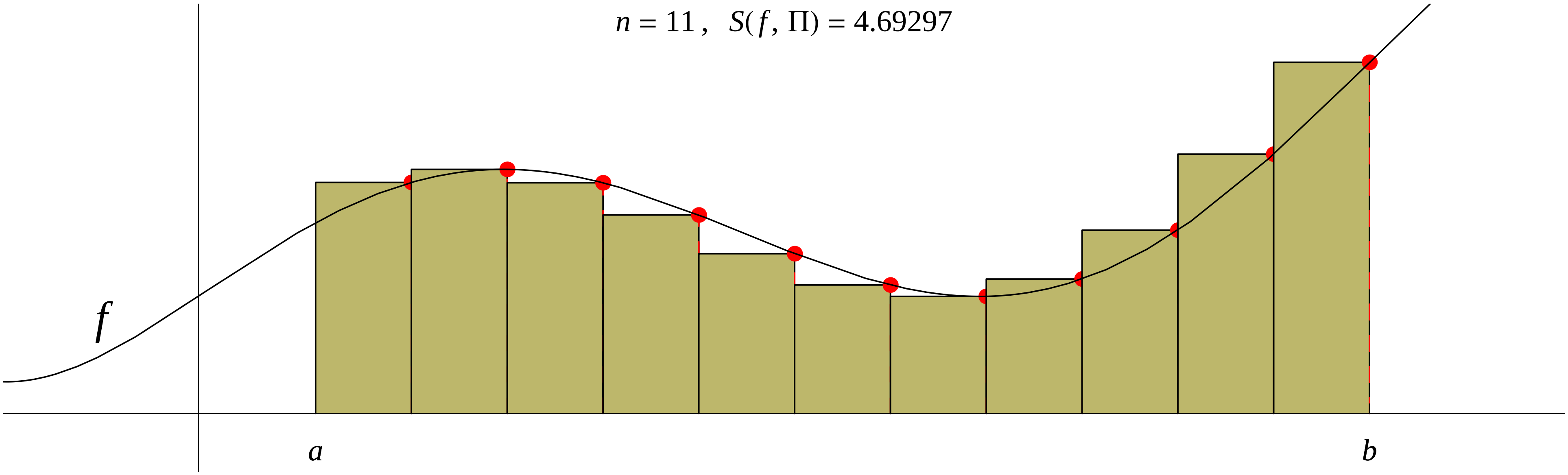
- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**
  - **e i punti marcati nell'estremo sinistro di ciascun intervallini;**
- Viene

$$S(f, \Pi) = 4{,}35677.$$

Esempi

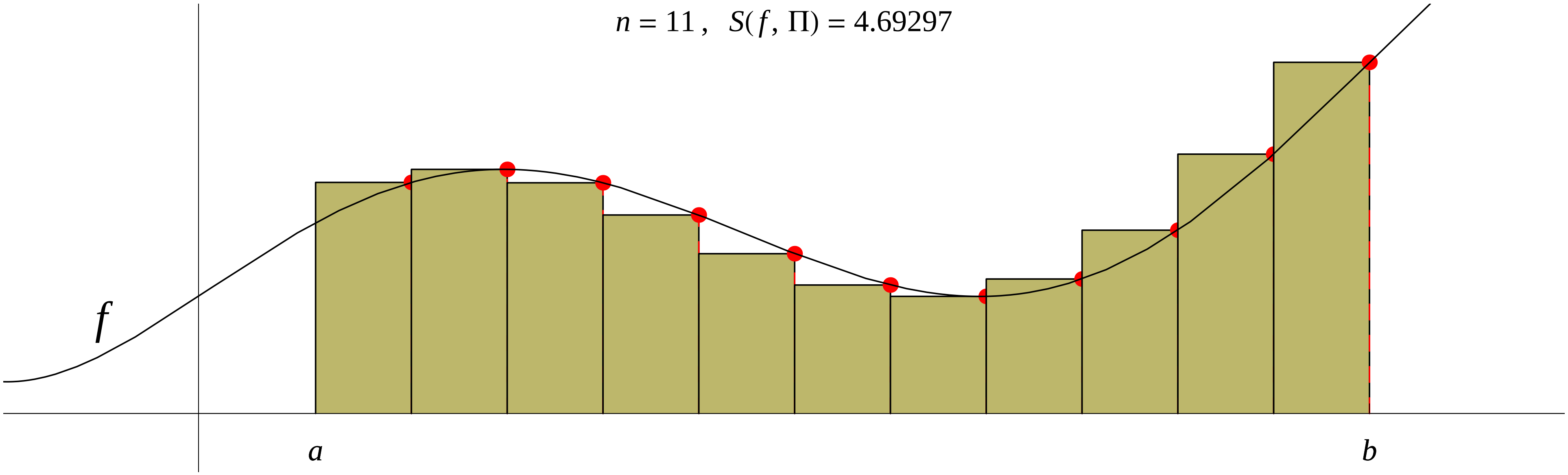


- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con



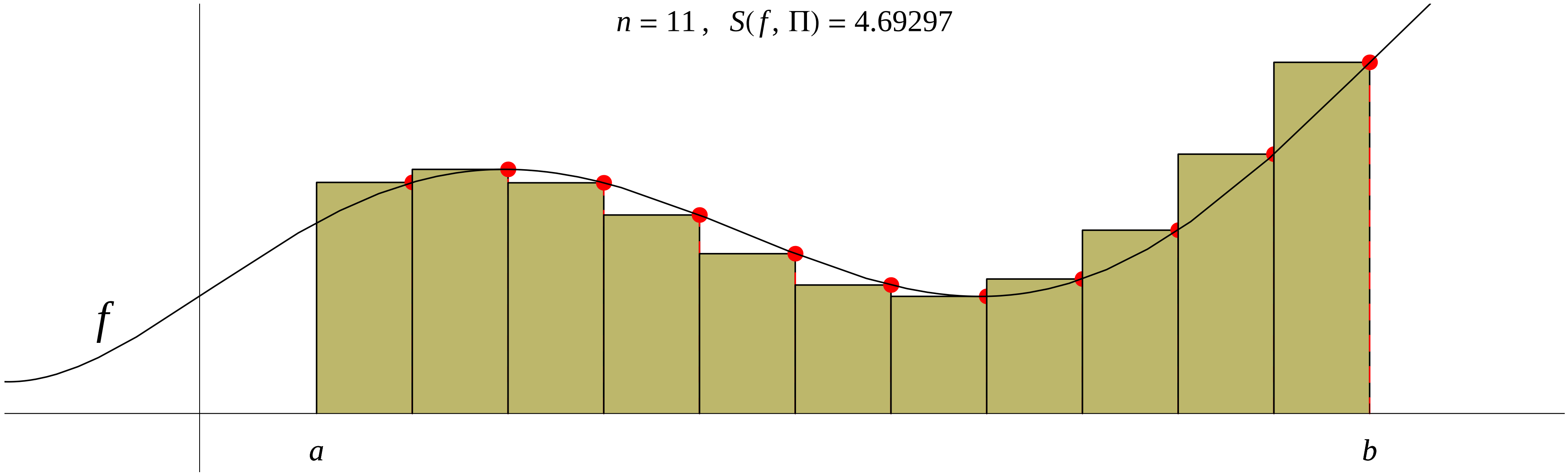
- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**

Esempi



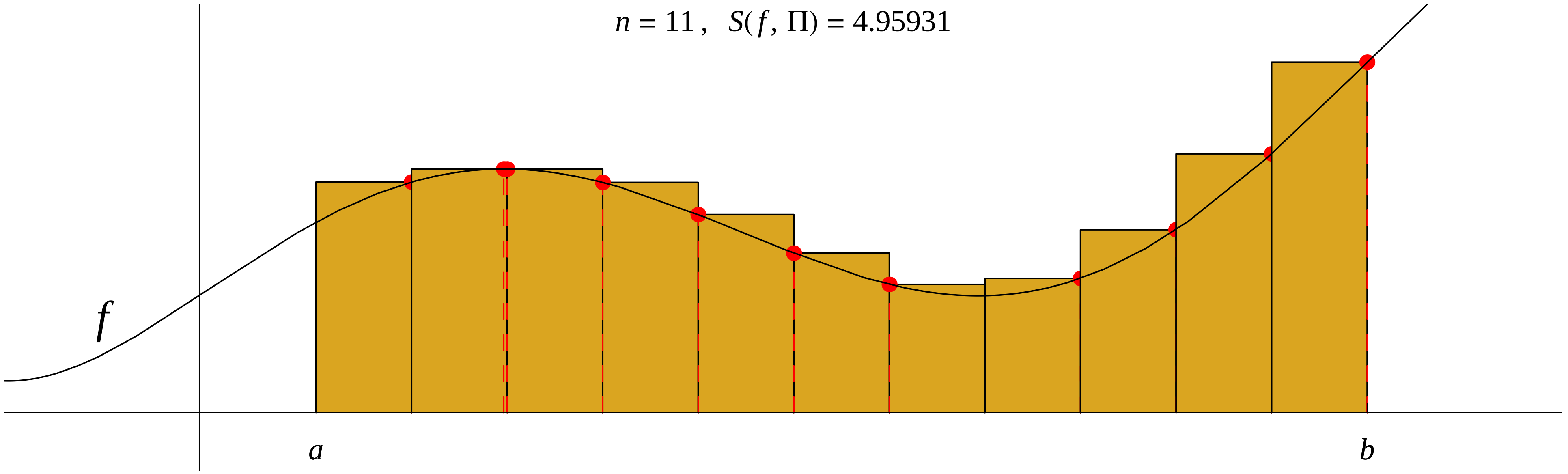
- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**
  - **e i punti marcati nell'estremo destro di ciascun intervallini;**

Esempi

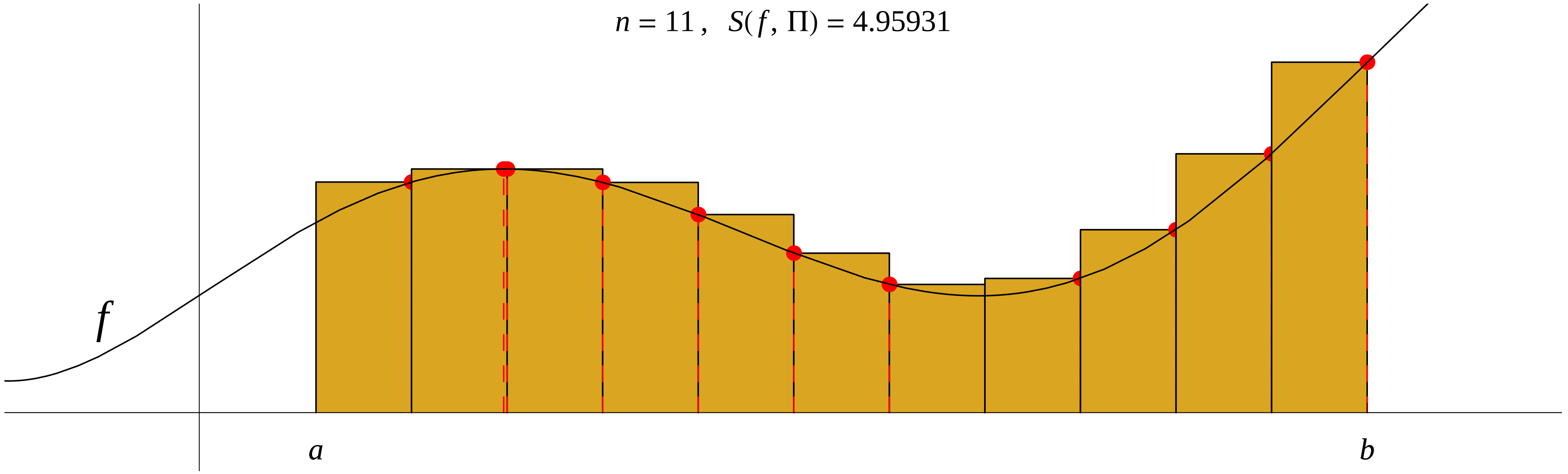


- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**
  - **e i punti marcati nell'estremo destro di ciascun intervallini;**
- Viene

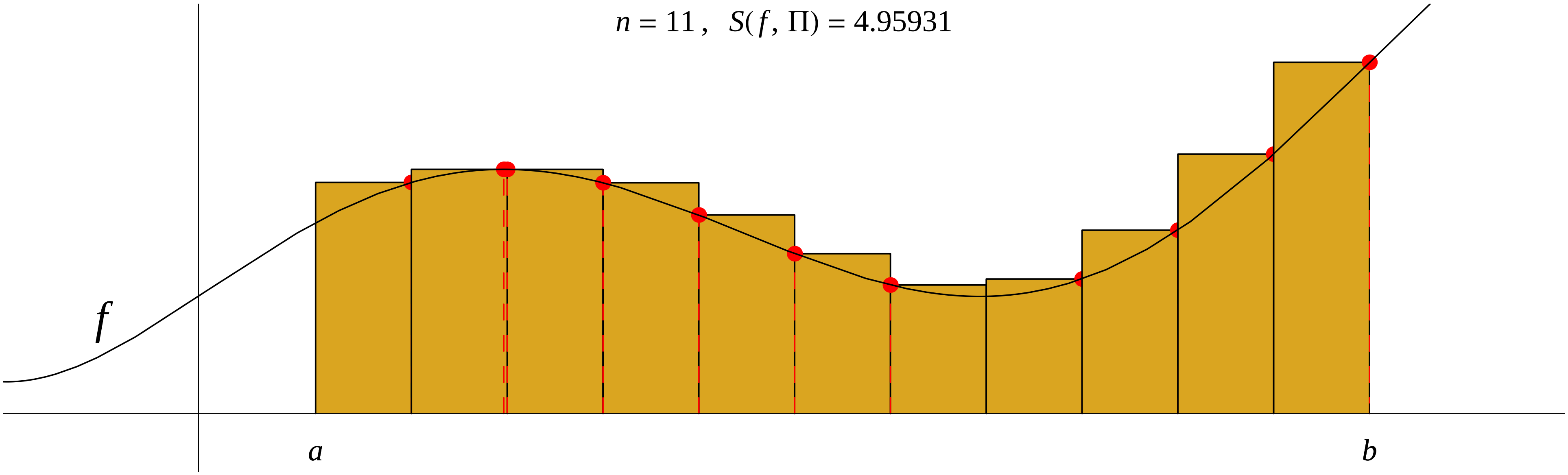
$$S(f, \Pi) = 4{,}69297.$$



- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con

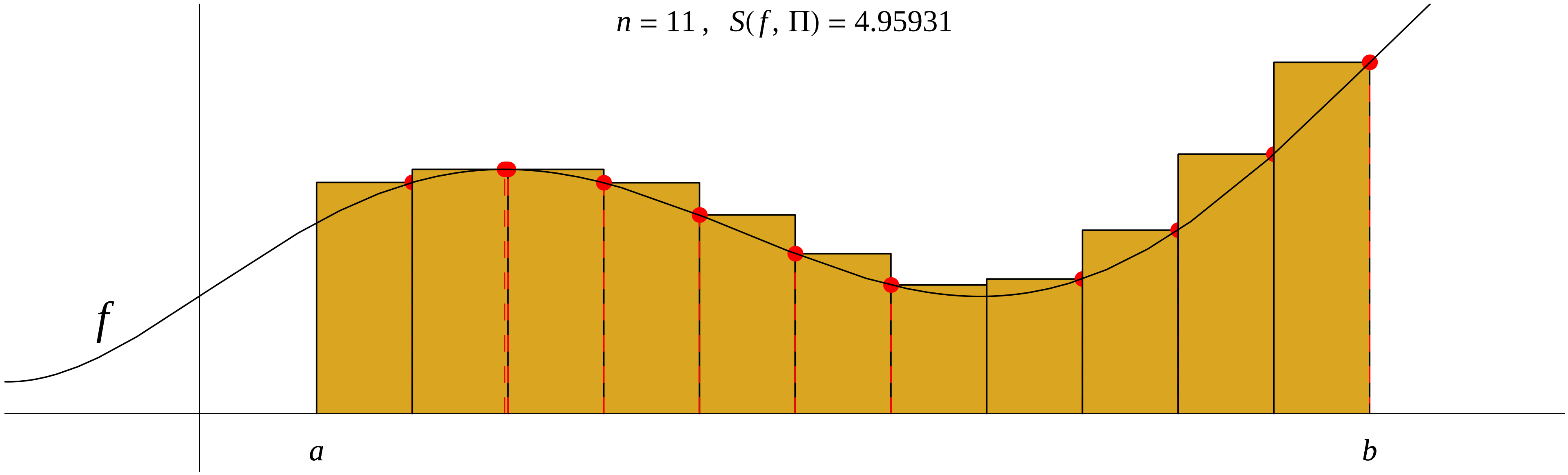


- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**



- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**
  - **e i punti marcati in un punto di massimo della funzione nell'intervallino;**

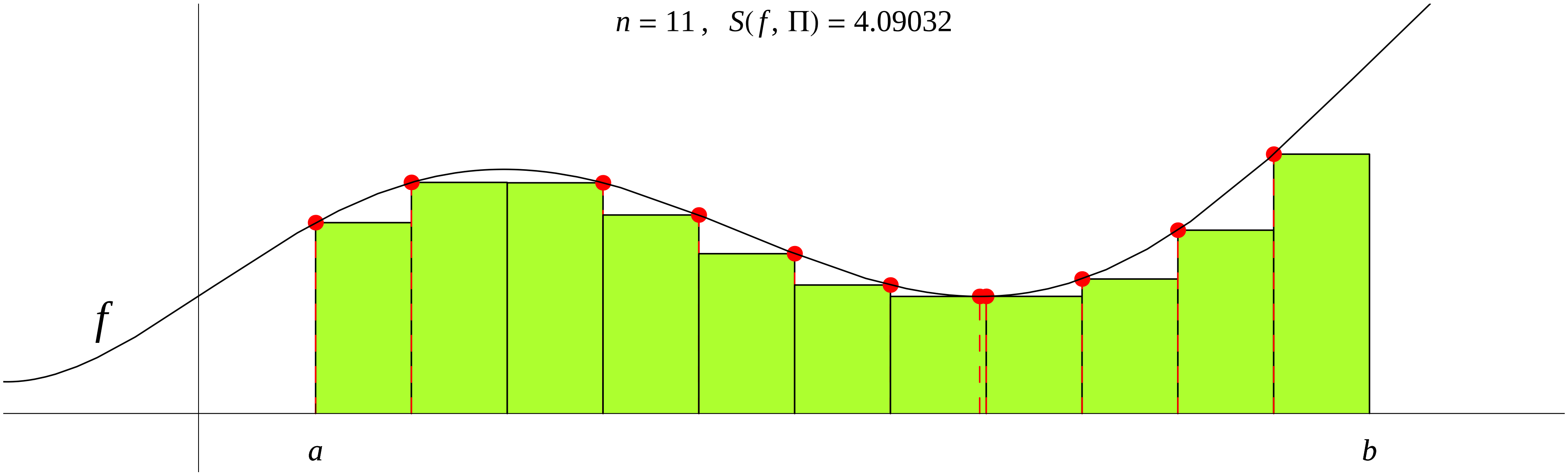
Esempi



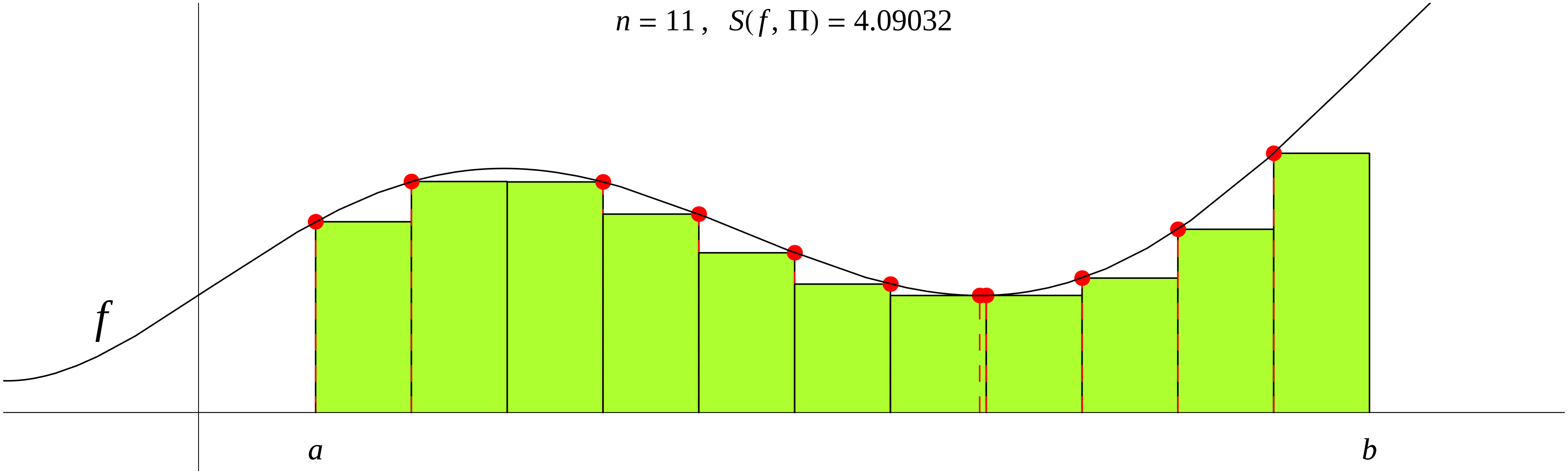
- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**
  - **e i punti marcati in un punto di massimo della funzione nell'intervallino;**
- Viene

$$S(f, \Pi) = 4{,}95931.$$

Esempi

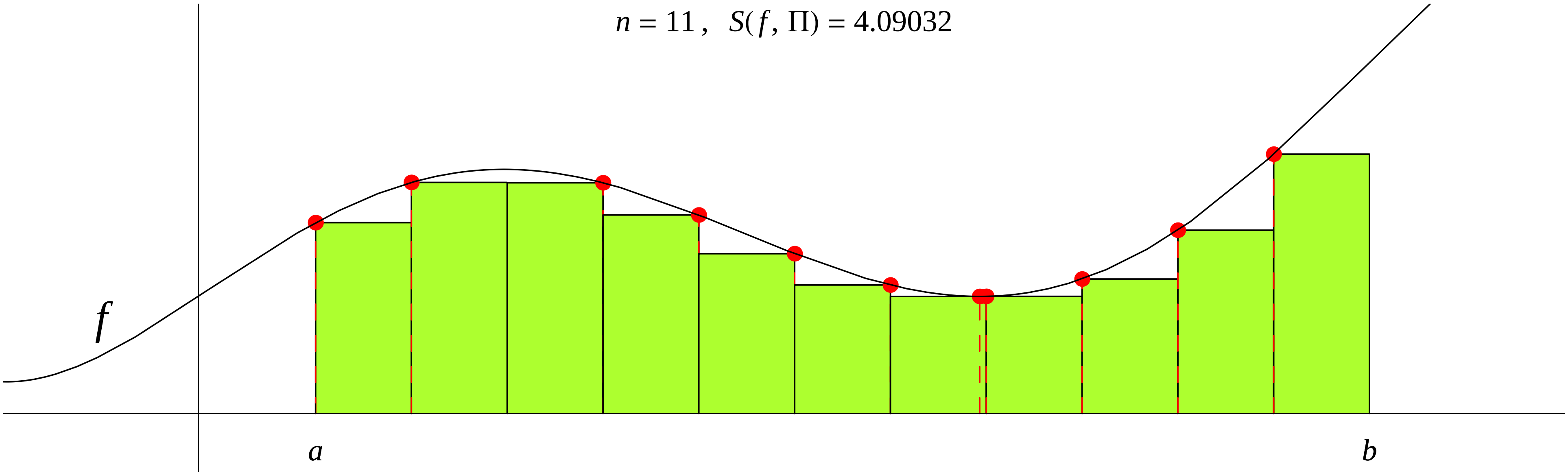


- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con



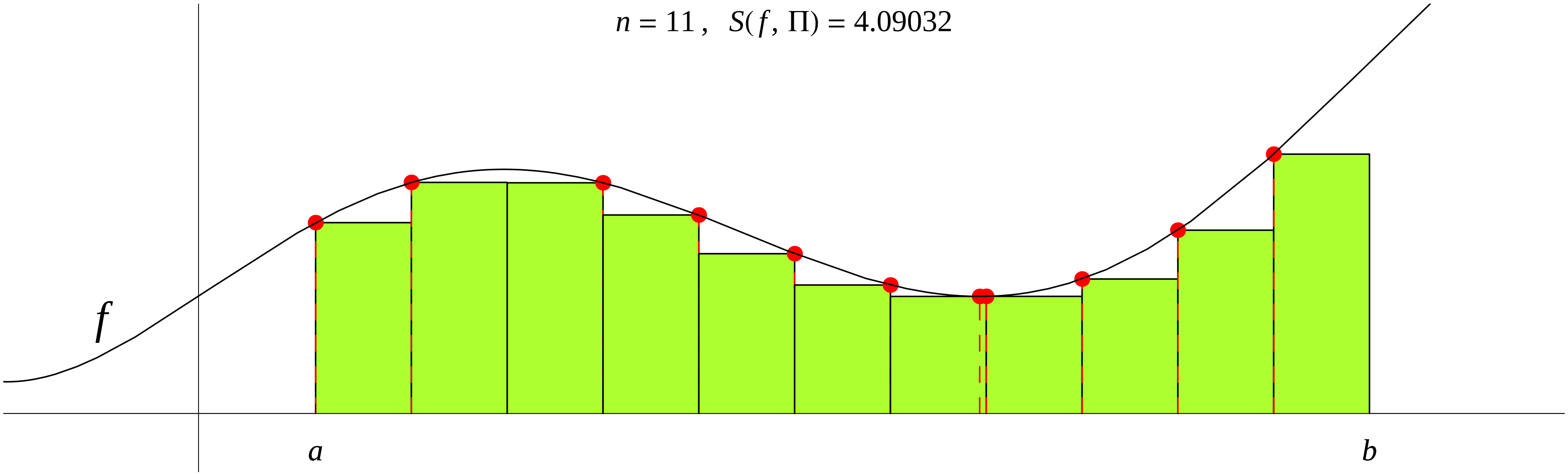
- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**

Esempi



- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**
  - **e i punti marcati in un punto di minimo della funzione nell'intervallino;**

Esempi



- La stessa f e lo stesso $[a, b]$, e una suddivisione Π con
  - $n = 11$ **intervallini tutti lunghi uguali**
  - **e i punti marcati in un punto di minimo della funzione nell'intervallino;**
- Viene

$$S(f, \Pi) = 4{,}09032.$$

Suddivisioni “generiche”

Suddivisioni "generiche"

- Fra le suddivisioni che abbiamo visto

Suddivisioni "generiche"

- Fra le suddivisioni che abbiamo visto
  - **alcune erano "casuali"**

Suddivisioni “generiche”

- Fra le suddivisioni che abbiamo visto
  - **alcune erano “casuali”**
    - nel senso che non si intravvedeva una regolarità nella scelta delle lunghezze degli intervallini e nelle posizioni dei punti marcati;

Suddivisioni “generiche”

- Fra le suddivisioni che abbiamo visto
  - **alcune erano “casuali”**
    - nel senso che non si intravvedeva una regolarità nella scelta delle lunghezze degli intervallini e nelle posizioni dei punti marcati;
  - **e altre erano “regolari”**

Suddivisioni “generiche”

- Fra le suddivisioni che abbiamo visto
  - **alcune erano “casuali”**
    - nel senso che non si intravvedeva una regolarità nella scelta delle lunghezze degli intervallini e nelle posizioni dei punti marcati;
  - **e altre erano “regolari”**
    - nel senso che c’era una semplice regola che le descriveva;

Suddivisioni “generiche”

- Fra le suddivisioni che abbiamo visto
  - **alcune erano “casuali”**
    - nel senso che non si intravvedeva una regolarità nella scelta delle lunghezze degli intervallini e nelle posizioni dei punti marcati;
  - **e altre erano “regolari”**
    - nel senso che c’era una semplice regola che le descriveva;
  - **Le suddivisioni “regolari” semplici sono le prime che vengono in mente**

Suddivisioni “generiche”

- Fra le suddivisioni che abbiamo visto
  - **alcune erano “casuali”**
    - nel senso che non si intravvedeva una regolarità nella scelta delle lunghezze degli intervallini e nelle posizioni dei punti marcati;
  - **e altre erano “regolari”**
    - nel senso che c’era una semplice regola che le descriveva;
  - **Le suddivisioni “regolari” semplici sono le prime che vengono in mente**
    - ma nella teoria che faremo non sono particolarmente privilegiate;

Suddivisioni “generiche”

- Fra le suddivisioni che abbiamo visto
  - **alcune erano “casuali”**
    - nel senso che non si intravvedeva una regolarità nella scelta delle lunghezze degli intervallini e nelle posizioni dei punti marcati;
  - **e altre erano “regolari”**
    - nel senso che c’era una semplice regola che le descriveva;
  - **Le suddivisioni “regolari” semplici sono le prime che vengono in mente**
    - ma nella teoria che faremo non sono particolarmente privilegiate;
- Quando diremo “consideriamo una suddivisione”

Suddivisioni "generiche"

- Fra le suddivisioni che abbiamo visto
  - **alcune erano "casuali"**
    - nel senso che non si intravvedeva una regolarità nella scelta delle lunghezze degli intervallini e nelle posizioni dei punti marcati;
  - **e altre erano "regolari"**
    - nel senso che c'era una semplice regola che le descriveva;
  - **Le suddivisioni "regolari" semplici sono le prime che vengono in mente**
    - ma nella teoria che faremo non sono particolarmente privilegiate;
- Quando diremo "consideriamo una suddivisione"
- converrà pensarla di tipo "casuale"

Suddivisioni "generiche"

- Fra le suddivisioni che abbiamo visto
  - **alcune erano "casuali"**
    - nel senso che non si intravvedeva una regolarità nella scelta delle lunghezze degli intervallini e nelle posizioni dei punti marcati;
  - **e altre erano "regolari"**
    - nel senso che c'era una semplice regola che le descriveva;
  - **Le suddivisioni "regolari" semplici sono le prime che vengono in mente**
    - ma nella teoria che faremo non sono particolarmente privilegiate;
- Quando diremo "consideriamo una suddivisione"
- converrà pensarla di tipo "casuale"
  - salvo avviso contrario;

Cap. 3
Esplorazioni

Idea guida

Idea guida

- *La nostra idea guida è che*

Idea guida

- ***La nostra idea guida è che***
  - fissati f e $[a, b]$

Idea guida

- ***La nostra idea guida è che***
  - fissati f e $[a, b]$
  - all'«infittirsi» delle suddivisioni Π

Idea guida

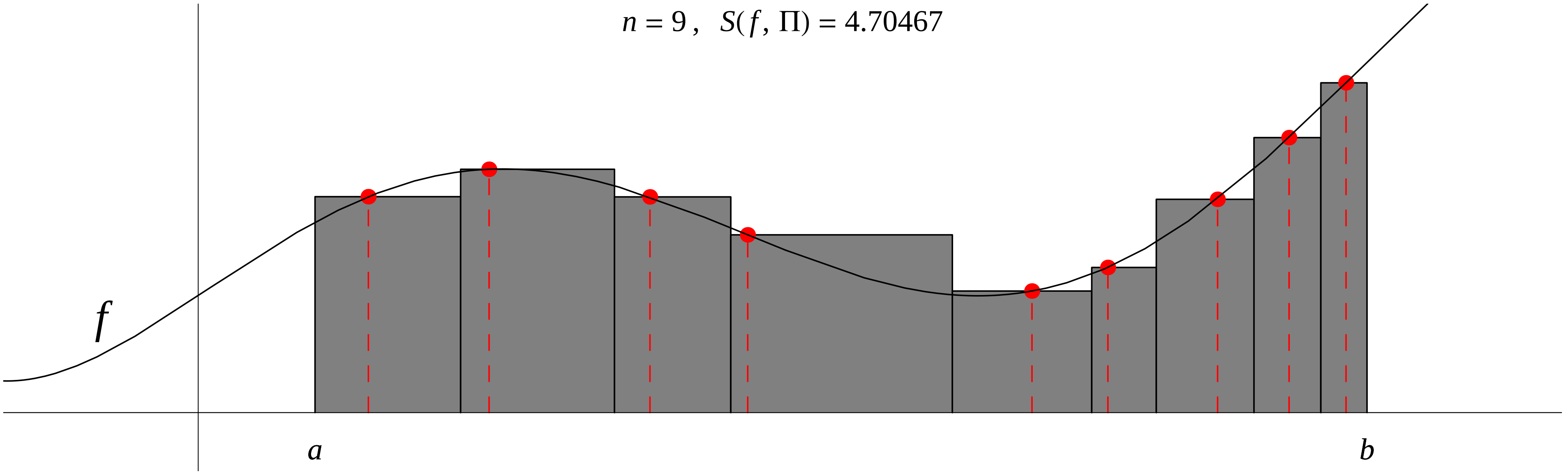
- ***La nostra idea guida è che***
  - fissati f e $[a,b]$
  - all'«infittirsi» delle suddivisioni Π
  - la somma di Riemann $S(f,\Pi)$ si avvicini al valore "vero" dell'area.

Idea guida

- ***La nostra idea guida è che***
  - fissati f e $[a, b]$
  - all'«infittirsi» delle suddivisioni Π
  - la somma di Riemann $S(f, \Pi)$ si avvicini al valore "vero" dell'area.
- ***Problemi:***
  - Raccogliere indizi a favore.

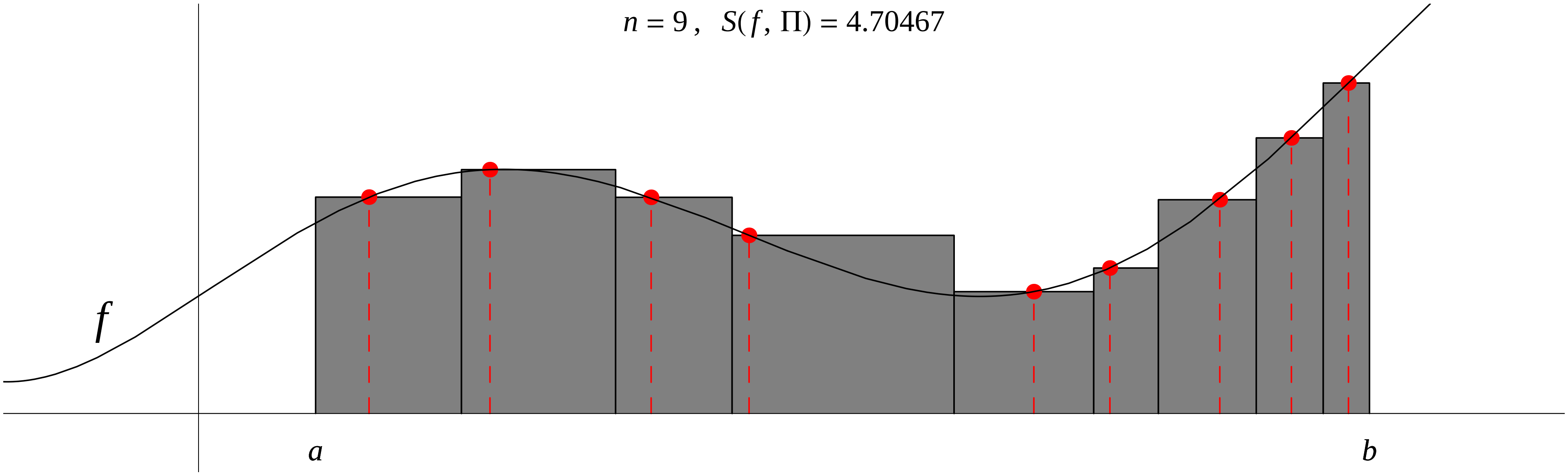
Idea guida

- ***La nostra idea guida è che***
  - fissati f e $[a, b]$
  - all'«infittirsi» delle suddivisioni Π
  - la somma di Riemann $S(f, \Pi)$ si avvicini al valore "vero" dell'area.
- ***Problemi:***
  - Raccogliere indizi a favore.
  - Esplicitare cosa intendiamo con «infittimento».



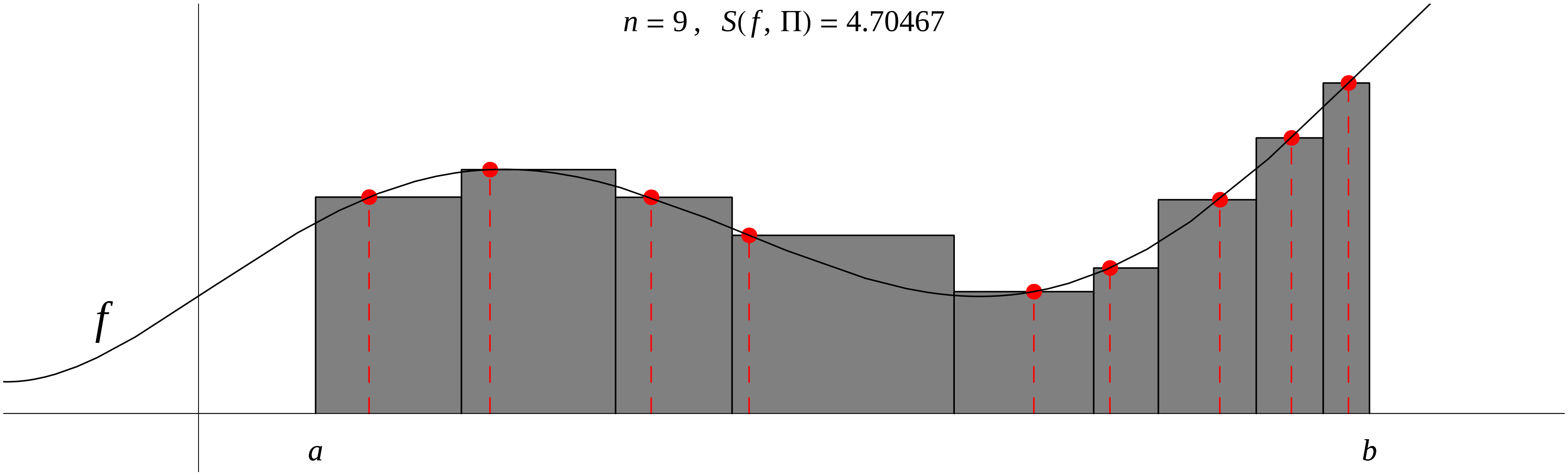
- Prendiamo una f e una Π.

Scarti dall'area

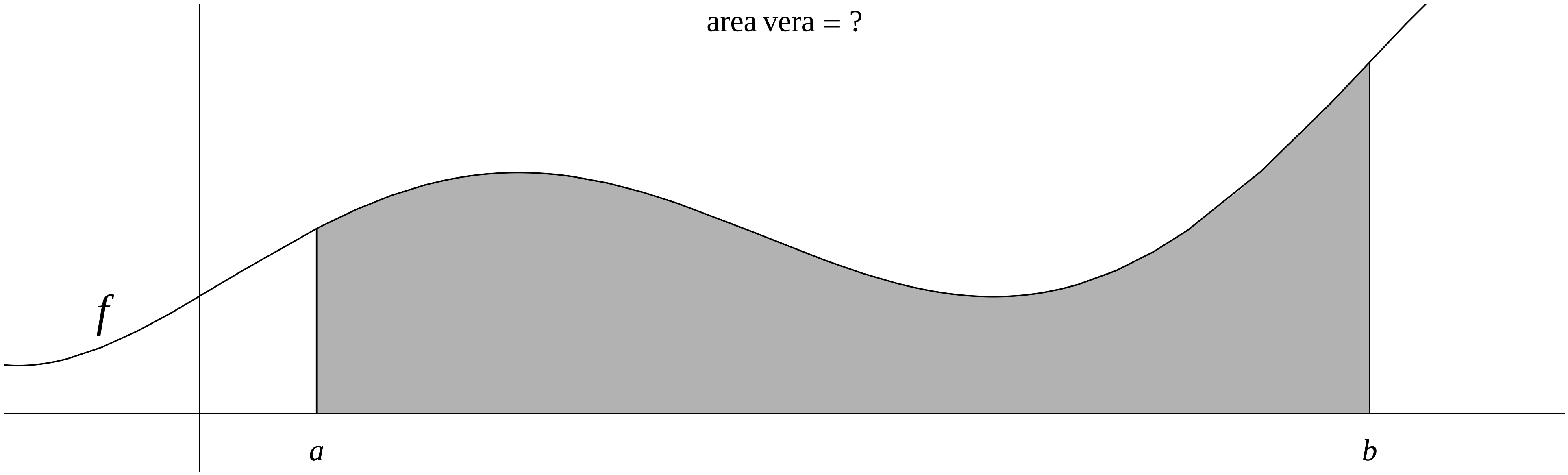


- Prendiamo una f e una Π.
- Come facciamo a capire se è piccola la differenza

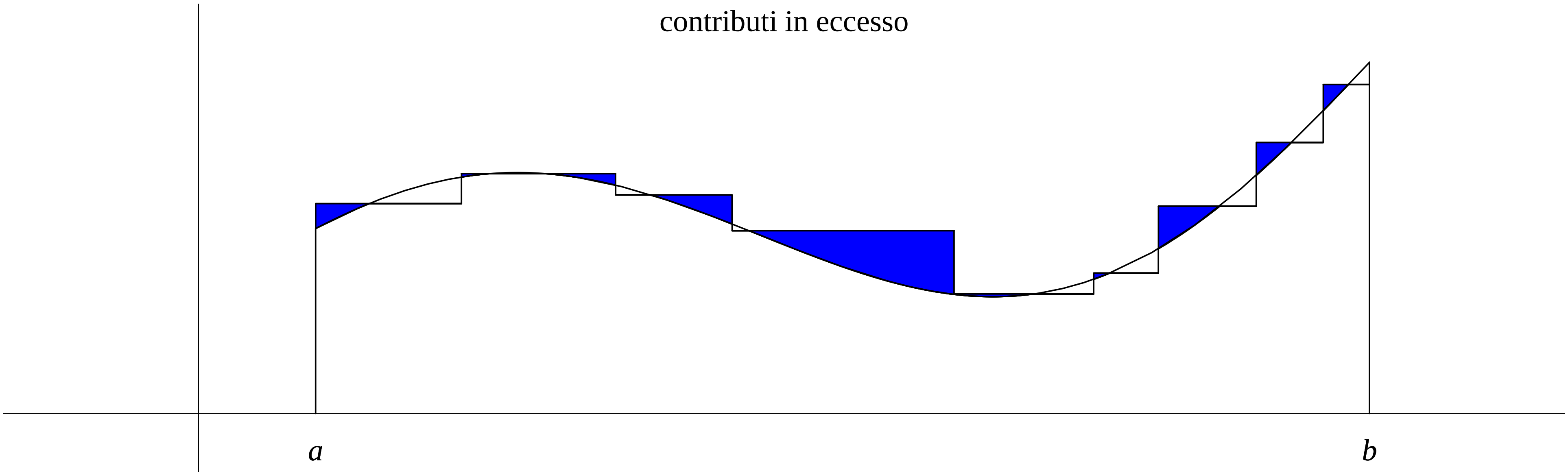
Scarti dall'area



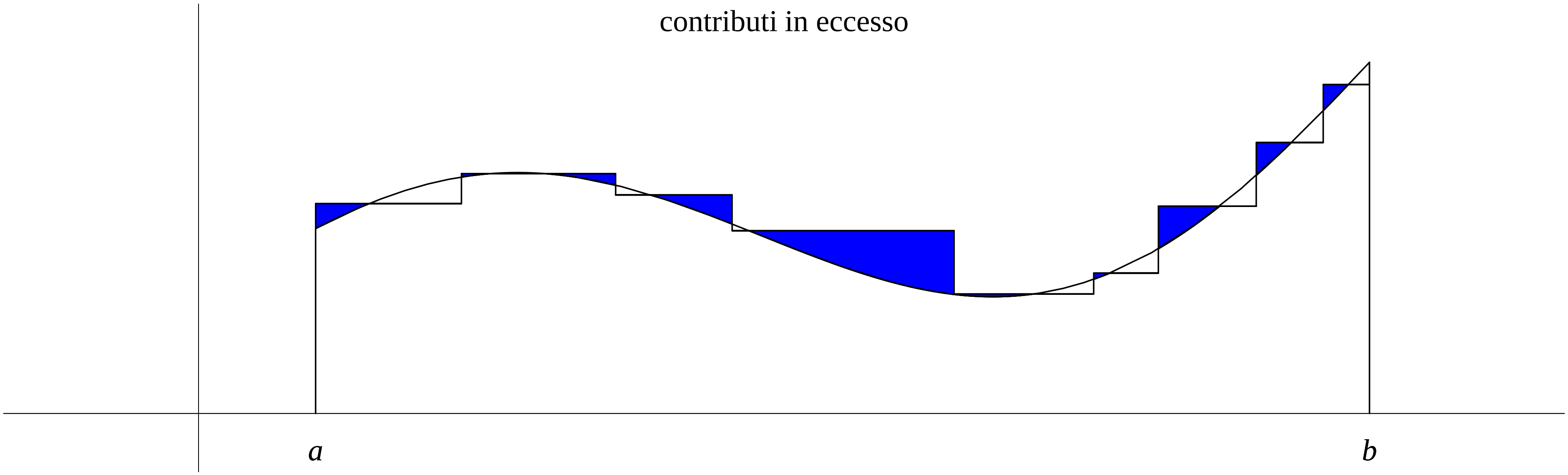
- Prendiamo una f e una Π.
- Come facciamo a capire se è piccola la differenza
  - **fra** $S(f, \Pi)$



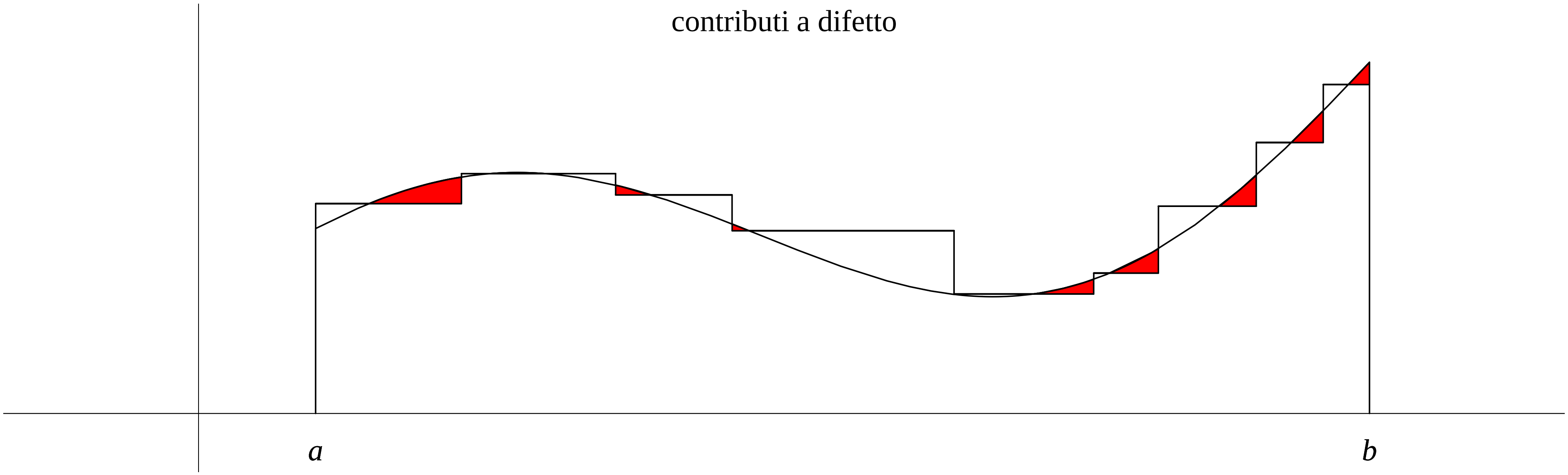
- Prendiamo una f e una Π.
- Come facciamo a stimare se è piccola la differenza
  - **fra** $S(f, \Pi)$
  - **e l'area "vera", che è incognita?**



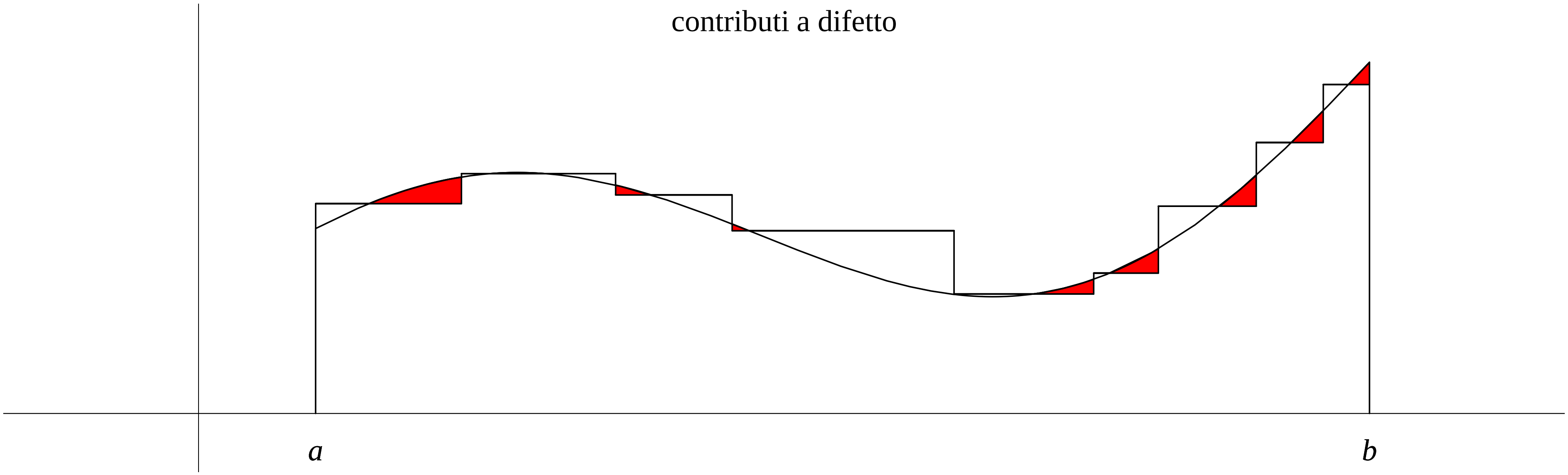
- I rettangolini in certe zone spuntano al di sopra della f,



- I rettangolini in certe zone spuntano al di sopra della f,
  - **e lì contribuiscono in eccesso,**

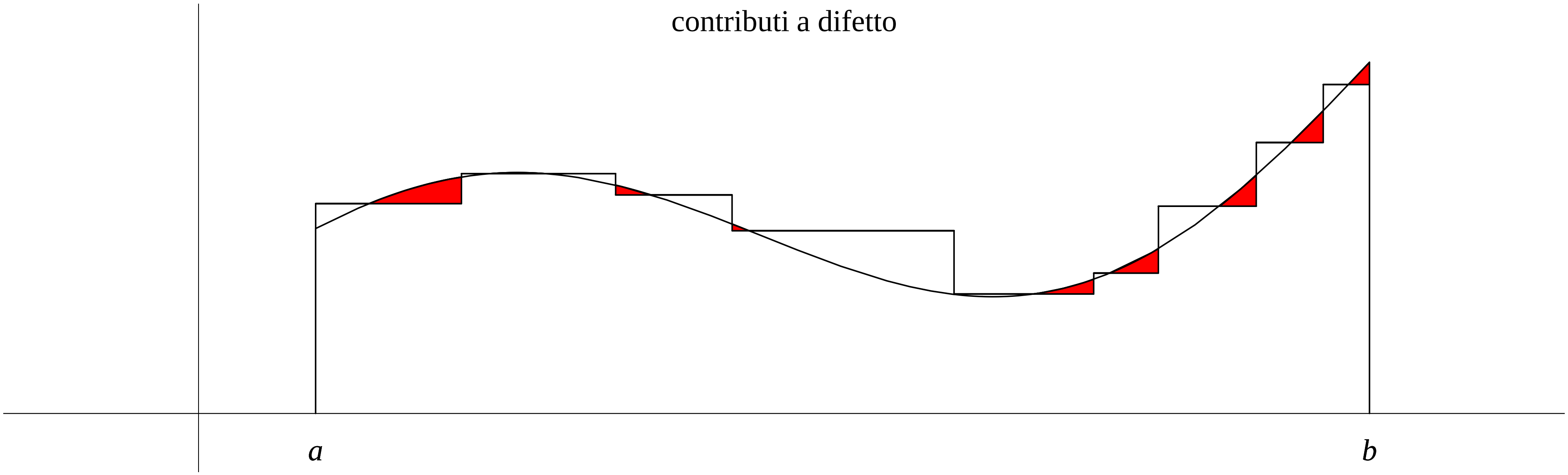


- I rettangolini in certe zone spuntano al di sopra della f,
  - **e lì contribuiscono in eccesso,**
- mentre altrove stanno sotto

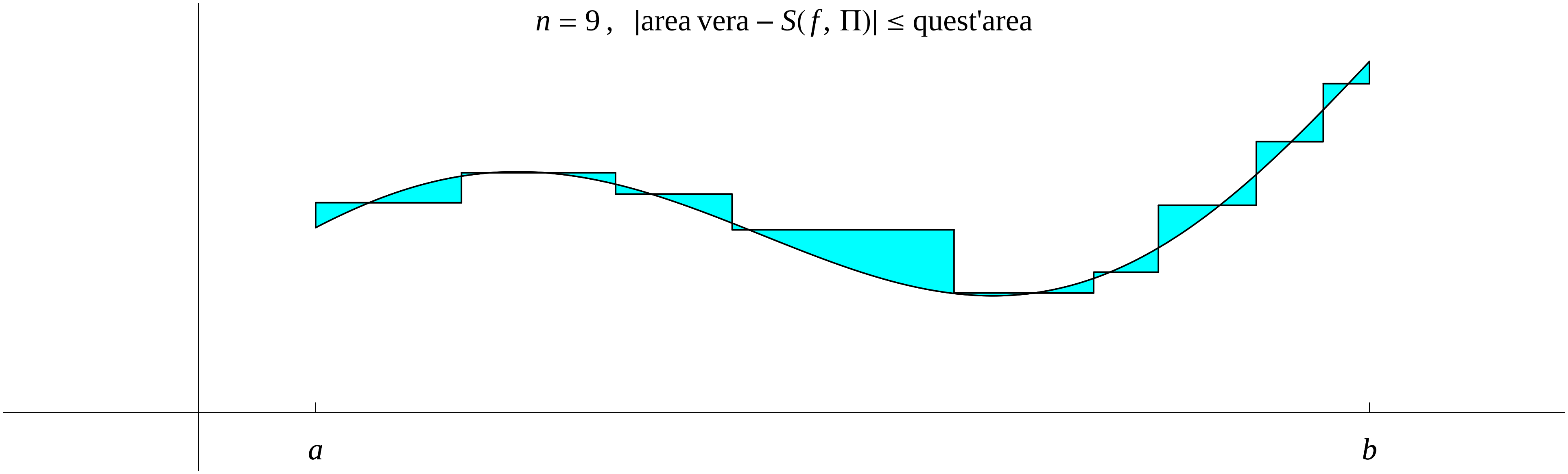


- I rettangolini in certe zone spuntano al di sopra della f,
  - **e lì contribuiscono in eccesso,**
- mentre altrove stanno sotto
  - **e contribuiscono per difetto.**

Scarti dall'area

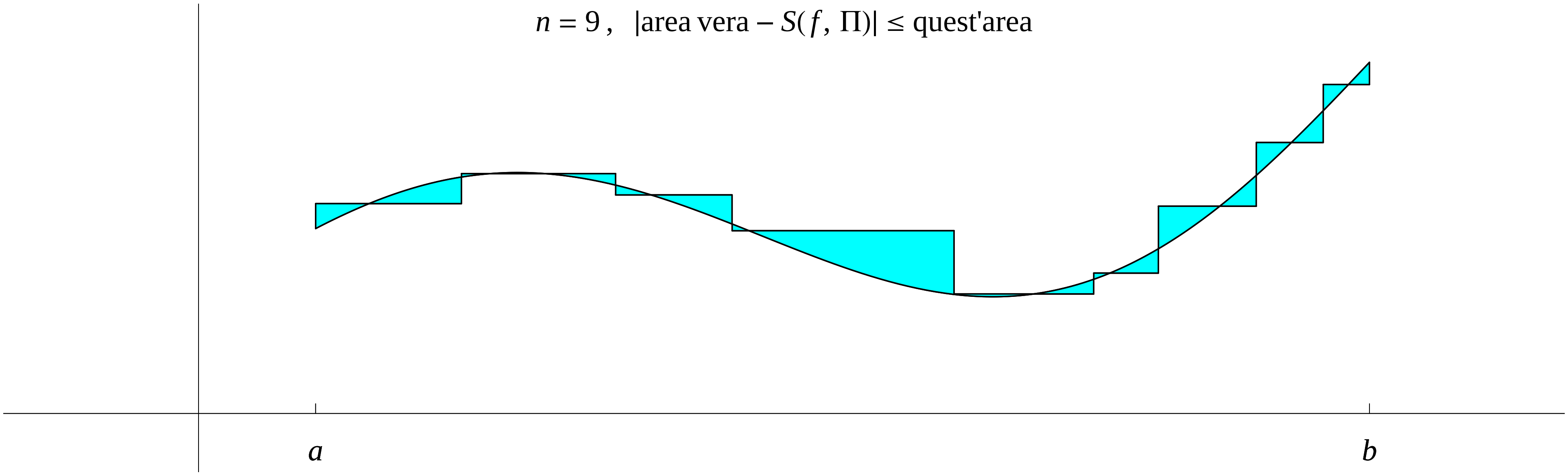


- I rettangolini in certe zone spuntano al di sopra della f,
  - **e lì contribuiscono in eccesso,**
- mentre altrove stanno sotto
  - **e contribuiscono per difetto.**
- Ci sarà una compensazione parziale fra gli eccessi e di difetti.



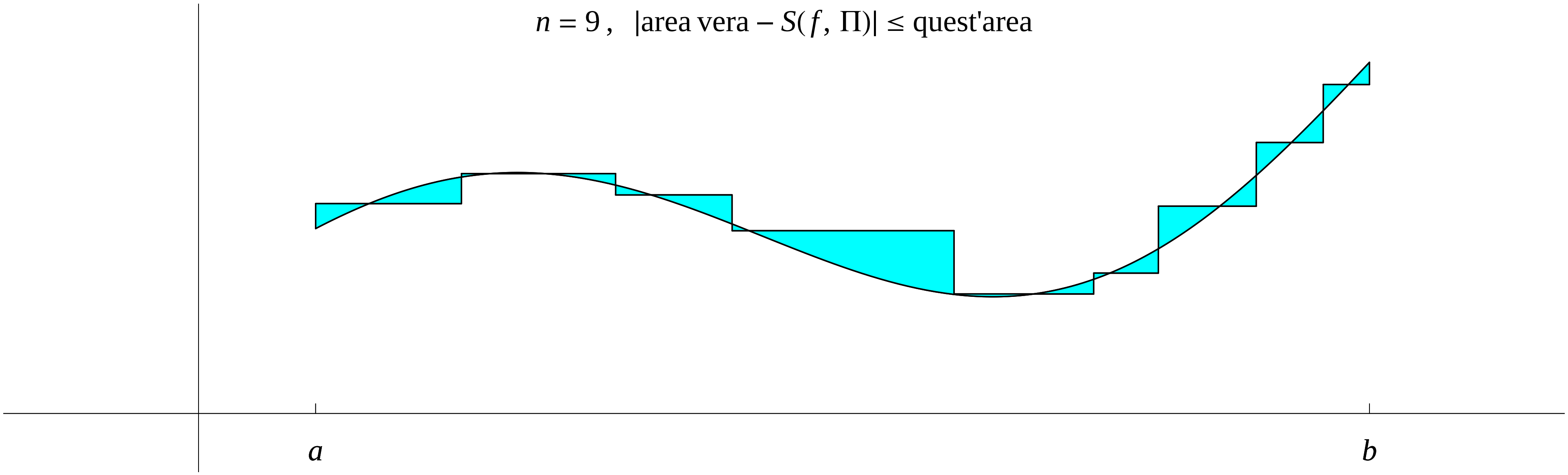
- Consideriamo la regione compresa fra il grafico di f e i lati superiori dei rettangolini, senza badare all’ordine:

Scarti dall'area



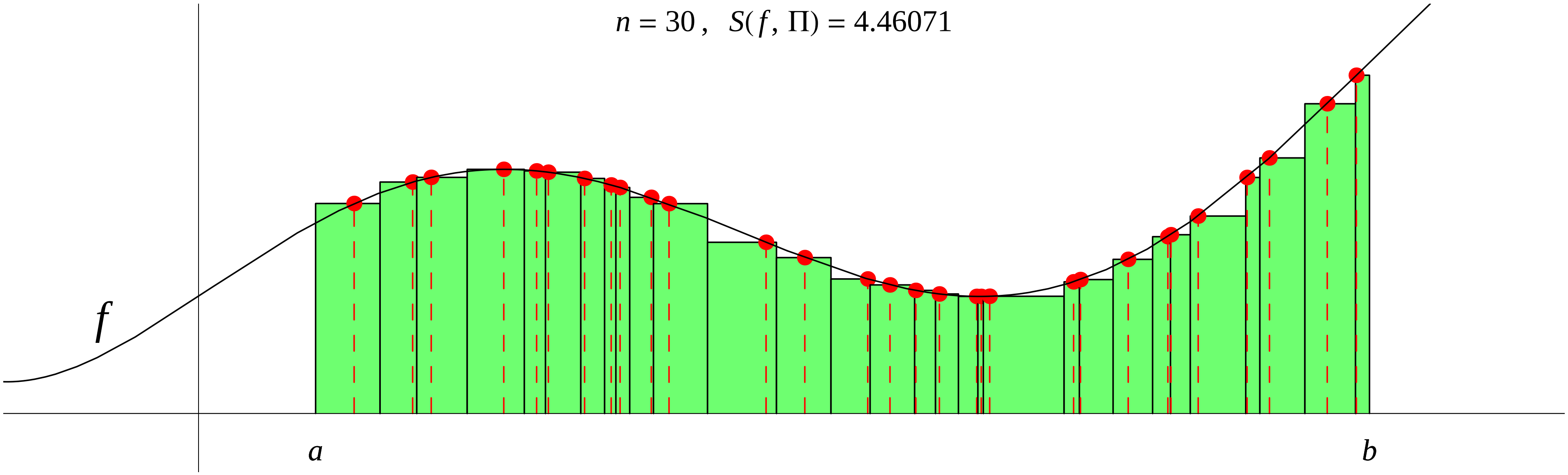
- Consideriamo la regione compresa fra il grafico di f e i lati superiori dei rettangolini, senza badare all'ordine:
  - **La sua area è quella che otterremmo prendendo gli eccessi e di difetti tutti con lo stesso segno;**

Scarti dall'area

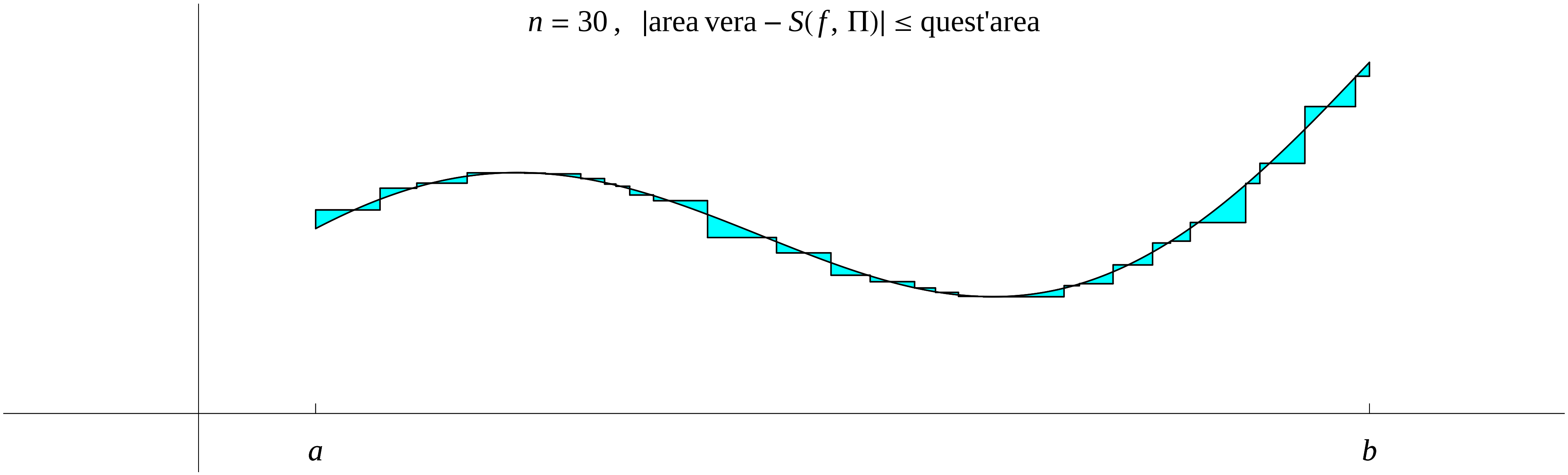


- Consideriamo la regione compresa fra il grafico di f e i lati superiori dei rettangolini, senza badare all'ordine:
  - **La sua area è quella che otterremmo prendendo gli eccessi e di difetti tutti con lo stesso segno;**
  - **Quindi quest'area è una stima per eccesso del valore assoluto della differenza fra l'area vera e quella del plurirettangolo.**

Scarti dall'area



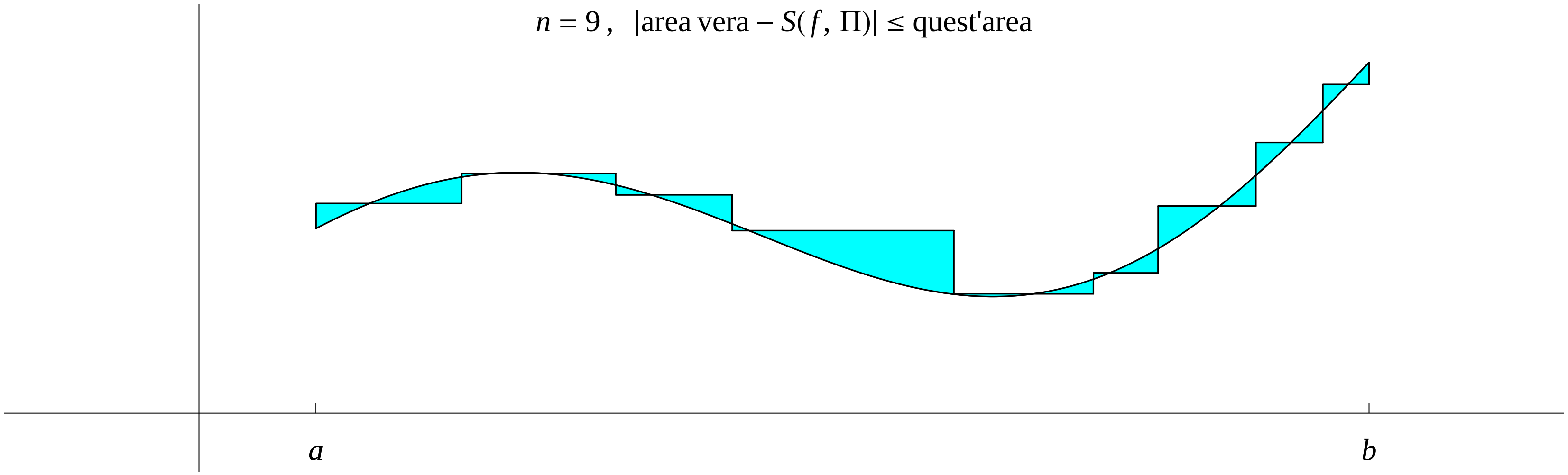
- Prima avevamo mostrato un Π con 30 rettangolini.

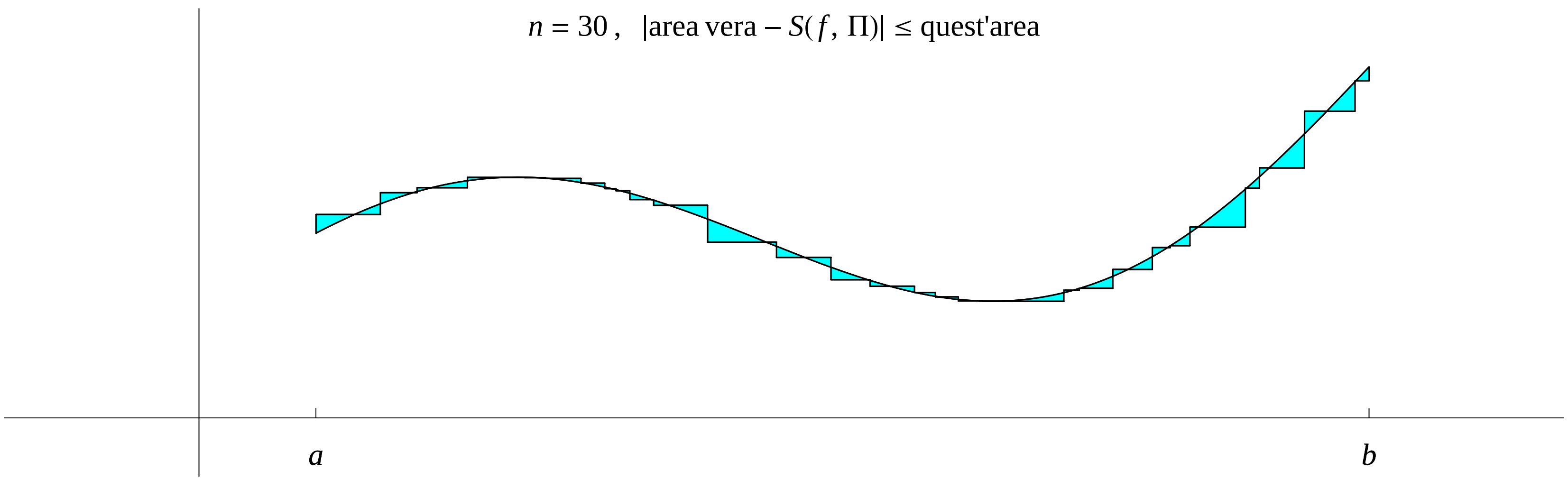


- Prima avevamo mostrato un Π con 30 rettangolini.
- Una stima dell'errore in questo caso è l'area di questa regione.

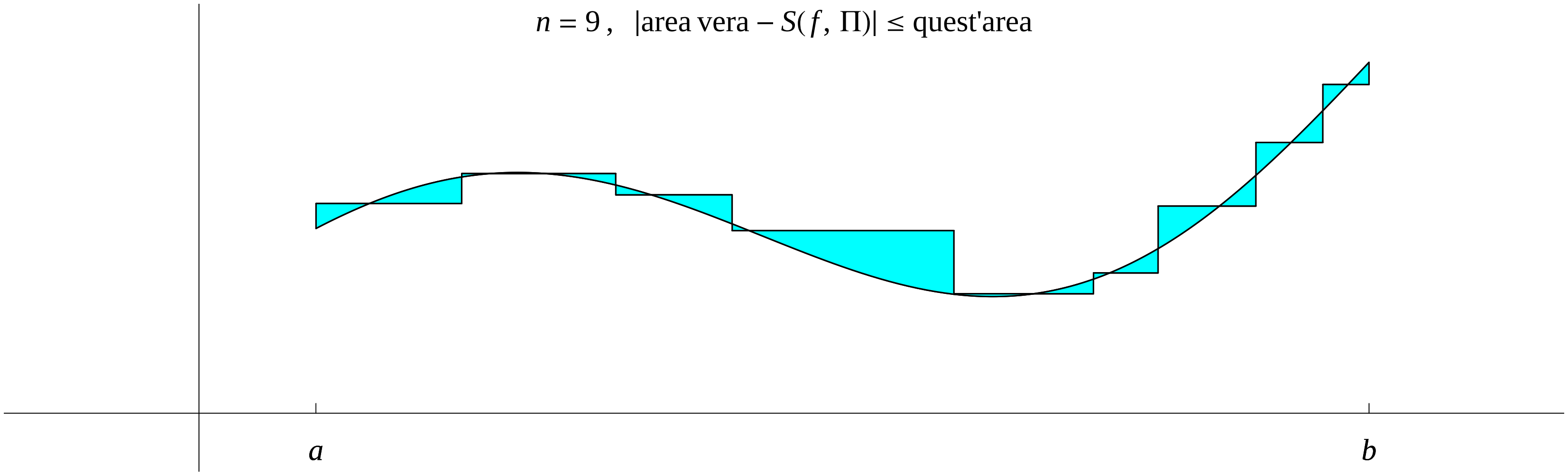
Confronto

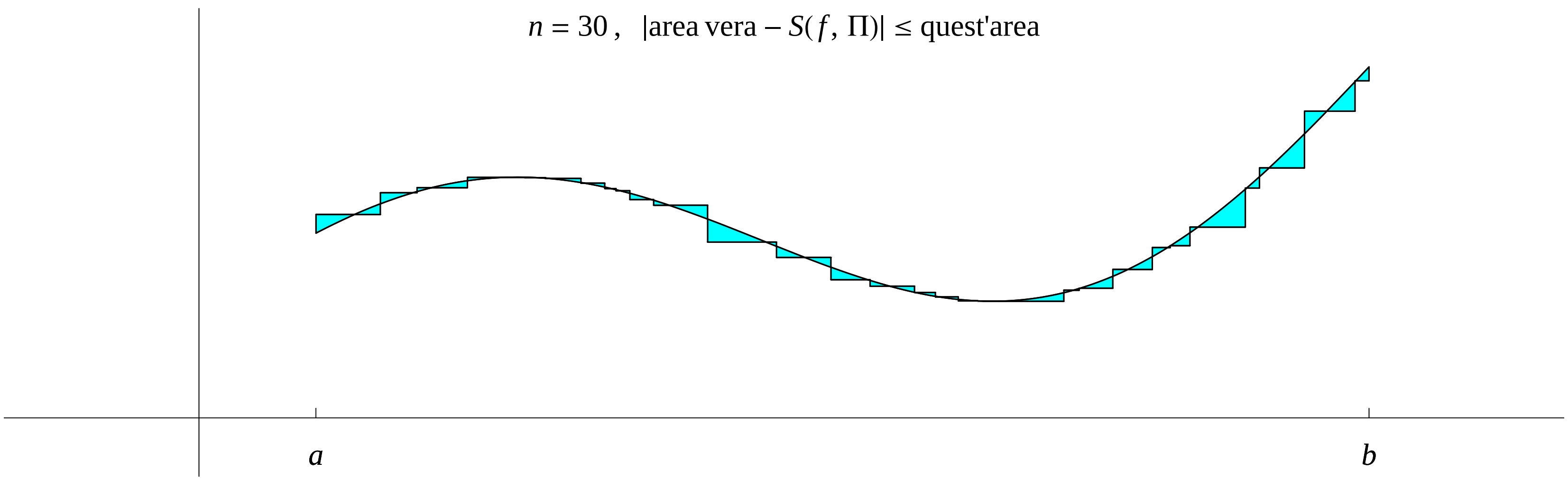
- **Confronto fra le stime con 9 e 30 rettangolini:**





- **Confronto fra le stime con 9 e 30 rettangolini:**

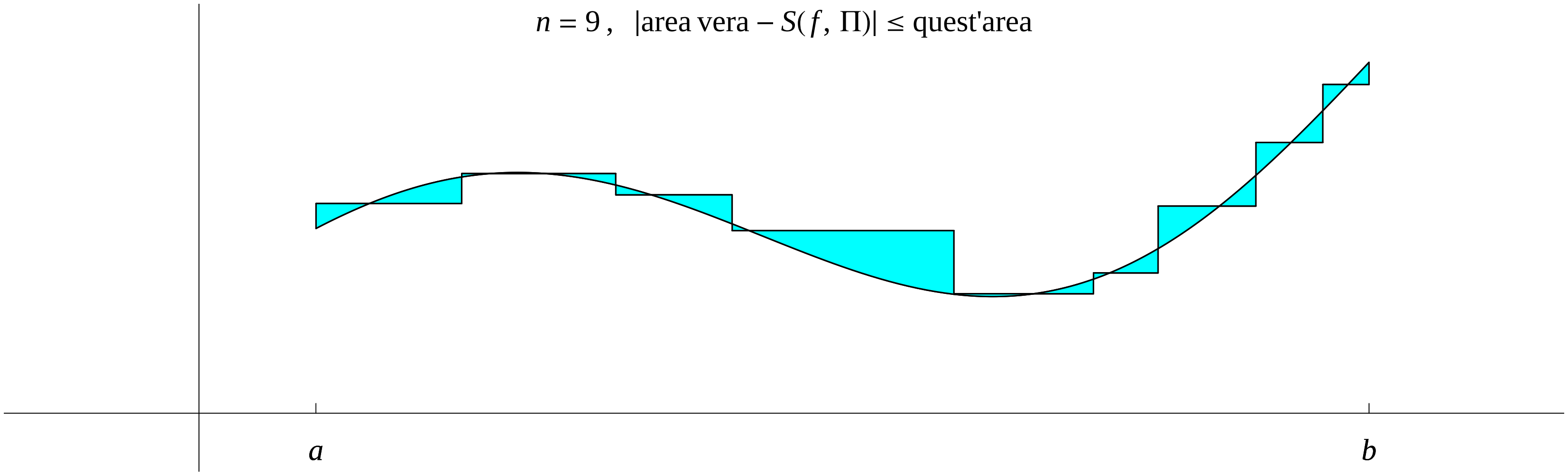


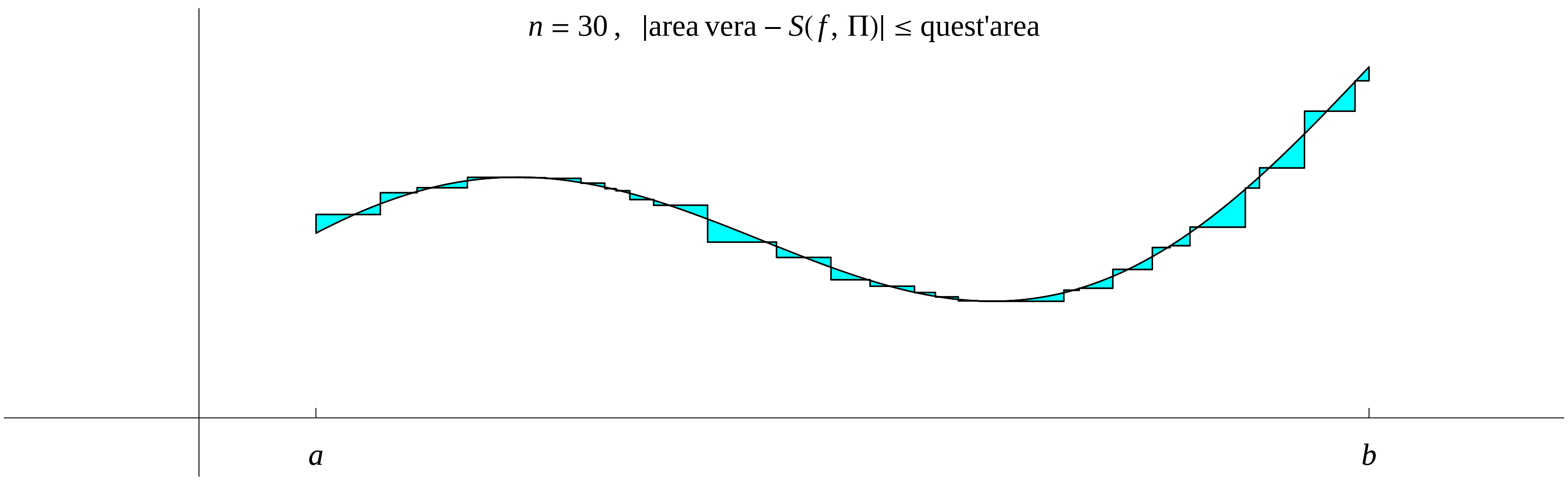


  - La seconda regione è sensibilmente più “sottile”.

Confronto

- **Confronto fra le stime con 9 e 30 rettangolini:**

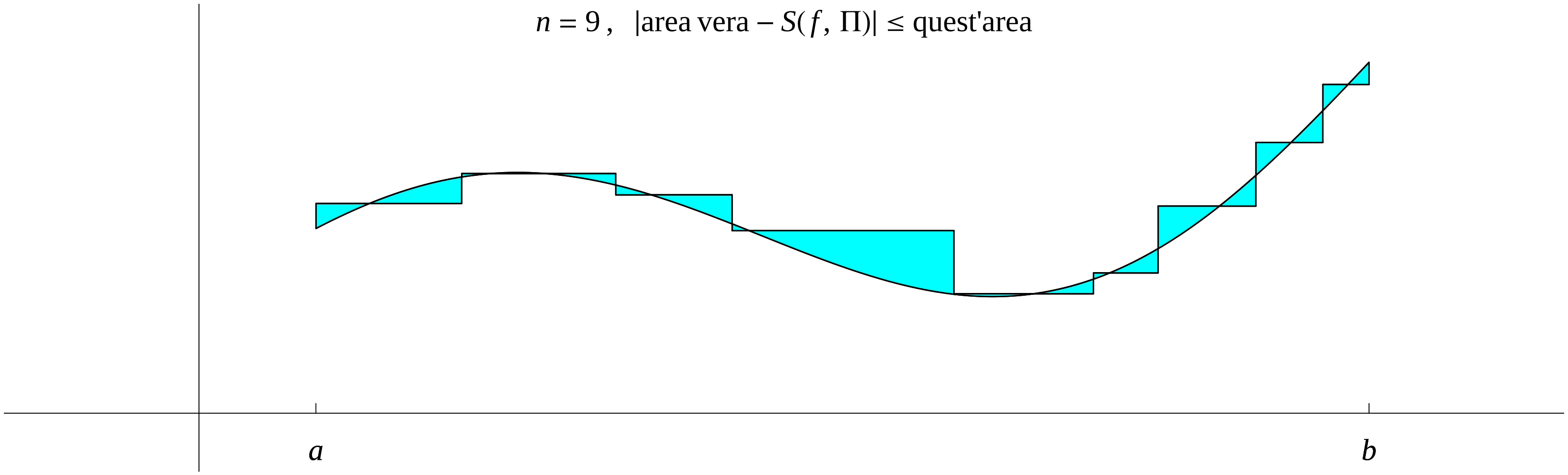


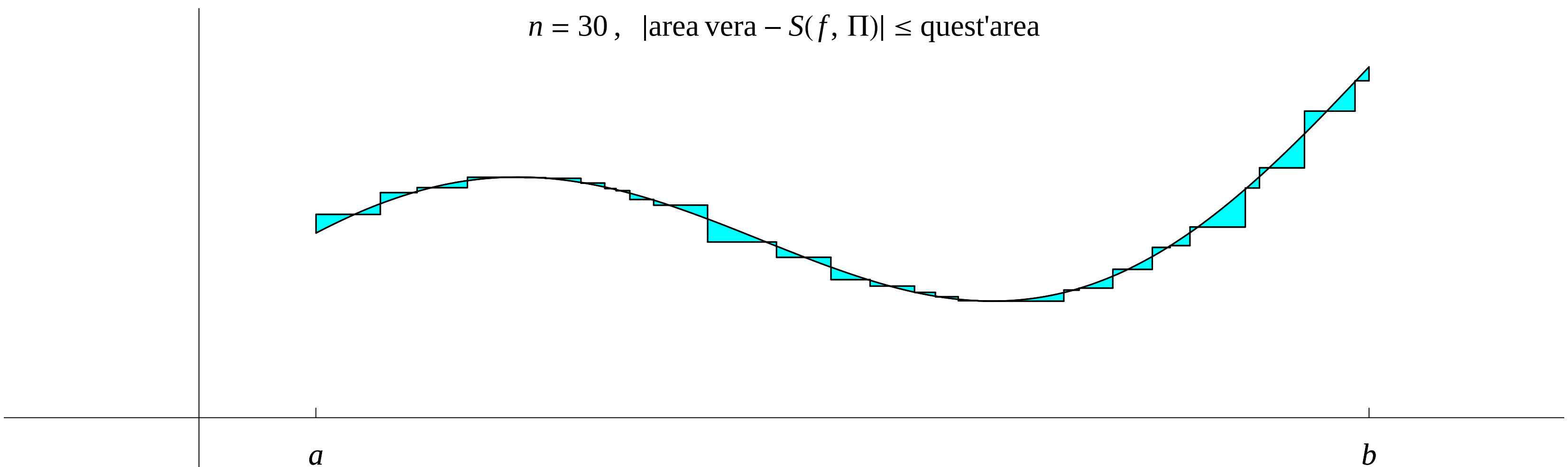


  - La seconda area dovrebbe essere più piccola.

Confronto

- **Confronto fra le stime con 9 e 30 rettangolini:**





  - $S(f,\Pi)$ sarà probabilmente più vicina al valore "vero" per $n = 30$ che per $n = 9$.

Esperimento

- *Idea da testare:*

- ***Idea da testare:***
  - $S(f, \Pi)$ è vicina a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.

- ***Idea da testare:***
  - $S(f, \Pi)$ è vicina a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.
- ***Esperimento numerico di verifica:***

Esperimento

- ***Idea da testare:***
  - $S(f, \Pi)$ è vicina a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.
- ***Esperimento numerico di verifica:***
  - per ogni $n = 5, 10, 15, 20, \ldots, 195, 200$ ho generato 4 suddivisioni casuali Π con n intervallini,

Esperimento

- ***Idea da testare:***
  - $S(f, \Pi)$ è vicina a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.
- ***Esperimento numerico di verifica:***
  - per ogni $n = 5, 10, 15, 20, \dots, 195, 200$ ho generato 4 suddivisioni casuali Π con n intervallini,
  - per ciascuna di esse

Esperimento

- ***Idea da testare:***
  - $S(f, \Pi)$ è vicina a piacere al valore “vero” non appena n è abbastanza grande.
- ***Esperimento numerico di verifica:***
  - per ogni $n = 5, 10, 15, 20, \ldots, 195, 200$ ho generato 4 suddivisioni casuali Π con n intervallini,
  - per ciascuna di esse
    - **ho calcolato $S(f, \Pi)$,**

- ***Idea da testare:***
  - $S(f, \Pi)$ è vicina a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.
- ***Esperimento numerico di verifica:***
  - per ogni $n = 5, 10, 15, 20, \ldots, 195, 200$ ho generato 4 suddivisioni casuali Π con n intervallini,
  - per ciascuna di esse
    - **ho calcolato $S(f, \Pi)$,**
    - **e poi ho segnato su un grafico il punto**

- ***Idea da testare:***
  - $S(f, \Pi)$ è vicina a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.
- ***Esperimento numerico di verifica:***
  - per ogni $n = 5, 10, 15, 20, \ldots, 195, 200$ ho generato 4 suddivisioni casuali Π con n intervallini,
  - per ciascuna di esse
    - **ho calcolato $S(f, \Pi)$,**
    - **e poi ho segnato su un grafico il punto**
      - di ascissa n

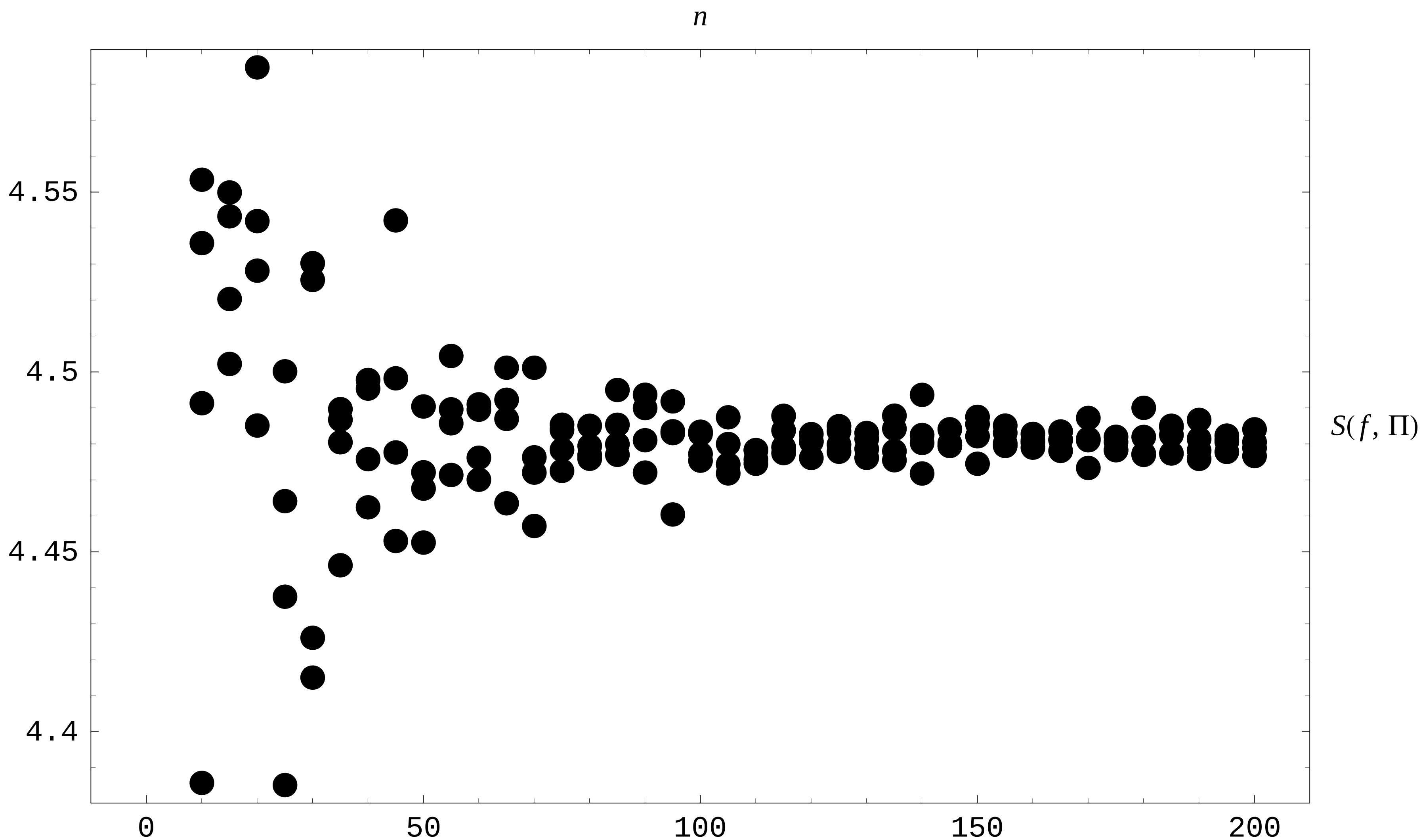
Esperimento

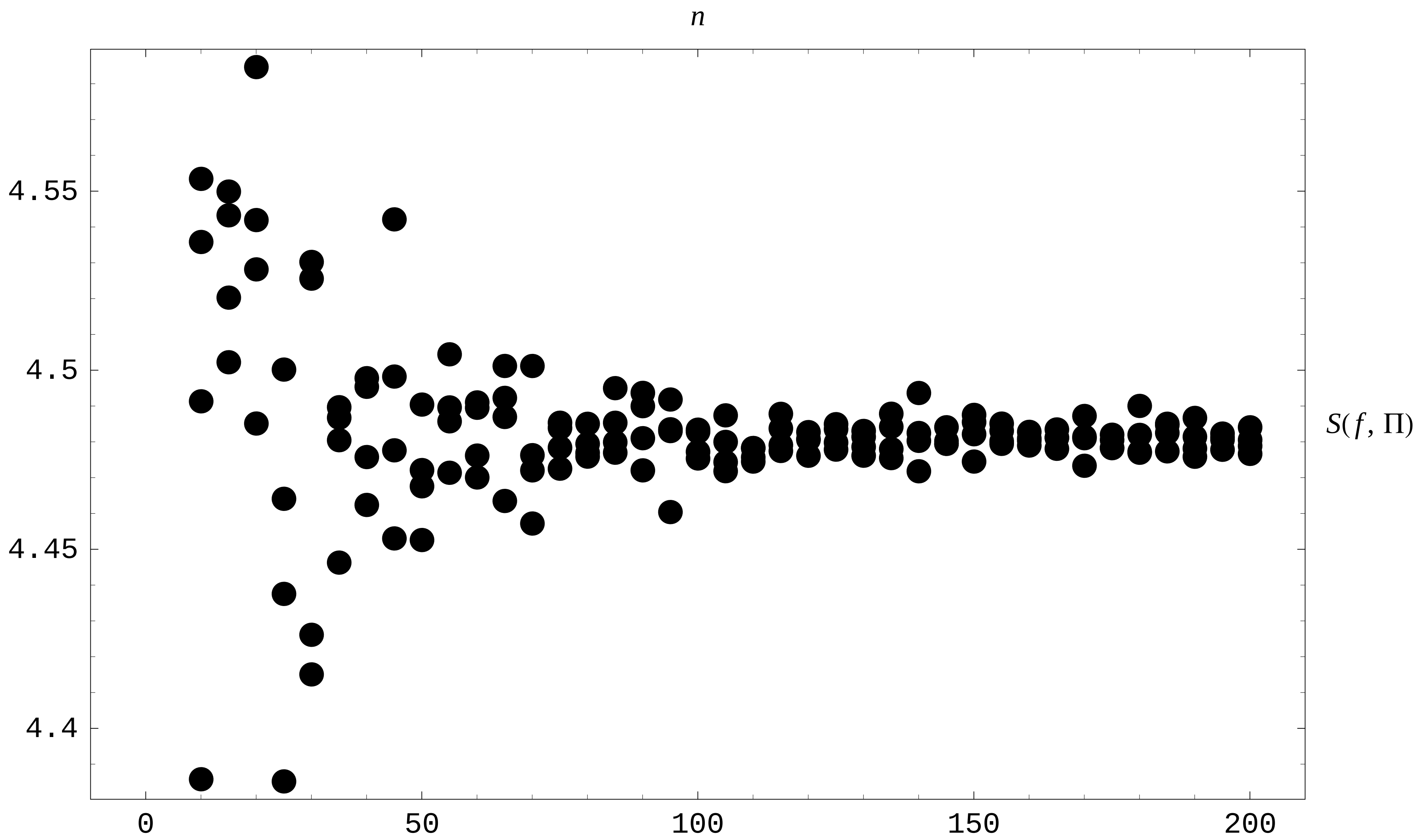
- ***Idea da testare:***
  - $S(f,\Pi)$ è vicina a piacere al valore “vero” non appena n è abbastanza grande.
- ***Esperimento numerico di verifica:***
  - per ogni $n = 5, 10, 15, 20, \ldots, 195, 200$ ho generato 4 suddivisioni casuali Π con n intervallini,
  - per ciascuna di esse
    - **ho calcolato $S(f,\Pi)$,**
    - **e poi ho segnato su un grafico il punto**
      - di ascissa n
      - e ordinata $S(f,\Pi)$.

Esperimento

- ***Idea da testare:***
  - $S(f, \Pi)$ è vicina a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.
- ***Esperimento numerico di verifica:***
  - per ogni $n = 5, 10, 15, 20, \ldots, 195, 200$ ho generato 4 suddivisioni casuali Π con n intervallini,
  - per ciascuna di esse
    - **ho calcolato $S(f, \Pi)$,**
    - **e poi ho segnato su un grafico il punto**
      - di ascissa n
      - e ordinata $S(f, \Pi)$.
  - Il risultato è il seguente:

Esperimento





- In effetti le $S(f, \Pi)$ si stabilizzano al crescere di n.

Critica

Critica

- *L'esperimento sembrerebbe supportare l'idea che*

- ***L'esperimento sembrerebbe supportare l'idea che***
  - $S(f, \Pi)$ è vicino a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.

Critica

- ***L'esperimento sembrerebbe supportare l'idea che***
  - $S(f, \Pi)$ è vicino a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.
- ***Però c'è un'obiezione:***

Critica

- ***L'esperimento sembrerebbe supportare l'idea che***
  - $S(f,\Pi)$ è vicino a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.
- ***Però c'è un'obiezione:***
  - Cosa succederebbe con una suddivisione anomala

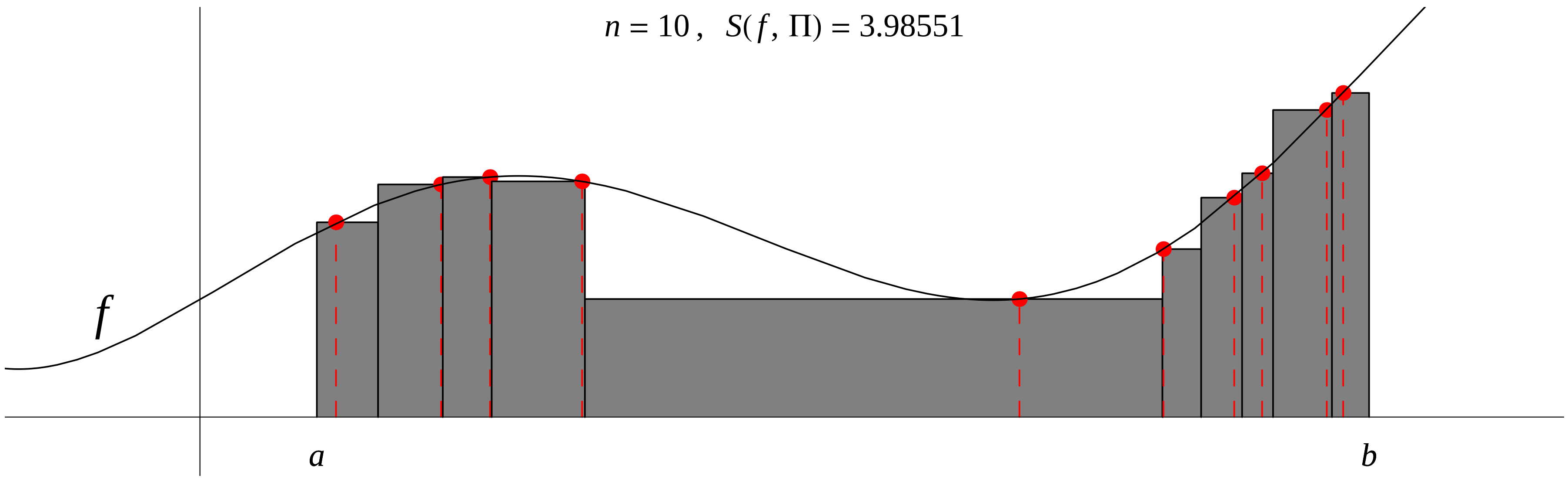
Critica

- ***L'esperimento sembrerebbe supportare l'idea che***
  - $S(f, \Pi)$ è vicino a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.
- ***Però c'è un'obiezione:***
  - Cosa succederebbe con una suddivisione anomala
    - **con n alto,**

Critica

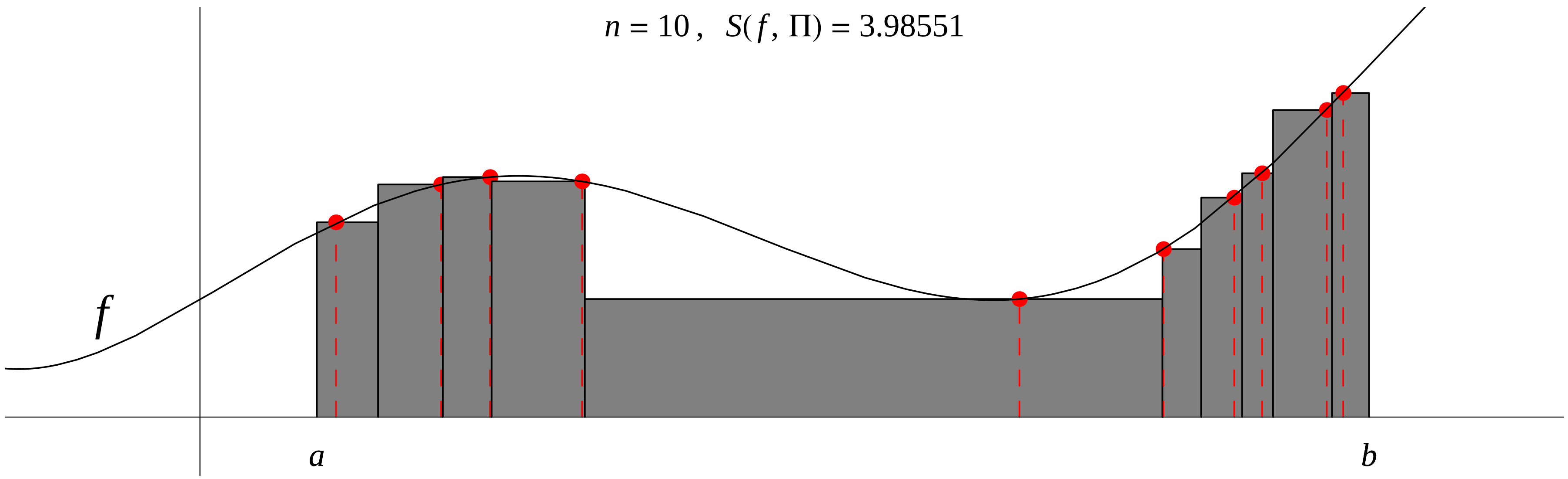
- ***L'esperimento sembrerebbe supportare l'idea che***
  - $S(f, \Pi)$ è vicino a piacere al valore "vero" non appena n è abbastanza grande.
- ***Però c'è un'obiezione:***
  - Cosa succederebbe con una suddivisione anomala
    - **con n alto,**
    - **ma in cui un intervallino è mostruosamente più grande degli altri?**

- Per esempio:



Critica

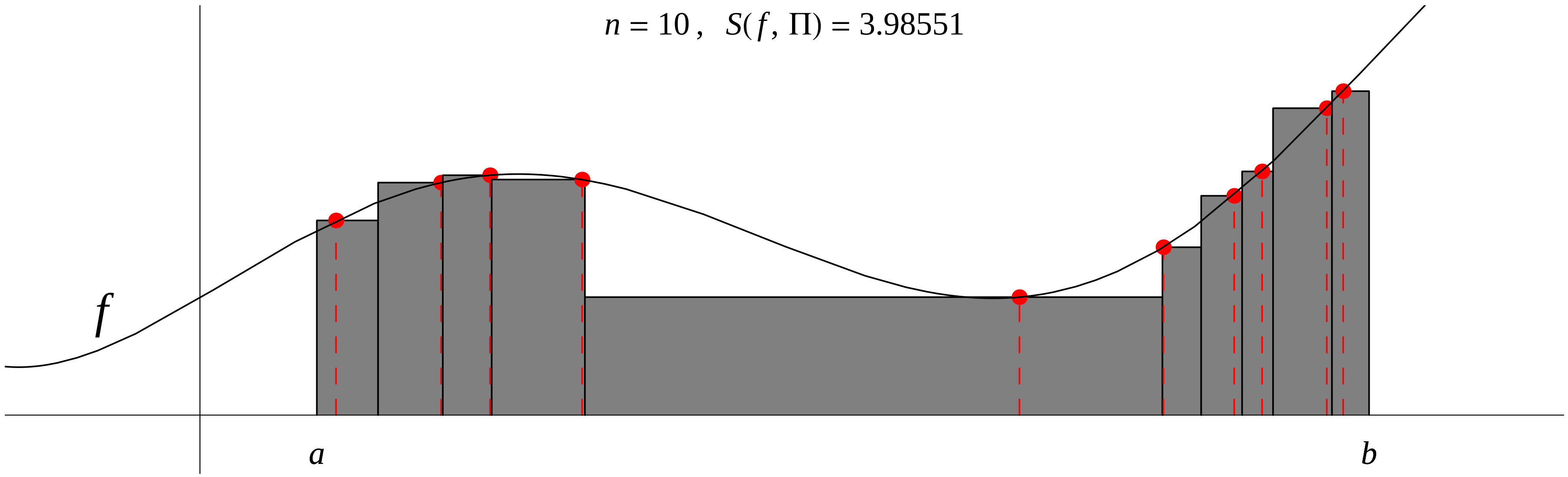
- Per esempio:



- In effetti nessuna Π dell'esperimento era così:

Critica

- Per esempio:



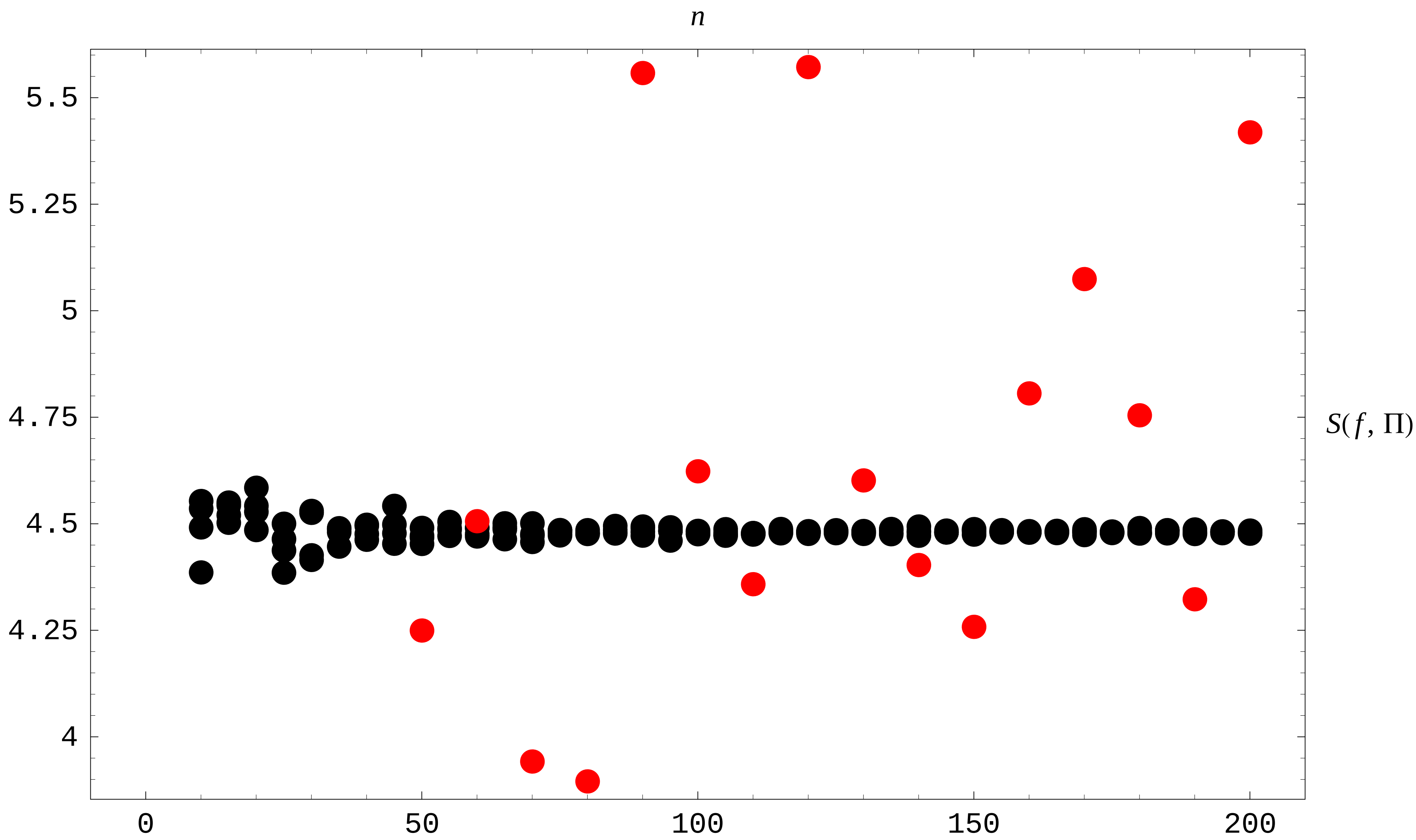
- In effetti nessuna Π dell'esperimento era così:
  - **il meccanismo che avevo usato produce suddivisioni con intervallini di ampiezze abbastanza uniformi.**

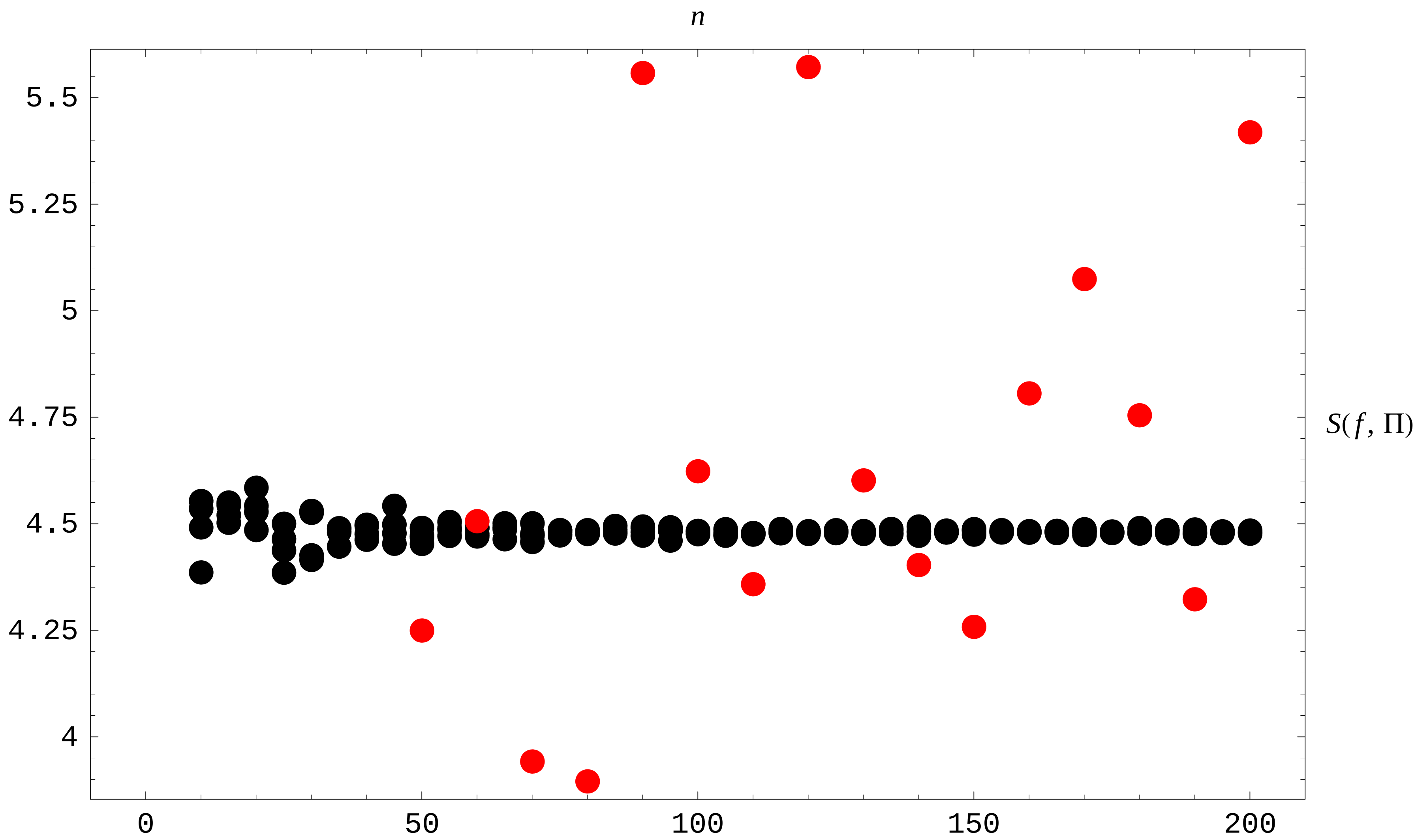
Critica

- Così mi sono rimesso al lavoro e ho generato un secondo campione, tutto fatto di suddivisioni anomale

Critica

- Così mi sono rimesso al lavoro e ho generato un secondo campione, tutto fatto di suddivisioni anomale
- e ho aggiunto i punti corrispondenti in rosso a quelli trovati prima:


n
5.5
5.25
5
4.75
4.5
4.25
4
0
50
100
150
200
S(f, Π)



- Le $S(f, \Pi)$ non si stabilizzano più!

Ampiezza

Ampiezza

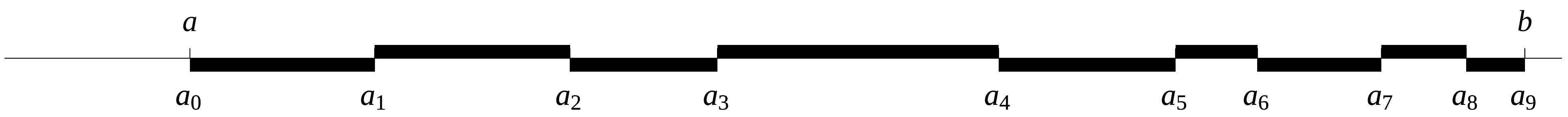
- *La situazione non è disperata:*

Ampiezza

- ***La situazione non è disperata:***
  - semplicemente il parametro n non è una buona misura della "fittezza" di una suddivisione.

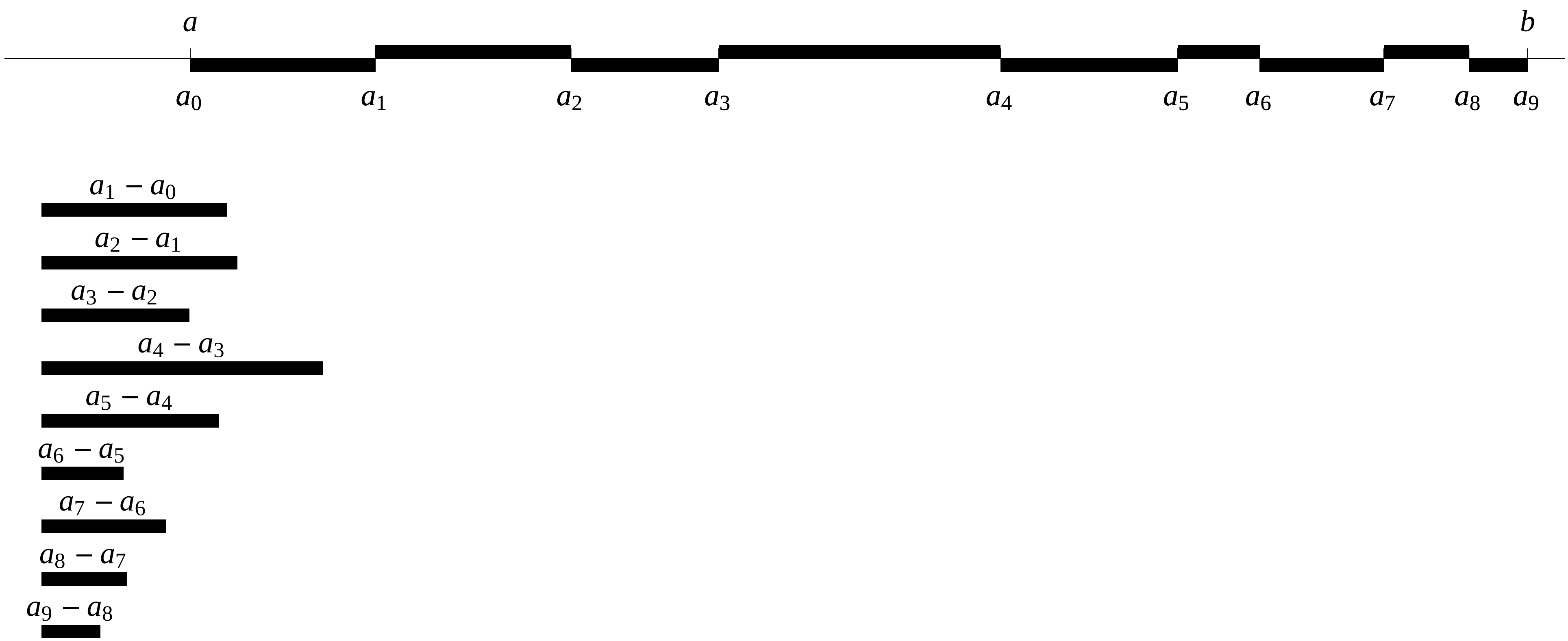
- ***La situazione non è disperata:***
  - semplicemente il parametro n non è una buona misura della “fittezza” di una suddivisione.
  - Una misura più promettente, che tiene conto delle lunghezze degli intervallini si calcola così:

Ampiezza



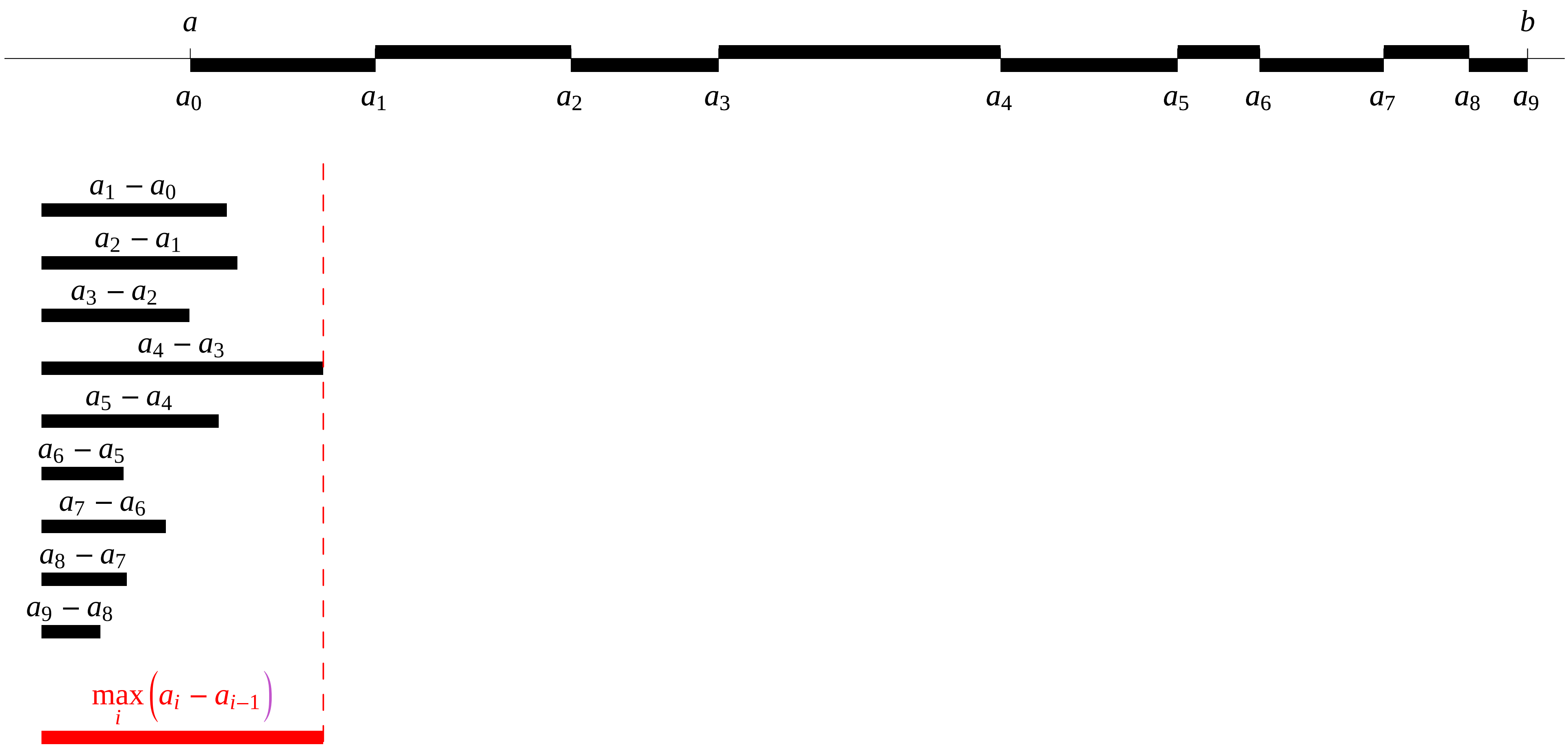
- **prendiamo gli** $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$**;**

Ampiezza



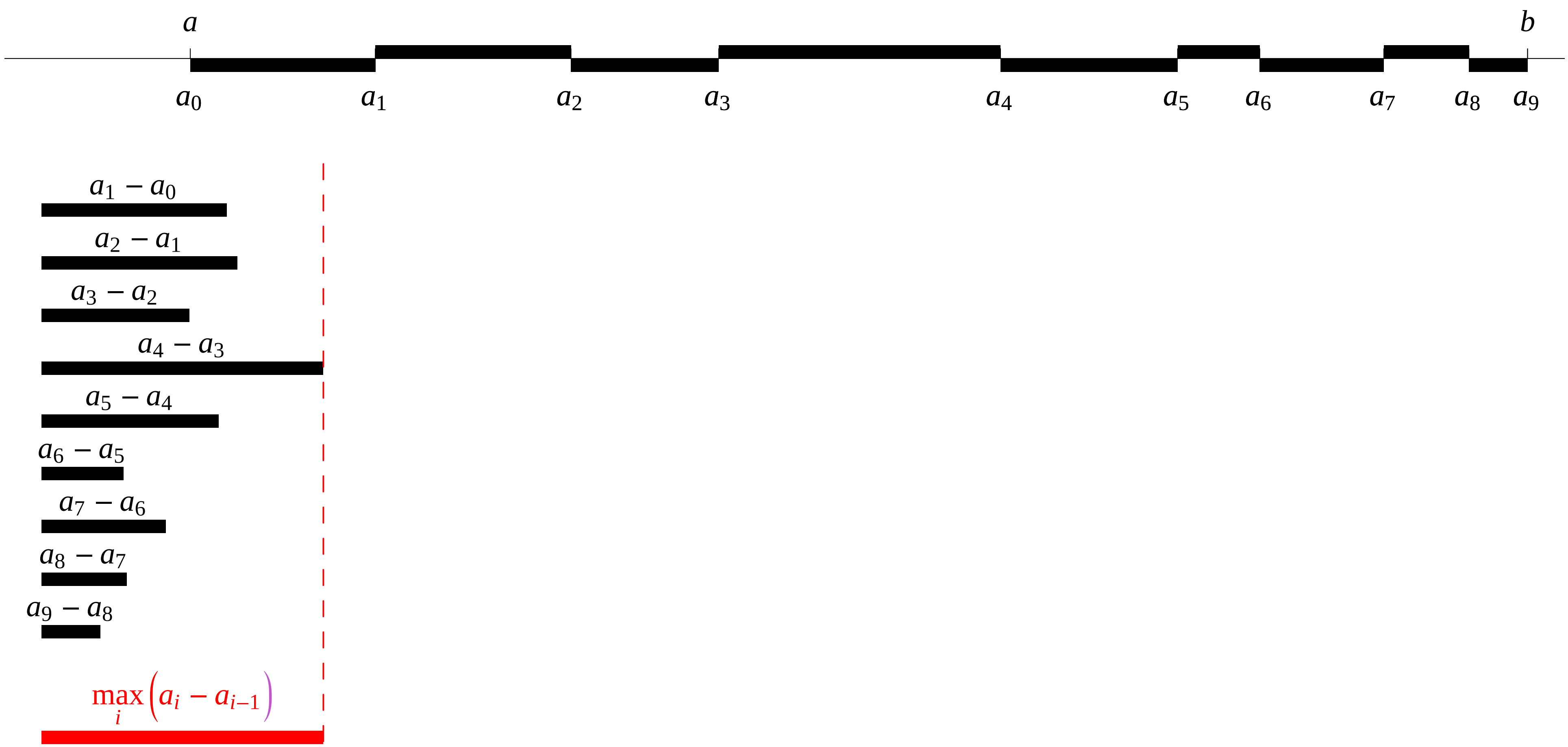
- **calcoliamo le *lunghezze* degli intervallini:** $a_1 - a_0$, $a_2 - a_1$, $\ldots$, $a_n - a_{n-1}$,

Ampiezza



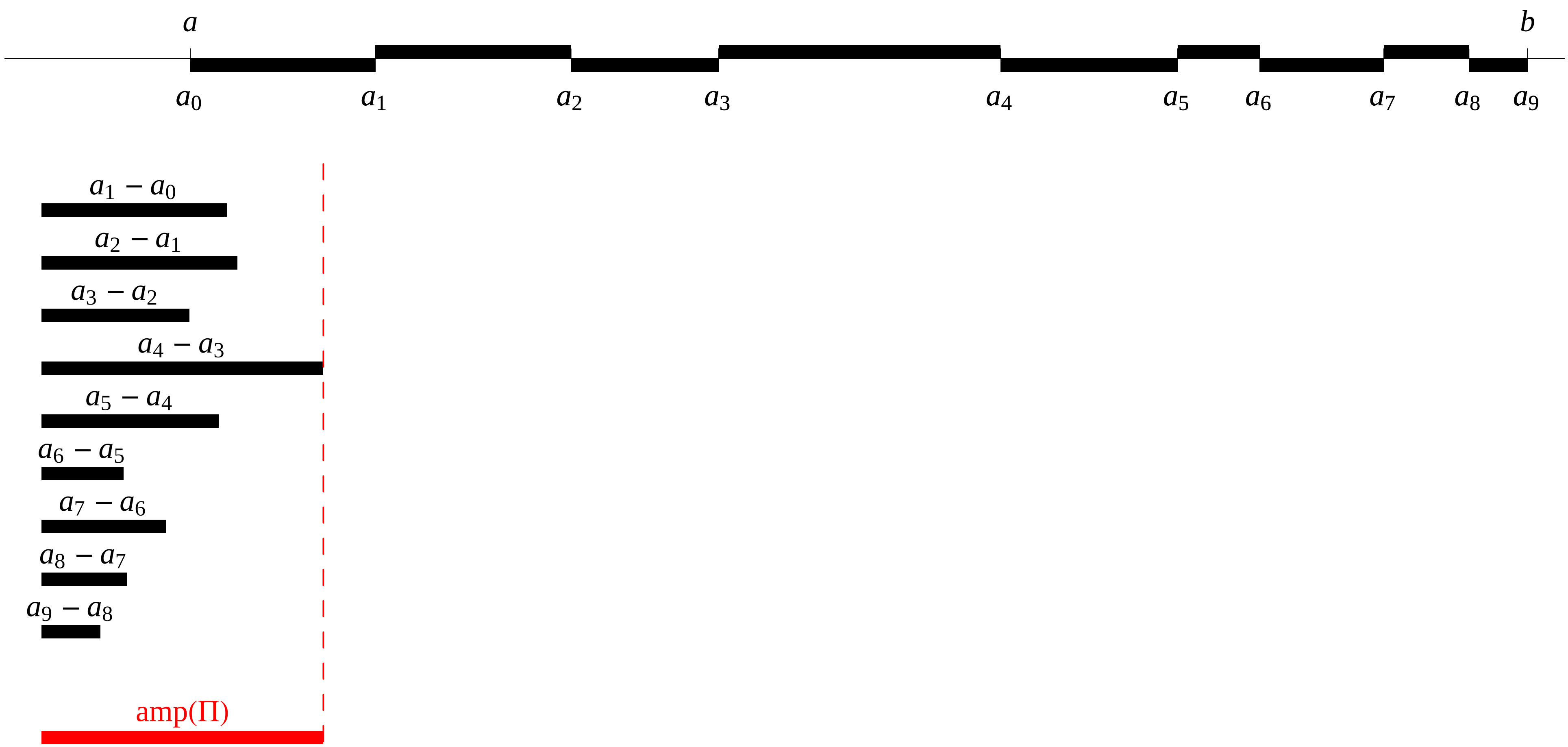
- e prendiamone la più grande: $\max_i(a_i - a_{i-1})$;

Ampiezza

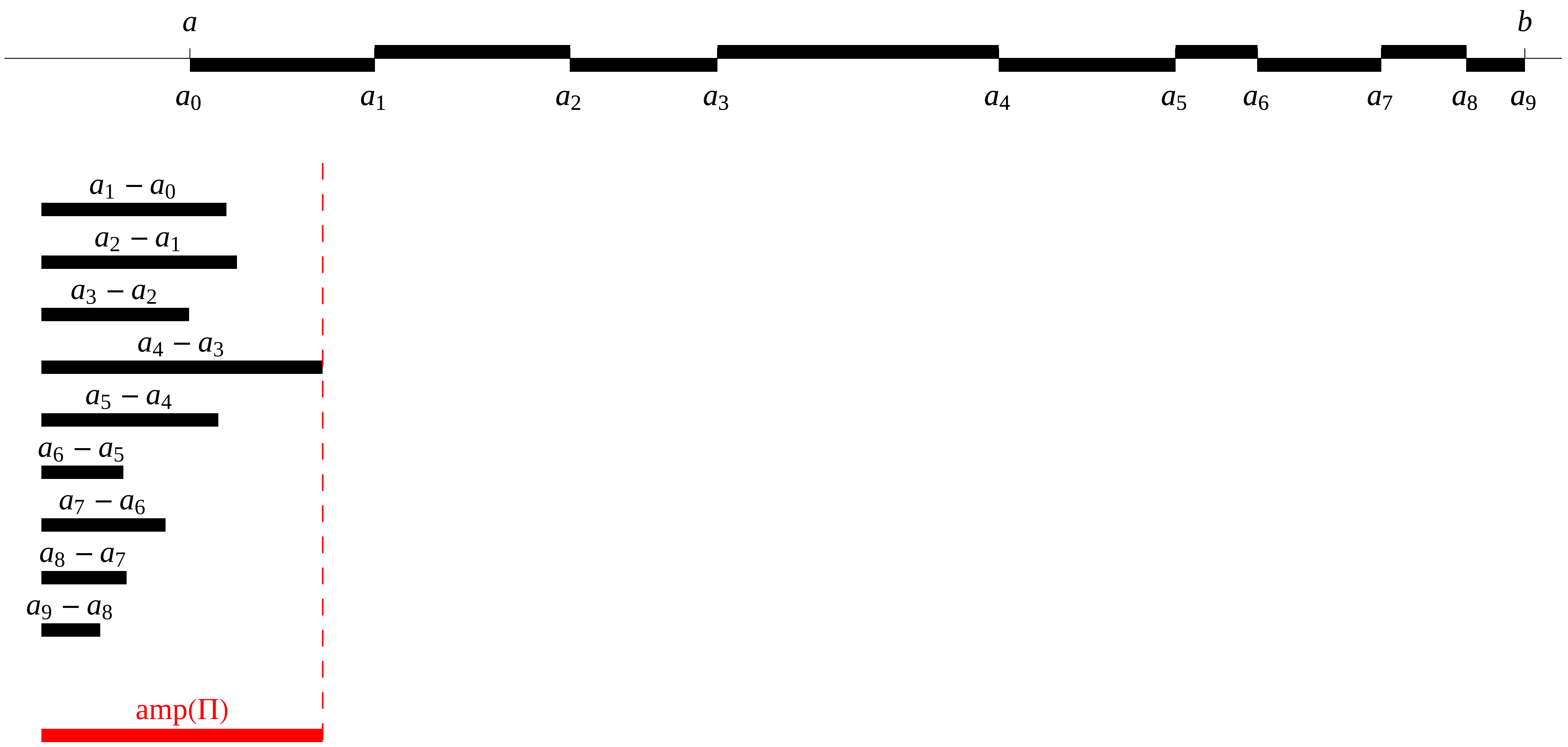


- e prendiamone la più grande: $\max_i(a_i - a_{i-1})$;
- questa quantità sarà l'**ampiezza di** Π.

Ampiezza

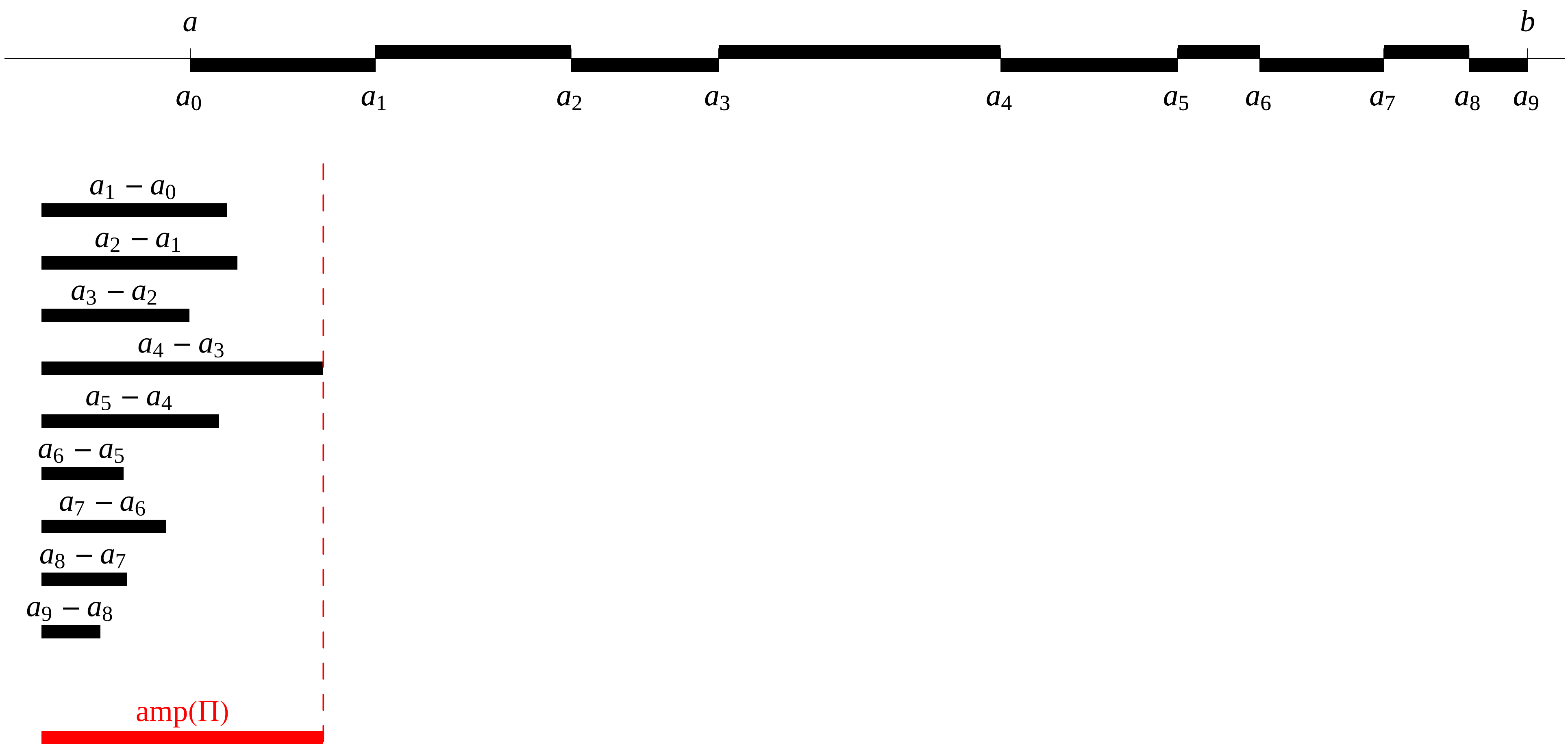


- e prendiamone la più grande: $\max_i(a_i - a_{i-1})$;
- questa quantità sarà l'**ampiezza di** Π.
- Per l'ampiezza di Π useremo il simbolo $\mathrm{amp}(\Pi)$.



- **Insomma:**

$$\operatorname{amp}(\Pi) := \max_{i=1,\ldots,n} (a_i - a_{i-1})$$



- **Insomma:**

$$\mathrm{amp}(\Pi) := \max_{i=1,\ldots,n} (a_i - a_{i-1})$$

  - Gli x_i non entrano nel calcolo di $\mathrm{amp}\,\Pi$.

- Numericamente:

Π			
i	a_i	x_i	$a_i - a_{i-1}$
0	0.30000		
1	0.67372	0.43692	0.37372
2	1.06861	0.74672	0.39489
3	1.36708	1.15961	0.29846
4	1.93574	1.41053	0.56867
5	2.29350	2.14013	0.35776
6	2.45922	2.33497	0.16571
7	2.70993	2.61651	0.25072
8	2.88152	2.79996	0.17159
9	3.00000	2.94618	0.11848
			$\text{amp}(\Pi) = 0.56867$

- *Riprendo ora le stesse suddivisioni di prima, anomale e non,*

Ampiezza

- ***Riprendo ora le stesse suddivisioni di prima, anomale e non,***
  - ma questa volta per ognuna di loro disegno

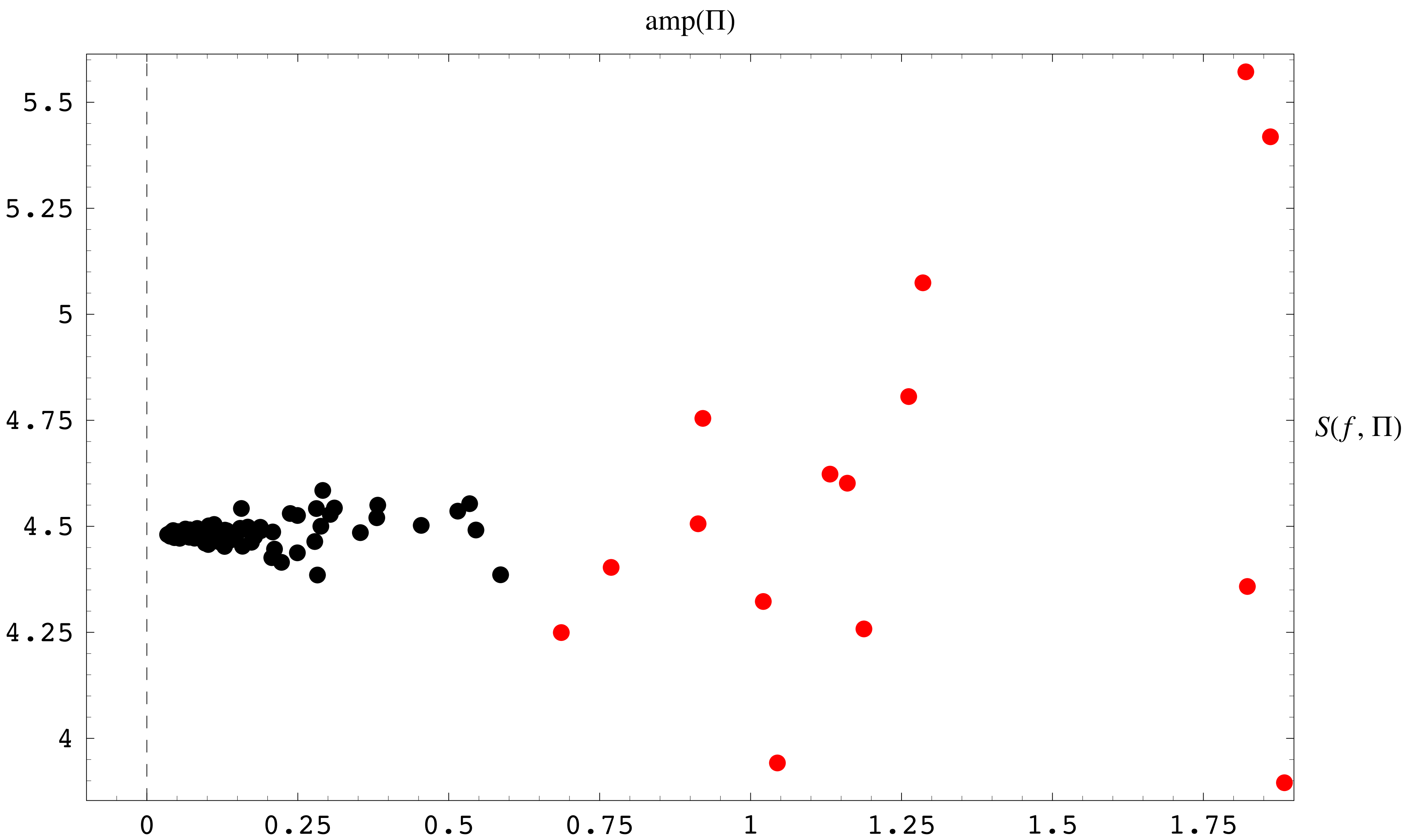
- ***Riprendo ora le stesse suddivisioni di prima, anomale e non,***
  - ma questa volta per ognuna di loro disegno
    - **il punto** $\Big(\mathrm{amp}(\Pi), S(f,\Pi)\Big)$

- ***Riprendo ora le stesse suddivisioni di prima, anomale e non,***
  - ma questa volta per ognuna di loro disegno
    - **il punto** $\left(\operatorname{amp}(\Pi), S(f, \Pi)\right)$
    - **invece del punto** $\left(n, S(f, \Pi)\right)$,

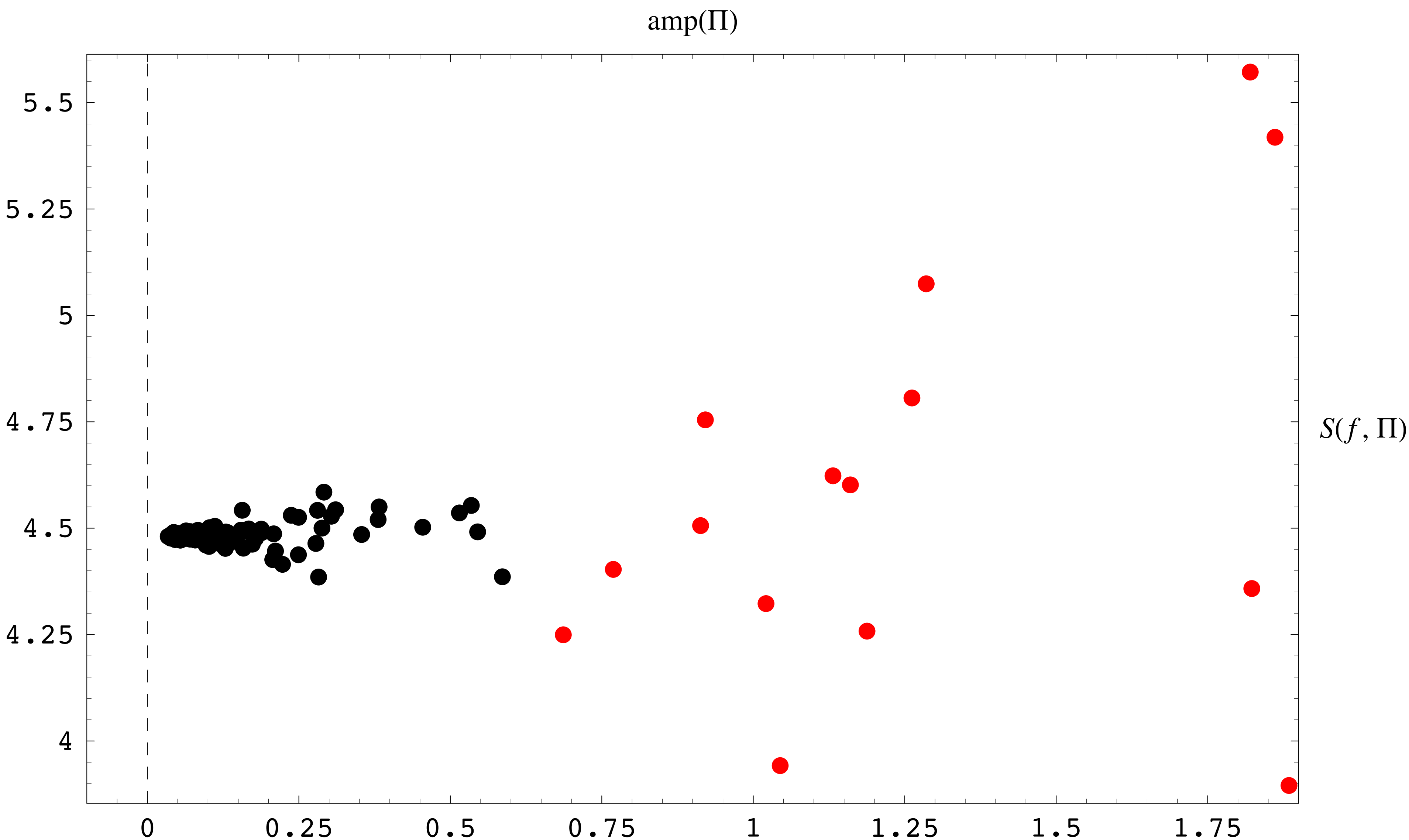
Ampiezza

- ***Riprendo ora le stesse suddivisioni di prima, anomale e non,***
  - ma questa volta per ognuna di loro disegno
    - **il punto** $\big(\mathrm{amp}(\Pi), S(f, \Pi)\big)$
    - **invece del punto** $\big(n, S(f, \Pi)\big)$,

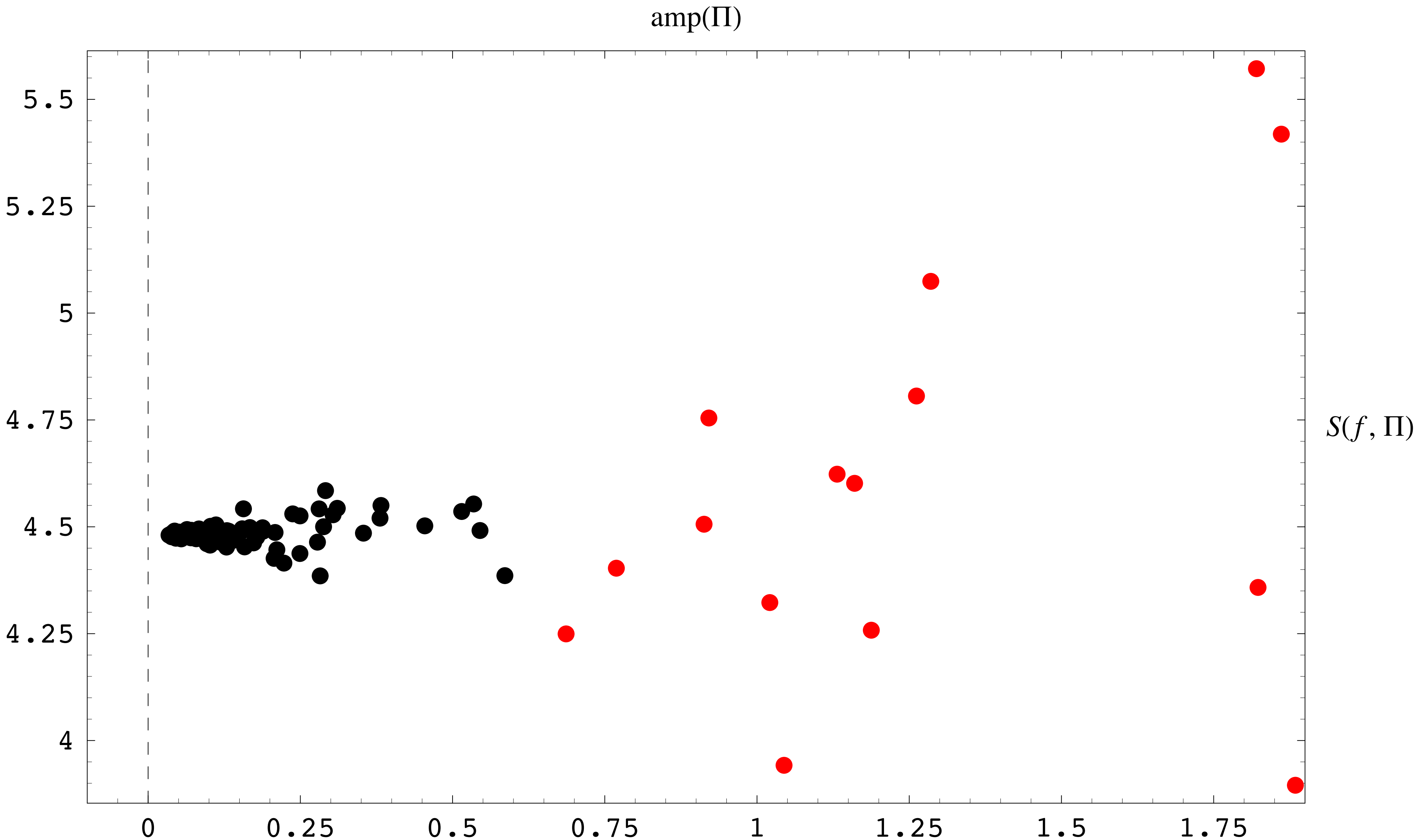
  e vediamo cosa viene fuori:



amp(Π)
5.5
5.25
5
4.75
4.5
4.25
4
0
0.25
0.5
0.75
1
1.25
1.5
1.75
S(f, Π)

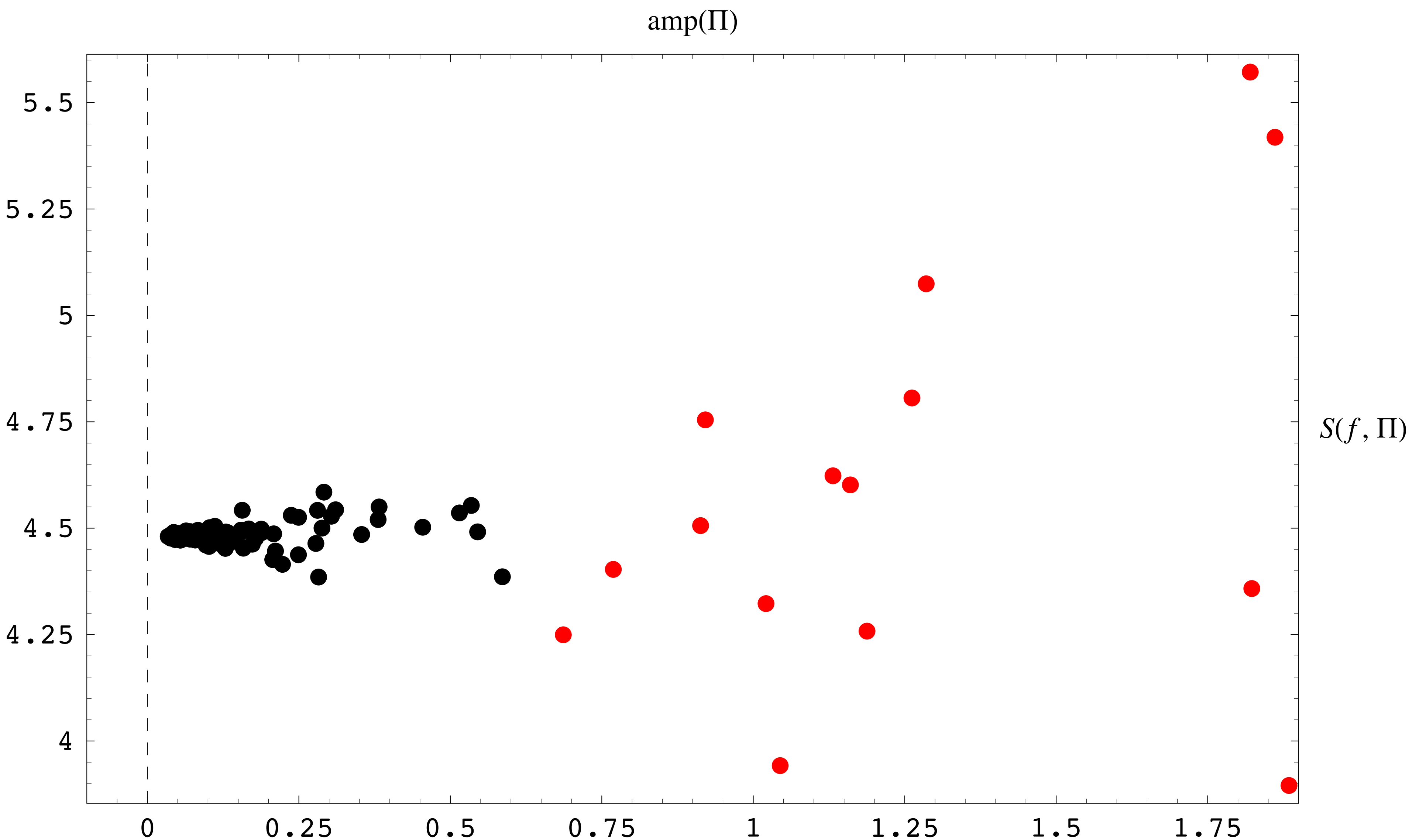


- **In ascissa c'è l'ampiezza** amp(Π),



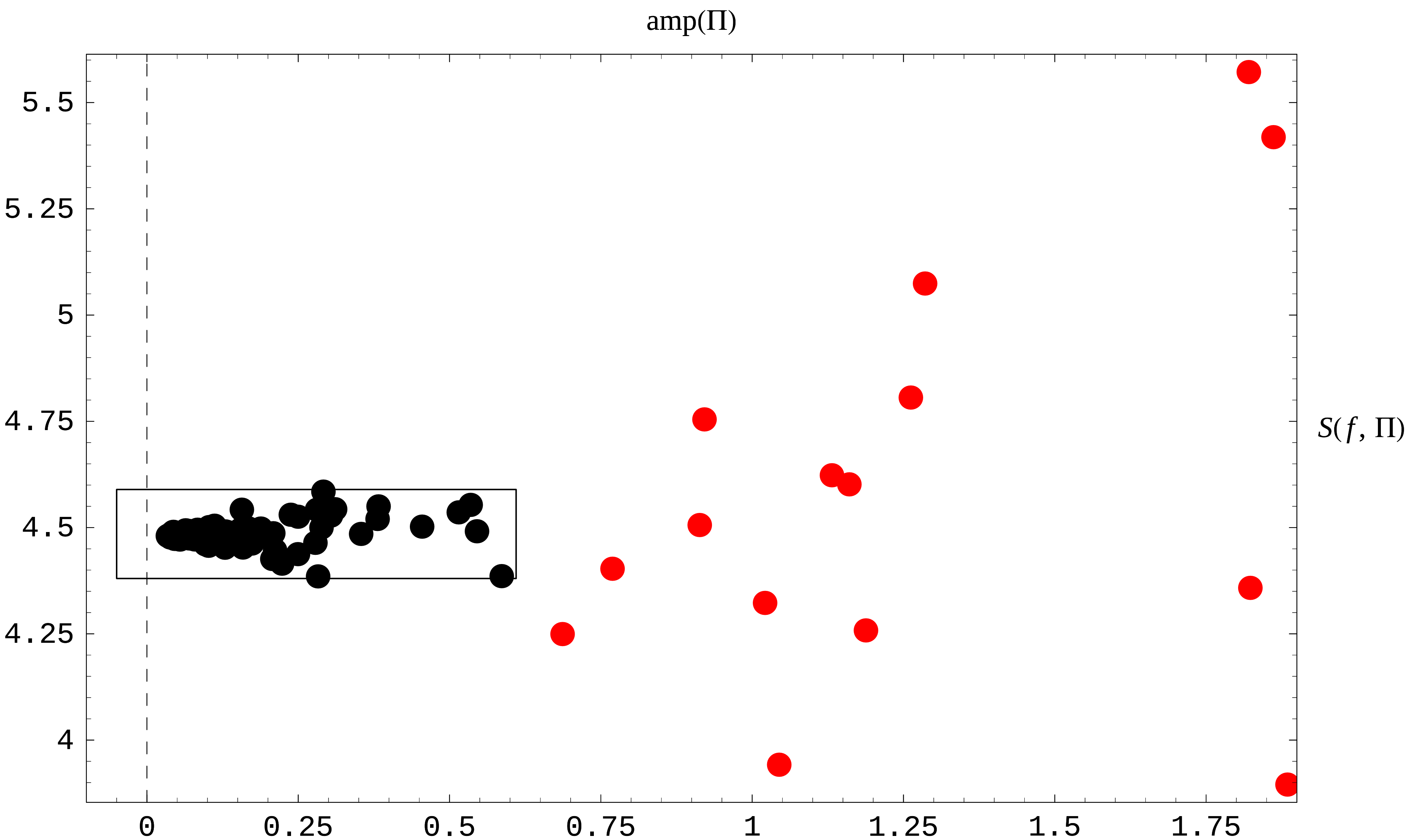
- in ordinata c'è la somma di Riemann $S(f, \Pi)$;

Ampiezza

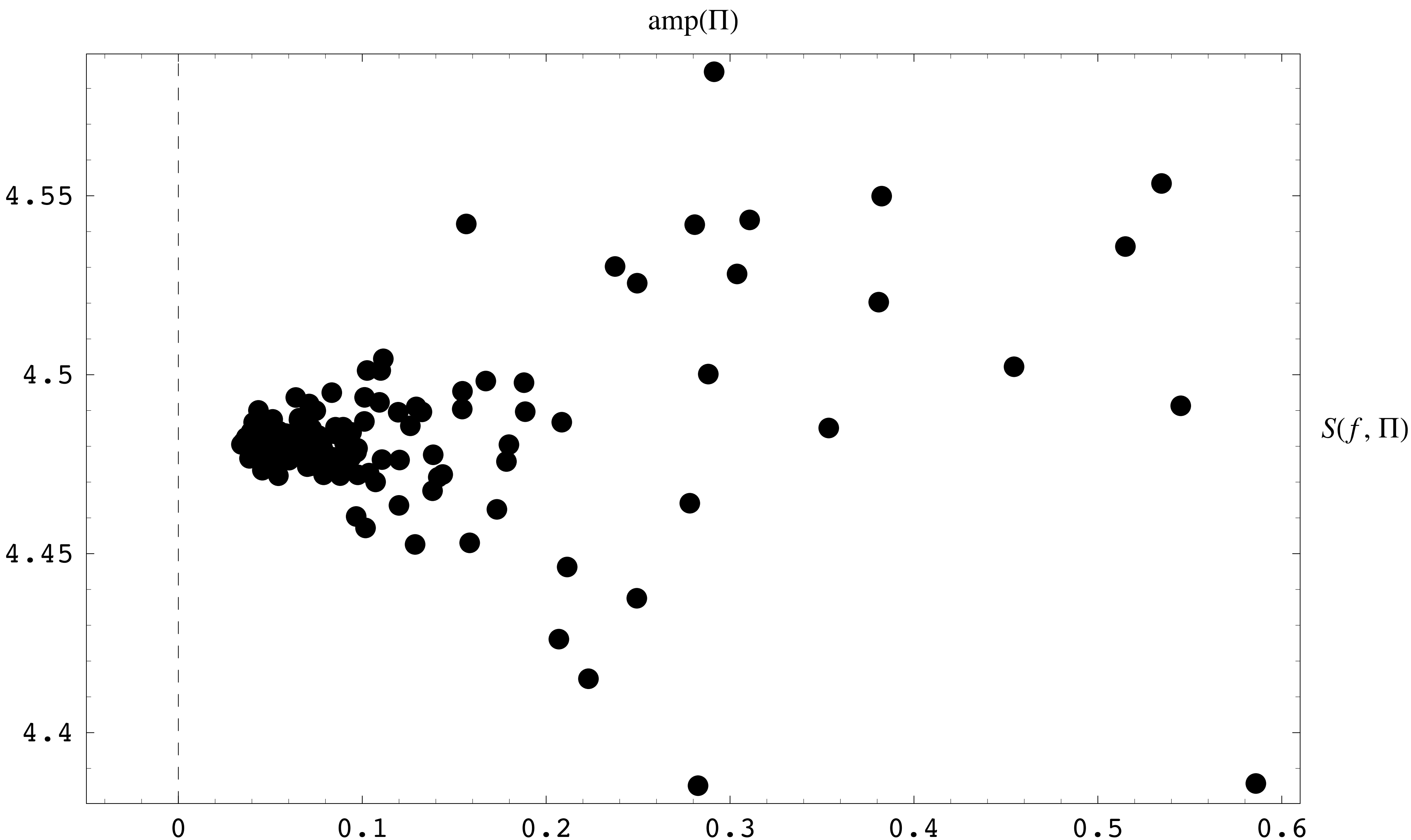


- andando da destra a sinistra i punti si concentrano.

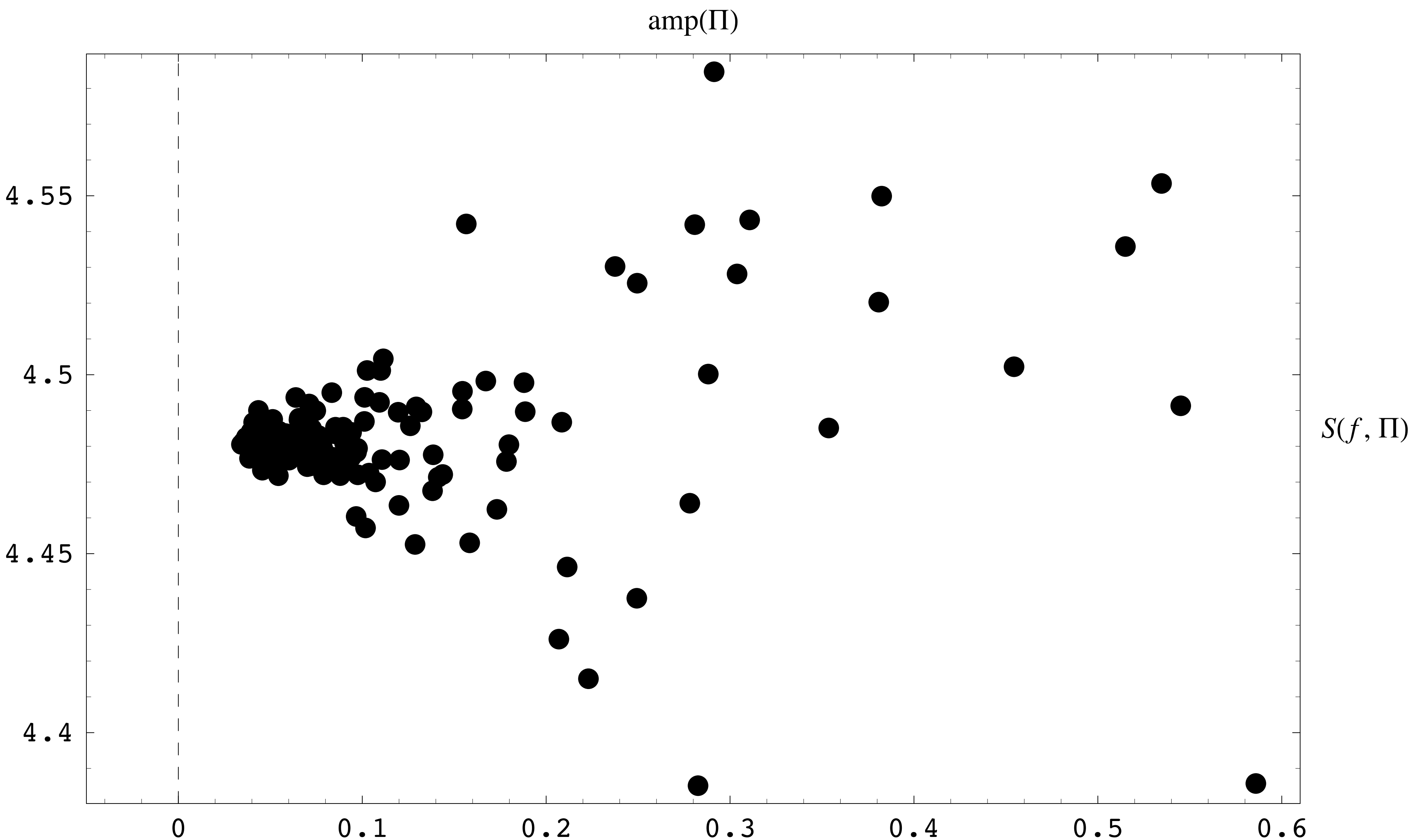
Ampiezza



- Ingrandiamo il riquadro

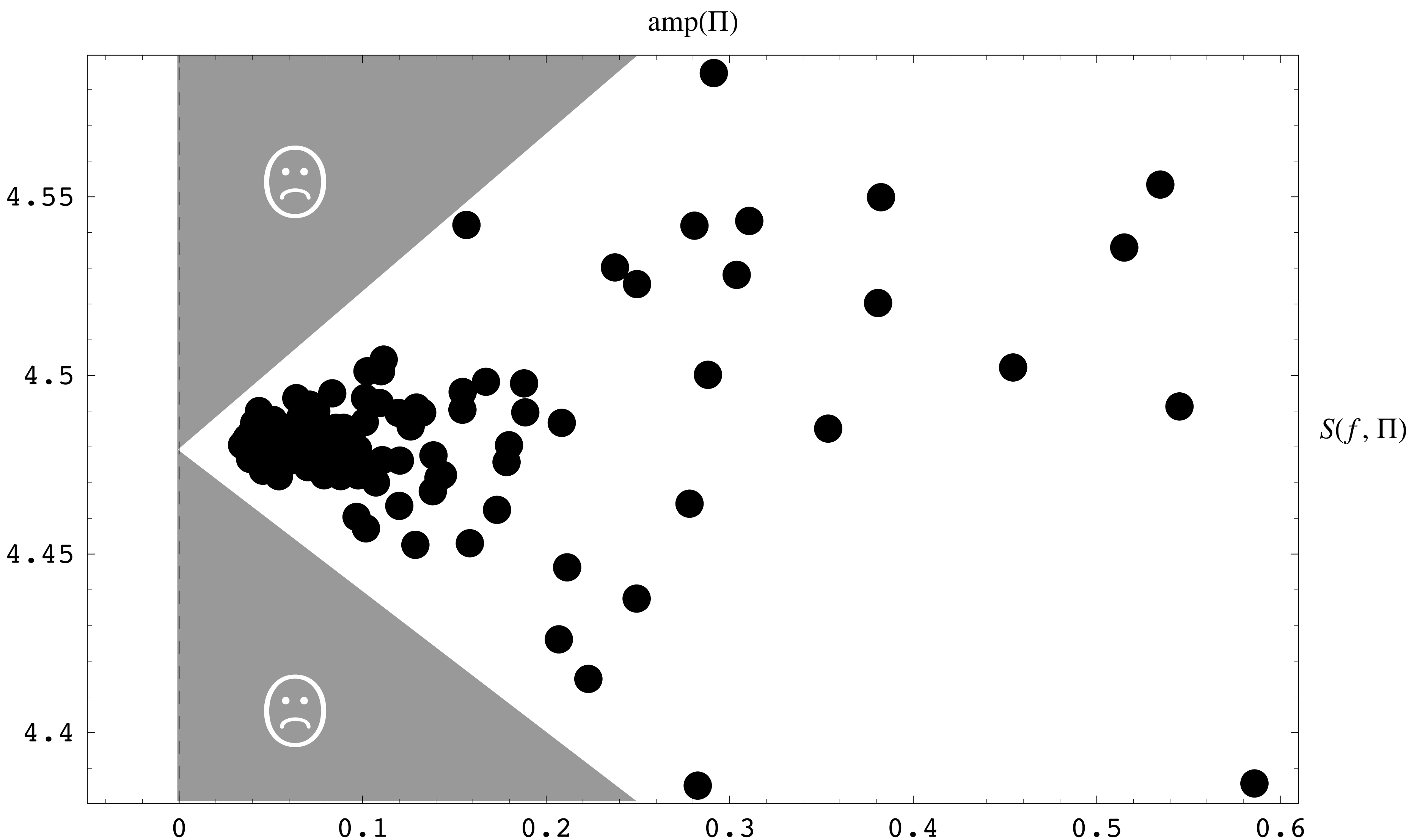

amp(Π)
4.55
4.5
4.45
4.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
S(f, Π)

Ampiezza



- Anche a questo ingrandimento si conferma l'idea:

Ampiezza



- andando da destra a sinistra i punti si concentrano a imbuto, parrebbe attorno a un valore limite.

Ampiezza

- I risultati sperimentali sono in accordo con la congettura seguente:

Ampiezza

- I risultati sperimentali sono in accordo con la congettura seguente:

  i valori di $S(f, \Pi)$ si stabilizzano quando $\mathrm{amp}(\Pi)$ si avvicina a 0.

- I risultati sperimentali sono in accordo con la congettura seguente:

  i valori di $S(f, \Pi)$ si stabilizzano quando $\text{amp}(\Pi)$ si avvicina a 0.

  - **Il valore attorno a cui si stabilizzano sarà l'area "vera".**

- Prima di dare una definizione più formale, conviene sganciarsi

- Prima di dare una definizione più formale, conviene sganciarsi
  - **dal problema dell'area**

f non positiva

- Prima di dare una definizione più formale, conviene sganciarsi
  - **dal problema dell'area**
  - **e dalla richiesta che la funzione f sia positiva,**

- Prima di dare una definizione più formale, conviene sganciarsi
  - **dal problema dell'area**
  - **e dalla richiesta che la funzione f sia positiva,**

  e ammettere anche funzioni f non positive.

f non positiva

- Prima di dare una definizione più formale, conviene sganciarsi
  - **dal problema dell'area**
  - **e dalla richiesta che la funzione f sia positiva,**

  e ammettere anche funzioni f non positive.
- Infatti quando f non è ≥ 0

- Prima di dare una definizione più formale, conviene sganciarsi
  - **dal problema dell'area**
  - **e dalla richiesta che la funzione f sia positiva,**

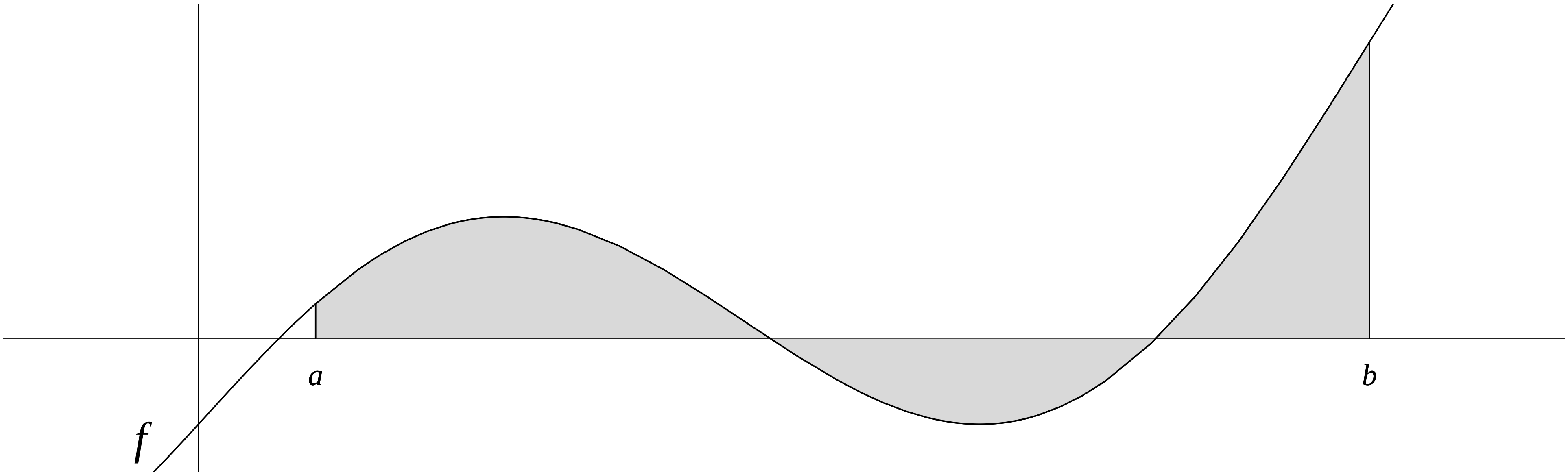
  e ammettere anche funzioni f non positive.
- Infatti quando f non è ≥ 0
  - **le somme di Riemann $S(f, \Pi)$ hanno ancora senso numerico,**

- Prima di dare una definizione più formale, conviene sganciarsi
  - **dal problema dell'area**
  - **e dalla richiesta che la funzione f sia positiva,**

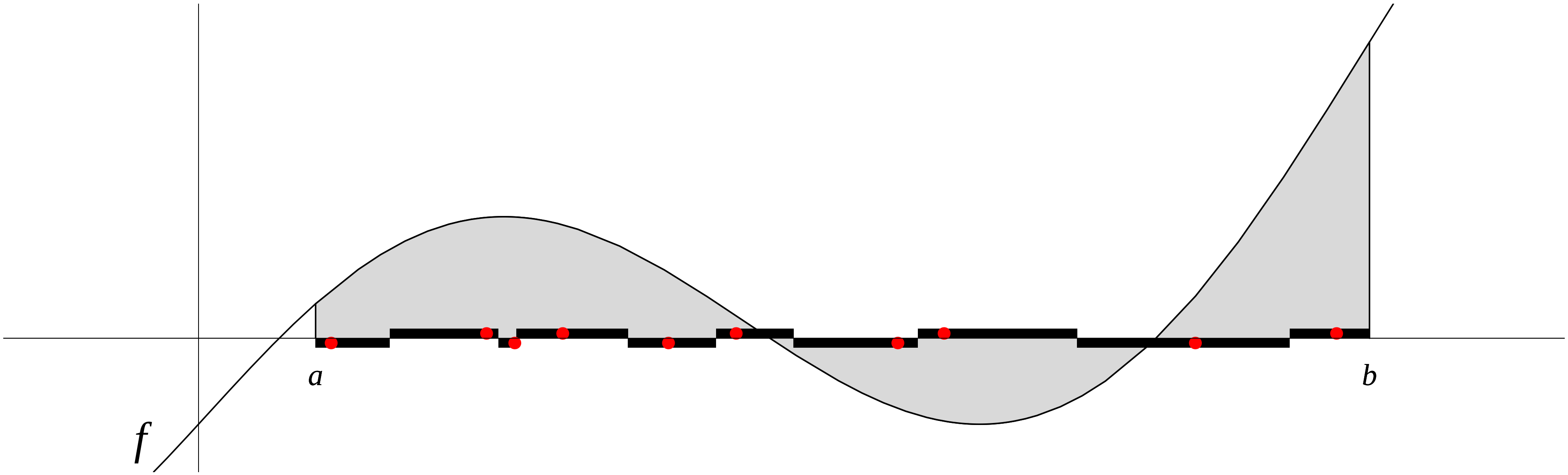
  e ammettere anche funzioni f non positive.
- Infatti quando f non è ≥ 0
  - **le somme di Riemann $S(f, \Pi)$ hanno ancora senso numerico,**
  - **ma non regge più l'interpretazione geometrica**

- Prima di dare una definizione più formale, conviene sganciarsi
  - **dal problema dell'area**
  - **e dalla richiesta che la funzione f sia positiva,**

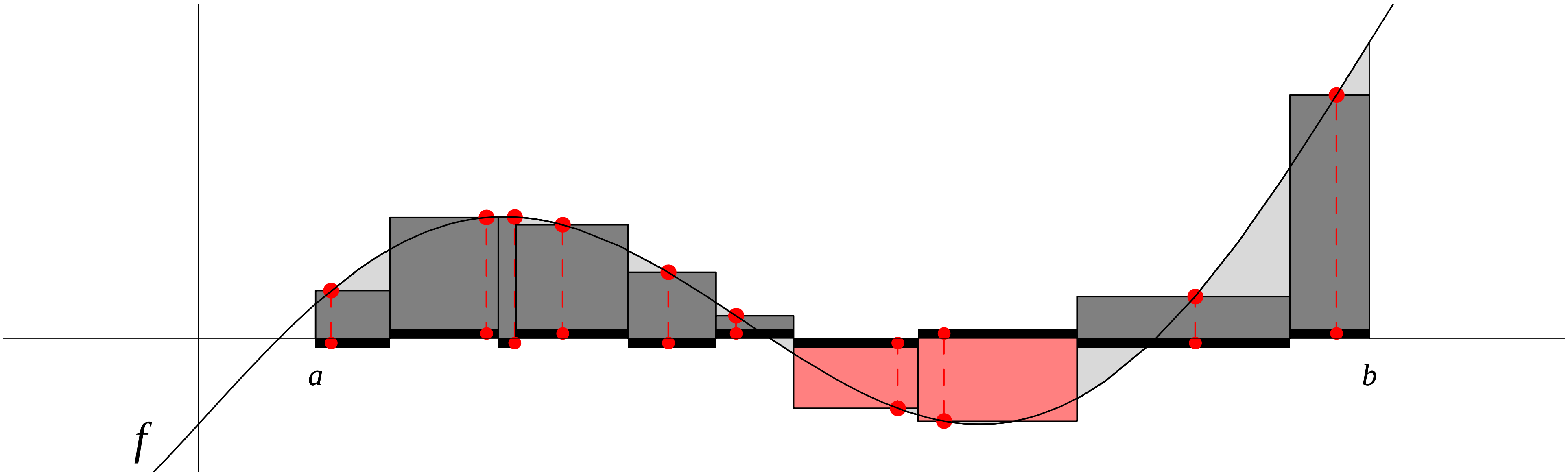
  e ammettere anche funzioni f non positive.
- Infatti quando f non è ≥ 0
  - **le somme di Riemann $S(f,\Pi)$ hanno ancora senso numerico,**
  - **ma non regge più l'interpretazione geometrica**
    - quella di $S(f,\Pi)$ come area di un plurirettangolo.



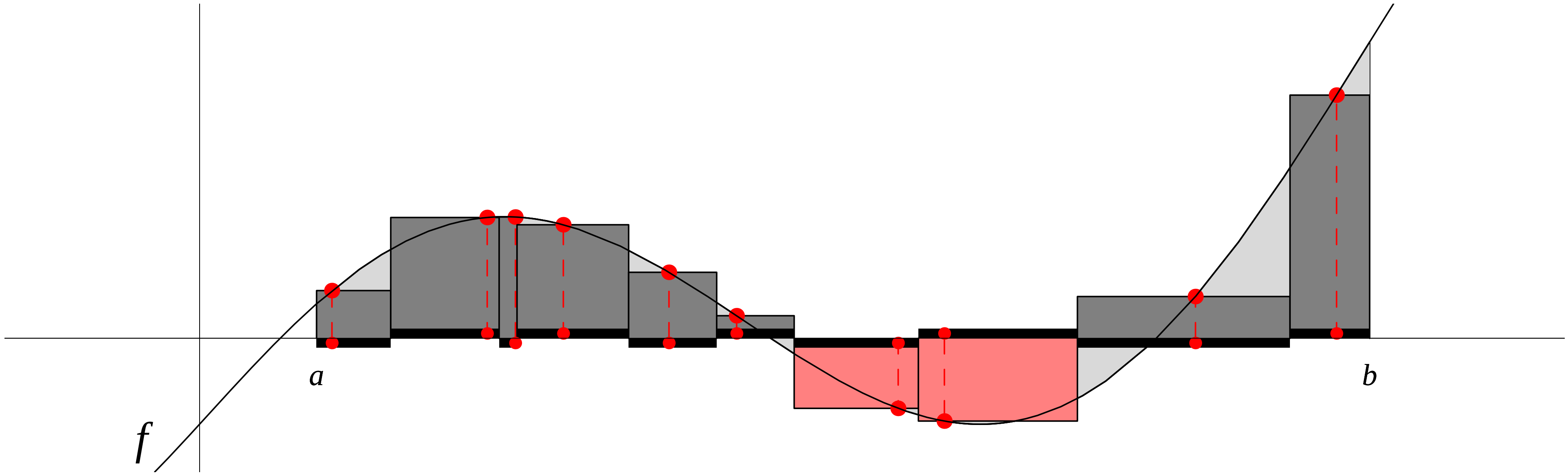
- Prendiamo una f che su $[a, b]$ non sia sempre positiva



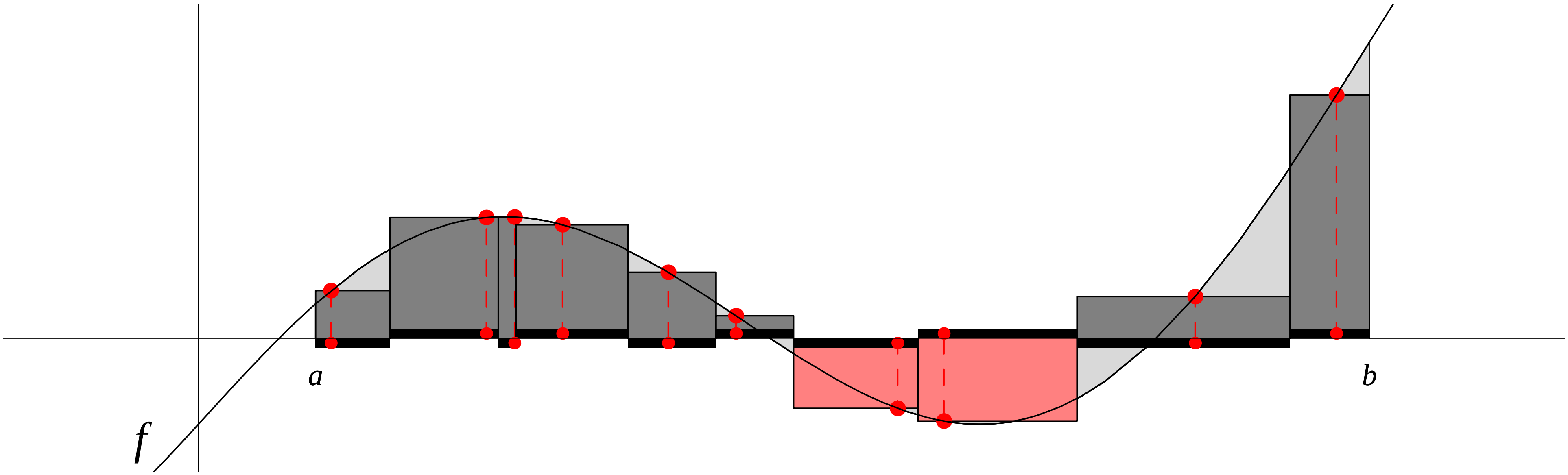
- Prendiamo una f che su $[a, b]$ non sia sempre positiva
- e una suddivisione marcata Π di $[a, b]$;



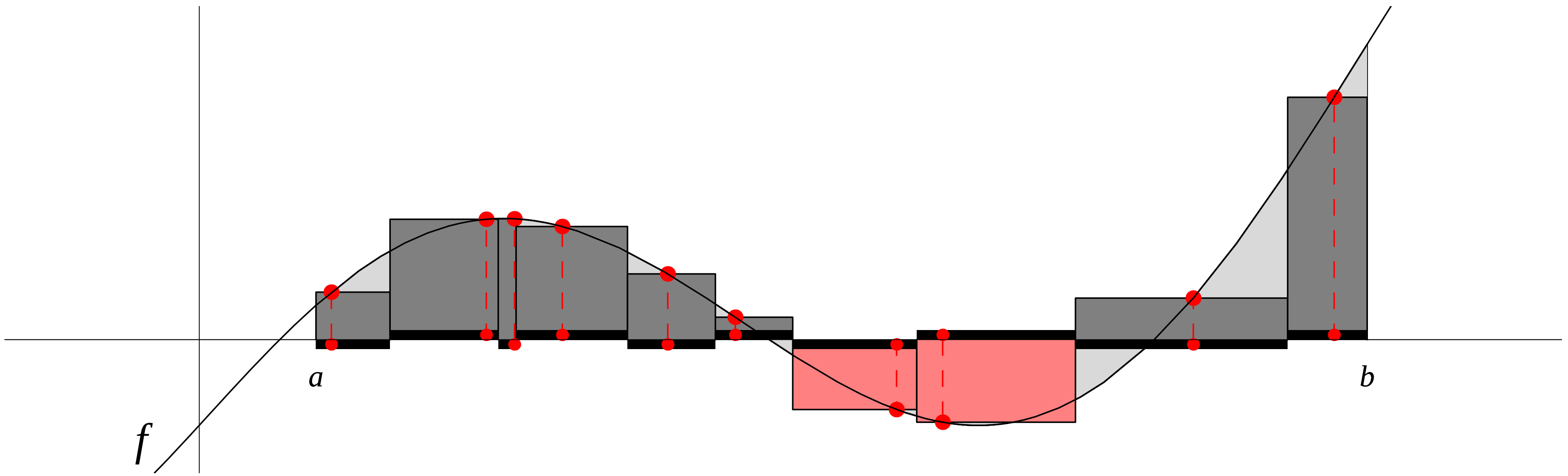
- Prendiamo una f che su $[a, b]$ non sia sempre positiva
- e una suddivisione marcata Π di $[a, b]$;
- calcoliamo $S(f, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1})$.



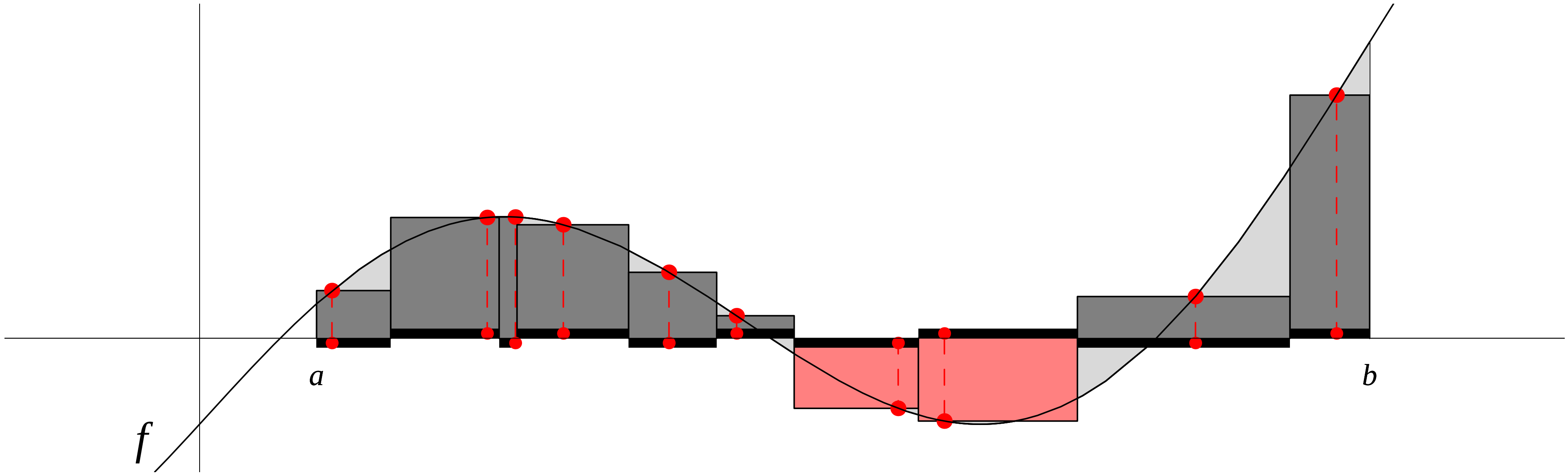
- Prendiamo una f che su $[a,b]$ non sia sempre positiva
- e una suddivisione marcata Π di $[a,b]$;
- calcoliamo $S(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i-a_{i-1})$.
  - **i fattori $(a_i - a_{i-1})$ sono sempre > 0 per costruzione;**



- Prendiamo una f che su $[a, b]$ non sia sempre positiva
- e una suddivisione marcata Π di $[a, b]$;
- calcoliamo $S(f, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1})$.
  - **i fattori $(a_i - a_{i-1})$ sono sempre > 0 per costruzione;**
  - **i rettangoli per i quali $f(x_i) < 0$ (in rosa nella figura) danno un contributo < 0.**

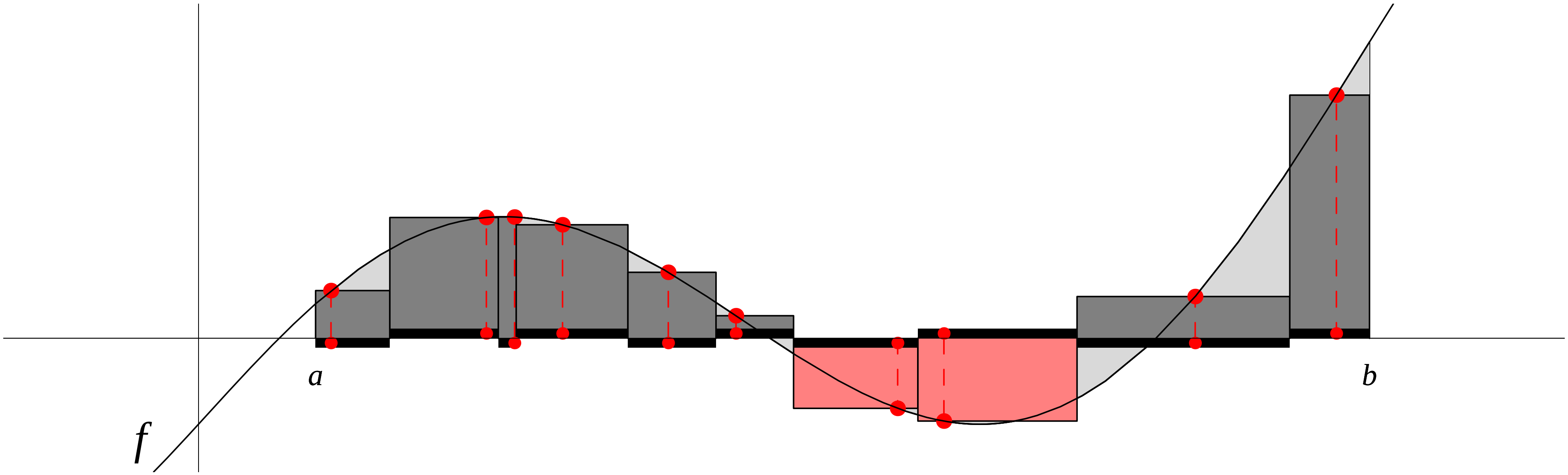


- Interpretazione geometrica:



- Interpretazione geometrica:

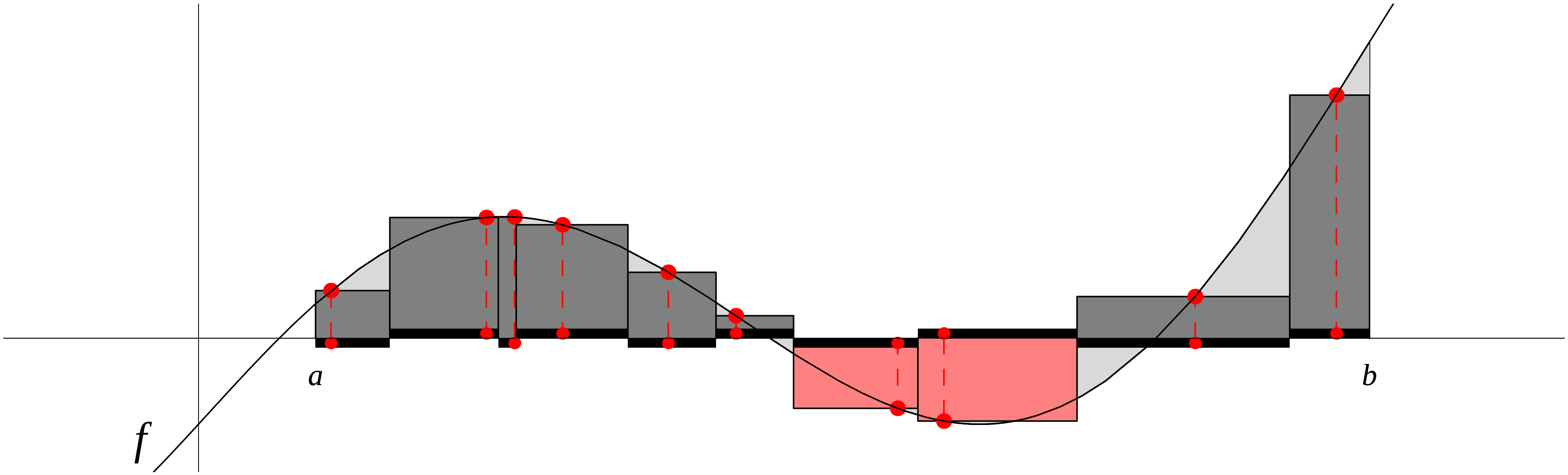
  $S(f,\Pi)$ è la somma algebrica delle aree dei rettangolini, dove le aree sono contate



- Interpretazione geometrica:

  $S(f, \Pi)$ è la somma algebrica delle aree dei rettangolini, dove le aree sono contate

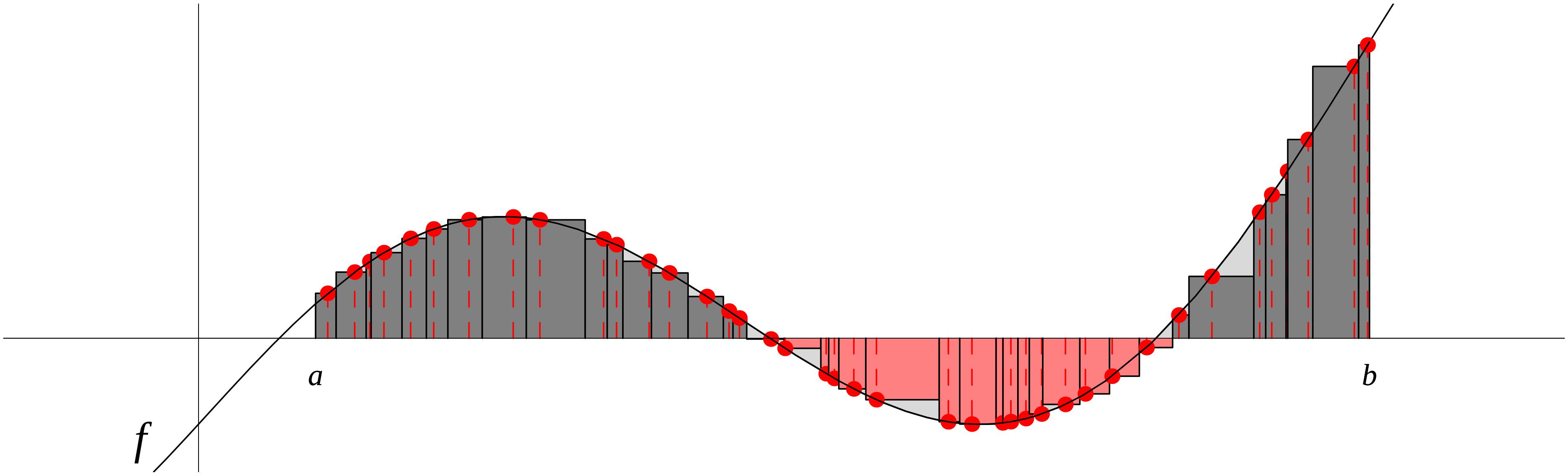
  - **col segno + se il rettangolino è sopra l'asse x (rettangolini grigi);**



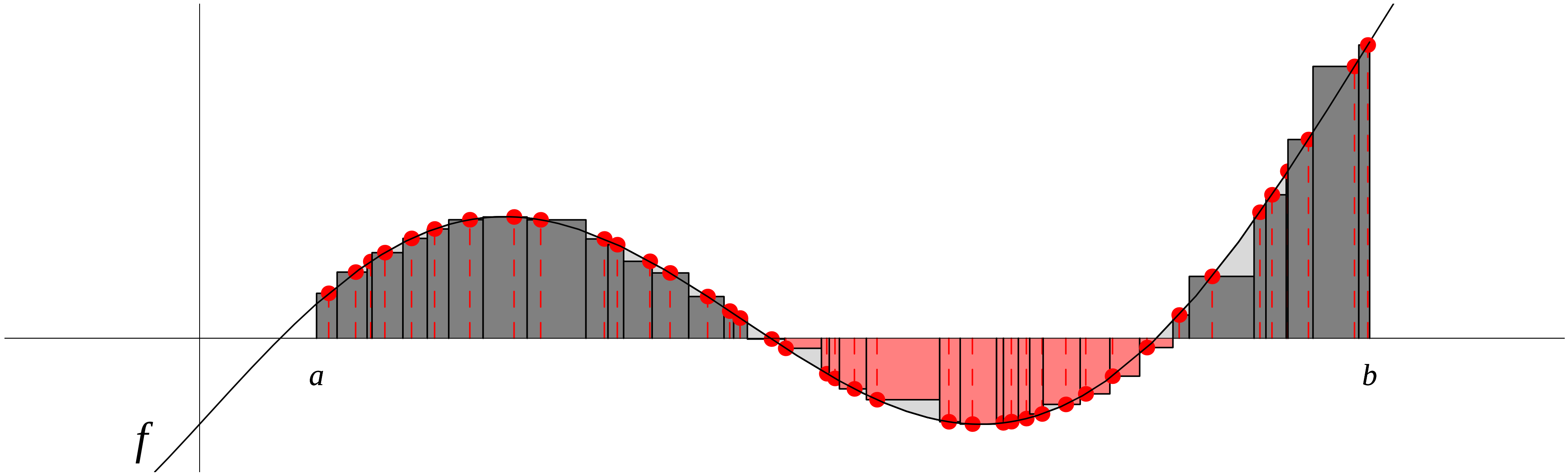
□ Interpretazione geometrica:

$S(f, \Pi)$ è la somma algebrica delle aree dei rettangolini, dove le aree sono contate

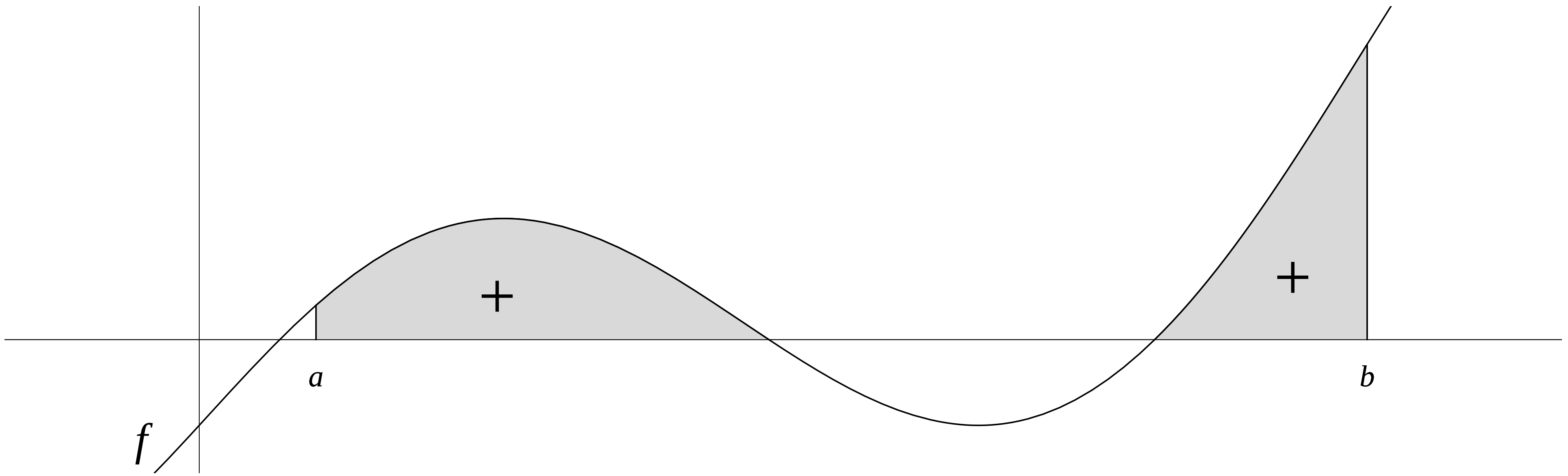
- **col segno $+$ se il rettangolino è sopra l'asse x (rettangolini grigi);**
- **col segno $-$ se è sotto (rosa).**



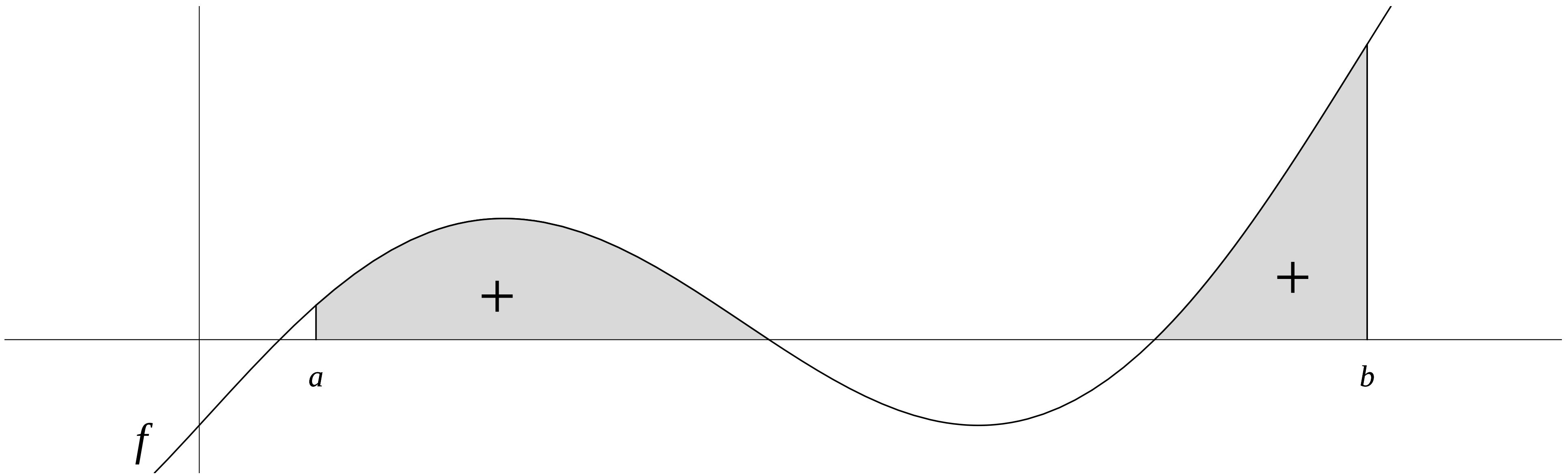
- Supponiamo che $S(f, \Pi)$ tenda a un valore I.



- Supponiamo che $S(f,\Pi)$ tenda a un valore I.
- Questo I si interpreta geometricamente come la somma algebrica delle aree delle due regioni seguenti:

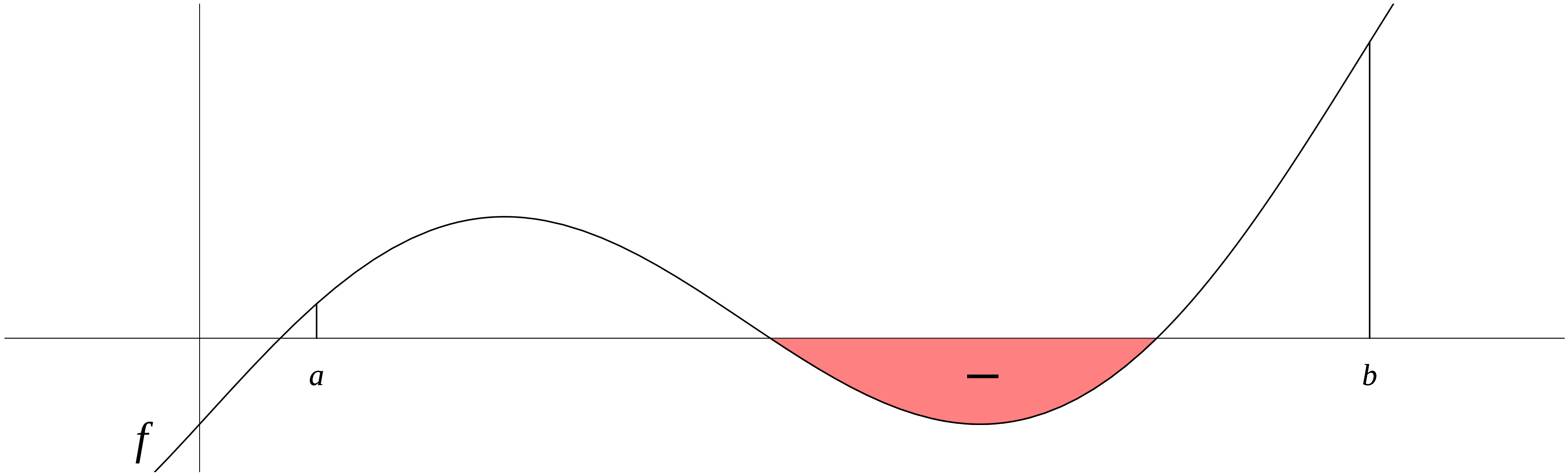


- Supponiamo che $S(f, \Pi)$ tenda a un valore I.
- Questo I si interpreta geometricamente come la somma algebrica delle aree delle due regioni seguenti:
  - **quella sopra l'asse x, presa col segno $+$ (in grigio)**

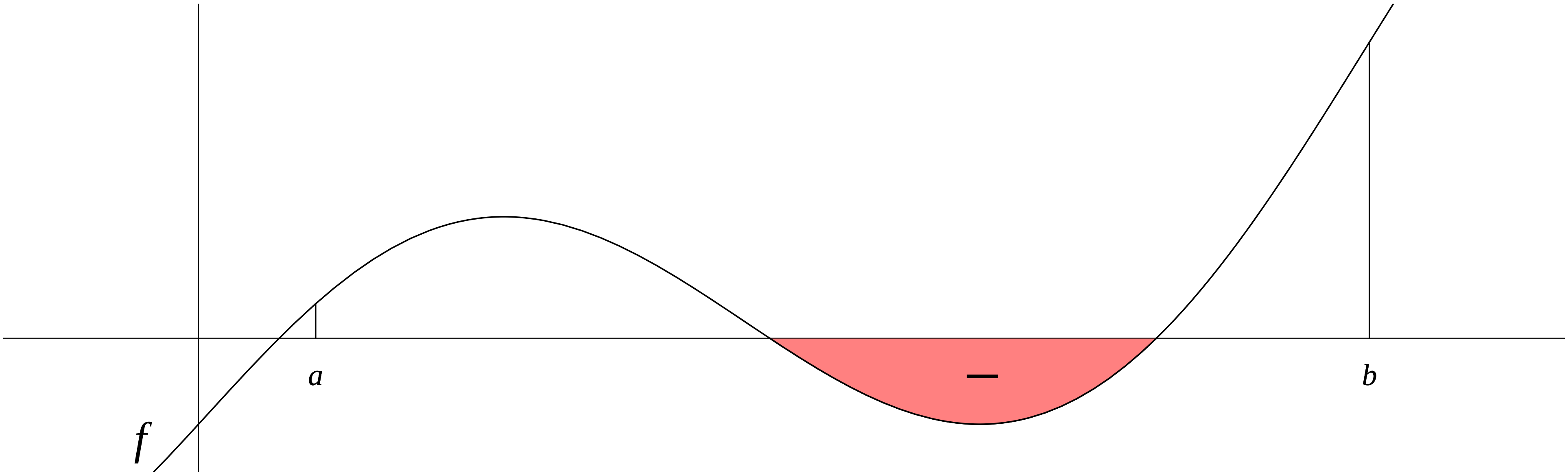


- Supponiamo che $S(f, \Pi)$ tenda a un valore I.
- Questo I si interpreta geometricamente come la somma algebrica delle aree delle due regioni seguenti:
  - **quella sopra l'asse x, presa col segno $+$ (in grigio)**
    - $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

f non positiva

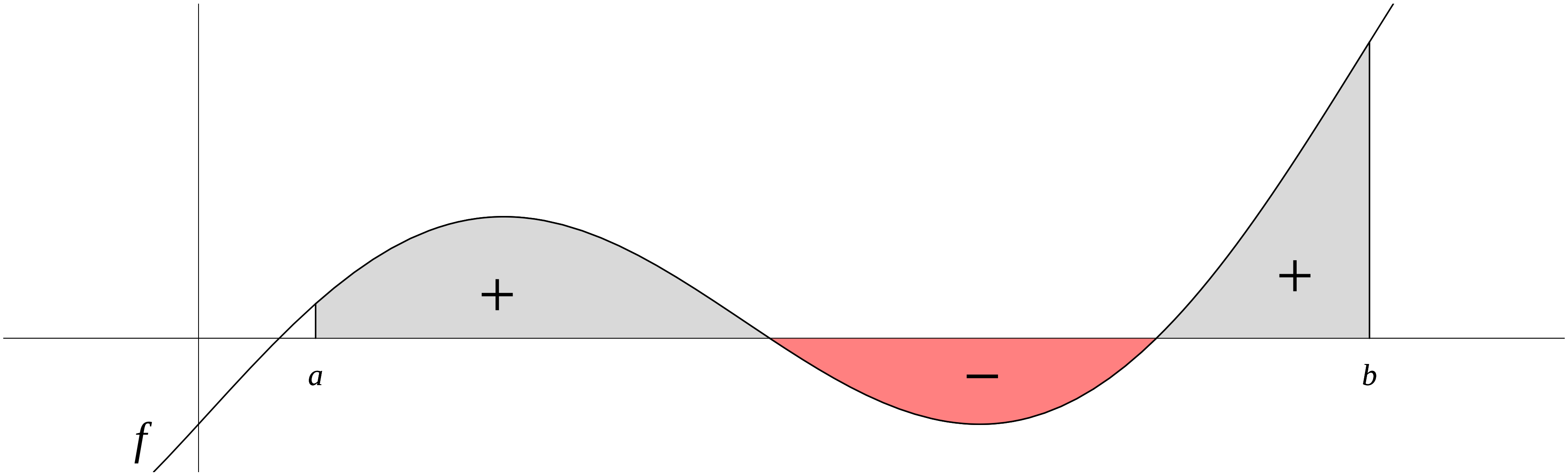


- Supponiamo che $S(f, \Pi)$ tenda a un valore I.
- Questo I si interpreta geometricamente come la somma algebrica delle aree delle due regioni seguenti:
  - **quella sopra l'asse x, presa col segno $+$ (in grigio)**
    - $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$
  - **quella sotto l'asse x, presa col segno $-$ (in rosa);**

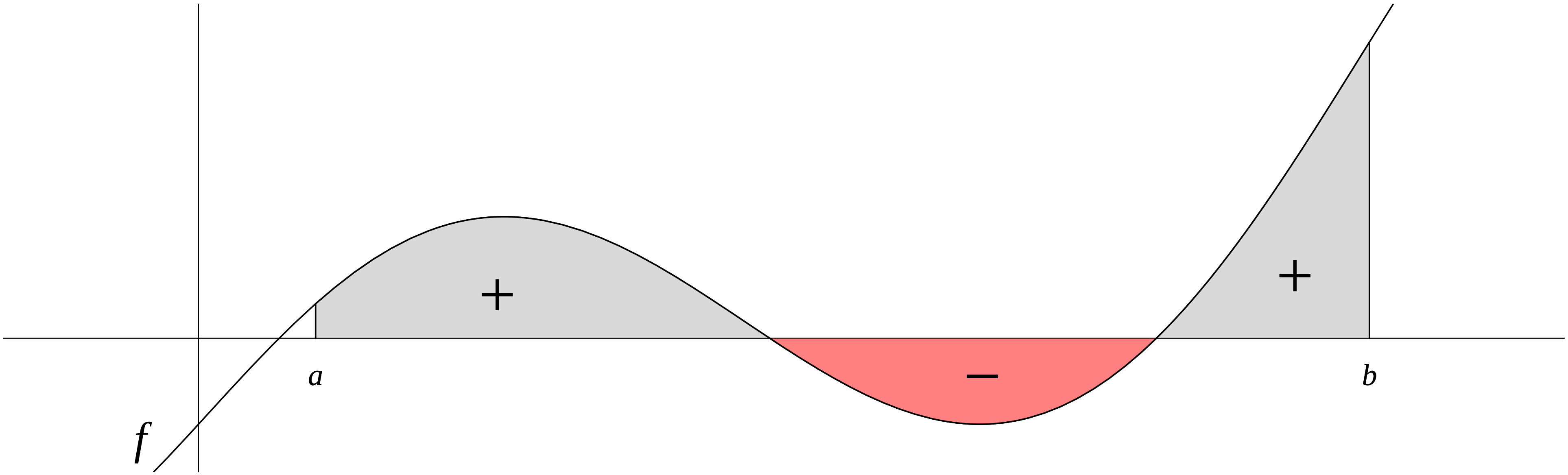


- Supponiamo che $S(f, \Pi)$ tenda a un valore I.
- Questo I si interpreta geometricamente come la somma algebrica delle aree delle due regioni seguenti:
  - **quella sopra l'asse x, presa col segno $+$ (in grigio)**
    - $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$
  - **quella sotto l'asse x, presa col segno $-$ (in rosa);**
    - $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq 0\}$

f non positiva



□ Insomma, se càpita che $S(f, \Pi)$ tenda a un valore I.



- Insomma, se càpita che $S(f, \Pi)$ tenda a un valore I.
- Questo I è interpretato come una somma algebrica di aree.

Cap. 4

Il simbolo di integrale

Integrale

- ***Il limite delle somme*** $S(f,\Pi)$***, se esiste, prende il nome di integrale della*** f ***su*** $[a,b]$***.***

Integrale

- ***Il limite delle somme $S(f, \Pi)$, se esiste, prende il nome di integrale della f su $[a, b]$.***
  - Il simbolo tradizionale per l'integrale è quello inventato da Leibniz nel 1675:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

- ***Il limite delle somme $S(f, \Pi)$, se esiste, prende il nome di integrale della f su $[a, b]$.***
  - Il simbolo tradizionale per l'integrale è quello inventato da Leibniz nel 1675:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\, dx.}$$

    - **La "$\int$" è una variante grafica di "S", che sta per "somma" (di Riemann, anche se Riemann era ancora lungi da venire);**

- ***Il limite delle somme $S(f,\Pi)$, se esiste, prende il nome di integrale della f su $[a,b]$.***
  - Il simbolo tradizionale per l'integrale è quello inventato da Leibniz nel 1675:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

    - a, b **sono gli estremi dell'intervallo:**

- ***Il limite delle somme $S(f,\Pi)$, se esiste, prende il nome di integrale della f su $[a,b]$.***
  - Il simbolo tradizionale per l'integrale è quello inventato da Leibniz nel 1675:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

    - a, b **sono gli estremi dell'intervallo:**
      - il minore a in basso

Integrale

- ***Il limite delle somme $S(f, \Pi)$, se esiste, prende il nome di integrale della f su $[a, b]$.***
  - Il simbolo tradizionale per l'integrale è quello inventato da Leibniz nel 1675:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

    - **a, b sono gli estremi dell'intervallo:**
      - il minore a in basso
      - e il maggiore b in alto;

- ***Il limite delle somme $S(f,\Pi)$, se esiste, prende il nome di integrale della f su $[a,b]$.***
  - Il simbolo tradizionale per l'integrale è quello inventato da Leibniz nel 1675:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

    - $f(x)\,dx$ **viene dai prodotti** $f(x_i)(a_i - a_{i-1})$, **dove si immagina che**

- ***Il limite delle somme $S(f, \Pi)$, se esiste, prende il nome di integrale della f su $[a, b]$.***
  - Il simbolo tradizionale per l'integrale è quello inventato da Leibniz nel 1675:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

    - **$f(x)\,dx$ viene dai prodotti $f(x_i)(a_i - a_{i-1})$, dove si immagina che**
      - i punti marcati x_i siano "infinitamente fitti", e quindi diventino una variabile continua x e non più discreta;

- ***Il limite delle somme $S(f, \Pi)$, se esiste, prende il nome di integrale della f su $[a, b]$.***
  - Il simbolo tradizionale per l'integrale è quello inventato da Leibniz nel 1675:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\, dx.}$$

- **$f(x)\, dx$ viene dai prodotti $f(x_i)(a_i - a_{i-1})$, dove si immagina che**
  - le lunghezze $a_i - a_{i-1}$ diventino "infinitamente corte", e vengano indicate col simbolo dx, che Leibniz usava per differenze (incrementi della variabile x) infinitamente piccole.

Integrale

- La prima apparizione del simbolo $\int$, in una lettera di Leibniz (1675):

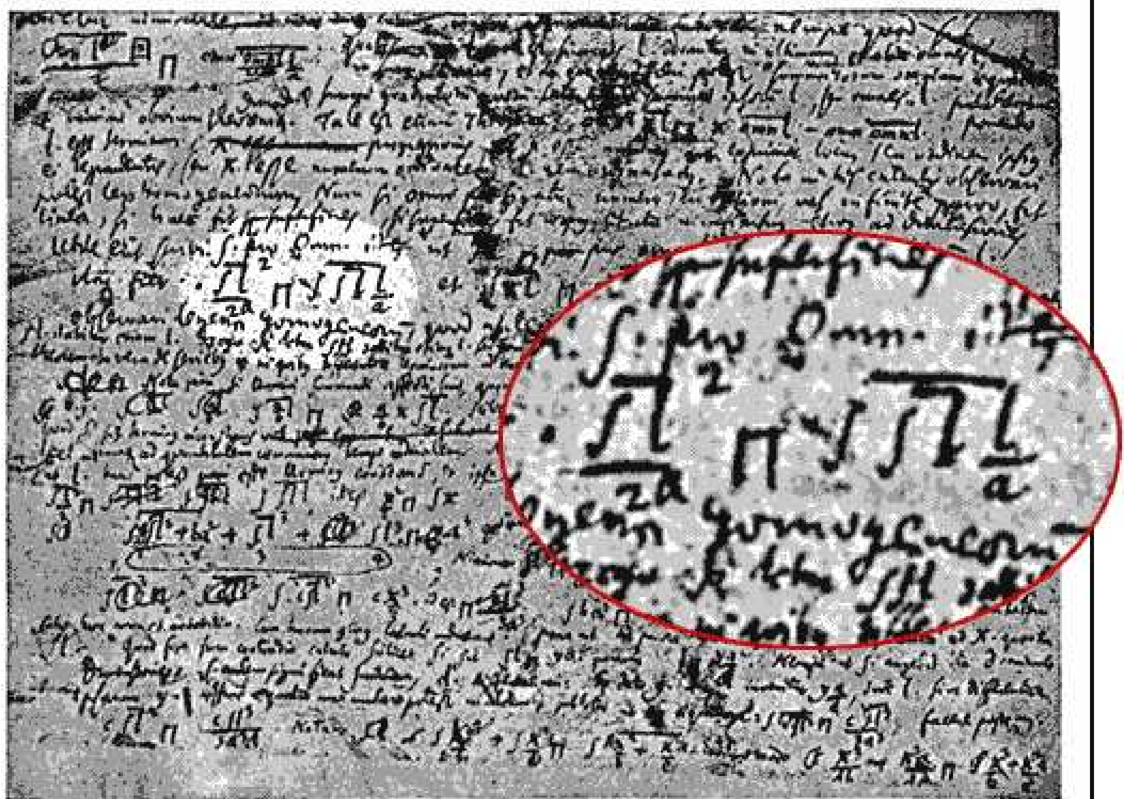


Fig. 124.—Facsimile of manuscript of Leibniz, dated Oct. 29, 1675, in which his sign of integration first appears. (Taken from C. I. Gerhardt's *Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern* [1899].)

http://www.stephenwolfram.com/publications/talks/mathml/mathml2.html

Cap. 5

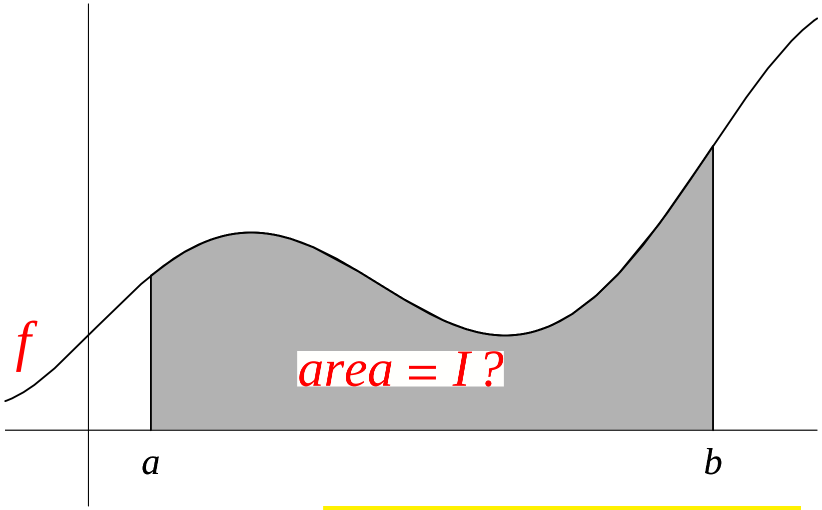
Prima definizione di integrale e commenti

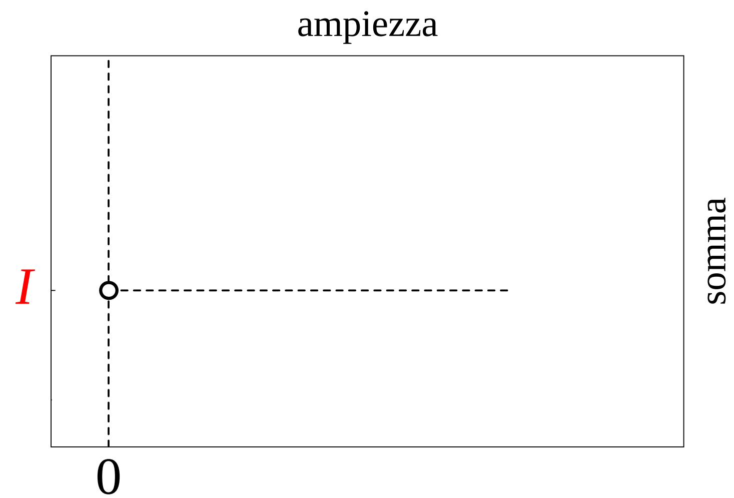
Integrale di Riemann

- *Siamo pronti per dare la definizione formale dell'****integrale secondo Riemann****.*

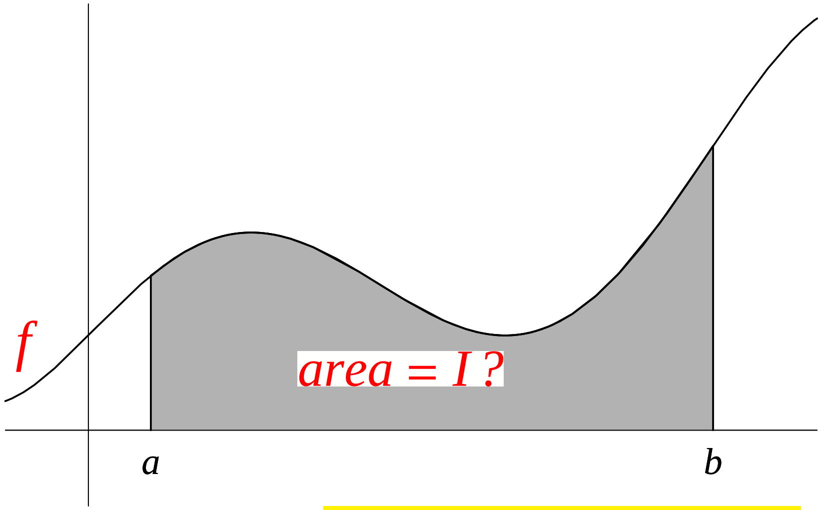
Integrale di Riemann

- ***Siamo pronti per dare la definizione formale dell'integrale secondo Riemann.***
  - Il concetto è stato formalizzato nella prima metà dell'800 da Cauchy e da Riemann.

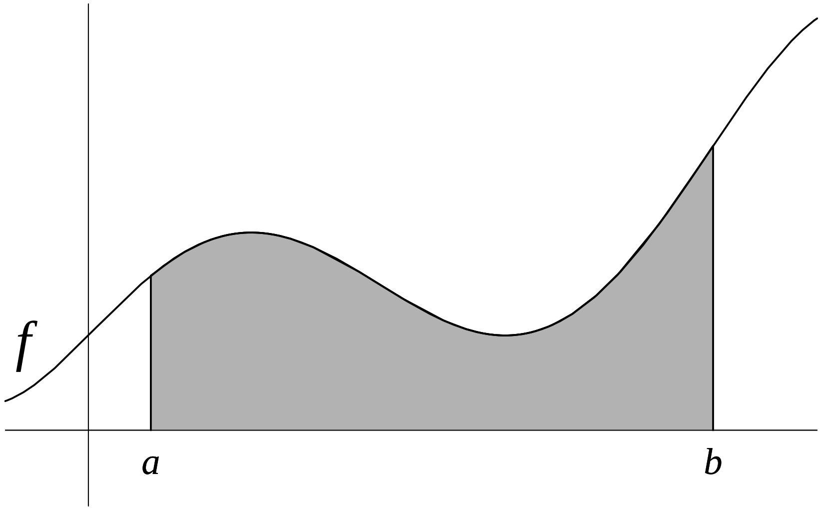


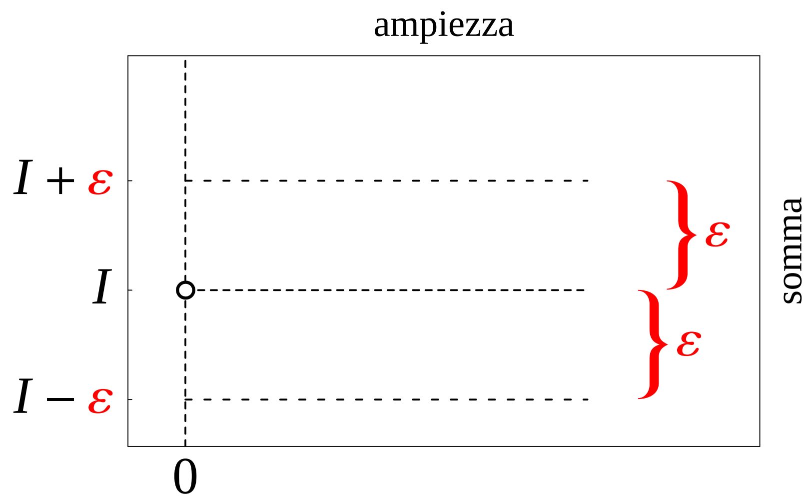


- Data una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,

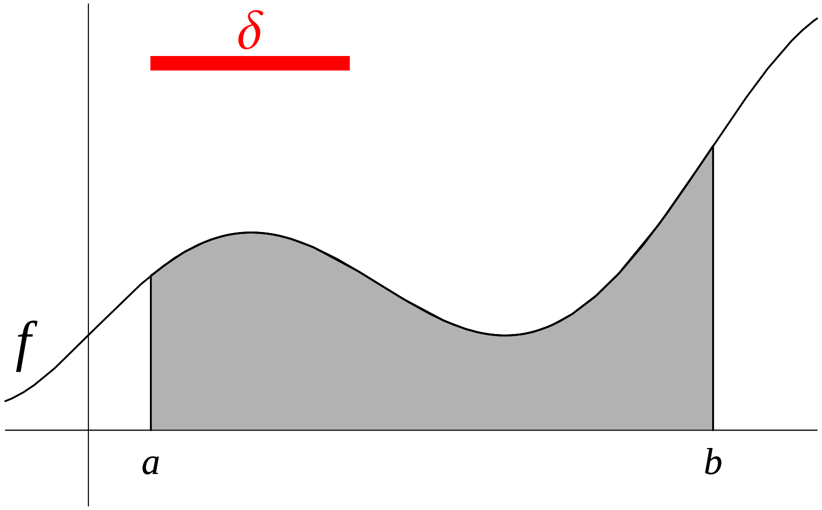


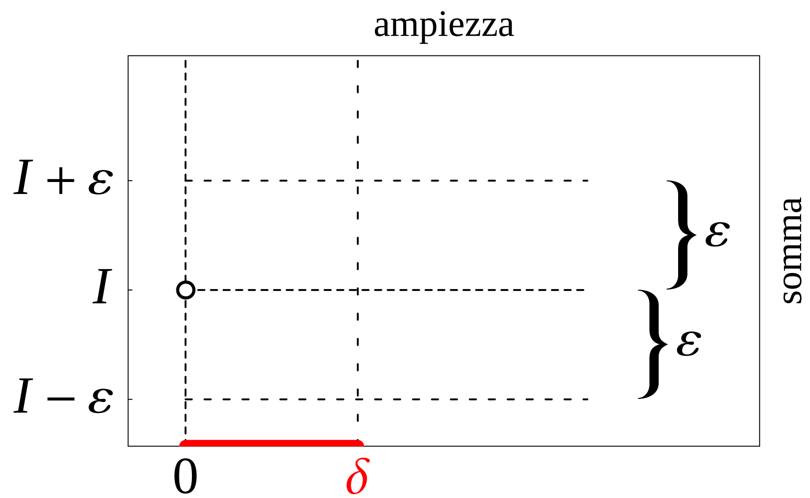
- Data una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,
- si dice che f è *integrabile secondo Riemann con integrale* I se:



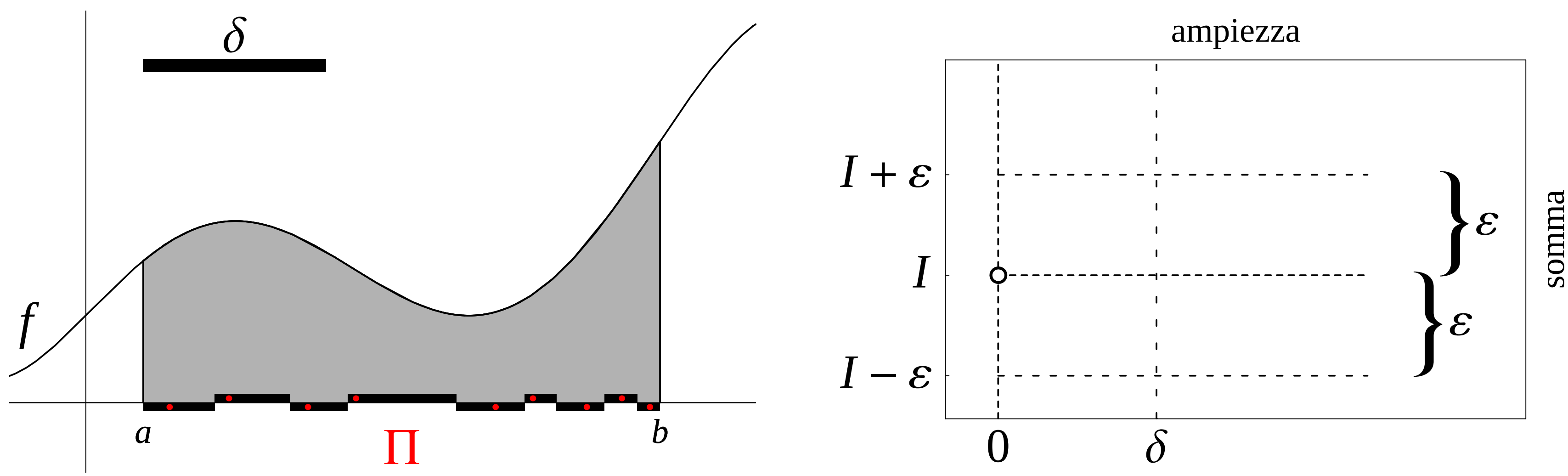


- Data una $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e un numero $I\in\mathbb{R}$,
- si dice che f è *integrabile secondo Riemann con integrale* I se:
  - **per ogni** $\varepsilon > 0$

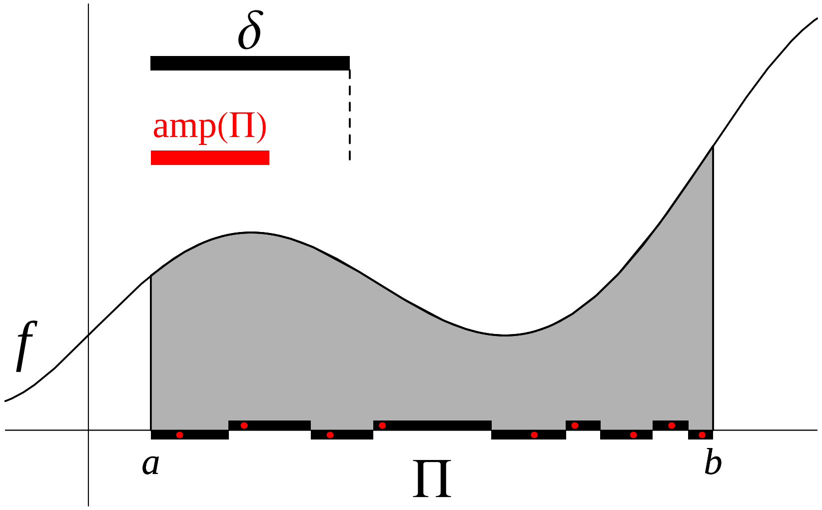


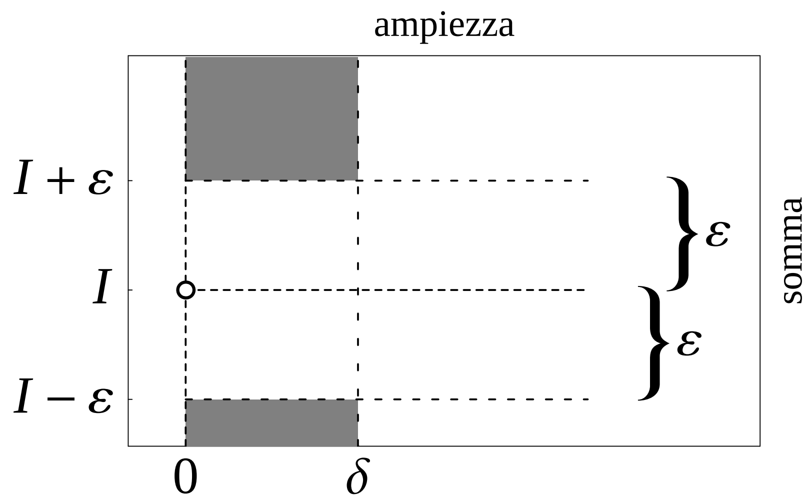


- Data una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,
- si dice che f è *integrabile secondo Riemann con integrale* I se:
  - **per ogni** $\varepsilon > 0$
  - **esiste** $\delta > 0$

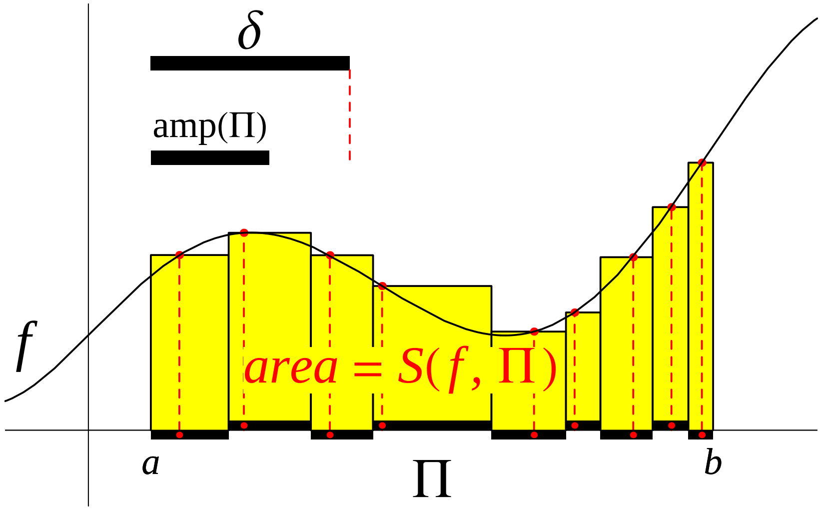


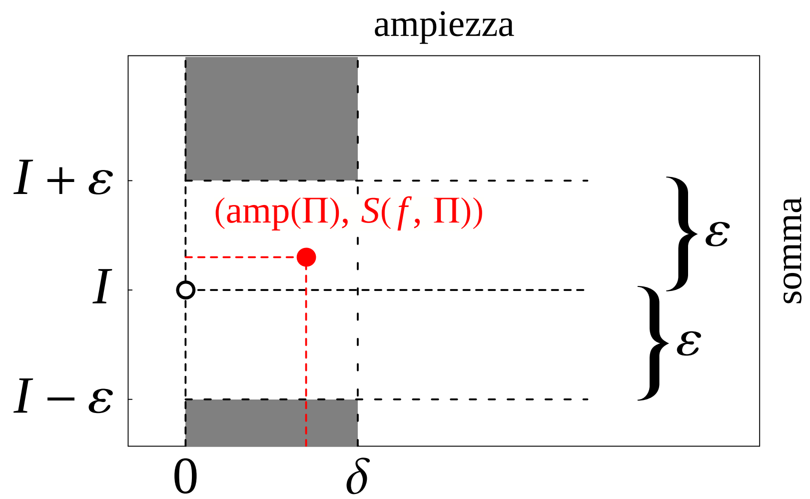
- Data una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,
- si dice che f è *integrabile secondo Riemann con integrale* I se:
  - **per ogni** $\varepsilon > 0$
  - **esiste** $\delta > 0$ **tale che:**
    - per ogni suddivisione marcata Π di $[a, b]$





- Data una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,
- si dice che f è *integrabile secondo Riemann con integrale* I se:
  - **per ogni** $\varepsilon > 0$
  - **esiste** $\delta > 0$ **tale che:**
    - per ogni suddivisione marcata Π di $[a, b]$
    - se $\mathrm{amp}(\Pi) < \delta$





- Data una $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,
- si dice che f è *integrabile secondo Riemann con integrale* I se:
  - **per ogni** $\varepsilon > 0$
  - **esiste** $\delta > 0$ **tale che:**
    - per ogni suddivisione marcata Π di $[a,b]$
    - se $\text{amp}(\Pi) < \delta$ allora $\left|S(f,\Pi) - I\right| < \varepsilon$.

Pro Riemann

- *Pregi dell'integrale di Riemann:*

Pro Riemann

- ***Pregi dell'integrale di Riemann:***
  - la definizione è semplice

Pro Riemann

- ***Pregi dell'integrale di Riemann:***
  - la definizione è semplice
    - (rispetto alle altre definizioni che sono state proposte);

- ***Pregi dell'integrale di Riemann:***
  - la definizione è semplice
    - (rispetto alle altre definizioni che sono state proposte);
  - le funzioni *continue* sono tutte *integrabili* secondo Riemann;

- ***Pregi dell'integrale di Riemann:***
  - la definizione è semplice
    - (rispetto alle altre definizioni che sono state proposte);
  - le funzioni *continue* sono tutte *integrabili* secondo Riemann;
    - Notare che la funzione su cui abbiamo fatto gli esperimenti numerici è continua:

- ***Pregi dell'integrale di Riemann:***
  - la definizione è semplice
    - (rispetto alle altre definizioni che sono state proposte);
  - le funzioni *continue* sono tutte *integrabili* secondo Riemann;
    - Notare che la funzione su cui abbiamo fatto gli esperimenti numerici è continua:
    - il fatto "sperimentale" che le somme $S(f,\Pi)$ si stabilizzino per quella f è quindi previsto dalla teoria.

Pro Riemann

Pregi dell'integrale di Riemann:

- la definizione è semplice
  - (rispetto alle altre definizioni che sono state proposte);
- le funzioni *continue* sono tutte *integrabili* secondo Riemann;
  - Notare che la funzione su cui abbiamo fatto gli esperimenti numerici è continua:
  - il fatto "sperimentale" che le somme $S(f, \Pi)$ si stabilizzino per quella f è quindi previsto dalla teoria.
- consente di dimostrare il *"teorema fondamentale del calcolo"* (che vedremo più avanti)

- ***Pregi dell'integrale di Riemann:***
  - la definizione è semplice
    - (rispetto alle altre definizioni che sono state proposte);
  - le funzioni *continue* sono tutte *integrabili* secondo Riemann;
    - Notare che la funzione su cui abbiamo fatto gli esperimenti numerici è continua:
    - il fatto "sperimentale" che le somme $S(f, \Pi)$ si stabilizzino per quella f è quindi previsto dalla teoria.
  - consente di dimostrare il *"teorema fondamentale del calcolo"* (che vedremo più avanti)
    - **e quindi rende rigorosi i conti semi-mistici fatti sugli integrali dai tempi Newton e Leibniz.**

Altre teorie

Altre teorie

- Tuttavia nella seconda metà dell'800 i matematici diventarono via via più insoddisfatti dell'integrale di Riemann.

Altre teorie

- Tuttavia nella seconda metà dell'800 i matematici diventarono via via più insoddisfatti dell'integrale di Riemann.
- La maggior parte delle lagnanze sono troppo tecniche per essere spiegati a questo livello.

Altre teorie

- Tuttavia nella seconda metà dell'800 i matematici diventarono via via più insoddisfatti dell'integrale di Riemann.
- La maggior parte delle lagnanze sono troppo tecniche per essere spiegati a questo livello.
- Furono sviluppate altre teorie dell'integrazione. Quella più di successo è chiamata Integrale secondo Lebesgue (1902)

- Tuttavia nella seconda metà dell'800 i matematici diventarono via via più insoddisfatti dell'integrale di Riemann.
- La maggior parte delle lagnanze sono troppo tecniche per essere spiegati a questo livello.
- Furono sviluppate altre teorie dell'integrazione. Quella più di successo è chiamata Integrale secondo Lebesgue (1902)
  - **È una teoria molto potente, che risolve i difetti dell'integrale di Riemann.**

Altre teorie

- Tuttavia nella seconda metà dell'800 i matematici diventarono via via più insoddisfatti dell'integrale di Riemann.
- La maggior parte delle lagnanze sono troppo tecniche per essere spiegati a questo livello.
- Furono sviluppate altre teorie dell'integrazione. Quella più di successo è chiamata Integrale secondo Lebesgue (1902)
  - **È una teoria molto potente, che risolve i difetti dell'integrale di Riemann.**
  - **Purtroppo la teoria di Lebesgue ha dei preliminari molto complicati. Non si basa sulle somme di Riemann.**

- Per tutto il '900 la situazione dell'integrazione era suppergiù questa:

- Per tutto il ’900 la situazione dell’integrazione era suppergiù questa:
  - **l’integrale di Riemann, una teoria elementare ma poco potente, veniva usato nella didattica di base (“integrale *light*”)**

- Per tutto il '900 la situazione dell'integrazione era suppergiù questa:
  - **l'integrale di Riemann, una teoria elementare ma poco potente, veniva usato nella didattica di base ("integrale *light*")**
  - **l'integrale di Lebesgue, potente ma non elementare, veniva usato dai professionisti matematici ("integrale *pro*").**

Altre teorie

- Per tutto il '900 la situazione dell'integrazione era suppergiù questa:
  - **l'integrale di Riemann, una teoria elementare ma poco potente, veniva usato nella didattica di base ("integrale *light*")**
  - **l'integrale di Lebesgue, potente ma non elementare, veniva usato dai professionisti matematici ("integrale *pro*").**
- Alcune altre teorie dell'integrale sono state proposte nella prima metà del '900

Altre teorie

- Per tutto il '900 la situazione dell'integrazione era suppergiù questa:
  - **l'integrale di Riemann, una teoria elementare ma poco potente, veniva usato nella didattica di base ("integrale *light*")**
  - **l'integrale di Lebesgue, potente ma non elementare, veniva usato dai professionisti matematici ("integrale *pro*").**
- Alcune altre teorie dell'integrale sono state proposte nella prima metà del '900
  - **ma erano molto complicate e non hanno preso piede,**

- Per tutto il '900 la situazione dell'integrazione era suppergiù questa:
  - **l'integrale di Riemann, una teoria elementare ma poco potente, veniva usato nella didattica di base ("integrale *light*")**
  - **l'integrale di Lebesgue, potente ma non elementare, veniva usato dai professionisti matematici ("integrale *pro*").**
- Alcune altre teorie dell'integrale sono state proposte nella prima metà del '900
  - **ma erano molto complicate e non hanno preso piede,**
- finché. . .

Henstock e Kurzweil

- Ralph Henstock (1955) e Jaroslav Kurzweil (1957) indipendentemente uno dall'altro inventarono una nuova definizione di integrale che

Henstock e Kurzweil

- Ralph Henstock (1955) e Jaroslav Kurzweil (1957) indipendentemente uno dall'altro inventarono una nuova definizione di integrale che
  - **è basata sulle suddivisioni marcate**

- Ralph Henstock (1955) e Jaroslav Kurzweil (1957) indipendentemente uno dall'altro inventarono una nuova definizione di integrale che
  - **è basata sulle suddivisioni marcate**
  - **più il concetto nuovo e genialmente semplice di "adattamento a un calibro";**

- Ralph Henstock (1955) e Jaroslav Kurzweil (1957) indipendentemente uno dall'altro inventarono una nuova definizione di integrale che
  - **è basata sulle suddivisioni marcate**
  - **più il concetto nuovo e genialmente semplice di "adattamento a un calibro";**
- La nuova definizione

Henstock e Kurzweil

- Ralph Henstock (1955) e Jaroslav Kurzweil (1957) indipendentemente uno dall'altro inventarono una nuova definizione di integrale che
  - **è basata sulle suddivisioni marcate**
  - **più il concetto nuovo e genialmente semplice di "adattamento a un calibro";**
- La nuova definizione
  - **è solo un poco più complicata della definizione di Riemann**

Henstock e Kurzweil

- Ralph Henstock (1955) e Jaroslav Kurzweil (1957) indipendentemente uno dall'altro inventarono una nuova definizione di integrale che
  - **è basata sulle suddivisioni marcate**
  - **più il concetto nuovo e genialmente semplice di "adattamento a un calibro";**
- La nuova definizione
  - **è solo un poco più complicata della definizione di Riemann**
  - **ma è molto, molto più accessibile di quella di Lebesgue.**

- La nuova teoria

Henstock e Kurzweil

- La nuova teoria
  - **ingloba quella di Riemann,**

- La nuova teoria
  - **ingloba quella di Riemann,**
  - **ritrova molti risultati importanti di Lebesgue, spesso in modo semplice ed elegante;**

- La nuova teoria
  - **ingloba quella di Riemann,**
  - **ritrova molti risultati importanti di Lebesgue, spesso in modo semplice ed elegante;**
  - **copre anche del terreno nuovo, che sfuggiva ai metodi di Lebesgue.**

Henstock e Kurzweil

- La nuova teoria
  - **ingloba quella di Riemann,**
  - **ritrova molti risultati importanti di Lebesgue, spesso in modo semplice ed elegante;**
  - **copre anche del terreno nuovo, che sfuggiva ai metodi di Lebesgue.**
- Il nuovo integrale ha diversi nomi:

- La nuova teoria
  - **ingloba quella di Riemann,**
  - **ritrova molti risultati importanti di Lebesgue, spesso in modo semplice ed elegante;**
  - **copre anche del terreno nuovo, che sfuggiva ai metodi di Lebesgue.**
- Il nuovo integrale ha diversi nomi:
  - **integrale di Henstock-Kurzweil,**

- La nuova teoria
  - **ingloba quella di Riemann,**
  - **ritrova molti risultati importanti di Lebesgue, spesso in modo semplice ed elegante;**
  - **copre anche del terreno nuovo, che sfuggiva ai metodi di Lebesgue.**
- Il nuovo integrale ha diversi nomi:
  - **integrale di Henstock-Kurzweil,**
  - **integrale di calibro (“gauge integral”),**

- La nuova teoria
  - **ingloba quella di Riemann,**
  - **ritrova molti risultati importanti di Lebesgue, spesso in modo semplice ed elegante;**
  - **copre anche del terreno nuovo, che sfuggiva ai metodi di Lebesgue.**
- Il nuovo integrale ha diversi nomi:
  - **integrale di Henstock-Kurzweil,**
  - **integrale di calibro (“gauge integral”),**
  - **integrale di Riemann generalizzato.**

- “gauge” è una parola inglese di origine germanica; in francese corrisponde a “jauge”; non sembra avere parenti in italiano;

- “gauge” è una parola inglese di origine germanica; in francese corrisponde a “jauge”; non sembra avere parenti in italiano;
- significa “misurazione” in generale, e “calibro (diametro interno) di tubi” in particolare.

- “gauge” è una parola inglese di origine germanica; in francese corrisponde a “jauge”; non sembra avere parenti in italiano;
- significa “misurazione” in generale, e “calibro (diametro interno) di tubi” in particolare.
- “calibro” è di origine araba.

- *Dopo decenni di sviluppo la nuova teoria è ben sviluppata e matura:*

- ***Dopo decenni di sviluppo la nuova teoria è ben sviluppata e matura:***
  - si affianca e si intreccia con quella di Lebesgue per i professionisti;

- ***Dopo decenni di sviluppo la nuova teoria è ben sviluppata e matura:***
  - si affianca e si intreccia con quella di Lebesgue per i professionisti;
  - e viene ora proposta seriamente per sostituire l'integrale di Riemann nell'insegnamento di base che abbia ambizioni di rigore, in quanto:

- ***Dopo decenni di sviluppo la nuova teoria è ben sviluppata e matura:***
  - si affianca e si intreccia con quella di Lebesgue per i professionisti;
  - e viene ora proposta seriamente per sostituire l'integrale di Riemann nell'insegnamento di base che abbia ambizioni di rigore, in quanto:
    - **l'integrale di Riemann si definisca più in fretta,**

- ***Dopo decenni di sviluppo la nuova teoria è ben sviluppata e matura:***
  - si affianca e si intreccia con quella di Lebesgue per i professionisti;
  - e viene ora proposta seriamente per sostituire l'integrale di Riemann nell'insegnamento di base che abbia ambizioni di rigore, in quanto:
    - **l'integrale di Riemann si definisca più in fretta,**
    - **però il teorema principale della teoria di base (il *"teorema fondamentale del calcolo"*) è più semplice usando l'integrale di calibro**

- ***Dopo decenni di sviluppo la nuova teoria è ben sviluppata e matura:***
  - si affianca e si intreccia con quella di Lebesgue per i professionisti;
  - e viene ora proposta seriamente per sostituire l'integrale di Riemann nell'insegnamento di base che abbia ambizioni di rigore, in quanto:
    - **l'integrale di Riemann si definisca più in fretta,**
    - **però il teorema principale della teoria di base (il *"teorema fondamentale del calcolo"*) è più semplice usando l'integrale di calibro**
      - più semplice da enunciare

- ***Dopo decenni di sviluppo la nuova teoria è ben sviluppata e matura:***
  - si affianca e si intreccia con quella di Lebesgue per i professionisti;
  - e viene ora proposta seriamente per sostituire l'integrale di Riemann nell'insegnamento di base che abbia ambizioni di rigore, in quanto:
    - **l'integrale di Riemann si definisca più in fretta,**
    - **però il teorema principale della teoria di base (il *"teorema fondamentale del calcolo"*) è più semplice usando l'integrale di calibro**
      - più semplice da enunciare
      - e da dimostrare (più diretto, con meno preliminari tecnici).

Motivazione

Motivazione

- *In questo corso seguiremo la teoria dell'integrale di calibro.*

- ***In questo corso seguiremo la teoria dell'integrale di calibro.***
  - Bisogna quindi introdurre i concetti di

Motivazione

- ***In questo corso seguiremo la teoria dell'integrale di calibro.***
  - Bisogna quindi introdurre i concetti di
    - **calibro**

Motivazione

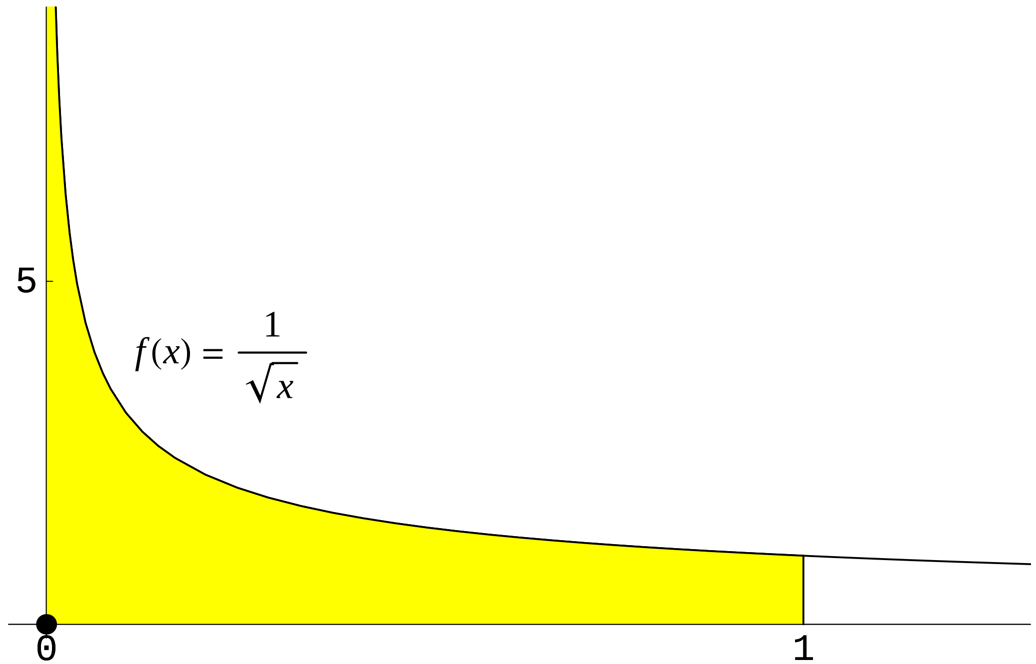
- ***In questo corso seguiremo la teoria dell'integrale di calibro.***
  - Bisogna quindi introdurre i concetti di
    - **calibro**
    - **e di suddivisione adattata a un calibro.**

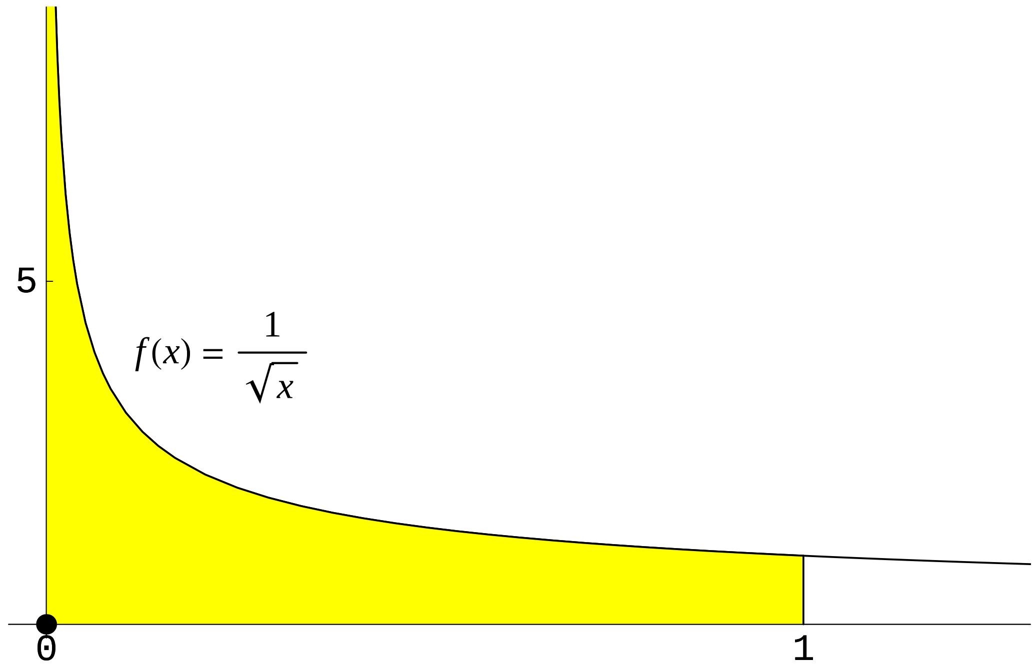
Motivazione

- ***In questo corso seguiremo la teoria dell'integrale di calibro.***
  - Bisogna quindi introdurre i concetti di
    - **calibro**
    - **e di suddivisione adattata a un calibro.**
  - Per renderli plausibili cominciamo studiando un esempio in cui l'integrale di Riemann fallisce

- ***In questo corso seguiremo la teoria dell'integrale di calibro.***
  - Bisogna quindi introdurre i concetti di
    - **calibro**
    - **e di suddivisione adattata a un calibro.**
  - Per renderli plausibili cominciamo studiando un esempio in cui l'integrale di Riemann fallisce
    - (Tecnicamente, per chi conosce già la teoria di Riemann: si tratta di una funzione integrabile "in senso improprio" ma non in senso proprio).

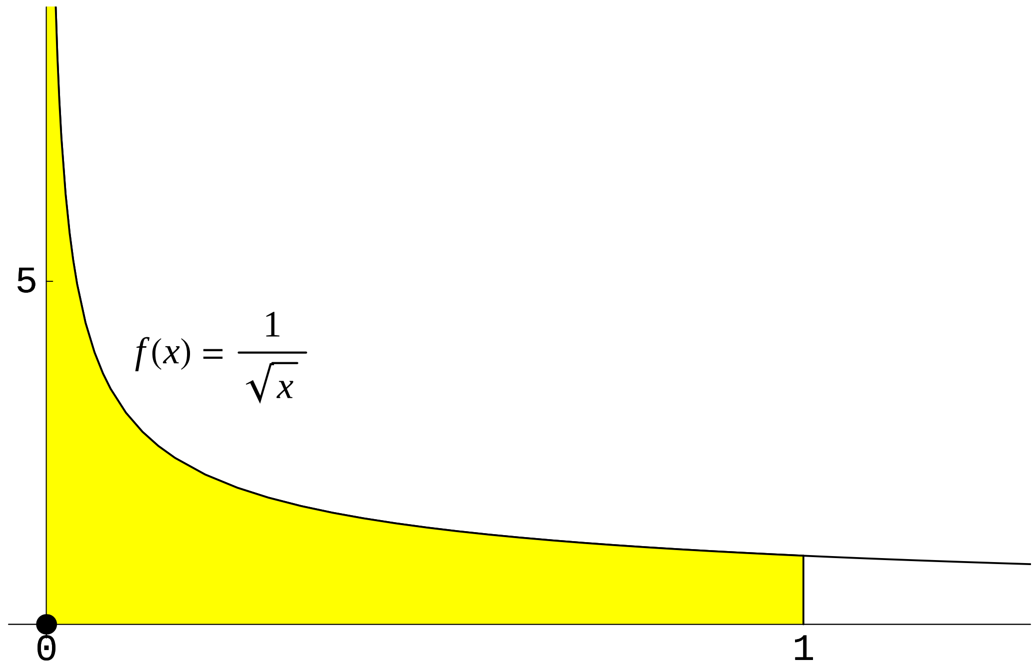
Uno su radice





- consideriamo questta funzione su $[0, 1]$:

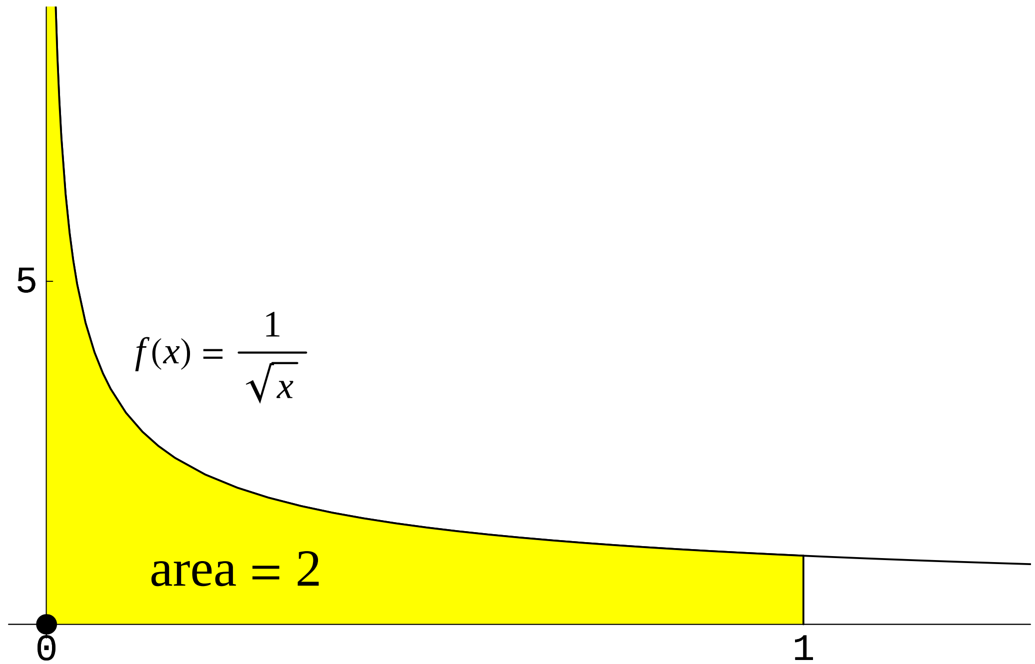
$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



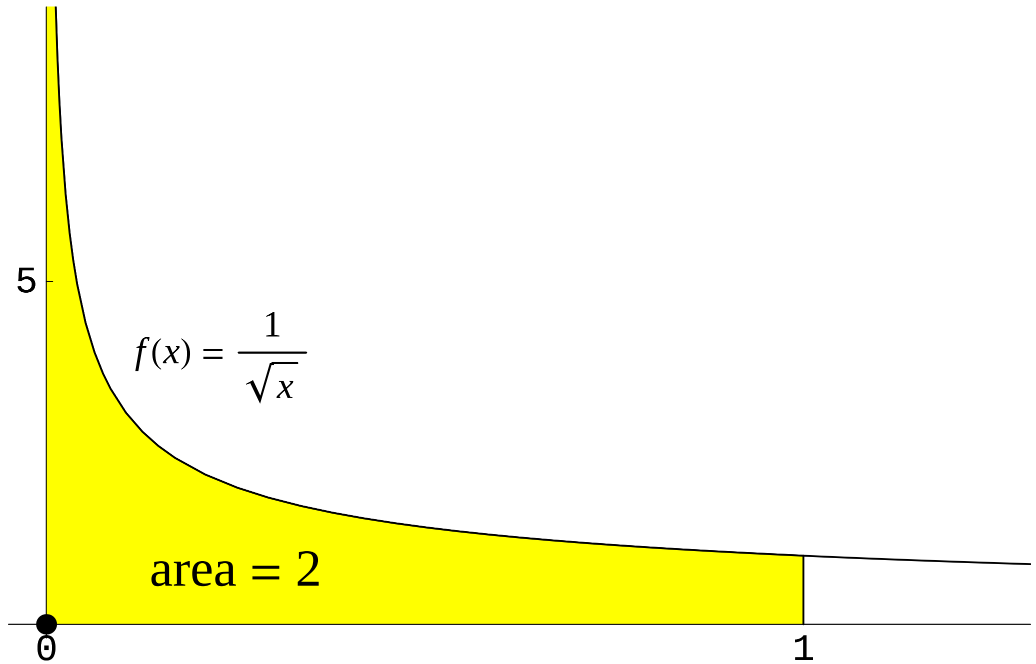
- consideriamo questa funzione su $[0,1]$:

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

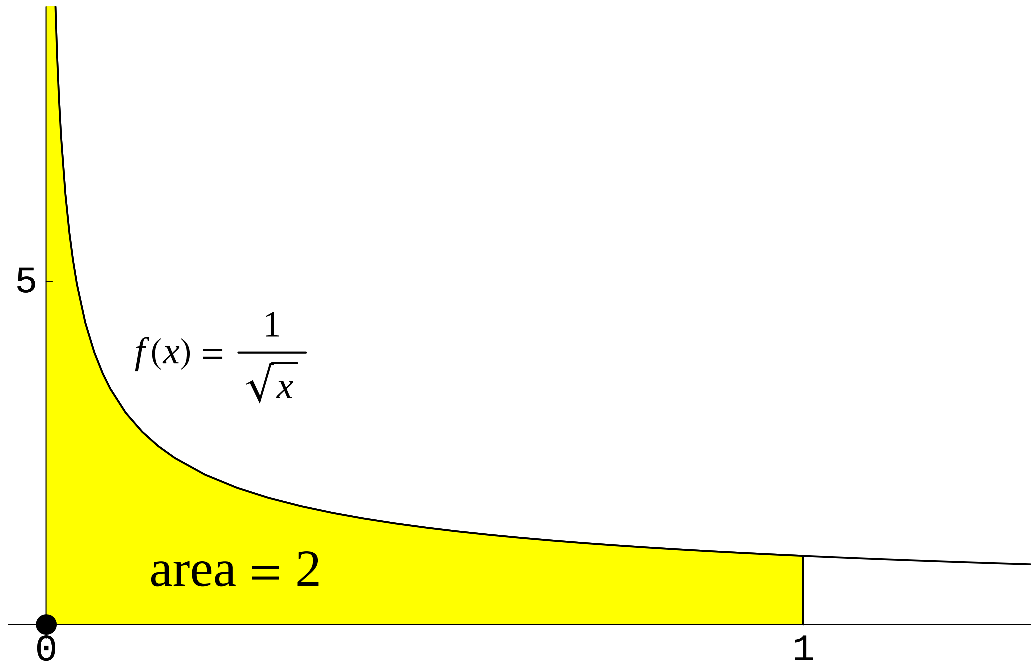
  - Notare che $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$. f non è continua!



- Ci sono ottimi motivi (che vedremo più avanti) per dire che l'area del trapezoide è esattamente 2.



- Ci sono ottimi motivi (che vedremo più avanti) per dire che l'area del trapezoide è esattamente 2.
  - **(Nella figura le unità di misura sono diverse in orizzontale e in verticale).**



- Ci sono ottimi motivi (che vedremo più avanti) per dire che l'area del trapezoide è esattamente 2.
  - **(Nella figura le unità di misura sono diverse in orizzontale e in verticale).**
- Tuttavia la funzione non è integrabile secondo Riemann!

Uno su radice

- Per esplorare la questione, cominciamo con un *esperimento numerico* simile a quello fatto in precedenza:

Uno su radice

- Per esplorare la questione, cominciamo con un *esperimento numerico* simile a quello fatto in precedenza:
  - **Generiamo un gran numero di suddivisioni marcate casuali di $[0, 1]$,**

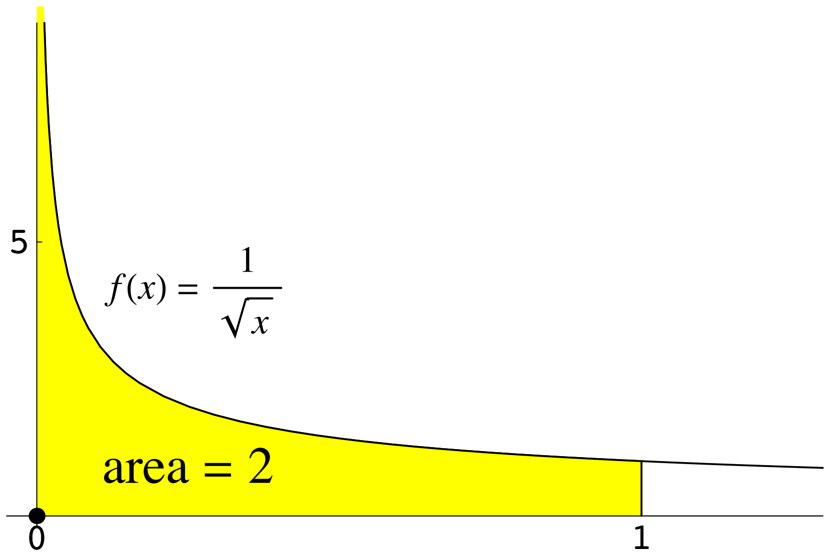
- Per esplorare la questione, cominciamo con un *esperimento numerico* simile a quello fatto in precedenza:
  - **Generiamo un gran numero di suddivisioni marcate casuali di** $[0, 1]$**,**
  - **calcoliamo** $\mathrm{amp}(\Pi)$ **e** $S(f, \Pi)$ **per ciascuna di esse,**

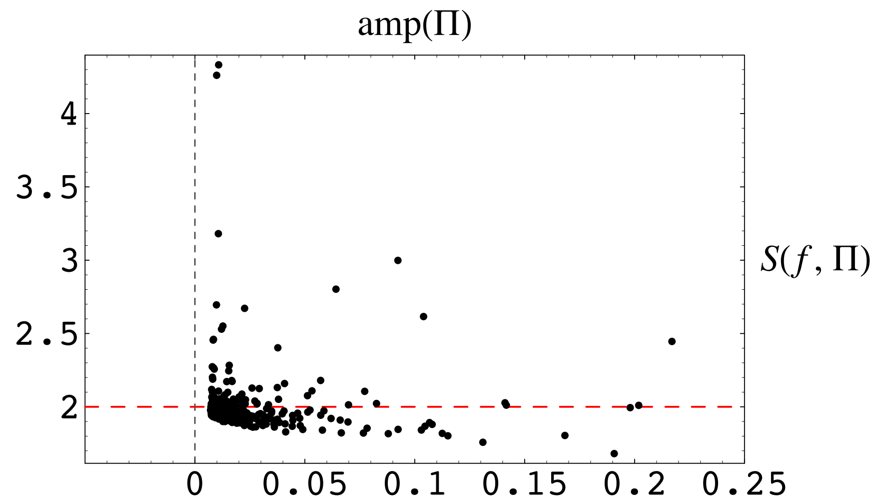
Uno su radice

- Per esplorare la questione, cominciamo con un *esperimento numerico* simile a quello fatto in precedenza:
  - **Generiamo un gran numero di suddivisioni marcate casuali di** $[0,1]$**,**
  - **calcoliamo** $\operatorname{amp}(\Pi)$ **e** $S(f,\Pi)$ **per ciascuna di esse,**
  - **riportiamo i punti** $\big(\operatorname{amp}(\Pi), S(f,\Pi)\big)$ **su un grafico,**

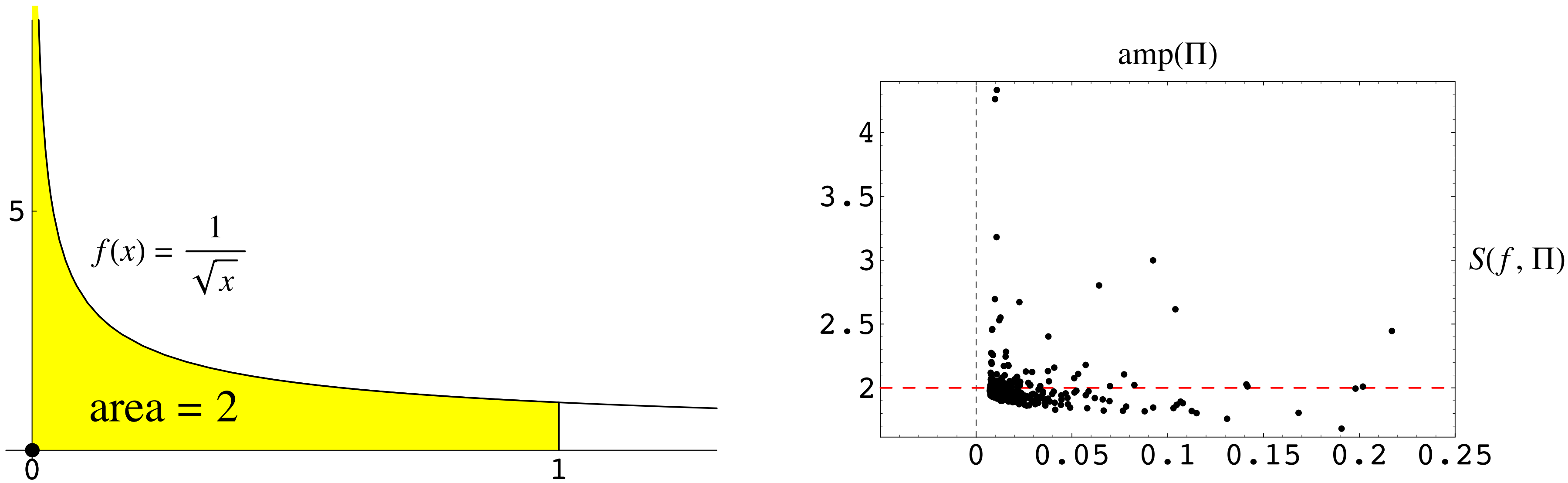
Uno su radice

- Per esplorare la questione, cominciamo con un *esperimento numerico* simile a quello fatto in precedenza:
  - **Generiamo un gran numero di suddivisioni marcate casuali di** $[0,1]$**,**
  - **calcoliamo** $\operatorname{amp}(\Pi)$ **e** $S(f,\Pi)$ **per ciascuna di esse,**
  - **riportiamo i punti** $\Big(\operatorname{amp}(\Pi), S(f,\Pi)\Big)$ **su un grafico,**
  - **e vediamo se i punti si concentrano andando verso sinistra.**

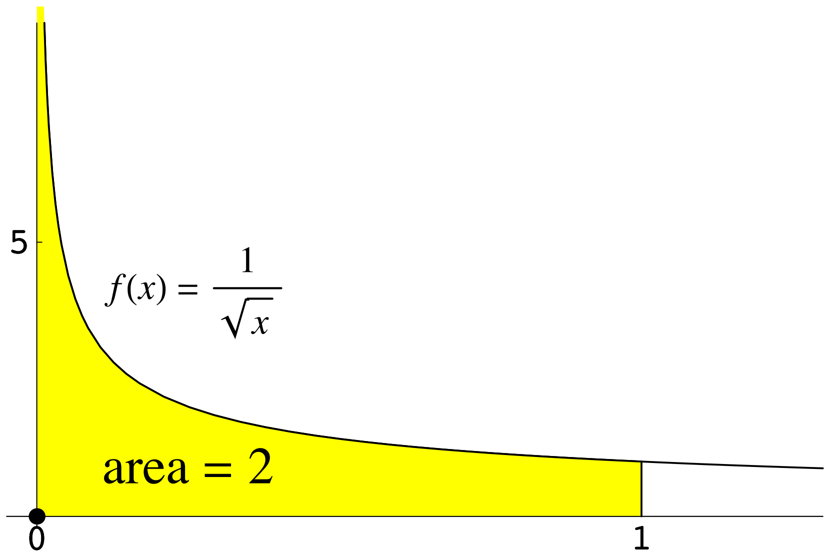

5
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
area = 2
0
1

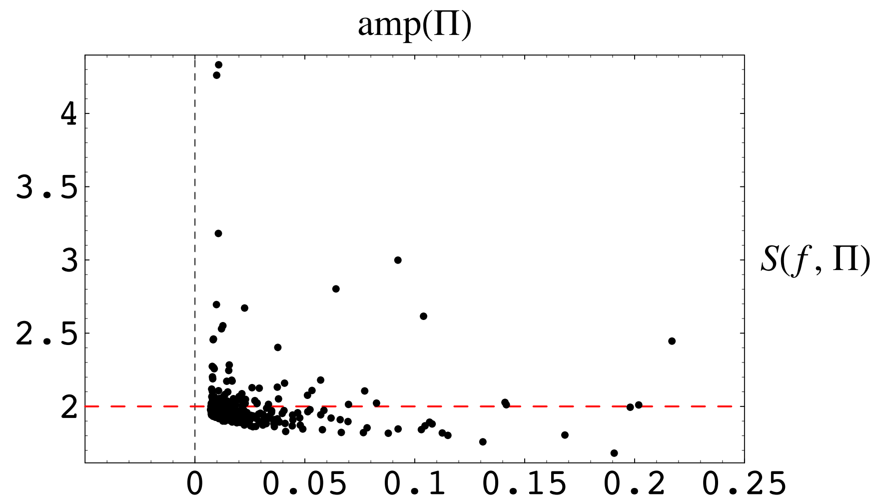

amp(Π)
4
3.5
3
2.5
2
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
S(f, Π)

Uno su radice

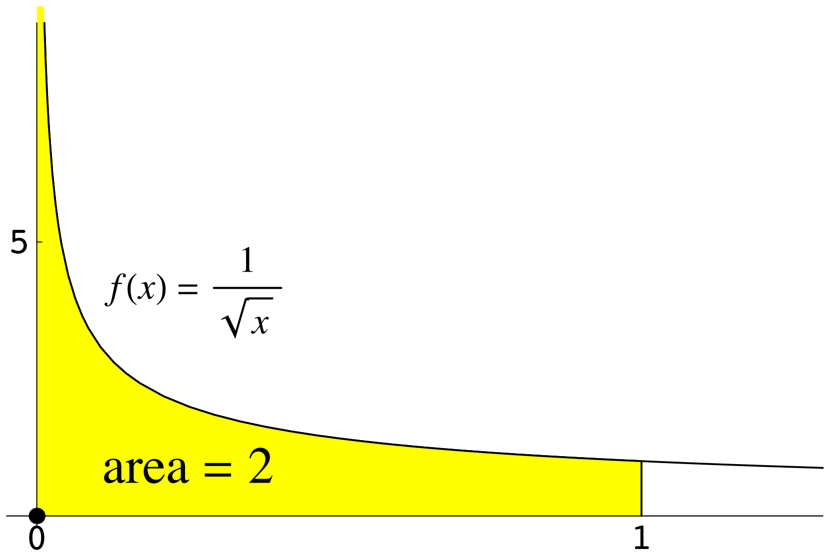


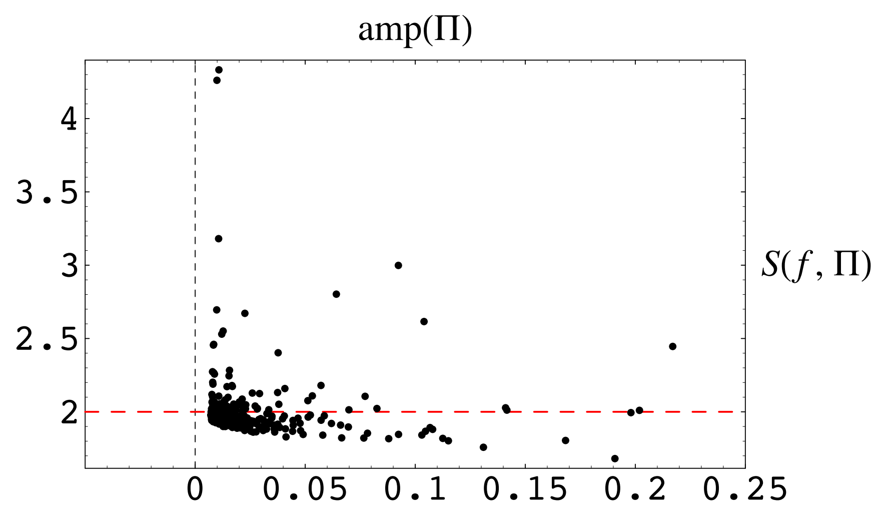
- La maggior parte dei punti ha ordinata vicina al valore atteso 2;



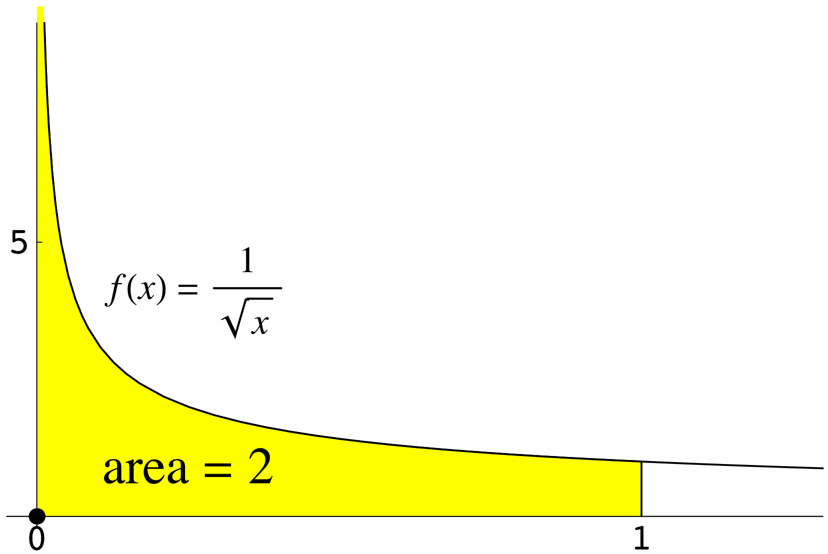


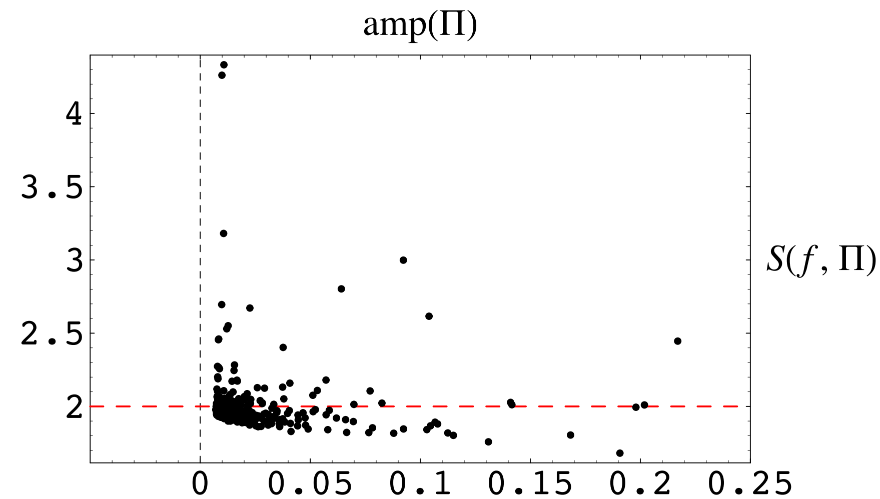
- La maggior parte dei punti ha ordinata vicina al valore atteso 2;
- però ci sono dei punti isolati con ordinata decisamente più grande *anche per valori piccoli di* amp(Π).





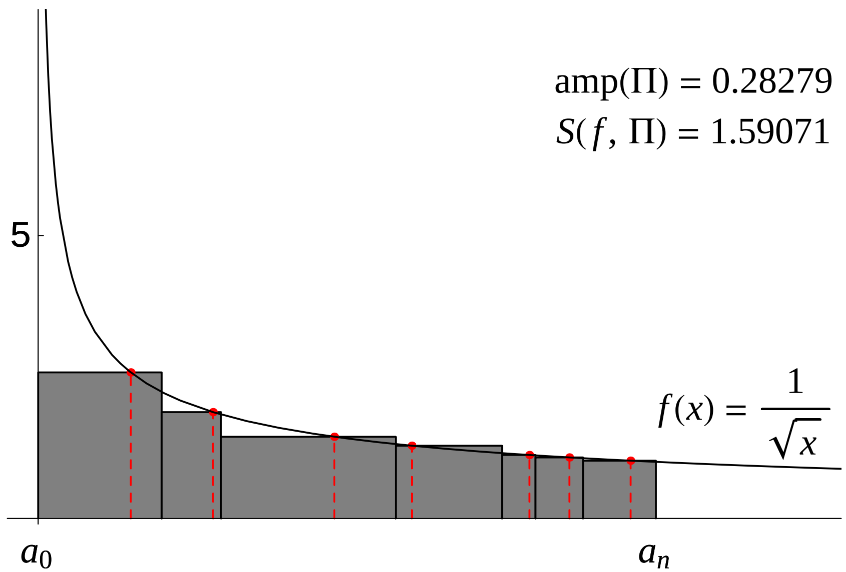
- La maggior parte dei punti ha ordinata vicina al valore atteso 2;
- però ci sono dei punti isolati con ordinata decisamente più grande *anche per valori piccoli di* amp(Π).
- Le somme di Riemann non hanno l'aria di concentrarsi.





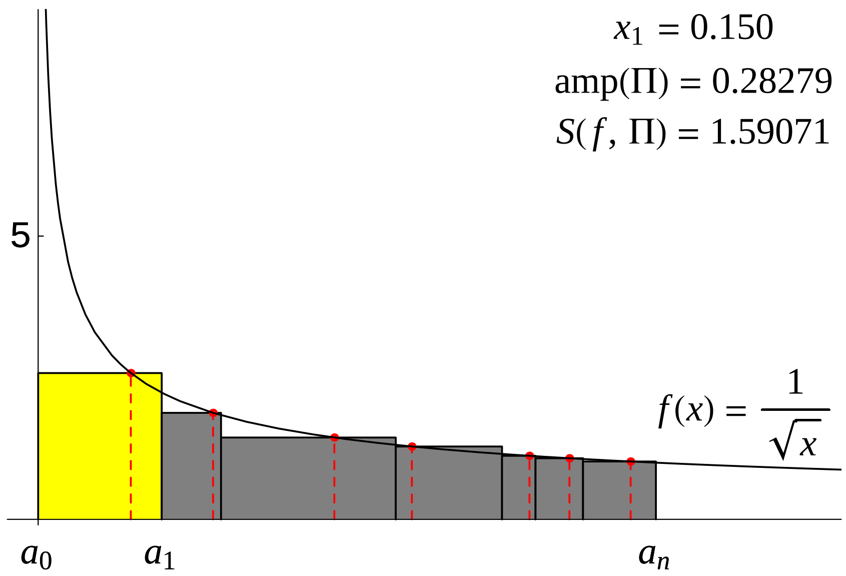
- La maggior parte dei punti ha ordinata vicina al valore atteso 2;
- però ci sono dei punti isolati con ordinata decisamente più grande *anche per valori piccoli di* amp(Π).
- Le somme di Riemann non hanno l'aria di concentrarsi.
- Che cosa va storto?

Posizione marcato

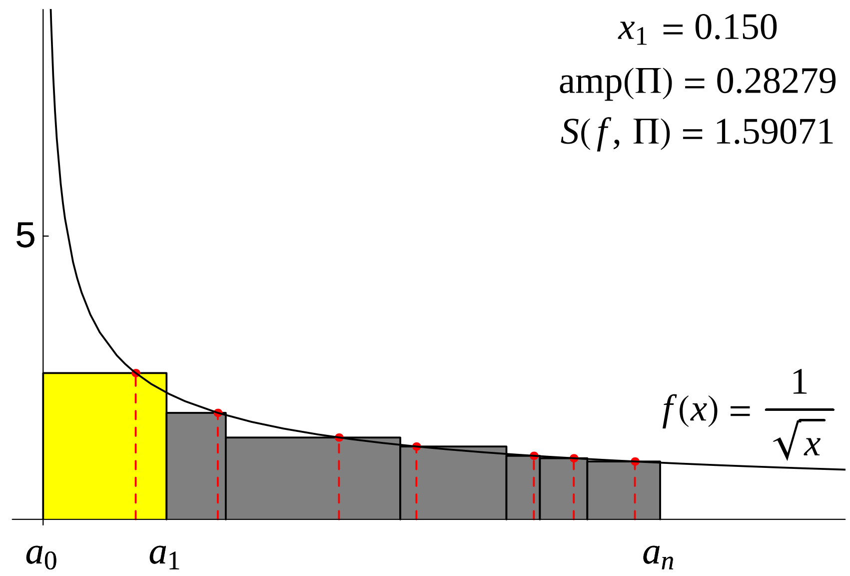


- **Prendiamo una suddivisione *qualsiasi* di $[0, 1]$ e il plurirettangolo associato.**

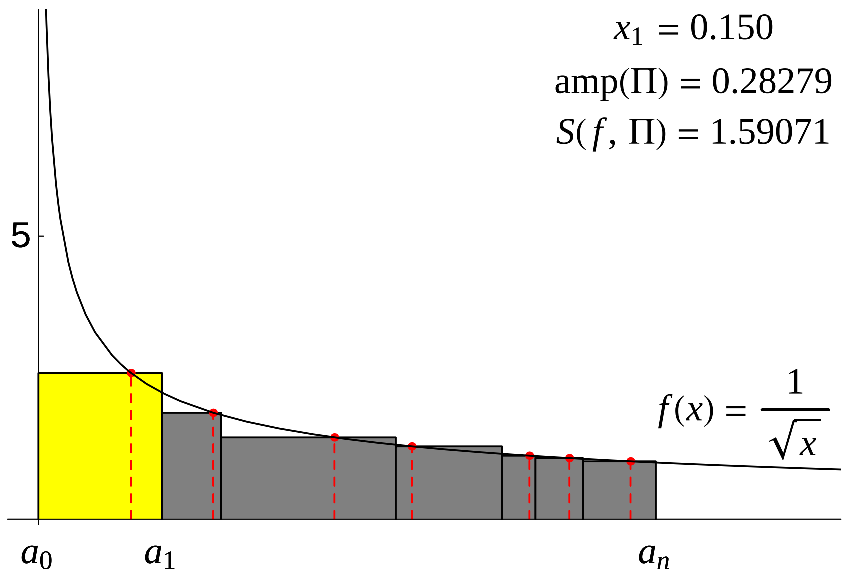
Posizione marcato



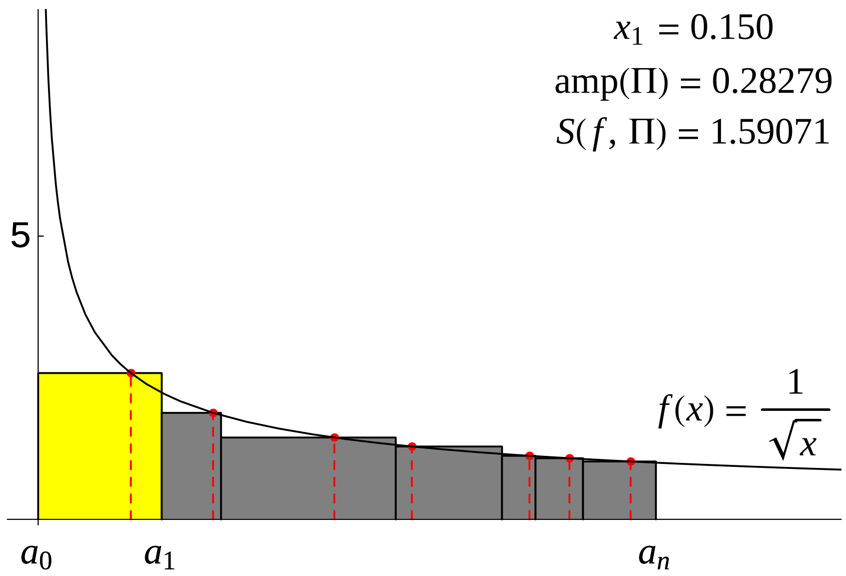
- Prendiamo una suddivisione *qualsiasi* di $[0, 1]$ e il plurirettangolo associato.
- Concentriamo l'attenzione sul primo rettangolino a sinistra, quello giallo.



- **Prendiamo una suddivisione *qualsiasi* di $[0, 1]$ e il plurirettangolo associato.**
- **Concentriamo l'attenzione sul primo rettangolino a sinistra, quello giallo.**
    - L'ampiezza $\text{amp}(\Pi)$ dipende solo dagli a_i, non dagli x_i.

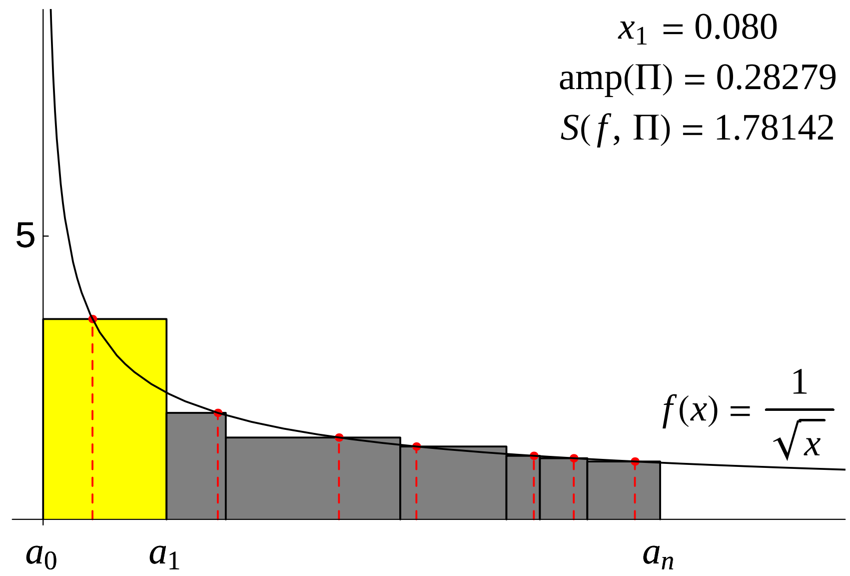


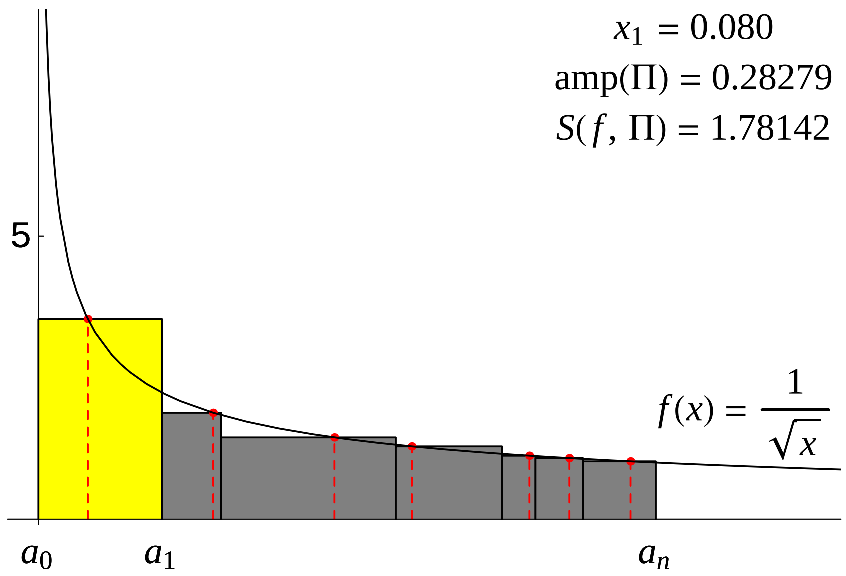
- **Prendiamo una suddivisione *qualsiasi* di $[0, 1]$ e il plurirettangolo associato.**
- **Concentriamo l'attenzione sul primo rettangolino a sinistra, quello giallo.**
  - L'ampiezza $\text{amp}(\Pi)$ dipende solo dagli a_i, non dagli x_i.
  - Proviamo a tenere fissi tutti gli a_i e i punti marcati $x_2, x_3, \ldots,$



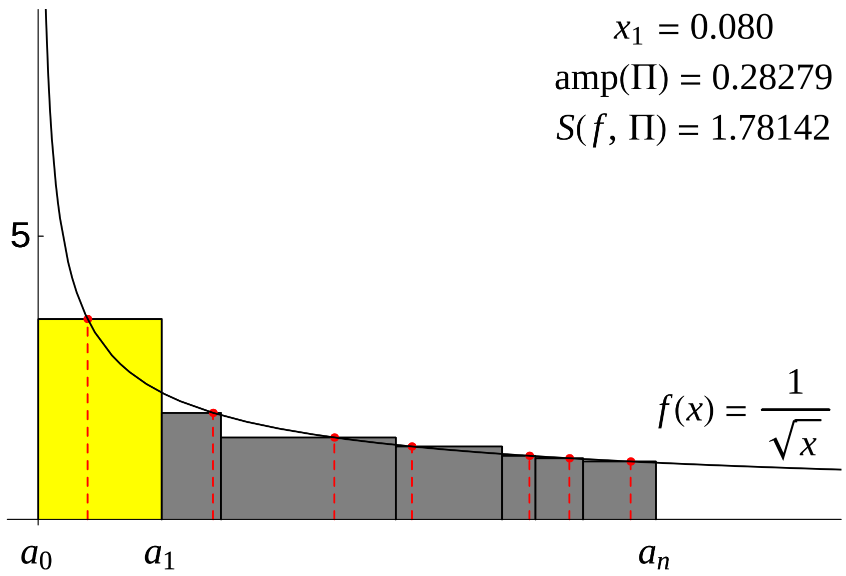
- **Prendiamo una suddivisione *qualsiasi* di $[0, 1]$ e il plurirettangolo associato.**
- **Concentriamo l'attenzione sul primo rettangolino a sinistra, quello giallo.**
  - L'ampiezza $\text{amp}(\Pi)$ dipende solo dagli a_i, non dagli x_i.
  - Proviamo a tenere fissi tutti gli a_i e i punti marcati $x_2, x_3, \ldots,$
  - ma muoviamo x_1 verso sinistra:

Posizione marcato

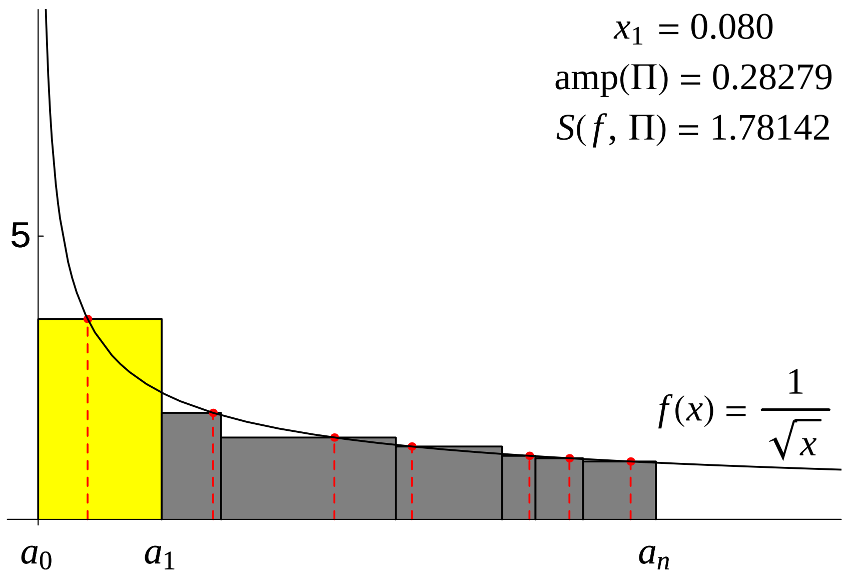




- **Spostando x_1 verso sinistra**

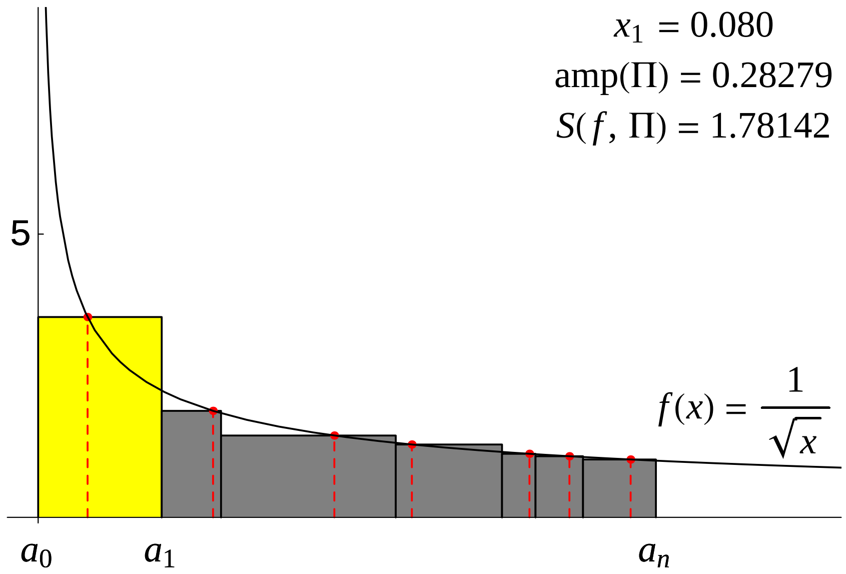


- **Spostando x_1 verso sinistra**
  - il primo rettangolino è cresciuto in altezza;



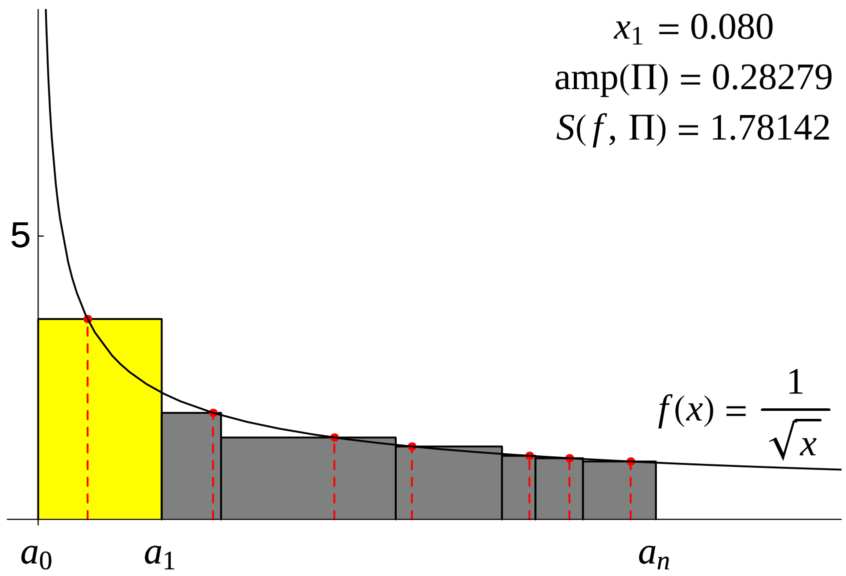
- **Spostando x_1 verso sinistra**
  - il primo rettangolino è cresciuto in altezza;
  - gli altri rettangolini sono rimasti uguali;

Posizione marcato



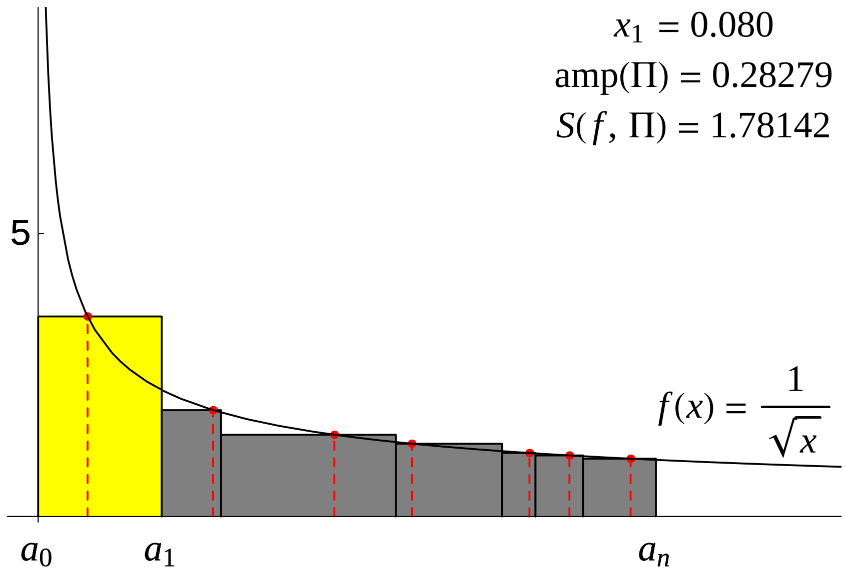
- **Spostando x_1 verso sinistra**
  - il primo rettangolino è cresciuto in altezza;
  - gli altri rettangolini sono rimasti uguali;
  - quindi l'area del plurirettangolo $S(f, \Pi)$ è cresciuta;

Posizione marcato

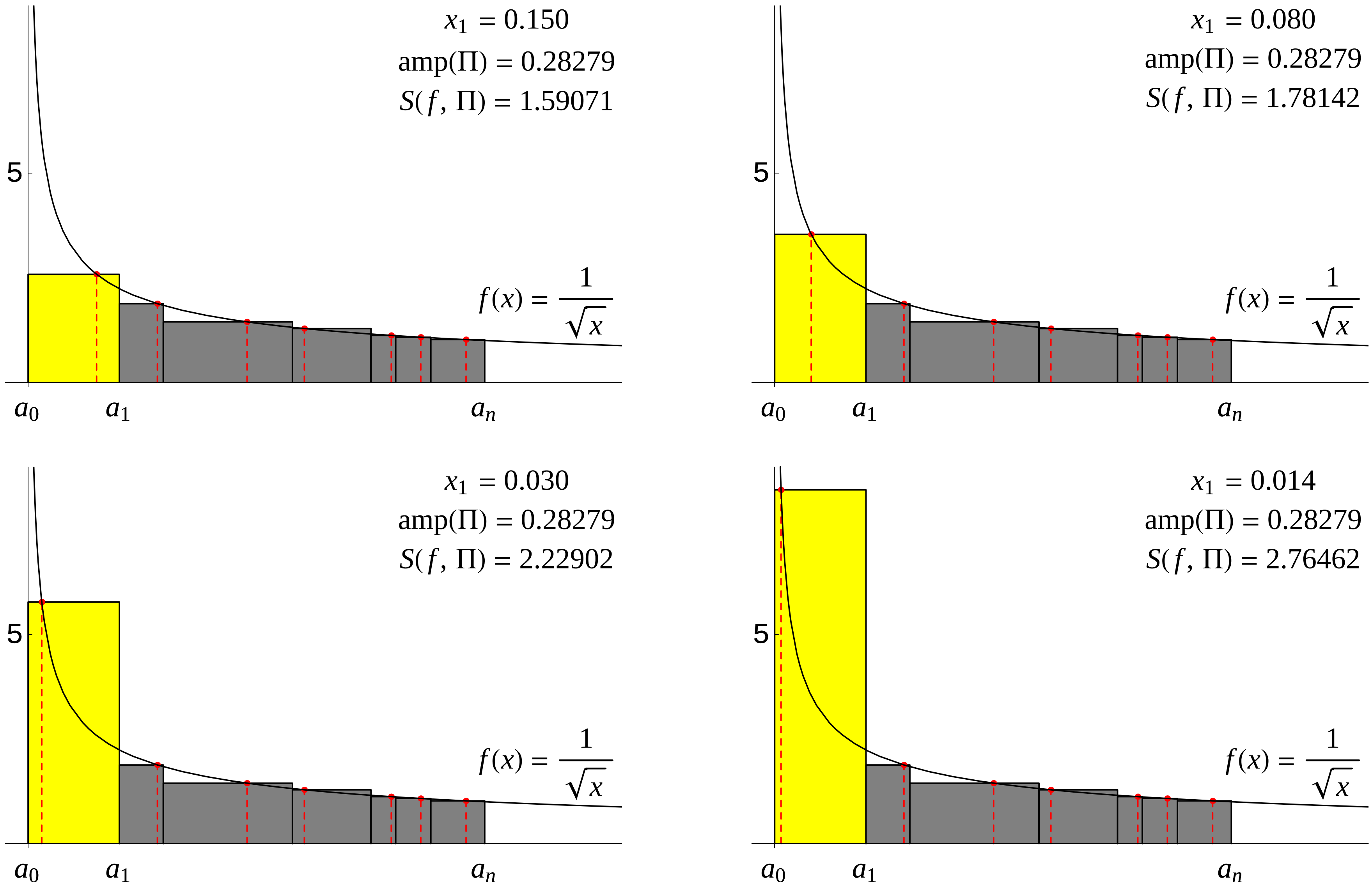


- **Spostando x_1 verso sinistra**
  - il primo rettangolino è cresciuto in altezza;
  - gli altri rettangolini sono rimasti uguali;
  - quindi l'area del plurirettangolo $S(f, \Pi)$ è cresciuta;
  - le lunghezze degli intervallini sono rimaste le stesse, e quindi amp(Π) è la stessa di prima.

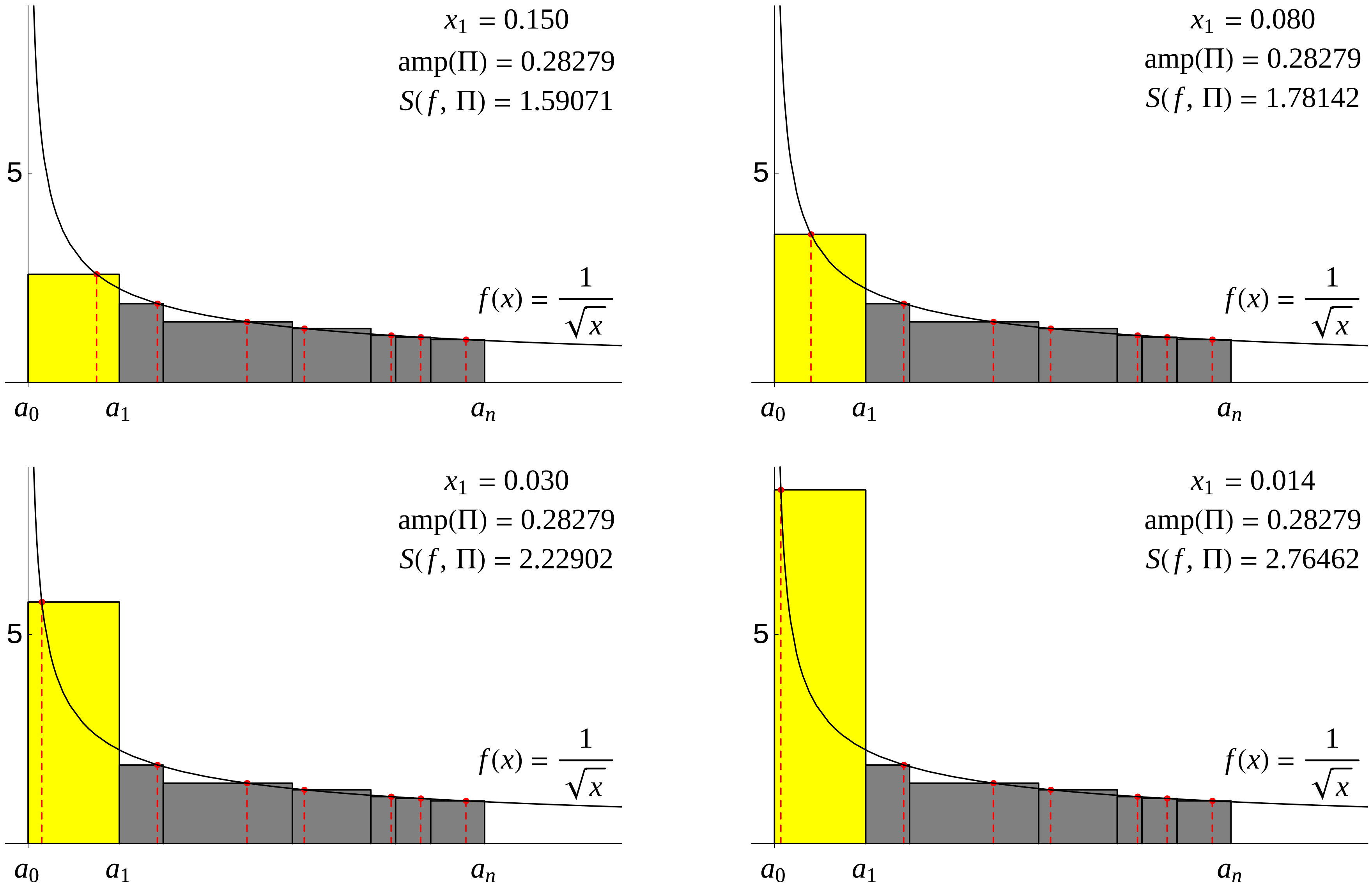
Posizione marcato



- **Spostando x_1 verso sinistra**
  - il primo rettangolino è cresciuto in altezza;
  - gli altri rettangolini sono rimasti uguali;
  - quindi l'area del plurirettangolo $S(f, \Pi)$ è cresciuta;
  - le lunghezze degli intervallini sono rimaste le stesse, e quindi $\text{amp}(\Pi)$ è la stessa di prima.
- **Vediamo i risultati di diverse posizioni di x_1:**

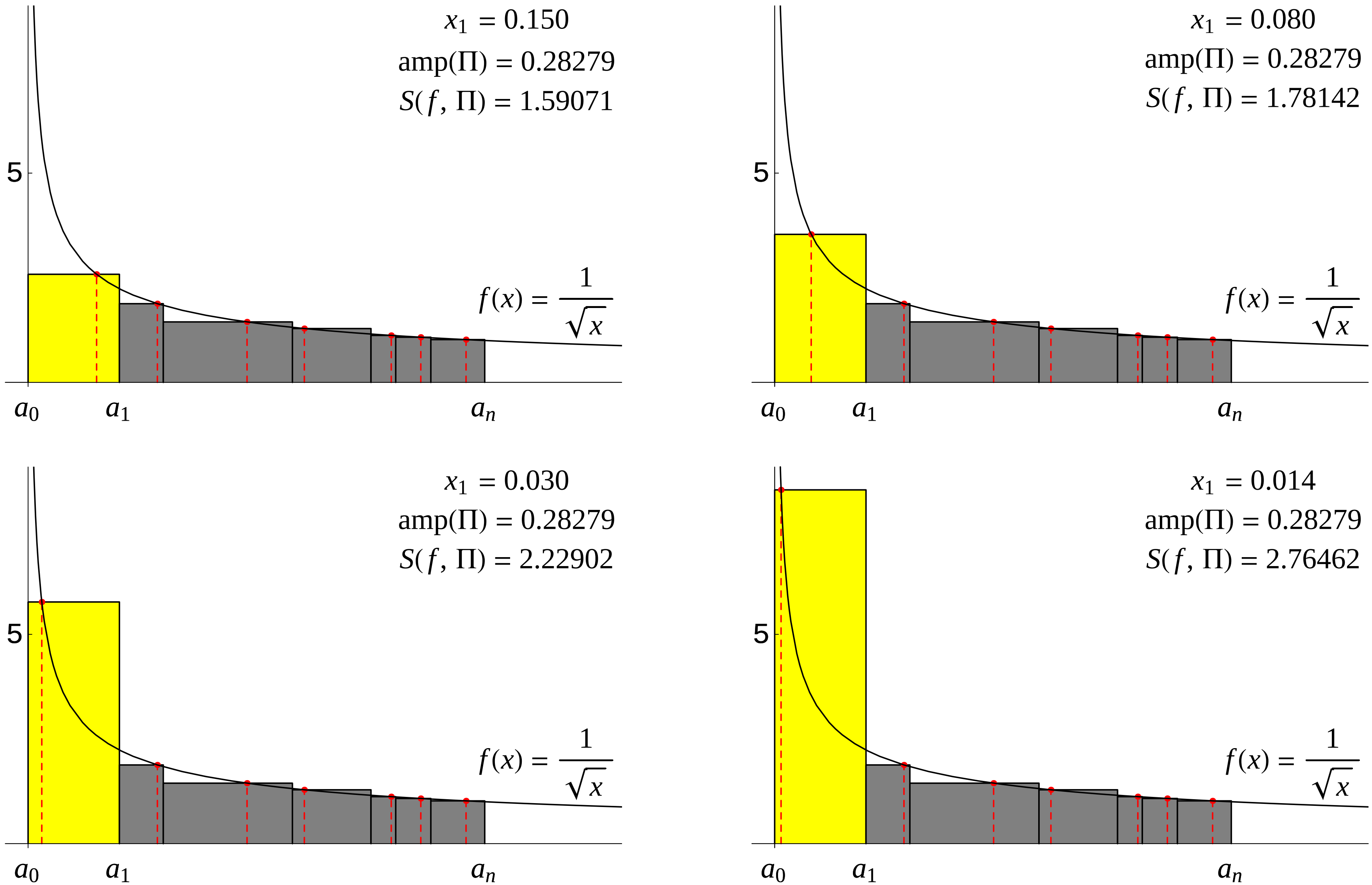


$x_1 = 0.150$
$\mathrm{amp}(\Pi) = 0.28279$
$S(f, \Pi) = 1.59071$
5
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
a_0 a_1 a_n
$x_1 = 0.080$
$\mathrm{amp}(\Pi) = 0.28279$
$S(f, \Pi) = 1.78142$
5
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
a_0 a_1 a_n
$x_1 = 0.030$
$\mathrm{amp}(\Pi) = 0.28279$
$S(f, \Pi) = 2.22902$
5
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
a_0 a_1 a_n
$x_1 = 0.014$
$\mathrm{amp}(\Pi) = 0.28279$
$S(f, \Pi) = 2.76462$
5
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
a_0 a_1 a_n

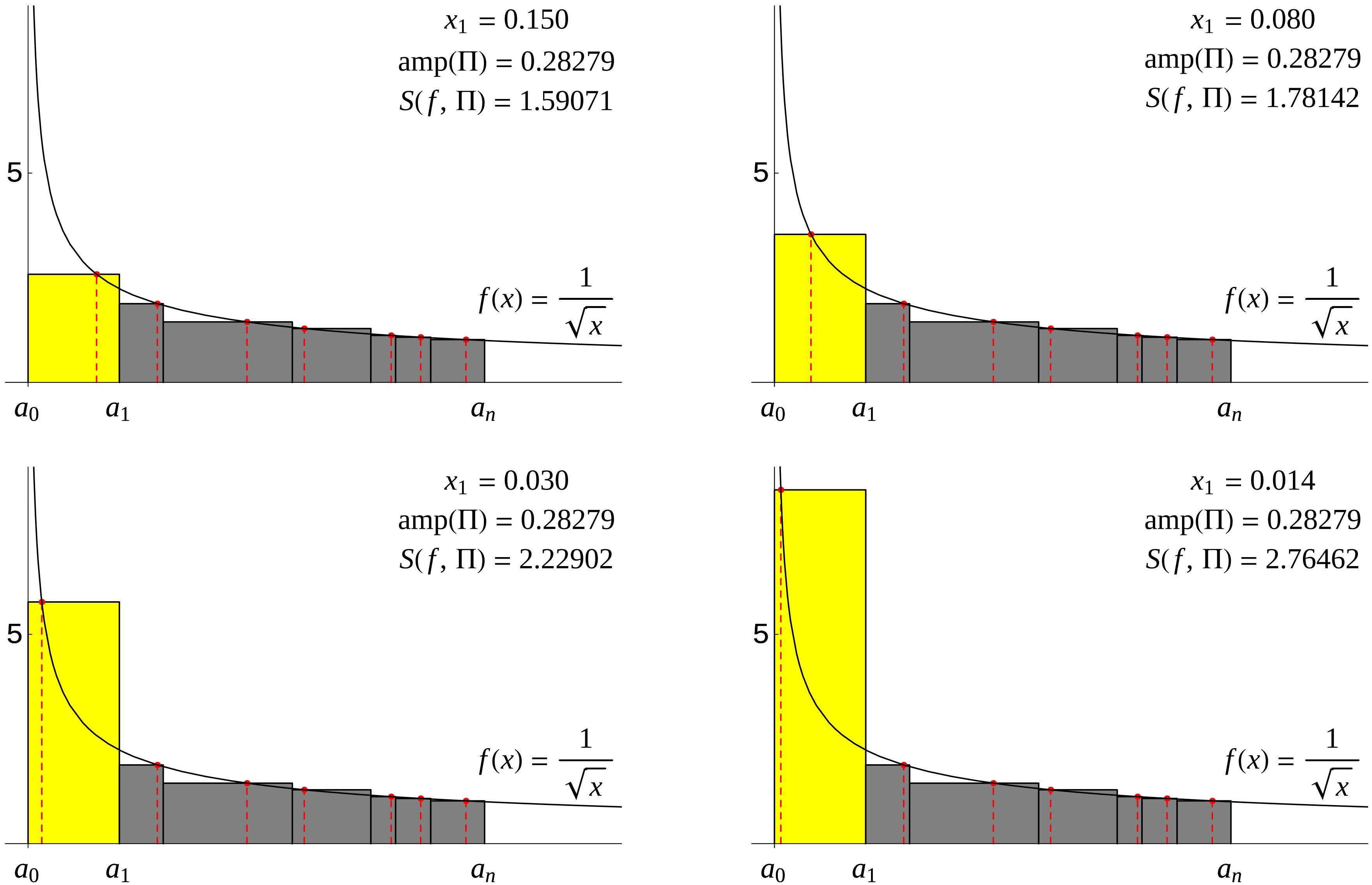


- L'area del primo rettangolino si può rendere grande a piacere

Posizione marcato

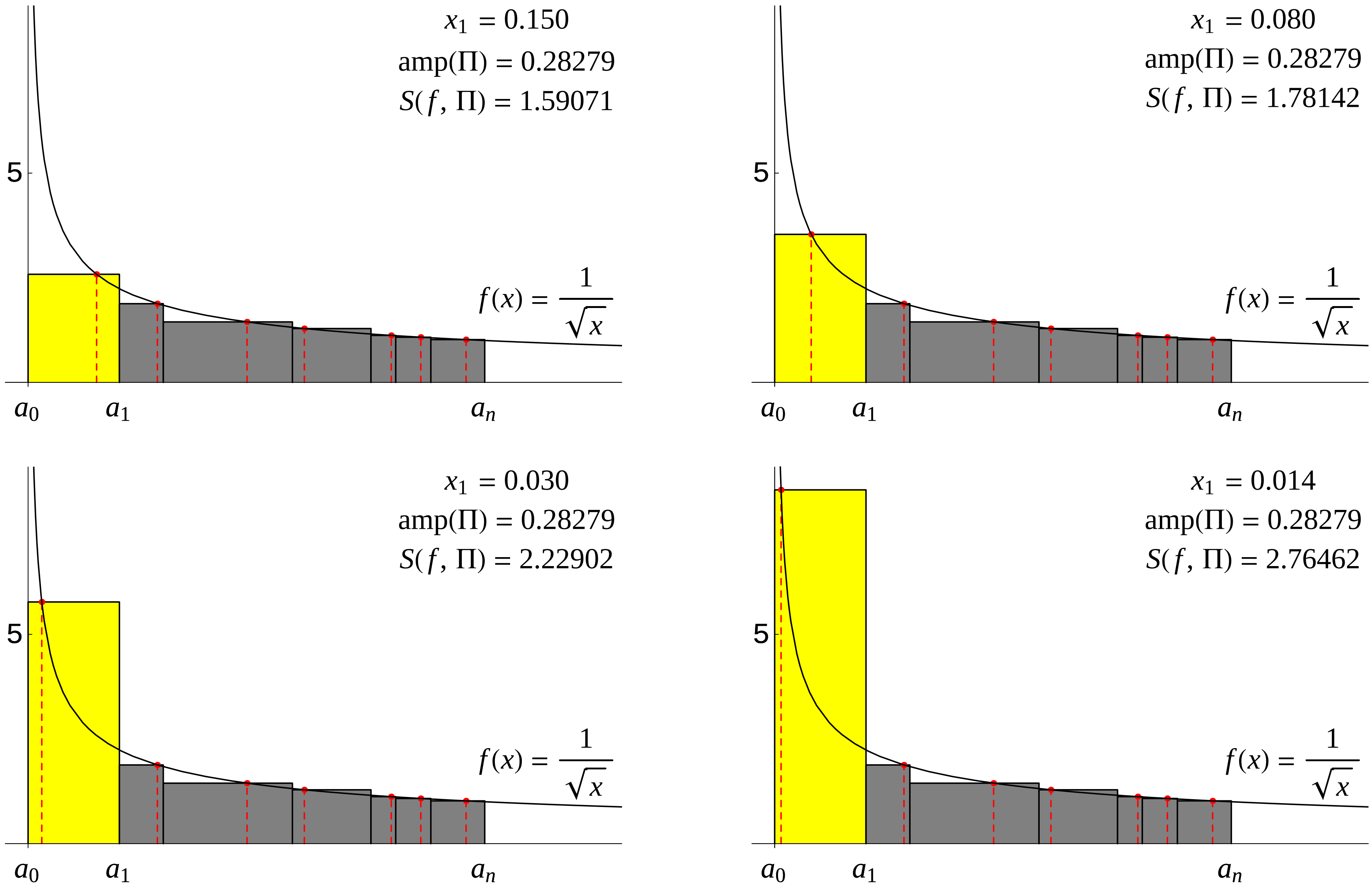


- L'area del primo rettangolino si può rendere grande a piacere
- senza scalfire $\mathrm{amp}(\Pi)$.

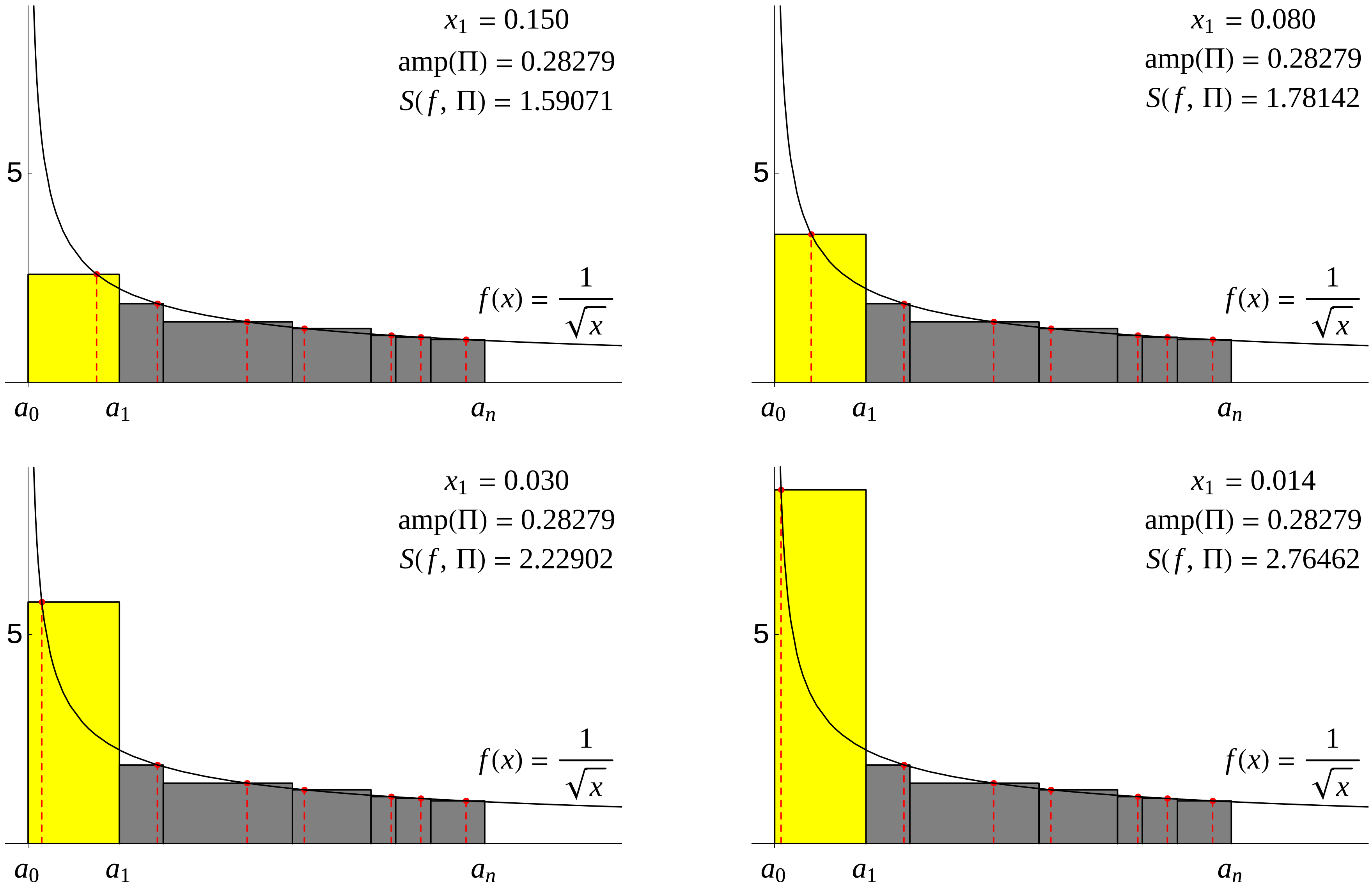


- Questo trucco si può ripetere partendo da *qualsiasi* Π.

Posizione marcato

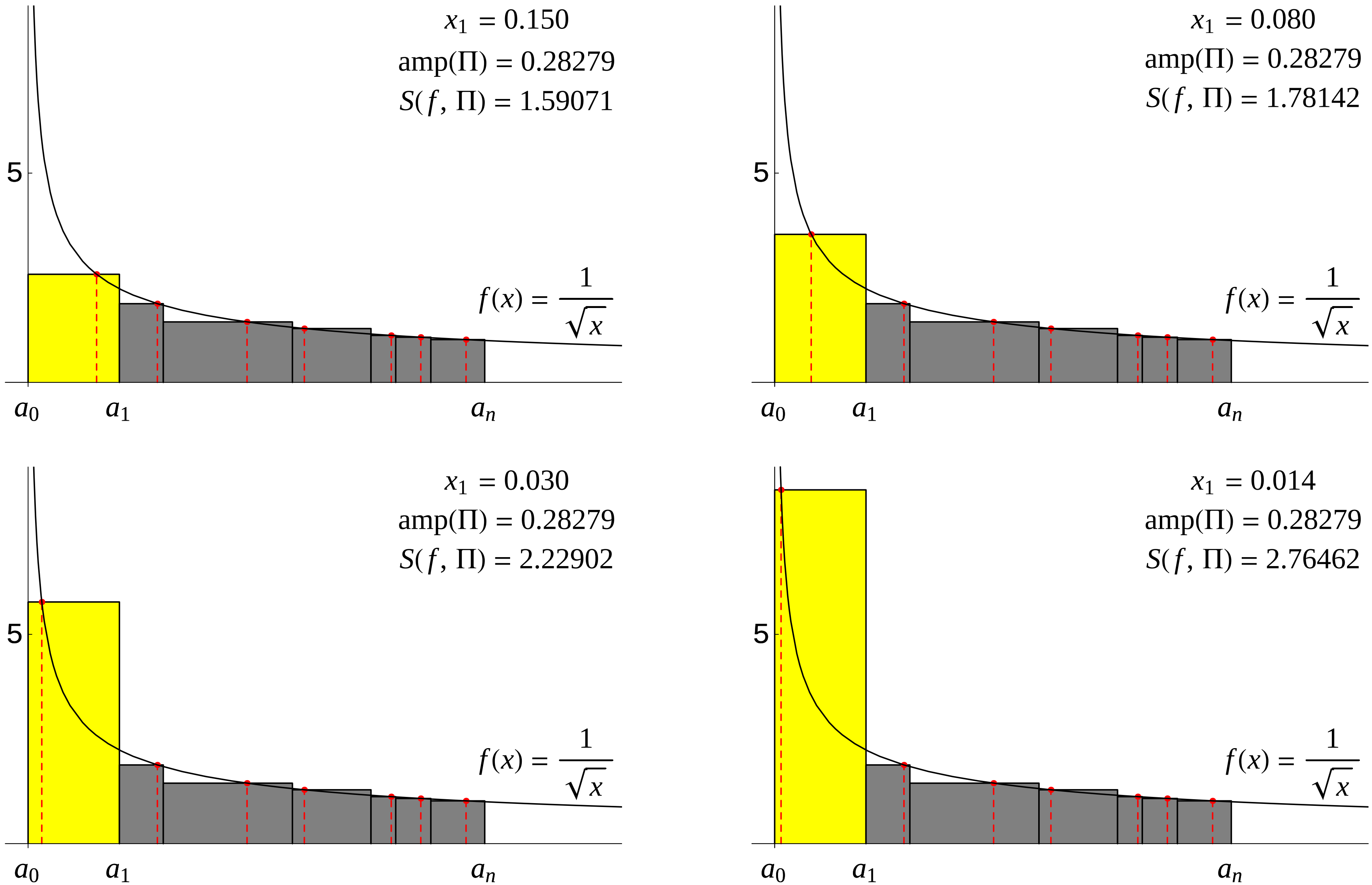


- Quindi per questa f non è vero che $S(f, \Pi)$ si stabilizza quando $\mathrm{amp}(\Pi)$ è piccola: né attorno a 2 né attorno ad alcun numero finito.



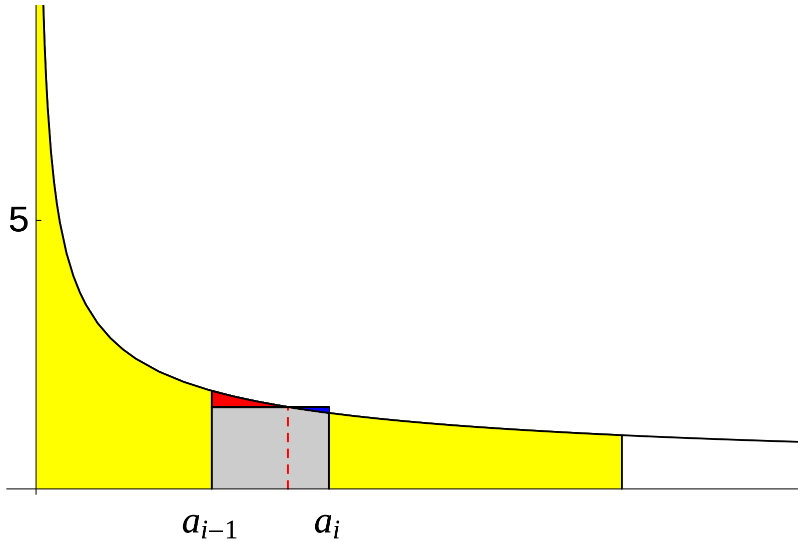
- Insomma, questa f non è integrabile secondo Riemann,

Posizione marcato

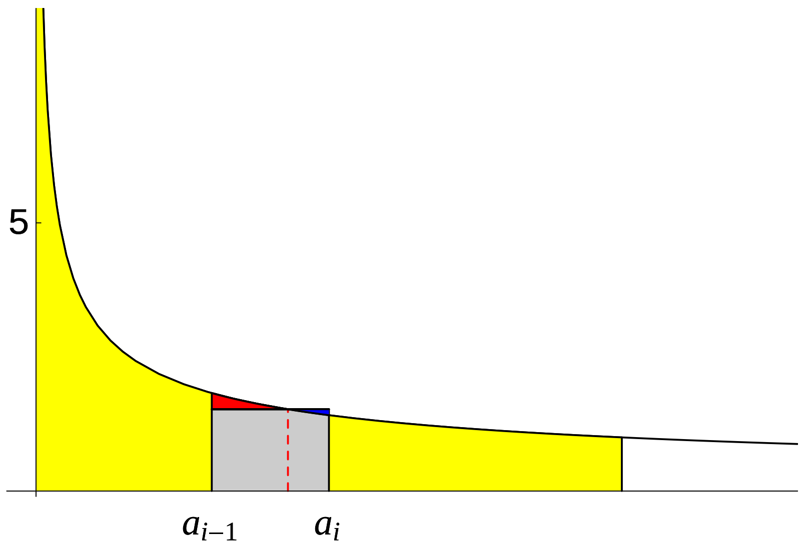


- Insomma, questa f non è integrabile secondo Riemann,
- nonostante, ripeto, il trapezoide abbia area ben definita.

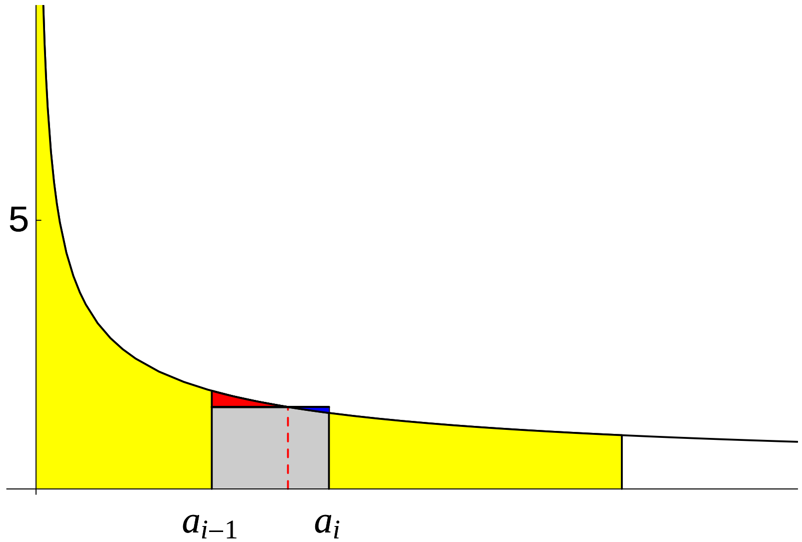
Ampiezza e posizione

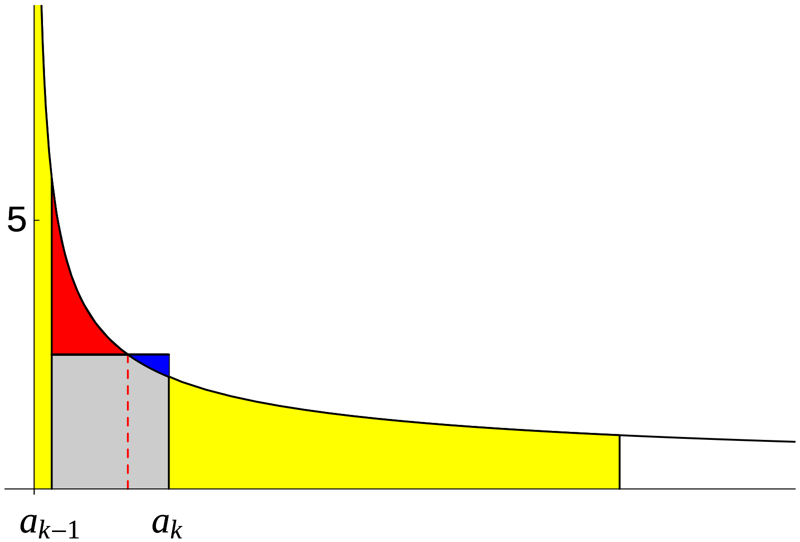


- Confrontiamo ad occhio l'errore di area su un intervallino marcato $[a_{i-1}, a_i]$, x_i,



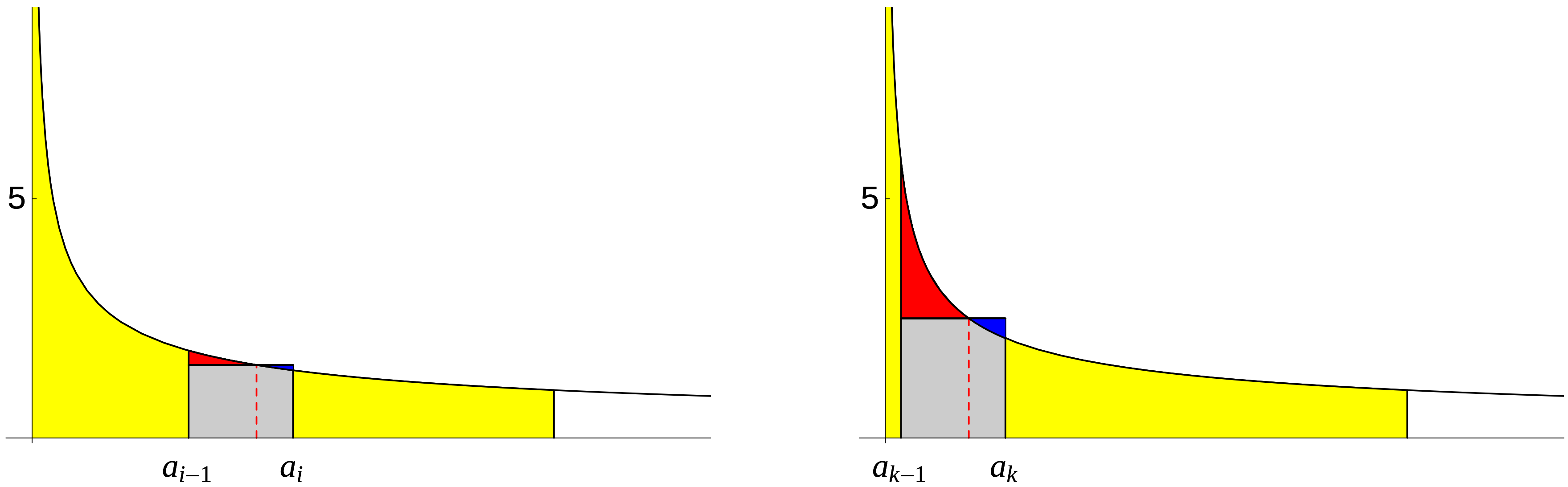
- Confrontiamo ad occhio l'errore di area su un intervallino marcato $[a_{i-1}, a_i]$, x_i,
  - **su cui la f varia poco,**





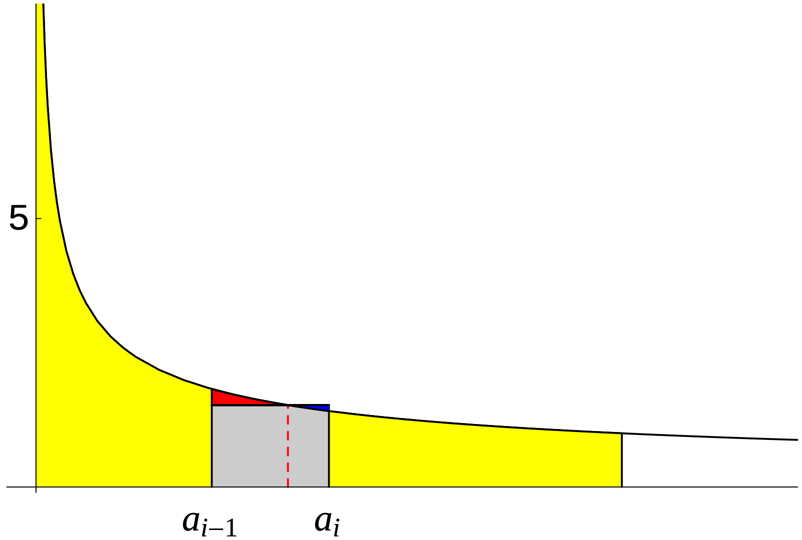
- Confrontiamo ad occhio l'errore di area su un intervallino marcato $[a_{i-1}, a_i]$, x_i,
  - **su cui la f varia poco,**

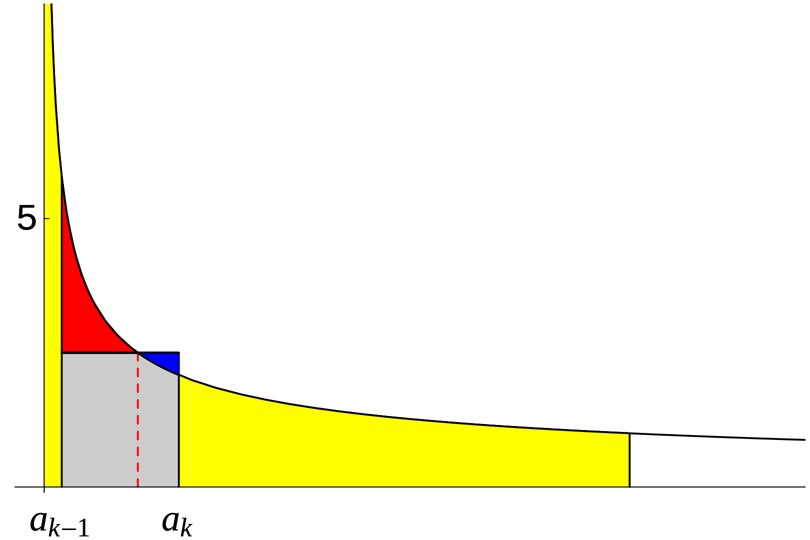
  con l'errore su un intervallino $[a_{k-1}, a_k]$, x_k



- Confrontiamo ad occhio l'errore di area su un intervallino marcato $[a_{i-1}, a_i]$, x_i,
  - **su cui la f varia poco,**

  con l'errore su un intervallino $[a_{k-1}, a_k]$, x_k
  - **che ha la stessa ampiezza:** $a_k - a_{k-1} = a_i - a_{i-1}$

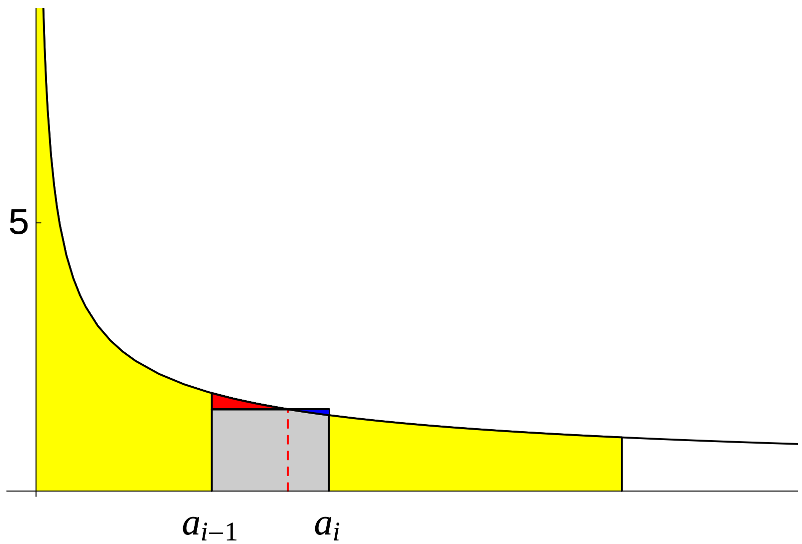


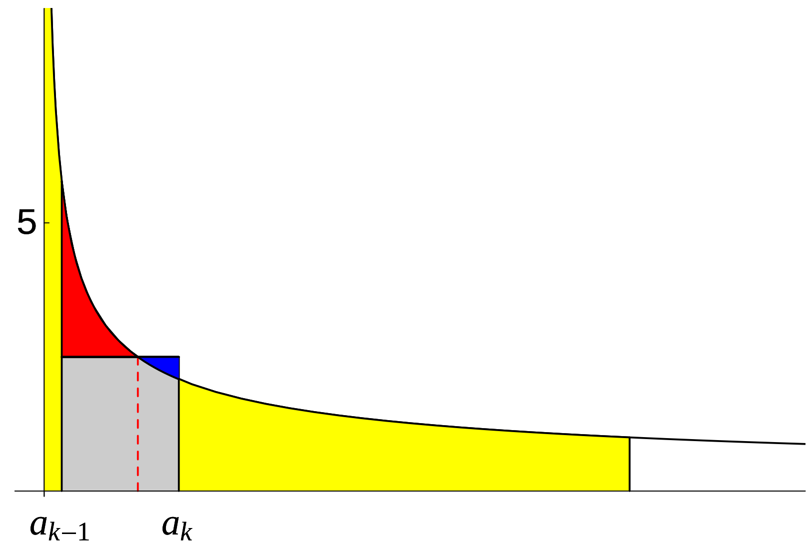


- Confrontiamo ad occhio l'errore di area su un intervallino marcato $[a_{i-1}, a_i]$, x_i,
  - **su cui la f varia poco,**

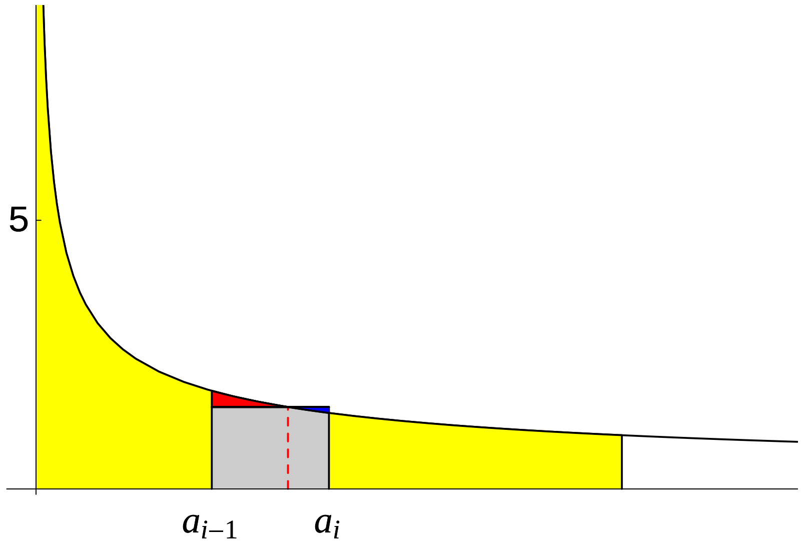
  con l'errore su un intervallino $[a_{k-1}, a_k]$, x_k
  - **che ha la stessa ampiezza:** $a_k - a_{k-1} = a_i - a_{i-1}$
  - **ma in una zona dove f varia molto.**

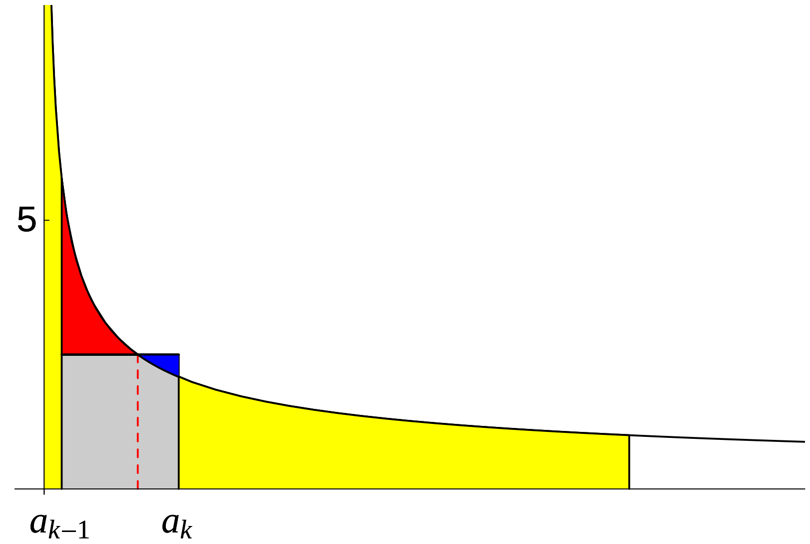
Ampiezza e posizione



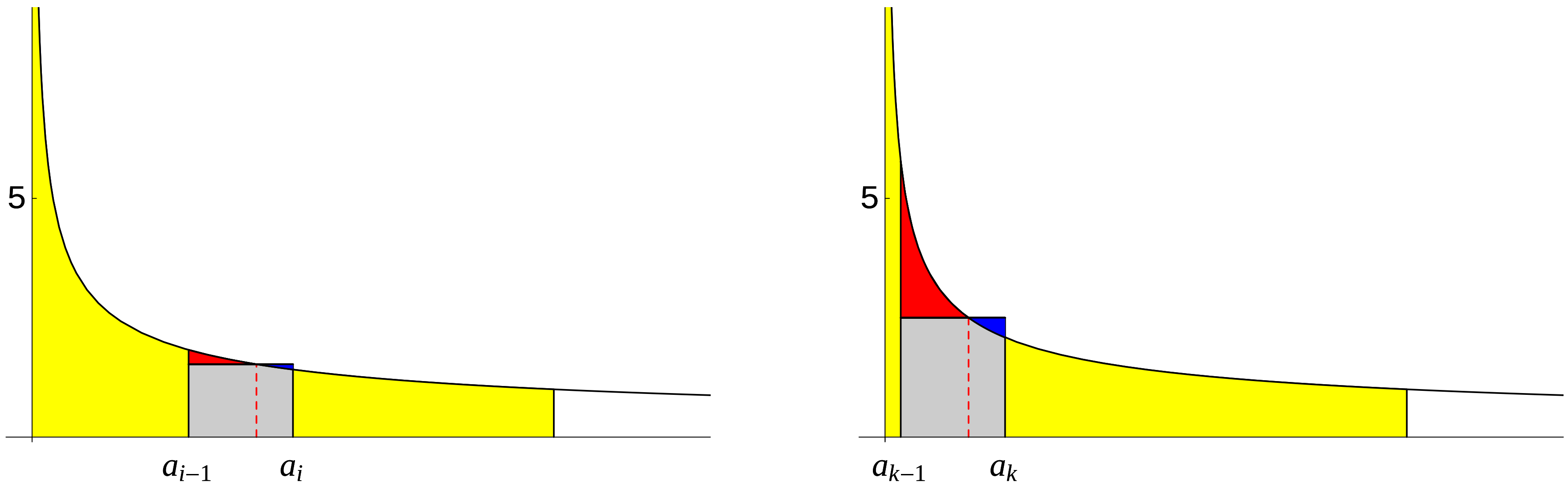


- Dovrebbe essere chiaro che

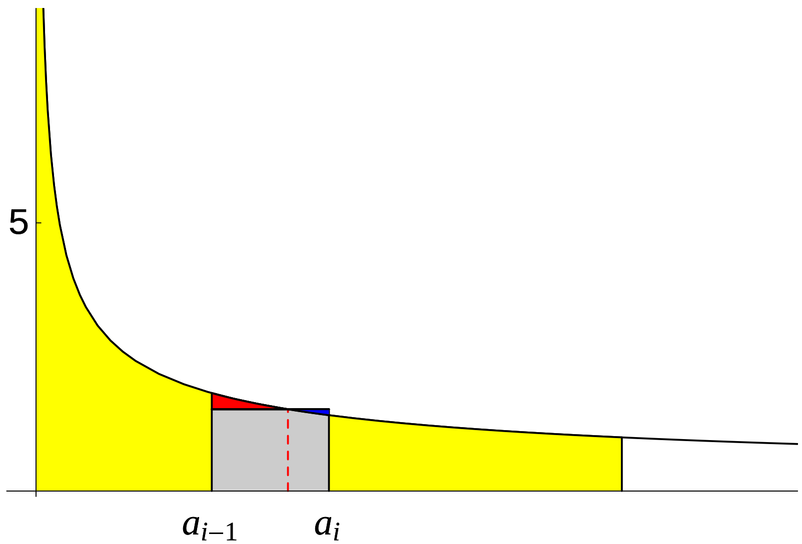


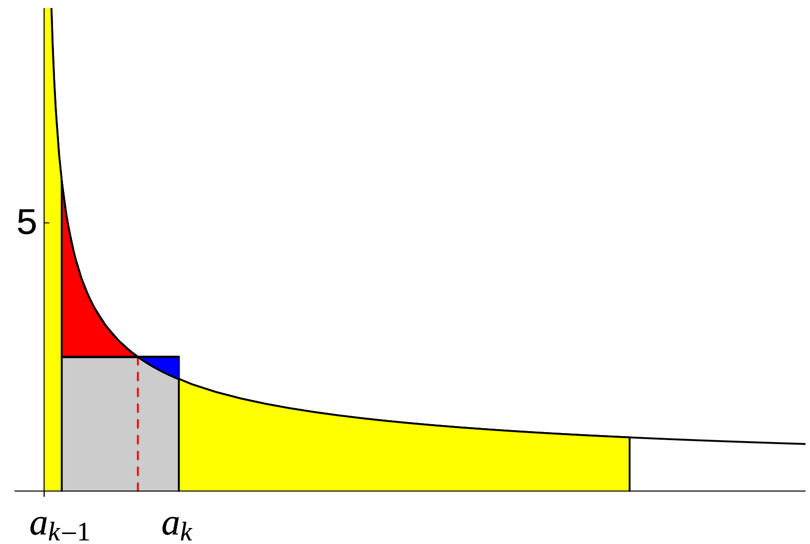


- Dovrebbe essere chiaro che
  - **l'errore è facilmente più grande nelle zone dove f varia velocemente**

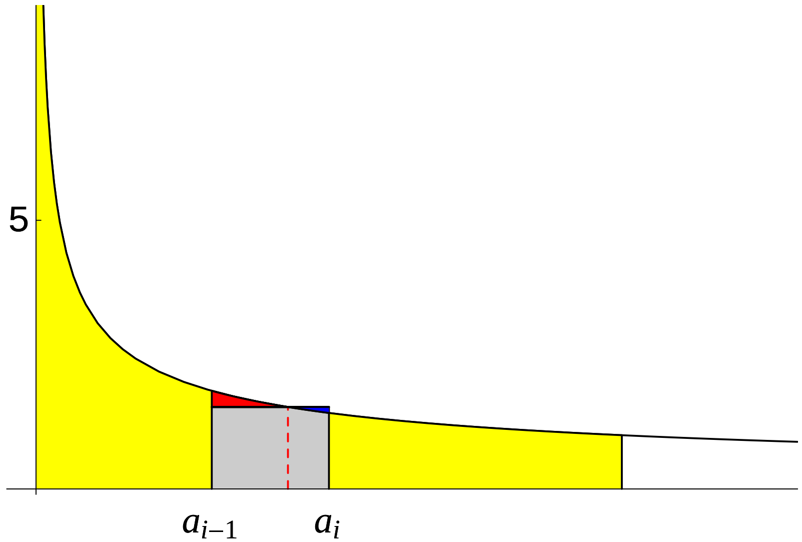


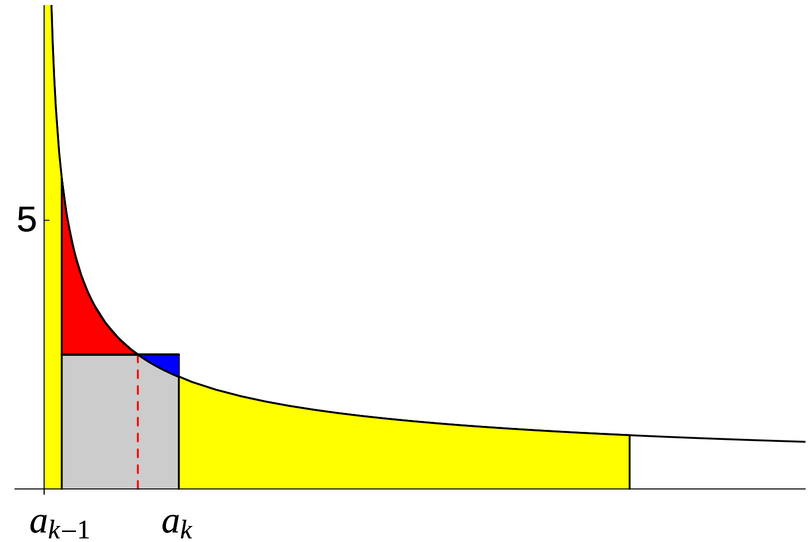
- Dovrebbe essere chiaro che
  - **l'errore è facilmente più grande nelle zone dove f varia velocemente**
    - a parità di ampiezza $a_i - a_{i-1}$,



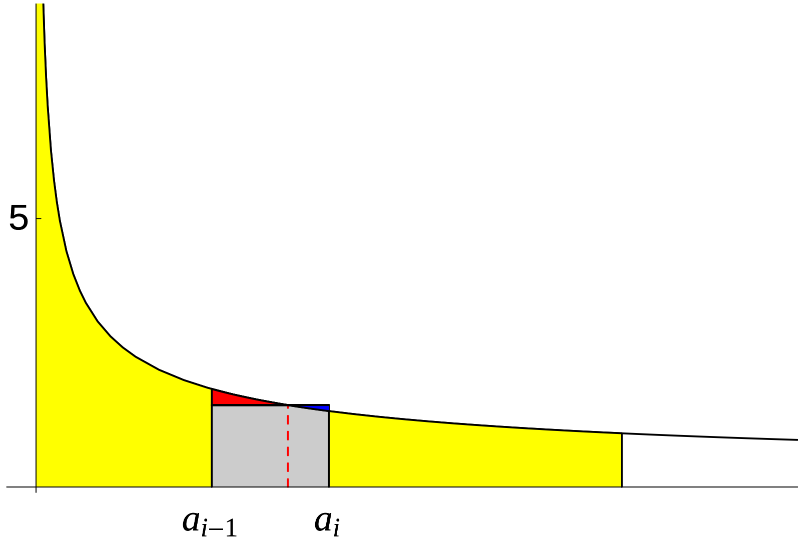


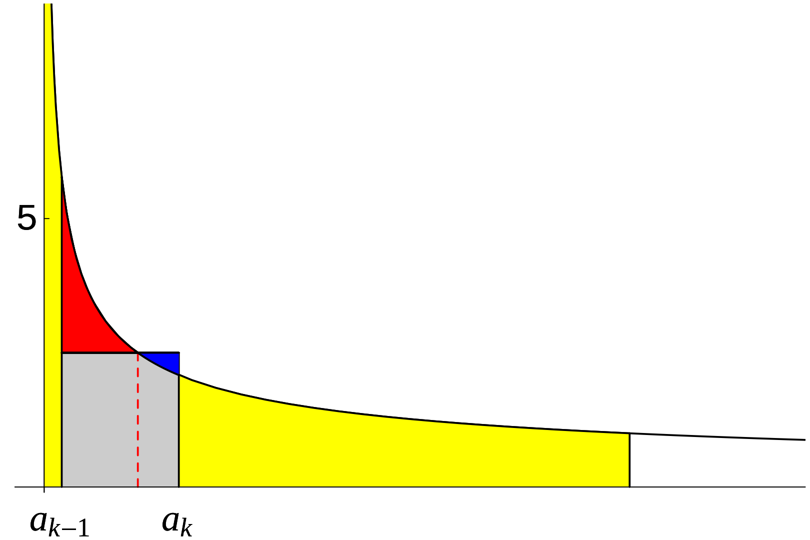
- Dovrebbe essere chiaro che
  - **l'errore è facilmente più grande nelle zone dove f varia velocemente**
    - a parità di ampiezza $a_i - a_{i-1}$,
    - non badando per ora alla posizione di x_i.



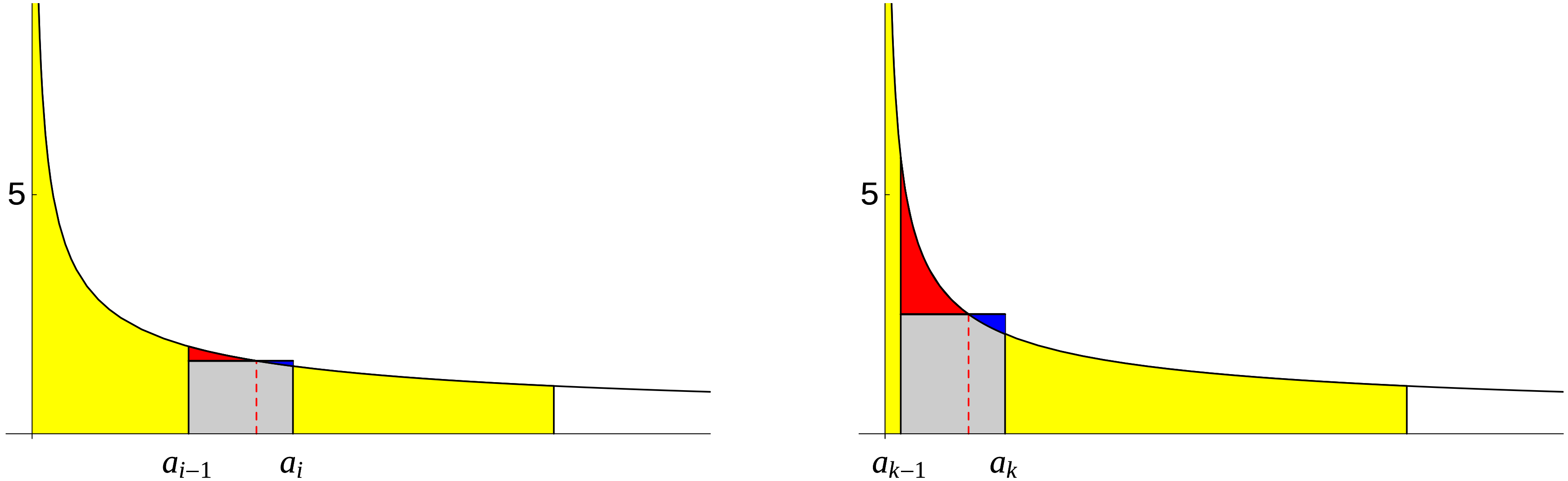


- Per avere una buona approssimazione dell'area non sarebbe una cattiva idea di

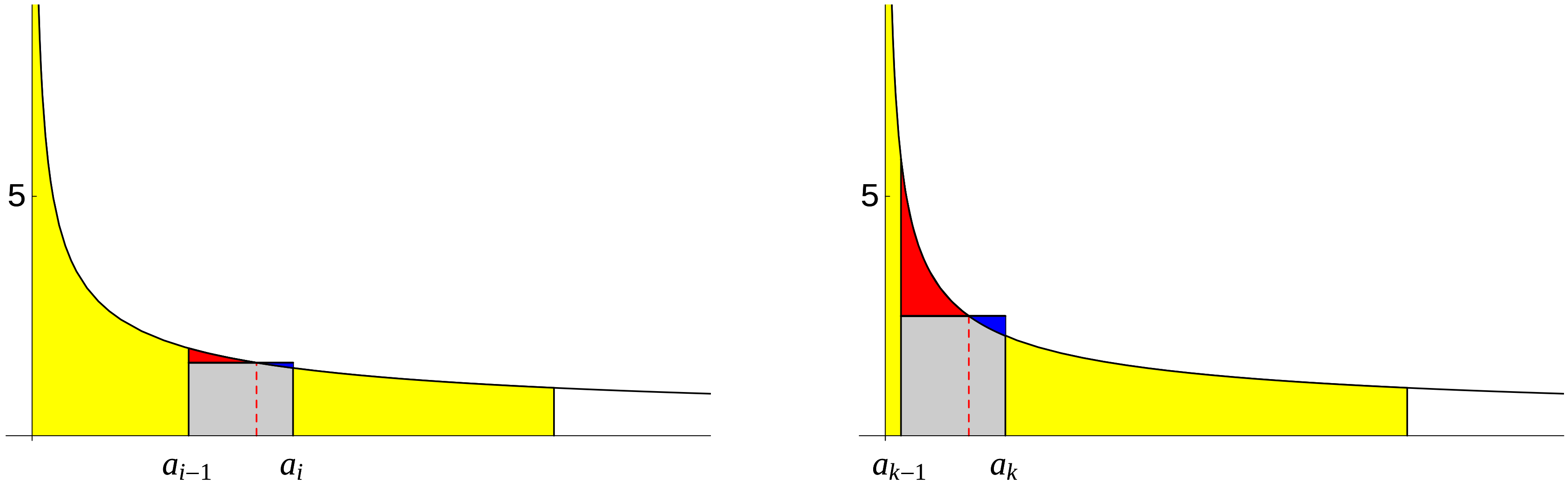




- Per avere una buona approssimazione dell'area non sarebbe una cattiva idea di
  - **imporre che le ampiezze $a_i - a_{i-1}$ siano più piccole nelle zone più "tormentate" della f.**



- Per avere una buona approssimazione dell'area non sarebbe una cattiva idea di
  - **imporre che le ampiezze $a_i - a_{i-1}$ siano più piccole nelle zone più "tormentate" della f.**
- Però il meccanismo dell'ampiezza $\text{amp}(\Pi) < \delta$ nell'integrale di Riemann non fa distinzioni:



- Per avere una buona approssimazione dell'area non sarebbe una cattiva idea di
  - **imporre che le ampiezze $a_i - a_{i-1}$ siano più piccole nelle zone più "tormentate" della f.**
- Però il meccanismo dell'ampiezza $\text{amp}(\Pi) < \delta$ nell'integrale di Riemann non fa distinzioni:
  - impone che $a_i - a_{i-1} < \delta$ per ogni i.

Riassumendo

Riassumendo

- *Abbiamo dunque individuato due problemi di fondo dell'integrale di Riemann:*

Riassumendo

- ***Abbiamo dunque individuato due problemi di fondo dell'integrale di Riemann:***
  - non c'è modo di controllare la posizione del punto marcato x_i dentro l'intervallino $[a_{i-1}, a_i]$;

Riassumendo

- ***Abbiamo dunque individuato due problemi di fondo dell'integrale di Riemann:***
  - non c'è modo di controllare la posizione del punto marcato x_i dentro l'intervallino $[a_{i-1}, a_i]$;
    - **non si riesce a impedire che $f(x_i)$ faccia sballare la somma $S(f, \Pi)$;**

Riassumendo

- ***Abbiamo dunque individuato due problemi di fondo dell'integrale di Riemann:***
  - non c'è modo di controllare la posizione del punto marcato x_i dentro l'intervallino $[a_{i-1}, a_i]$;
    - **non si riesce a impedire che $f(x_i)$ faccia sballare la somma $S(f, \Pi)$;**
  - non c'è modo di imporre particolare attenzione a certe zone di $[a, b]$;

Riassumendo

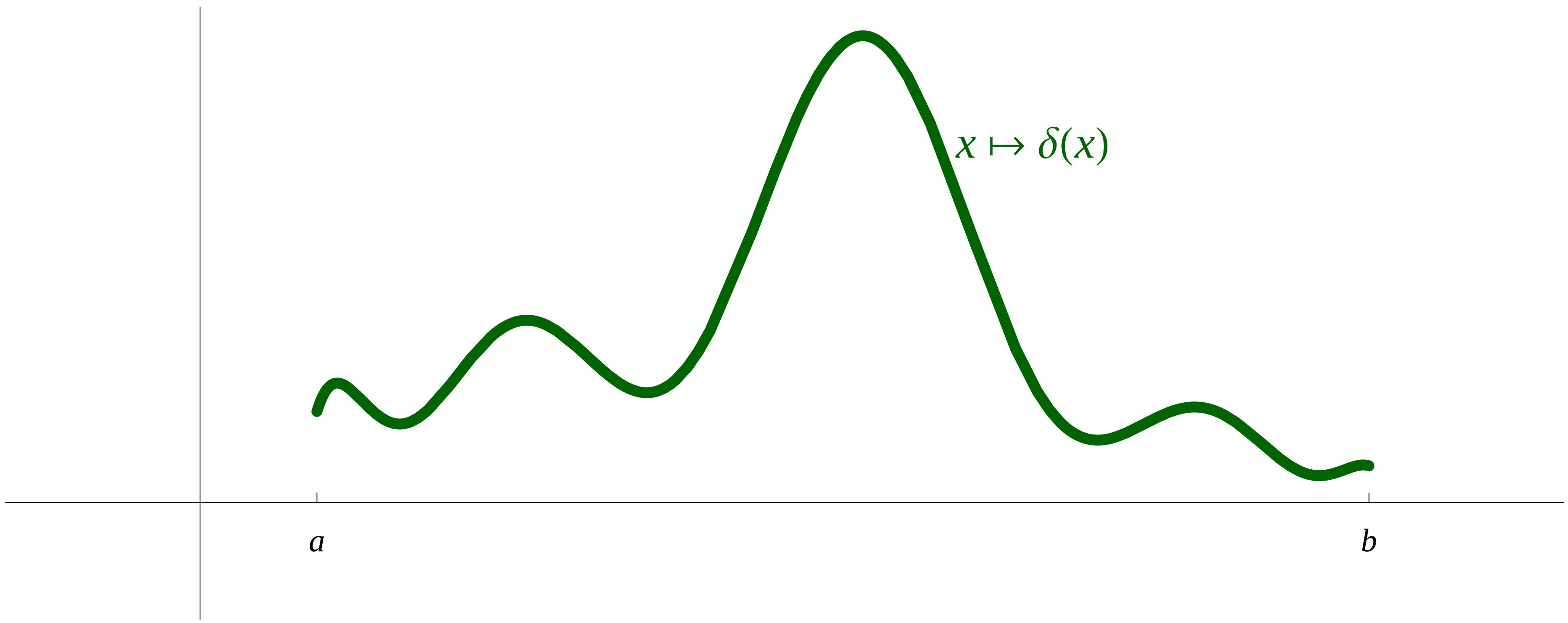
- ***Abbiamo dunque individuato due problemi di fondo dell'integrale di Riemann:***
  - non c'è modo di controllare la posizione del punto marcato x_i dentro l'intervallino $[a_{i-1}, a_i]$;
    - **non si riesce a impedire che $f(x_i)$ faccia sballare la somma $S(f, \Pi)$;**
  - non c'è modo di imporre particolare attenzione a certe zone di $[a, b]$;
    - **non si possono chiedere ampiezze $a_i - a_{i-1}$ più piccole dove la f varia più velocemente.**

Riassumendo

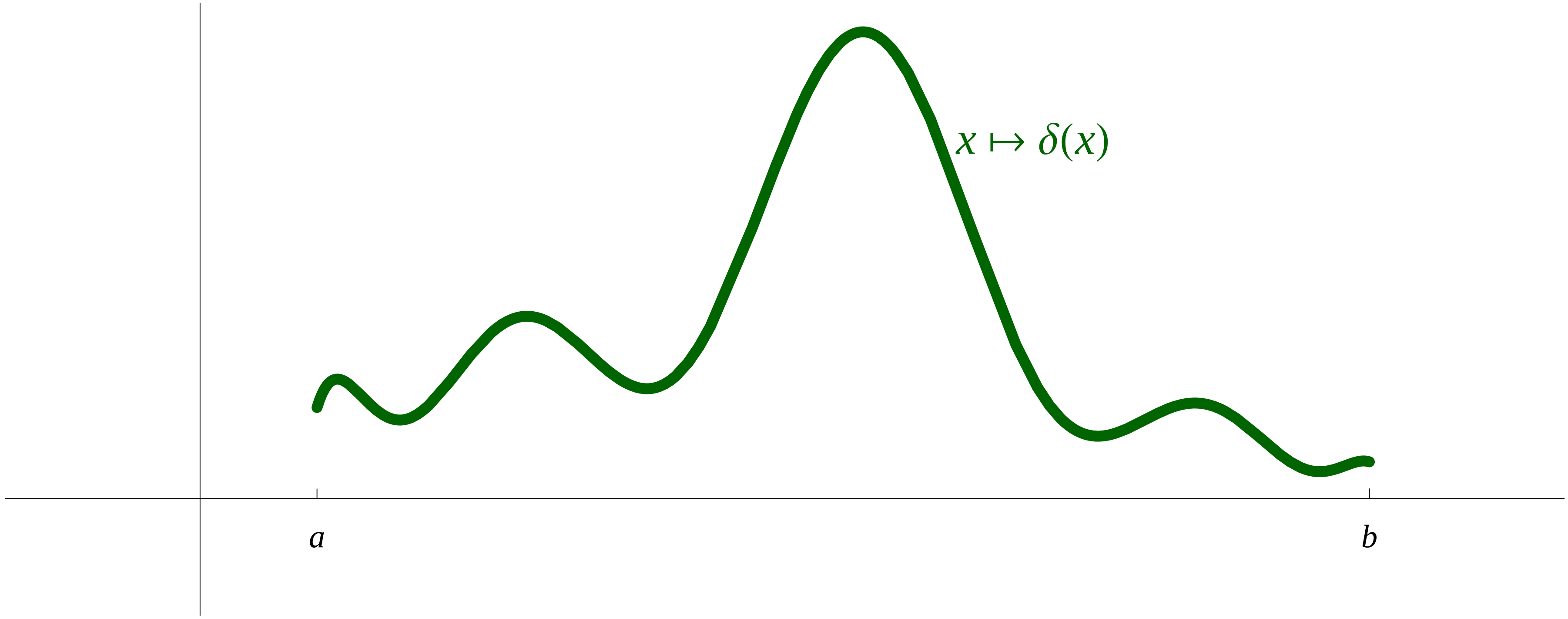
- ***Abbiamo dunque individuato due problemi di fondo dell'integrale di Riemann:***
  - non c'è modo di controllare la posizione del punto marcato x_i dentro l'intervallino $[a_{i-1}, a_i]$;
    - **non si riesce a impedire che $f(x_i)$ faccia sballare la somma $S(f, \Pi)$;**
  - non c'è modo di imporre particolare attenzione a certe zone di $[a, b]$;
    - **non si possono chiedere ampiezze $a_i - a_{i-1}$ più piccole dove la f varia più velocemente.**
- ***Il meccanismo dei calibri risponde ai due problemi!***

Cap. 6
Calibri

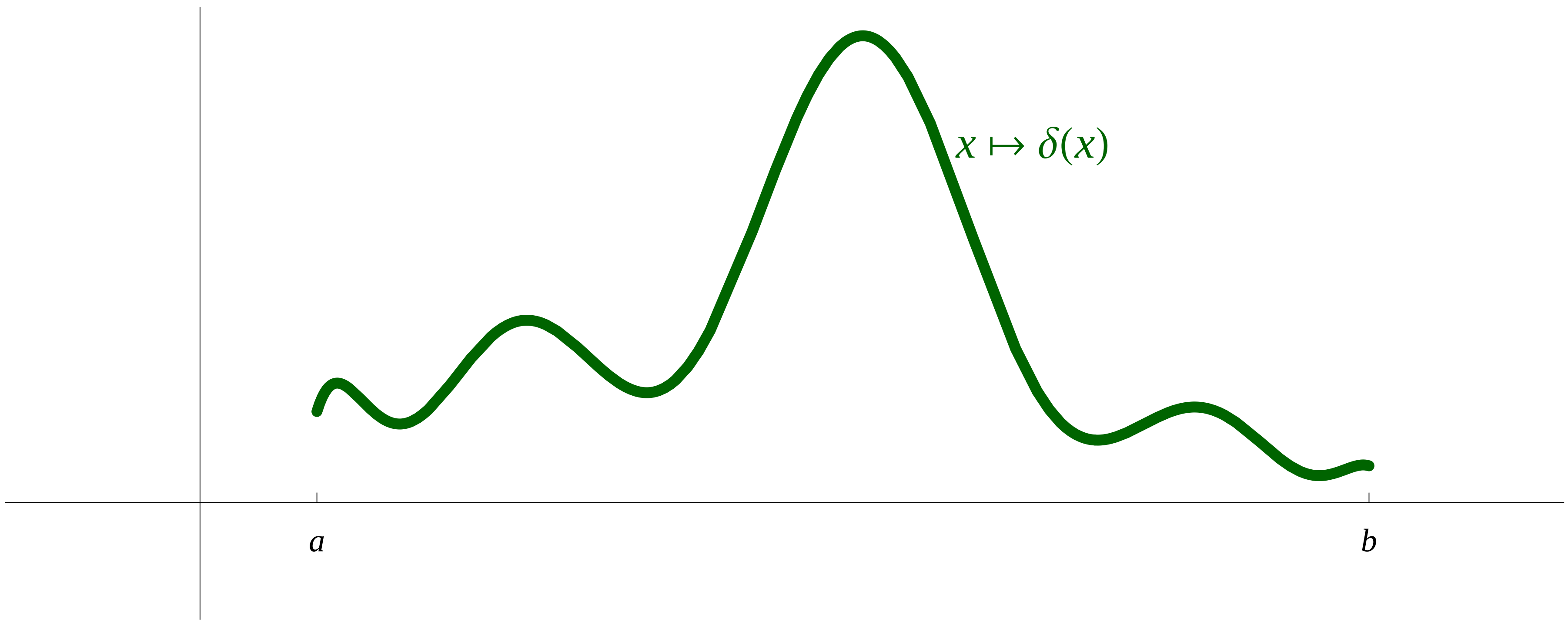
Calibri



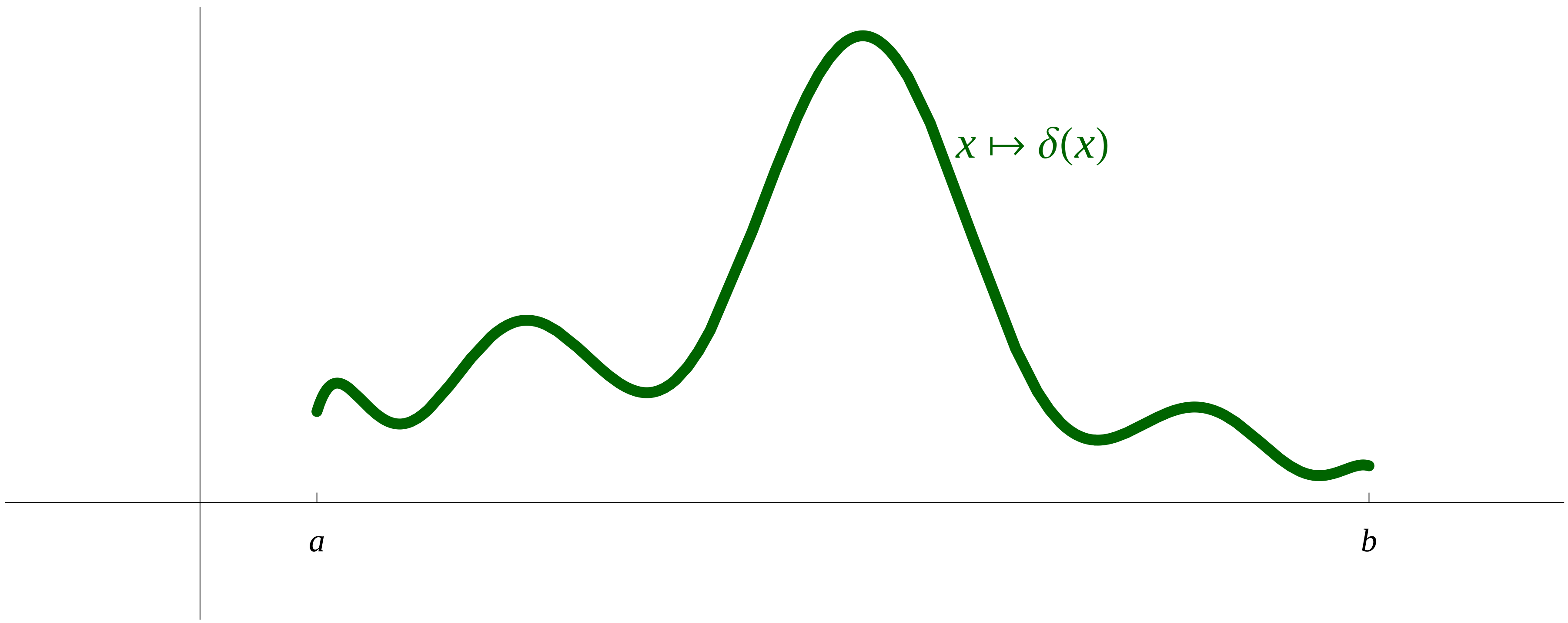
- ***Definizione: chiameremo*** **calibro** ***su*** $[a, b]$ ***una qualsiasi funzione*** $\delta(x)$



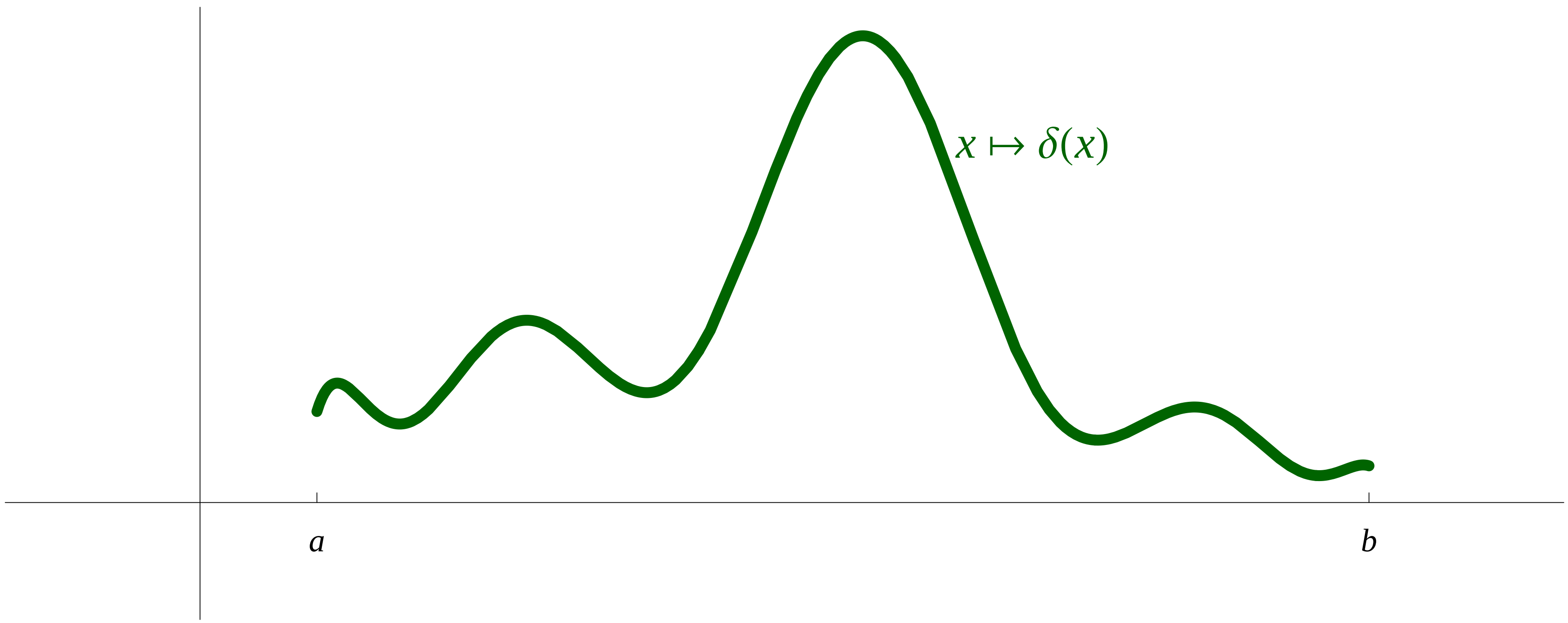
- ***Definizione: chiameremo calibro su*** $[a,b]$ ***una qualsiasi funzione*** $\delta(x)$
  - che sia definita per $x \in [a,b]$ (almeno)



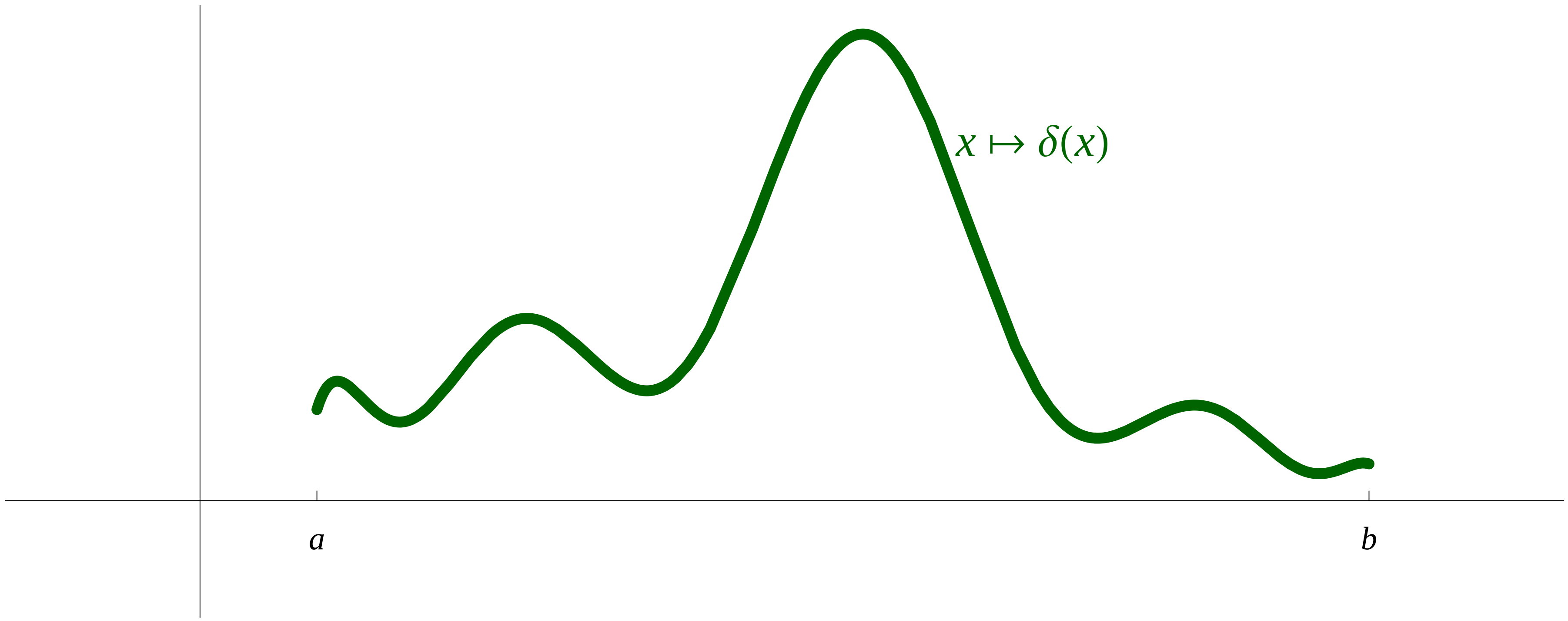
- ***Definizione: chiameremo*** ***calibro*** ***su*** $[a, b]$ ***una qualsiasi funzione*** $\delta(x)$
  - che sia definita per $x \in [a, b]$ (almeno)
  - e tale che $\delta(x) > 0 \ \forall x \in [a, b]$.



- Per aiutarci a distinguere

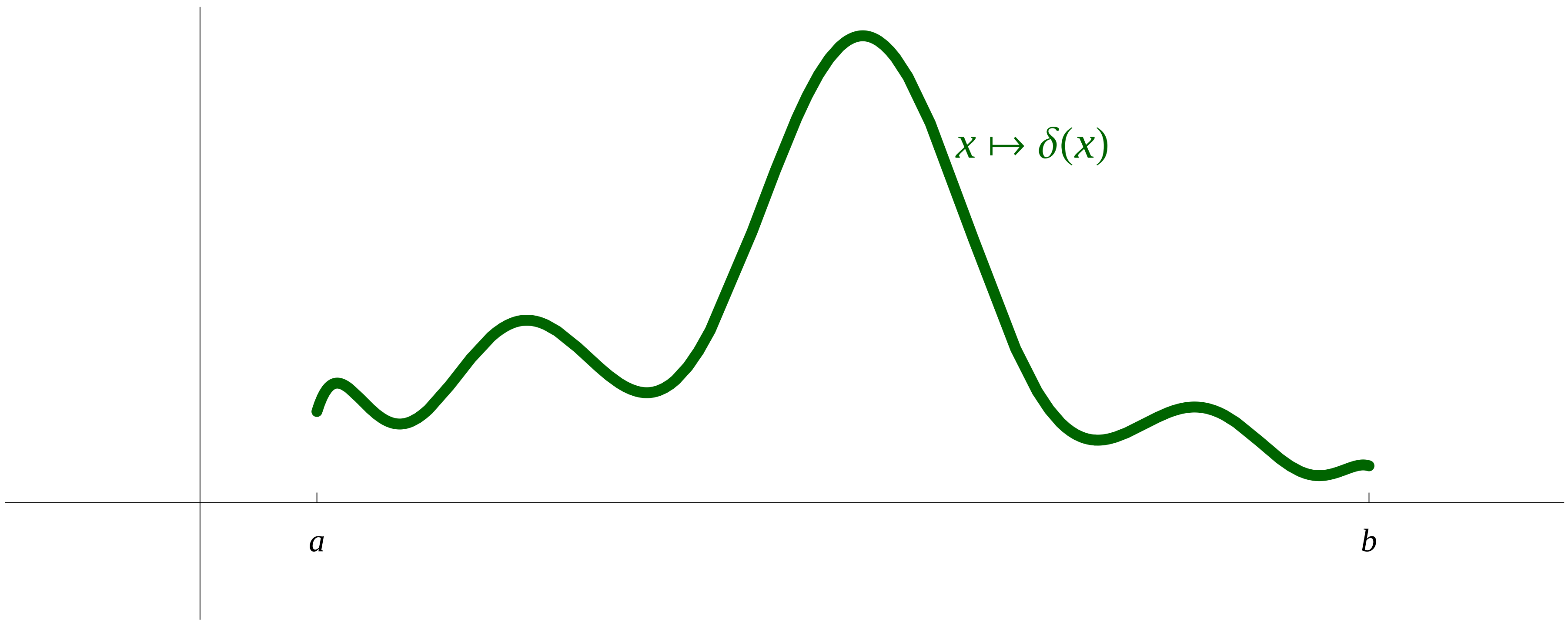


- Per aiutarci a distinguere
  - **i calibri** $\delta(x)$

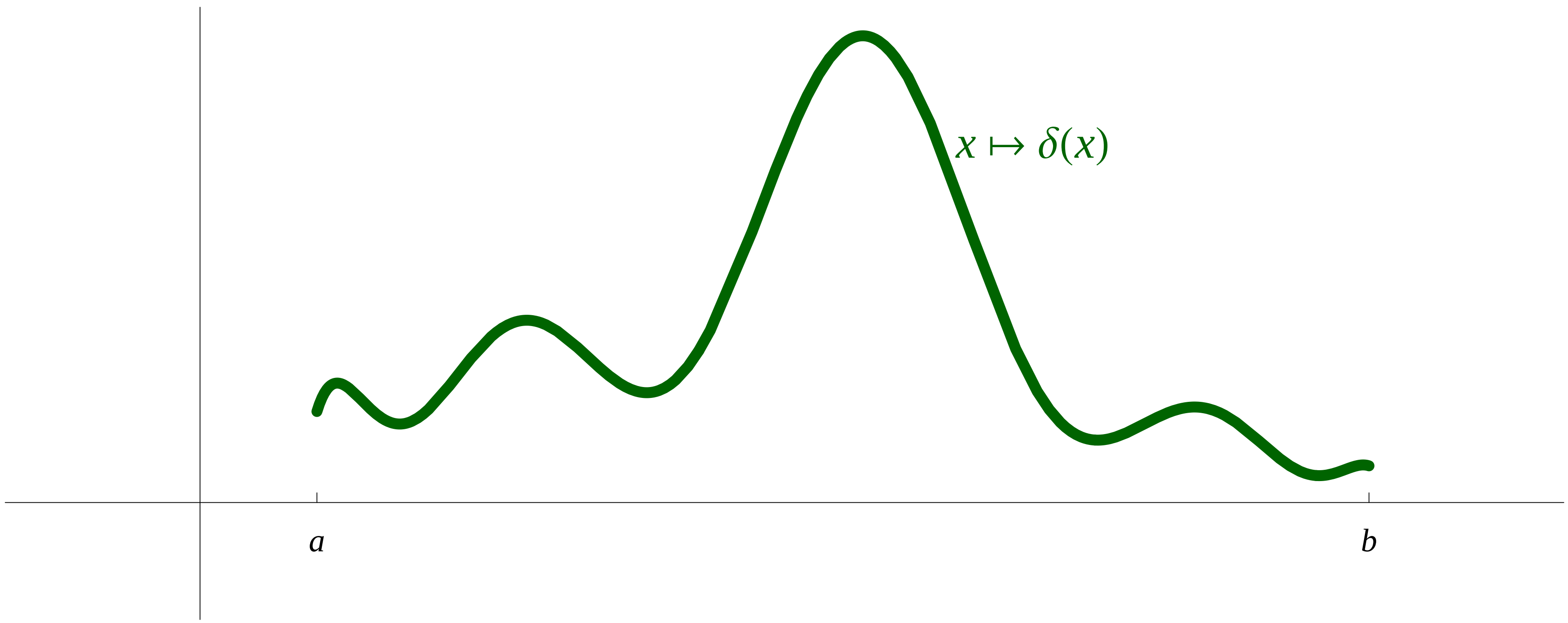


- Per aiutarci a distinguere
  - **i calibri** $\delta(x)$
  - **dalle funzioni da integrare** $f(x)$

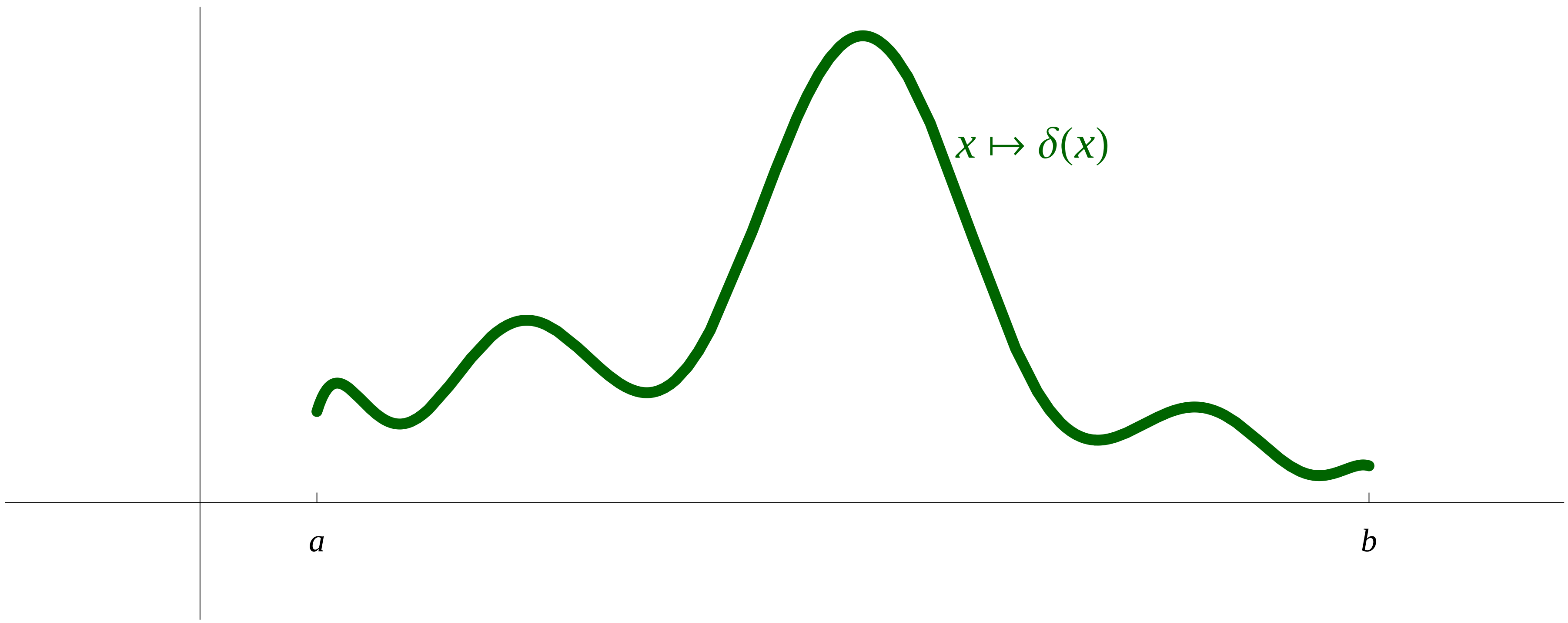
Calibri



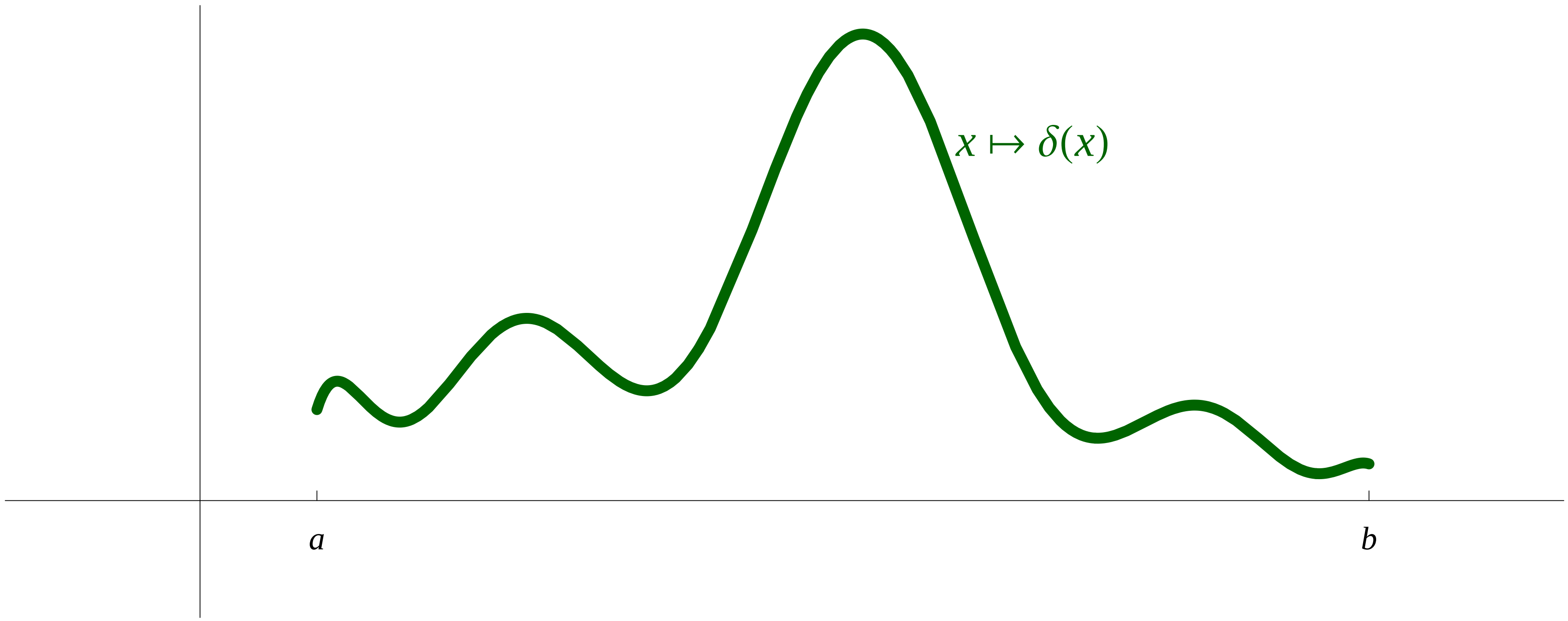
- Per aiutarci a distinguere
  - **i calibri** $\delta(x)$
  - **dalle funzioni da integrare** $f(x)$
- per i calibri useremo il colore **verde scuro**.



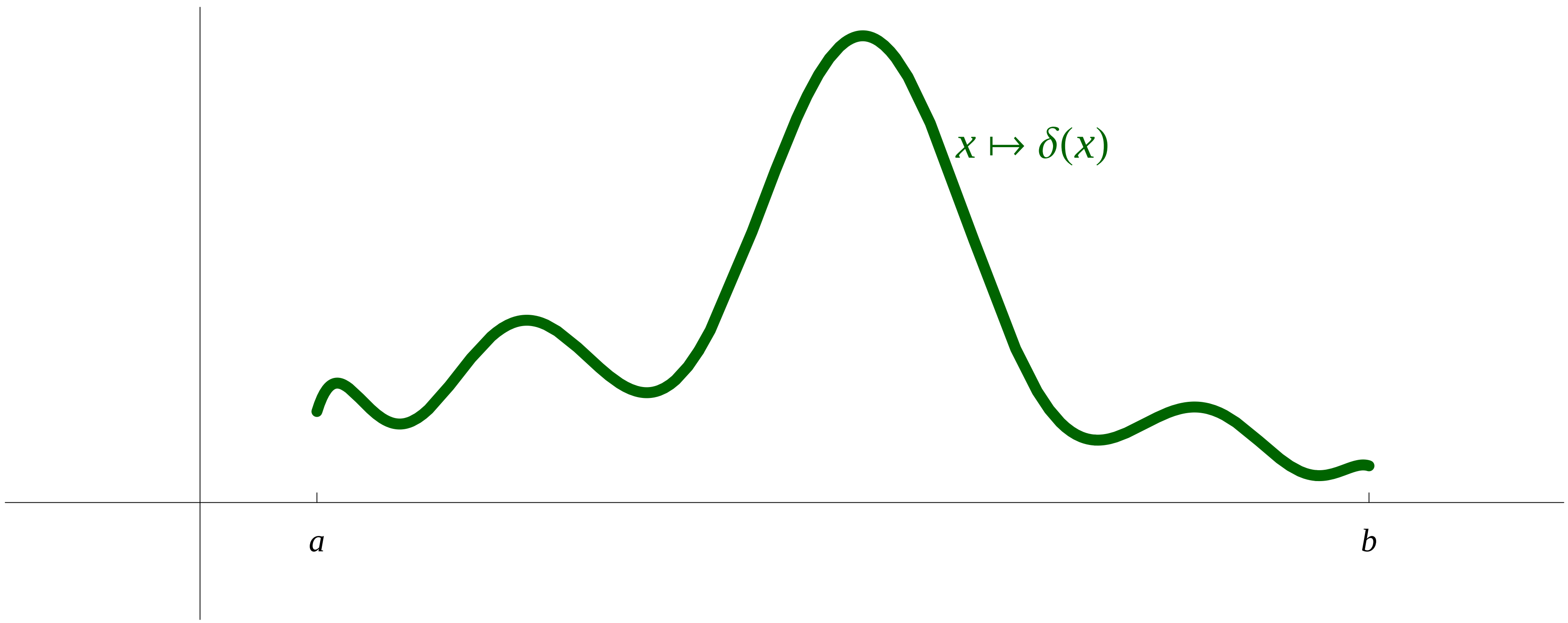
$x \mapsto \delta(x)$
a
b



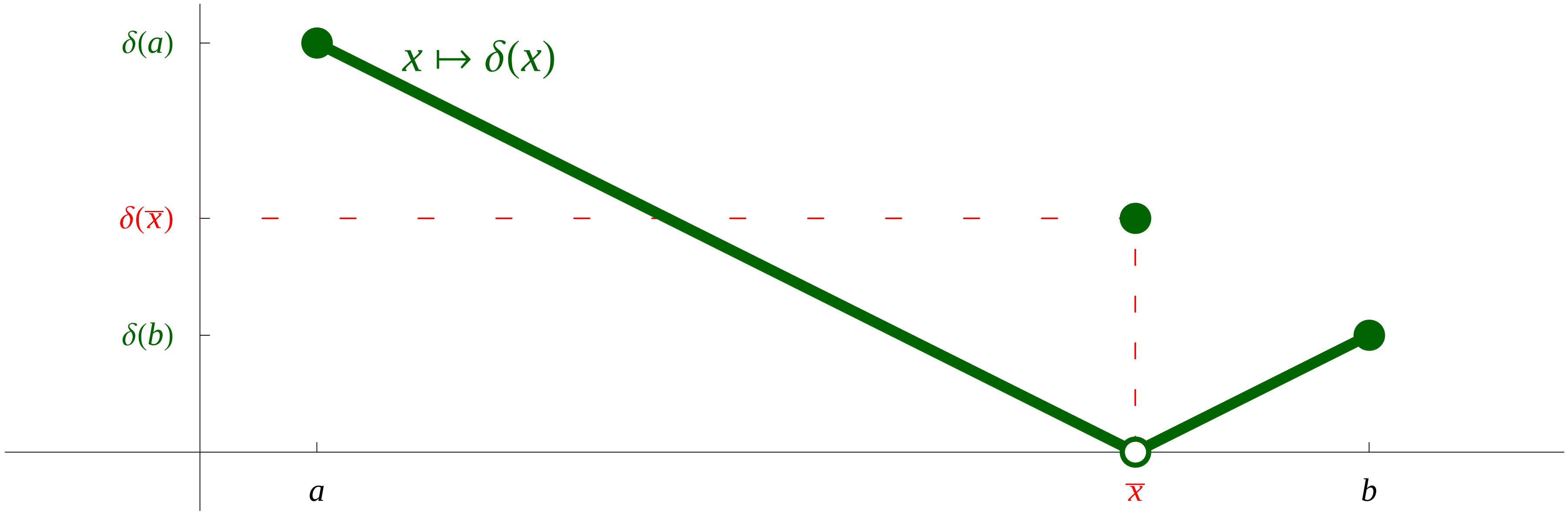
- Dunque l'*unica* richiesta che si fa a una funzione $\delta(x)$ per essere un calibro è che sia > 0.

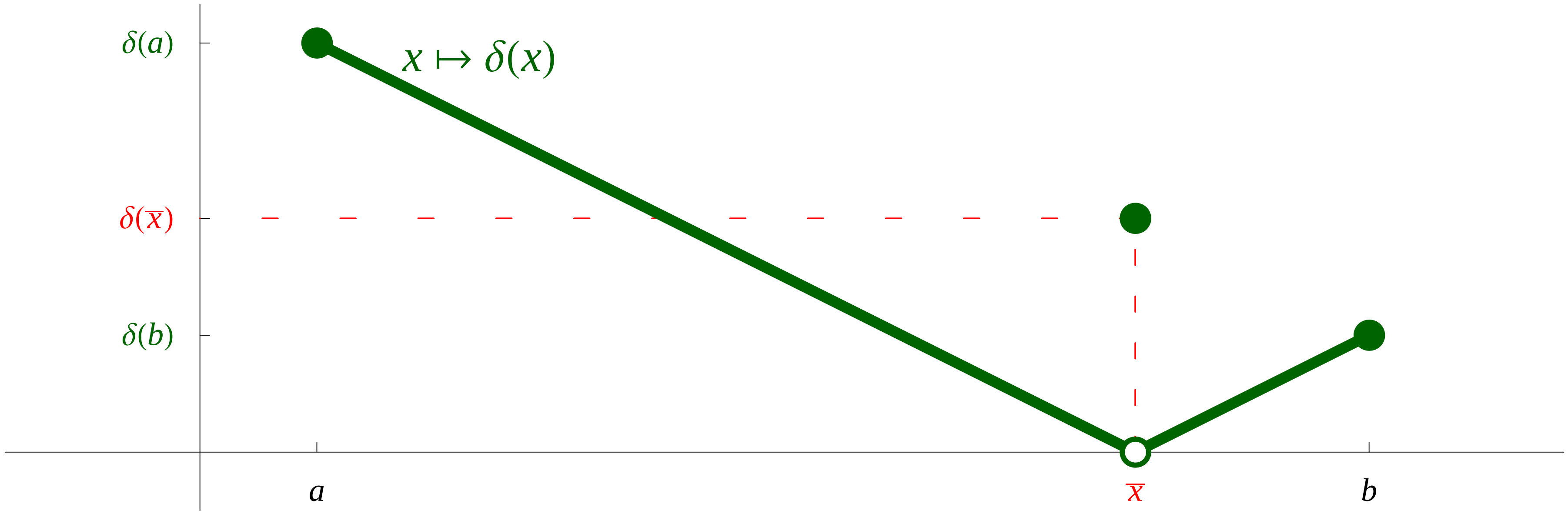


- Dunque l'*unica* richiesta che si fa a una funzione $\delta(x)$ per essere un calibro è che sia > 0.
  - **La figura qui sopra mostra un calibro *continuo*,**

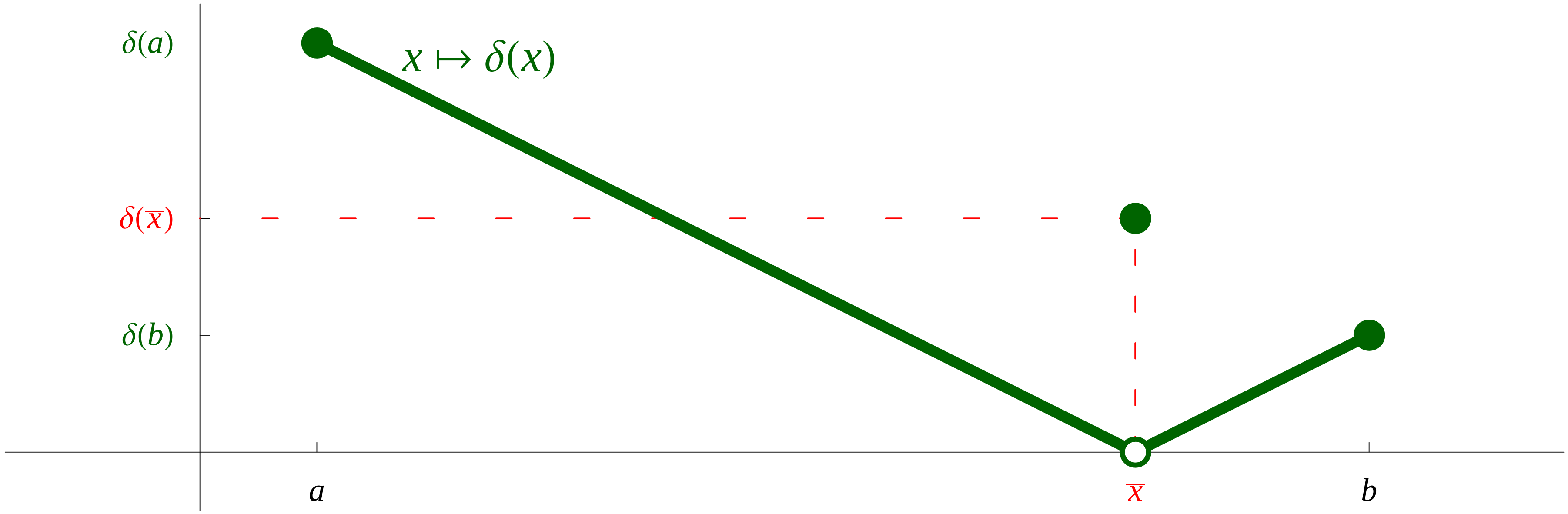


- Dunque l'*unica* richiesta che si fa a una funzione $\delta(x)$ per essere un calibro è che sia > 0.
  - **La figura qui sopra mostra un calibro *continuo*,**
  - **ma la continuità non è obbligatoria, anzi!**

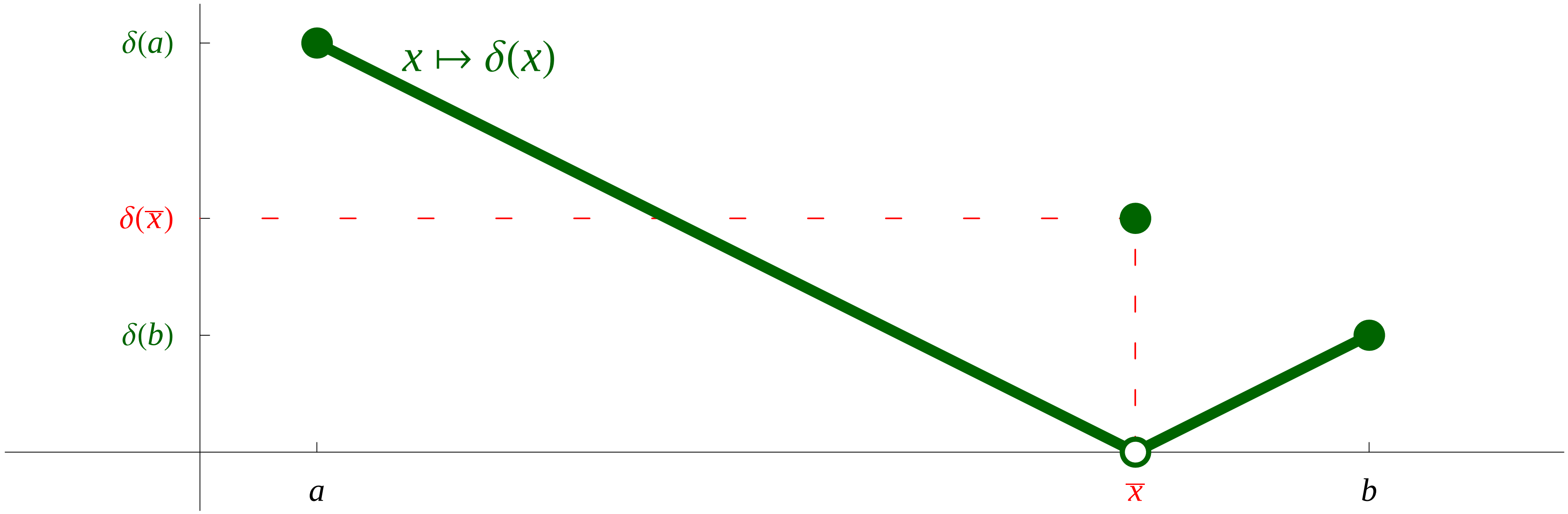

$\delta(a)$
$x \mapsto \delta(x)$
$\delta(\overline{x})$
$\delta(b)$
a
$\overline{x}$
b



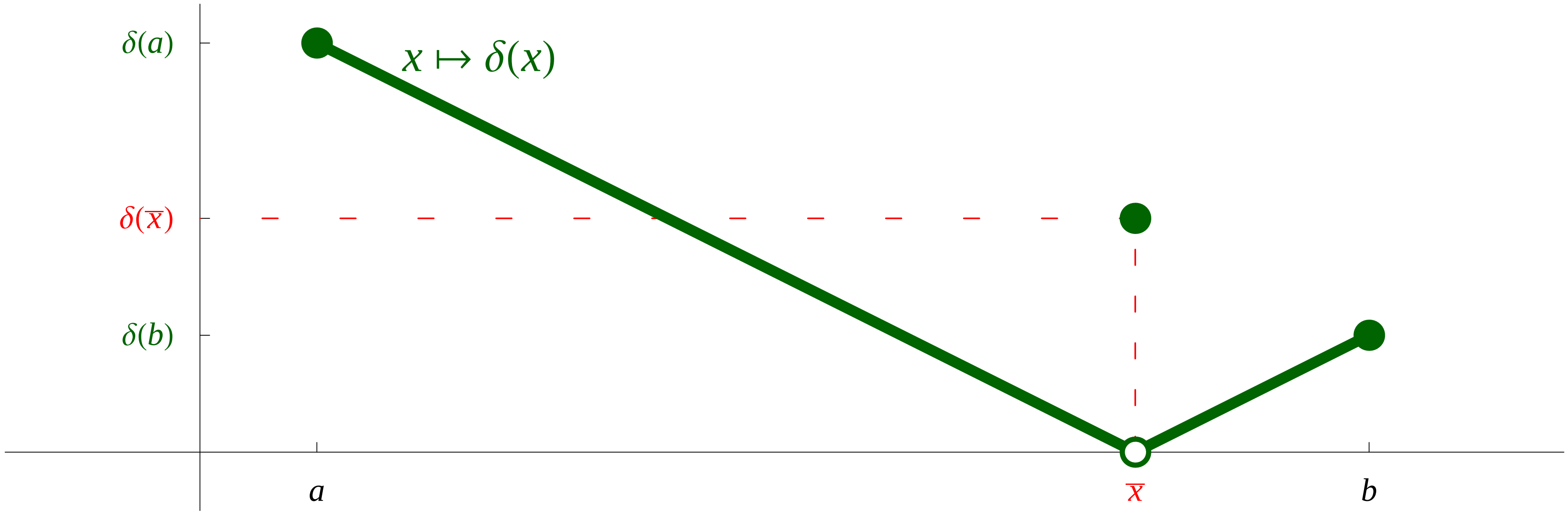
- Un calibro può benissimo essere discontinuo



- Un calibro può benissimo essere discontinuo
- e può anche tendere a 0 in qualche punto $\bar{x}$

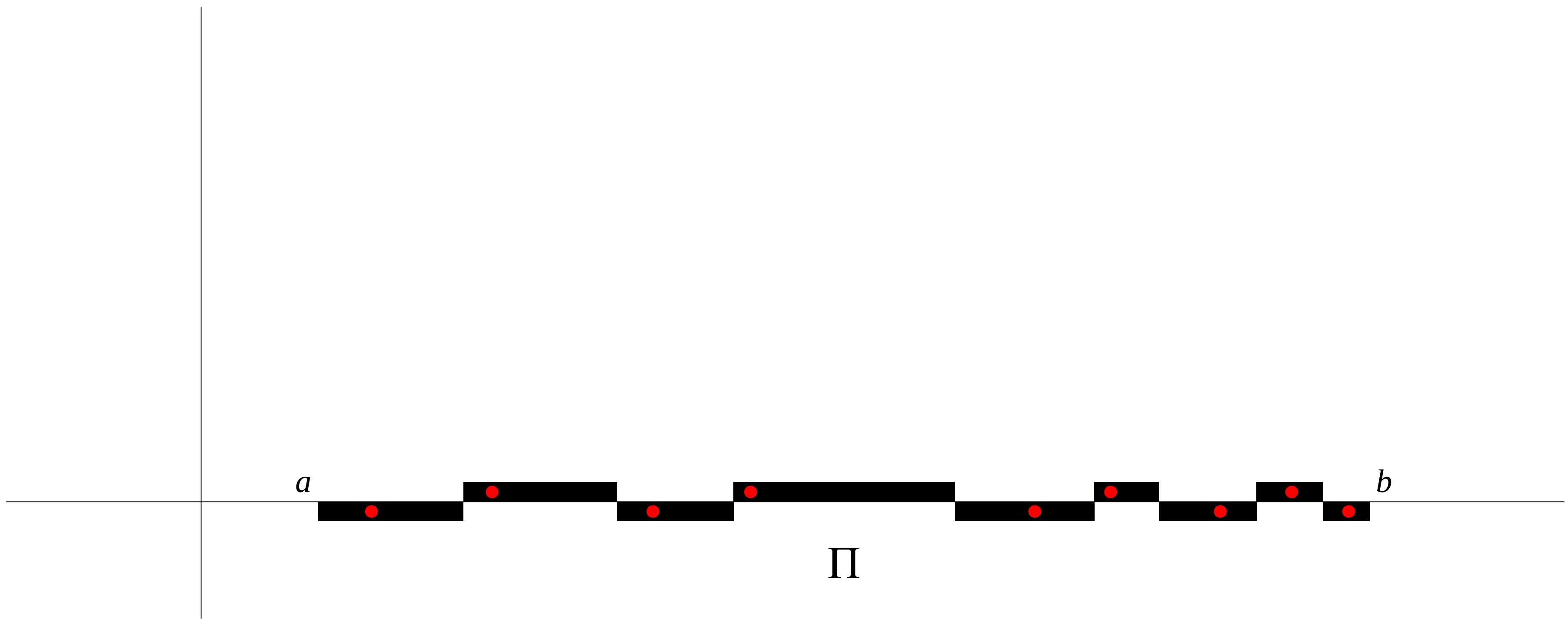


- Un calibro può benissimo essere discontinuo
- e può anche tendere a 0 in qualche punto $\bar{x}$
  - **basta che nel punto stesso sia $\delta(\bar{x}) > 0$.**



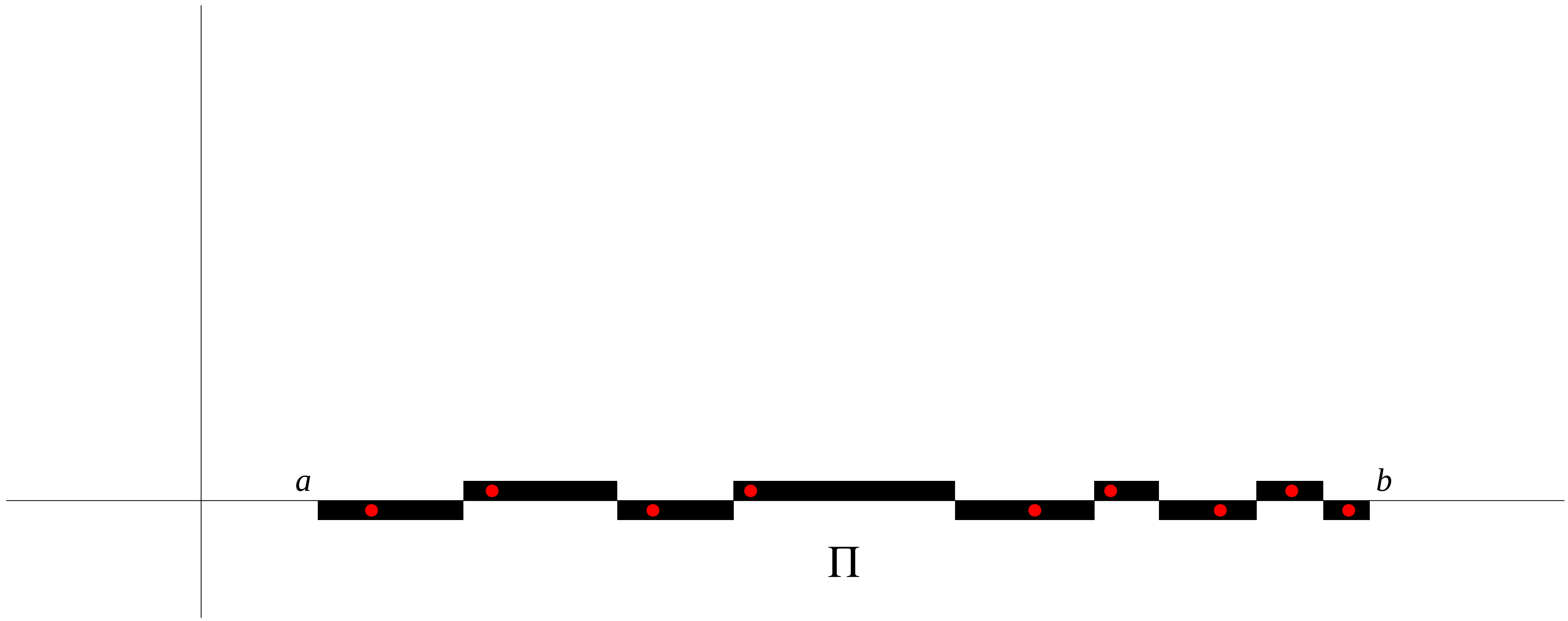
- Un calibro può benissimo essere discontinuo
- e può anche tendere a 0 in qualche punto $\bar{x}$
  - **basta che nel punto stesso sia $\delta(\bar{x}) > 0$.**
- La teoria degli integrali di calibro usa spesso calibri di questo genere.

Adattamento

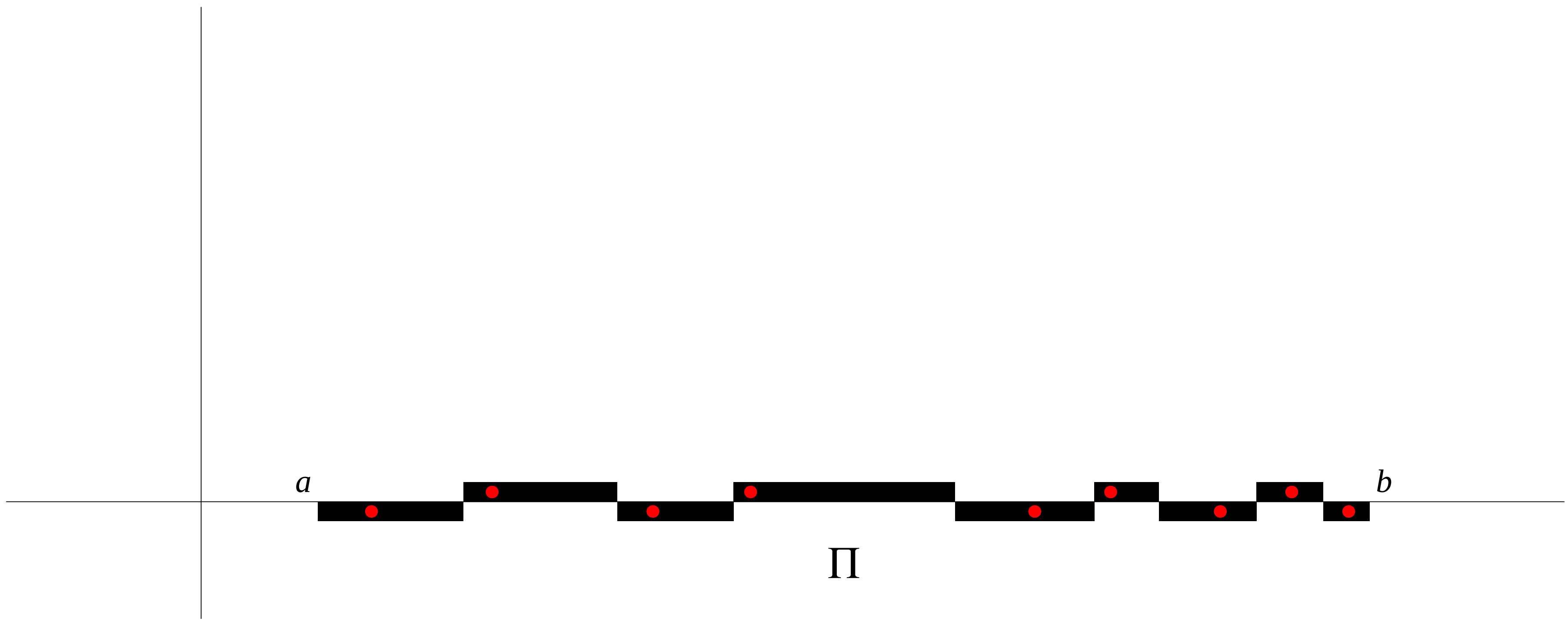


a
b
Π

Adattamento

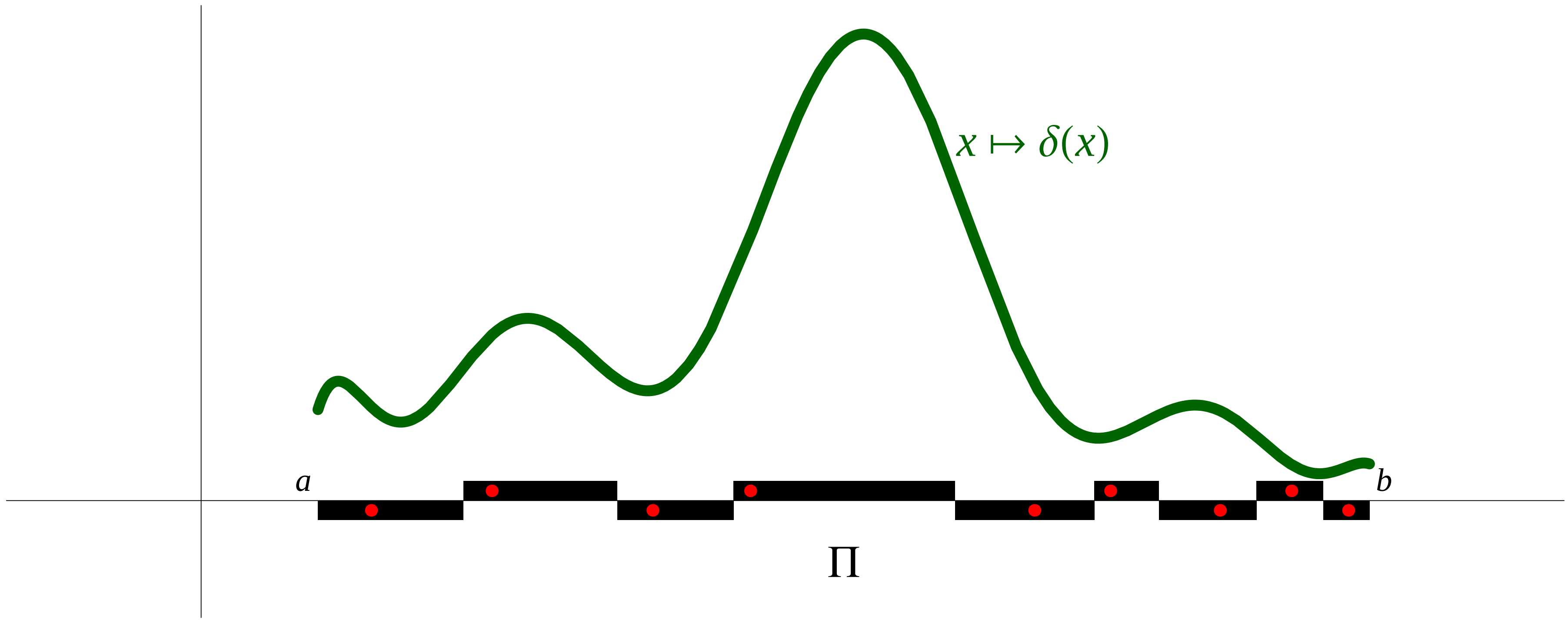


- Definizione: dati

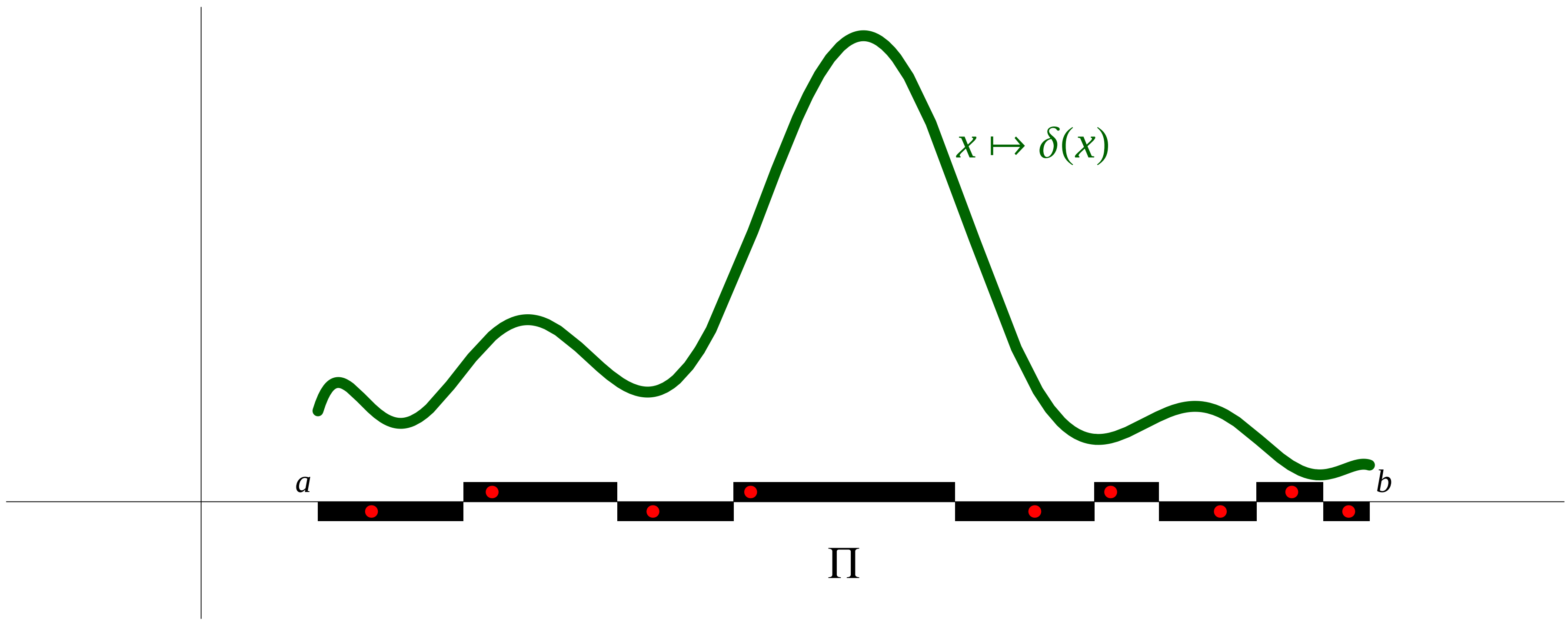


□ Definizione: dati

- **una suddivisione marcata Π di $[a, b]$,**

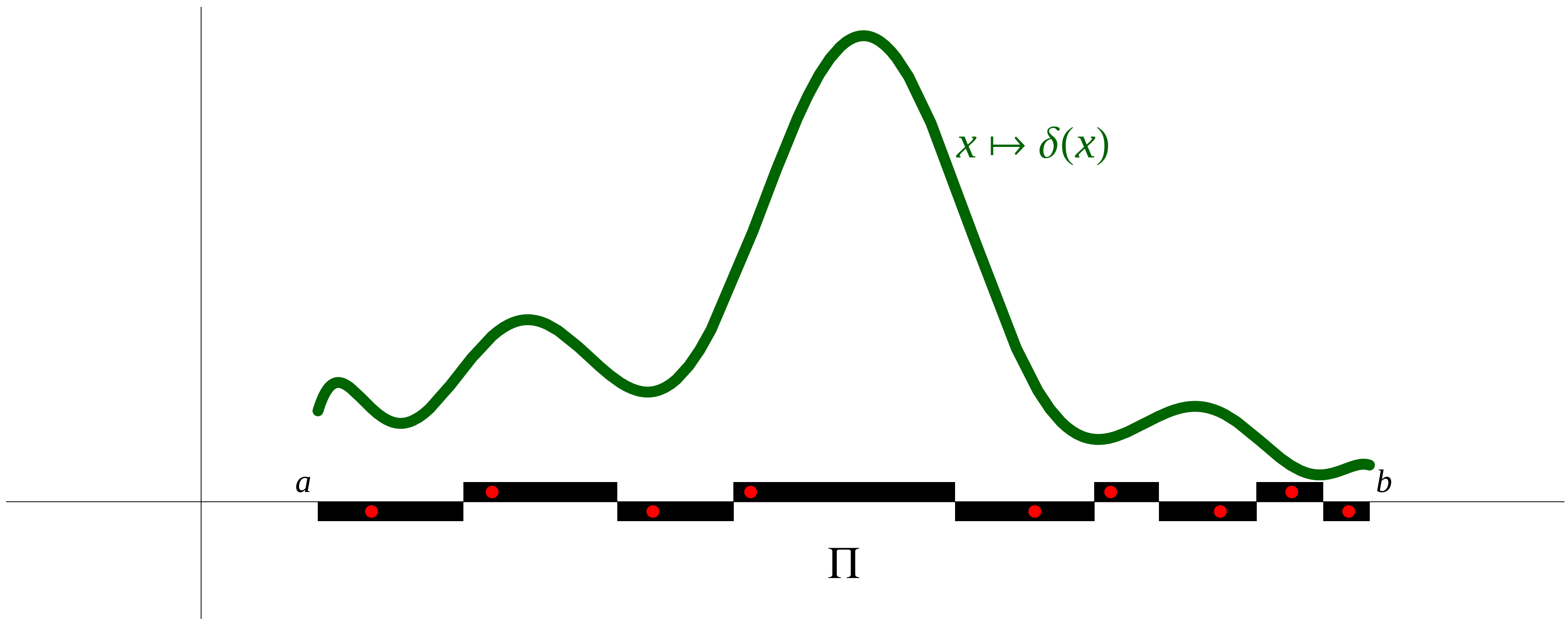


- Definizione: dati
  - **una suddivisione marcata** Π **di** $[a, b]$,
  - **e un calibro** $\delta(x)$ **su** $[a, b]$



- Definizione: dati
  - **una suddivisione marcata Π di $[a, b]$,**
  - **e un calibro $\delta(x)$ su $[a, b]$**

diremo che Π è adattata a δ, e scriveremo $\Pi \prec \delta$, se

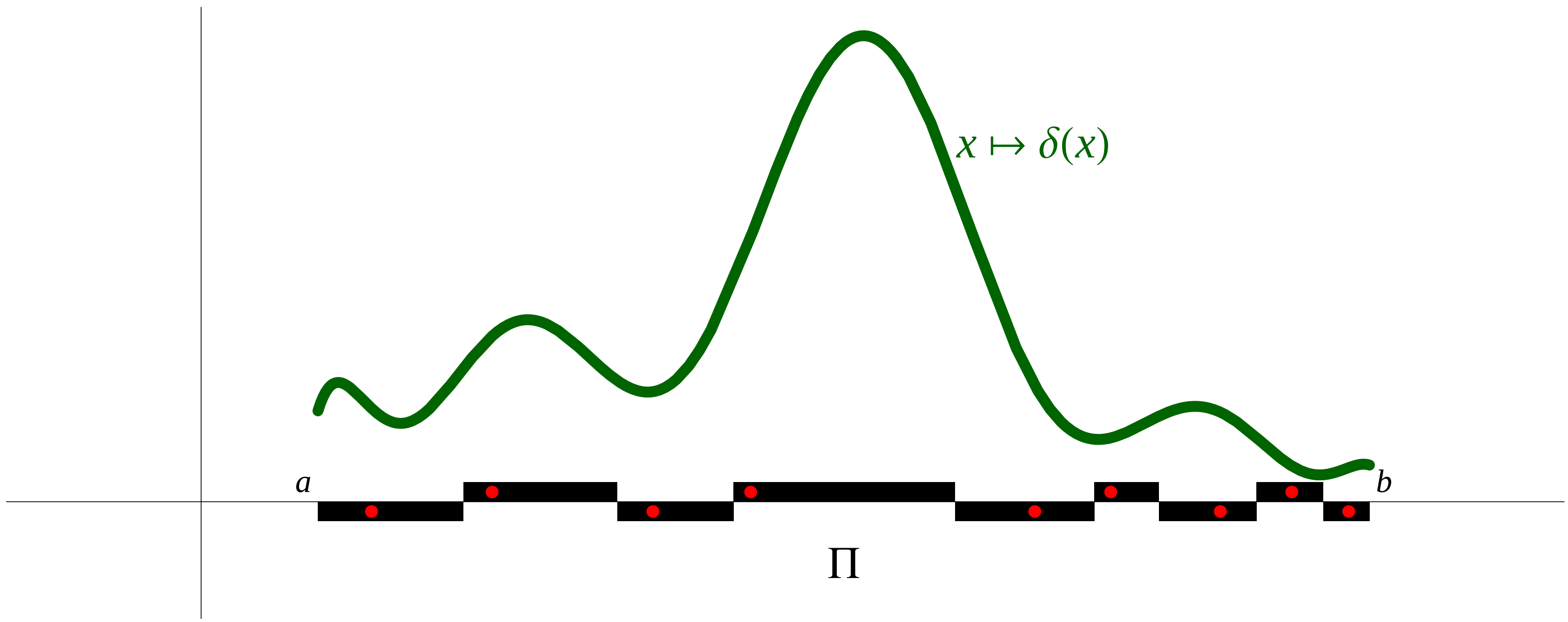


□ Definizione: dati

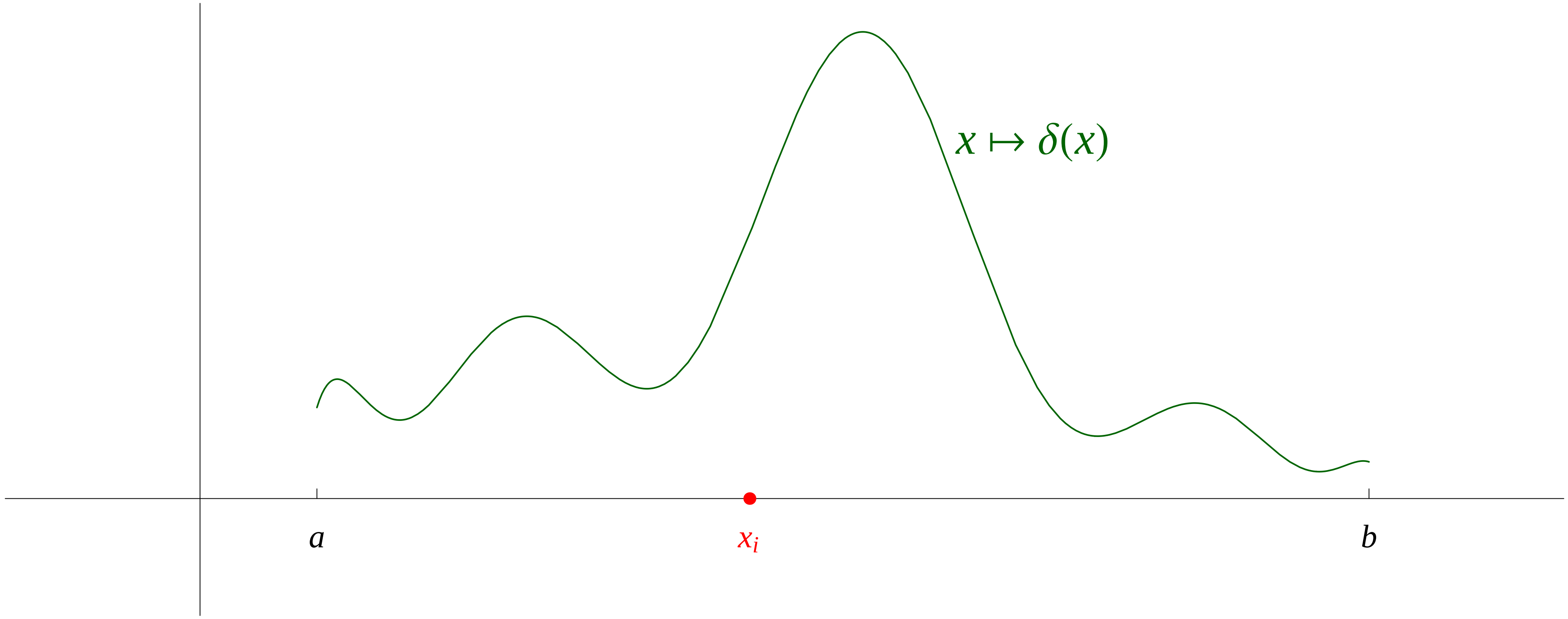
- **una suddivisione marcata** Π **di** $[a, b]$**,**
- **e un calibro** $\delta(x)$ **su** $[a, b]$

diremo che Π è adattata a δ, e scriveremo $\Pi \prec \delta$, se

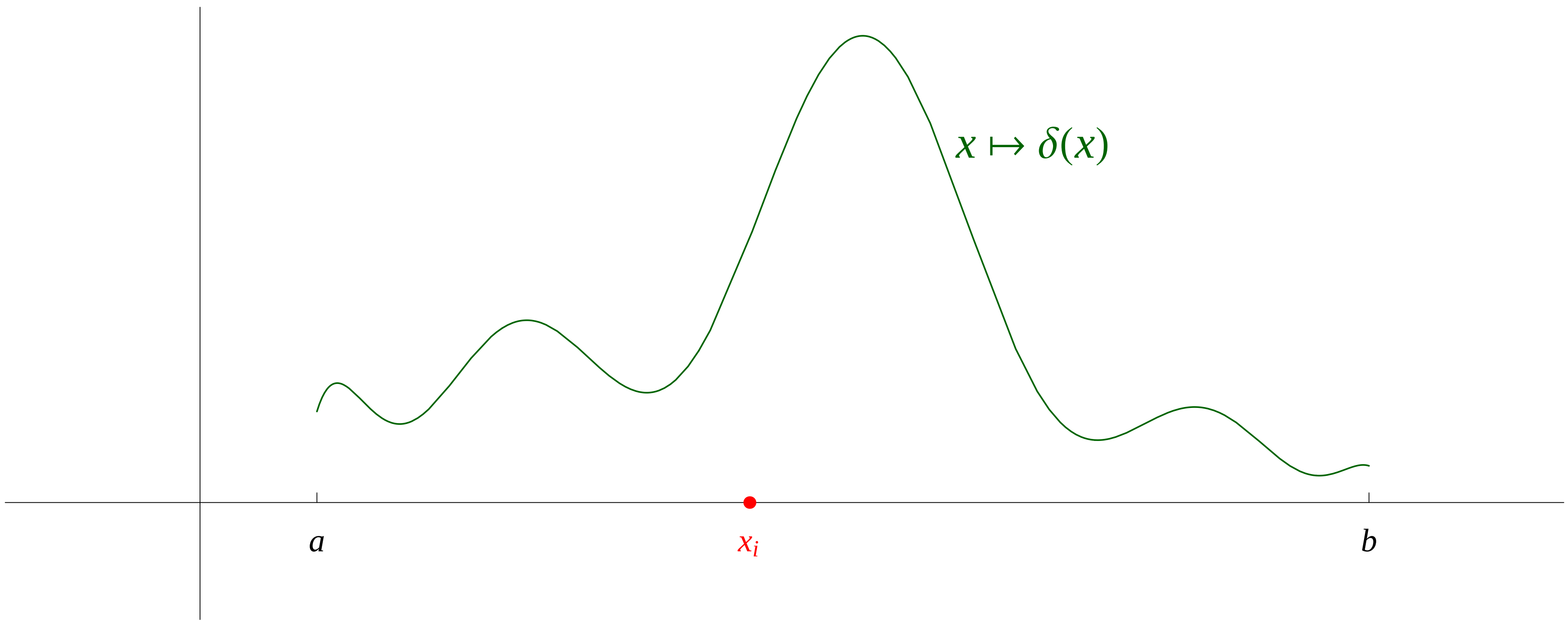
$$x_i - \delta(x_i) \leq a_{i-1} < a_i \leq x_i + \delta(x_i) \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$



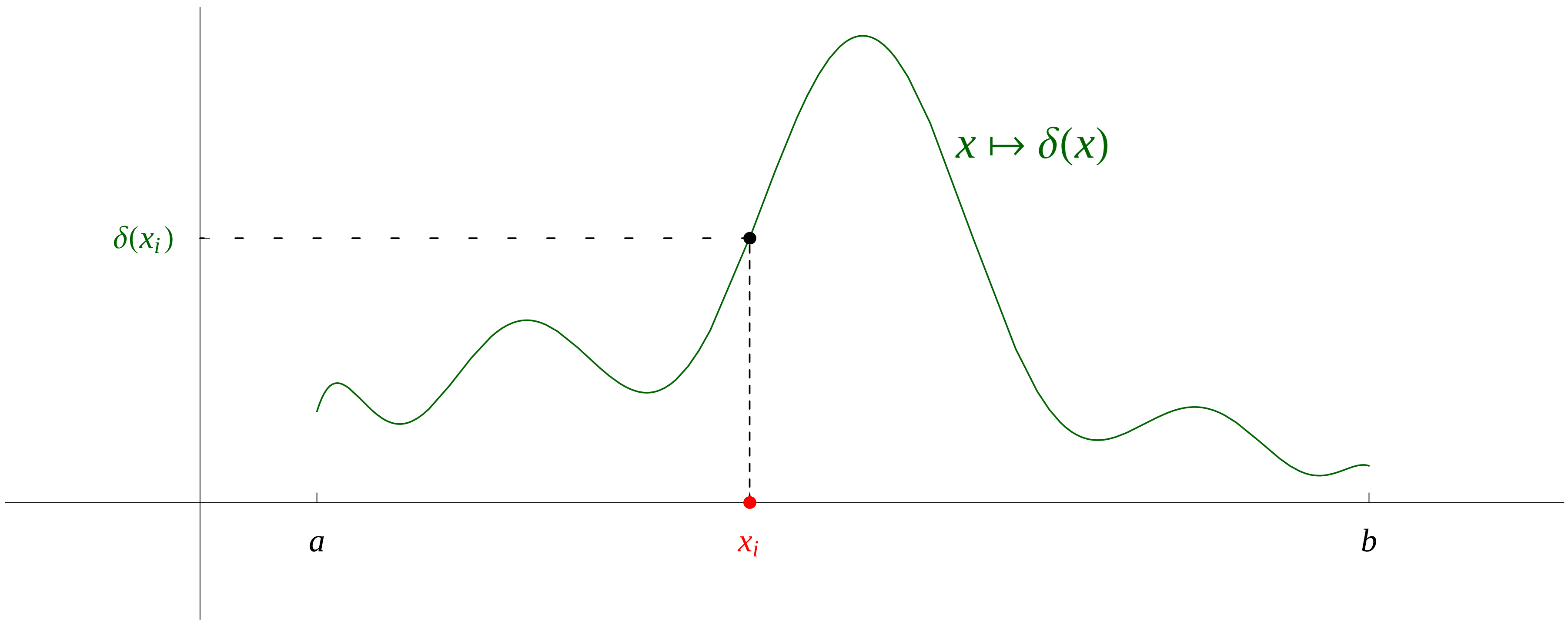
- Vediamo cosa vuol dire.



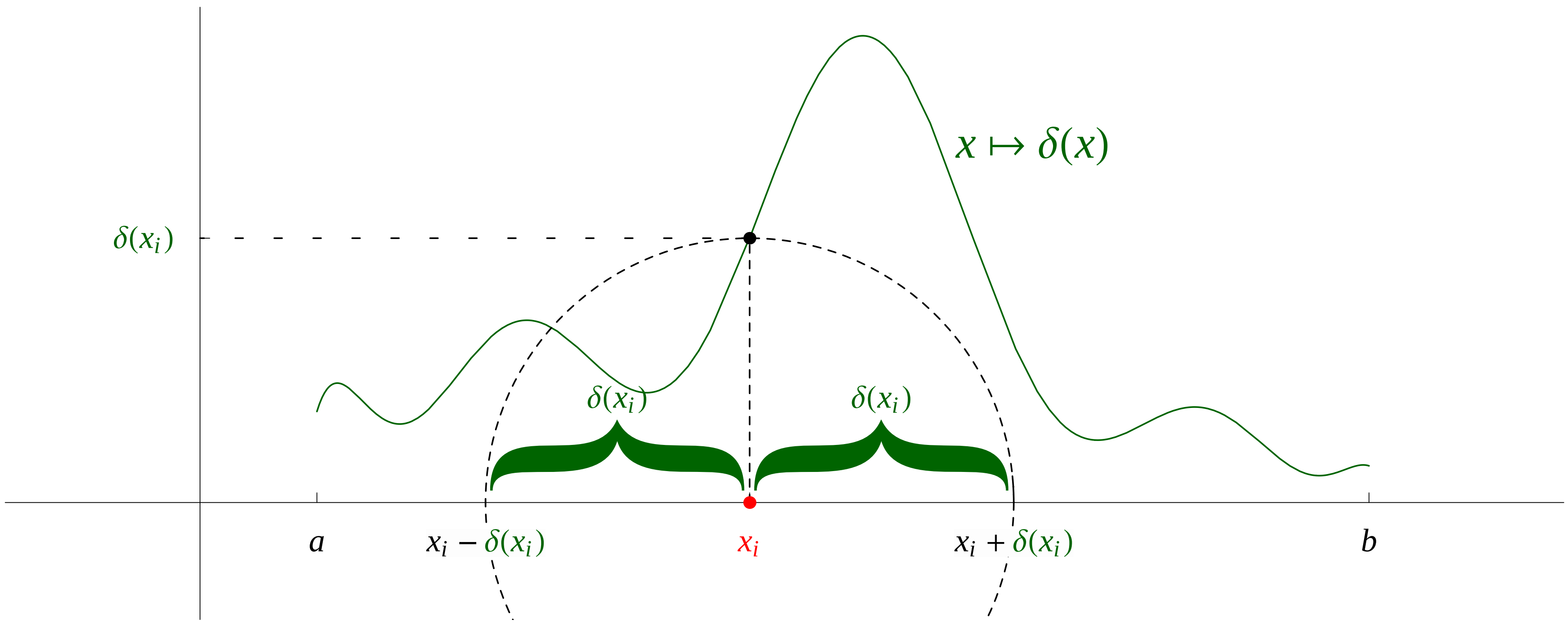
- Fissiamo un i fra 1 ed n;



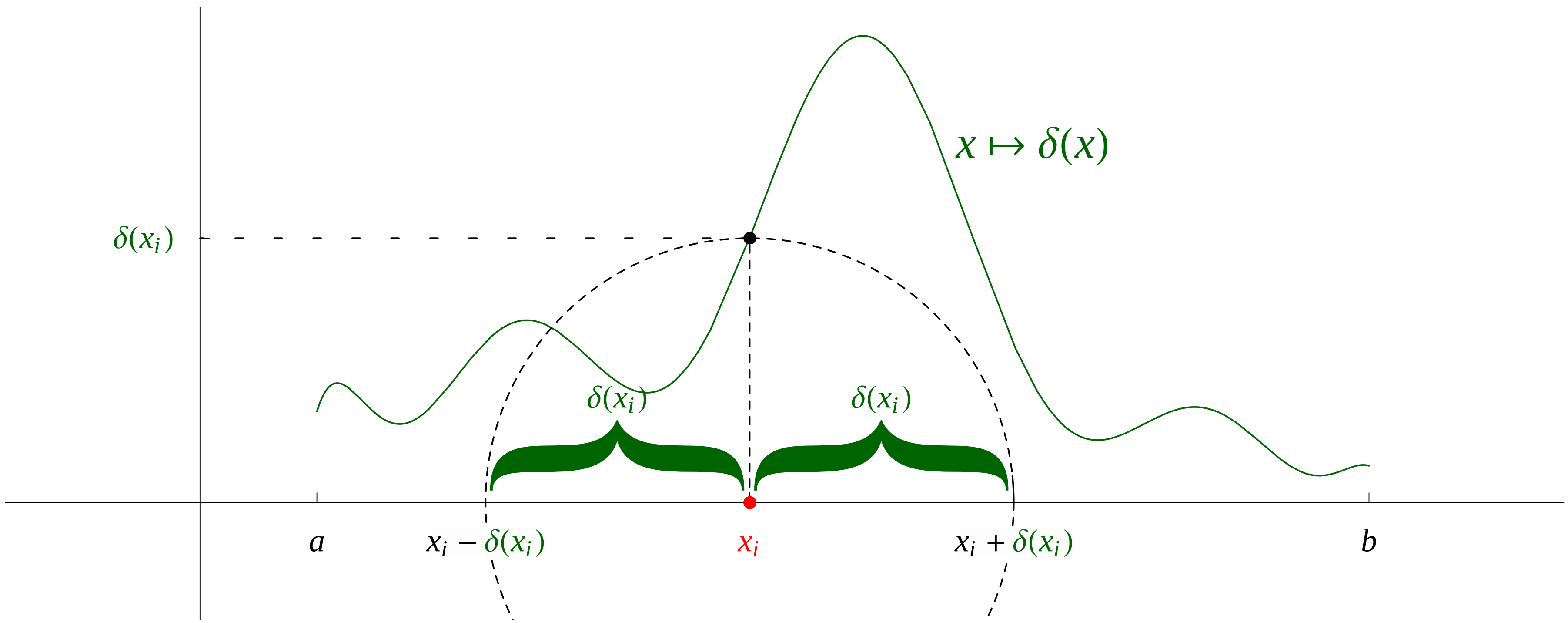
- Fissiamo un i fra 1 ed n;
- Consideriamo il punto marcato x_i.



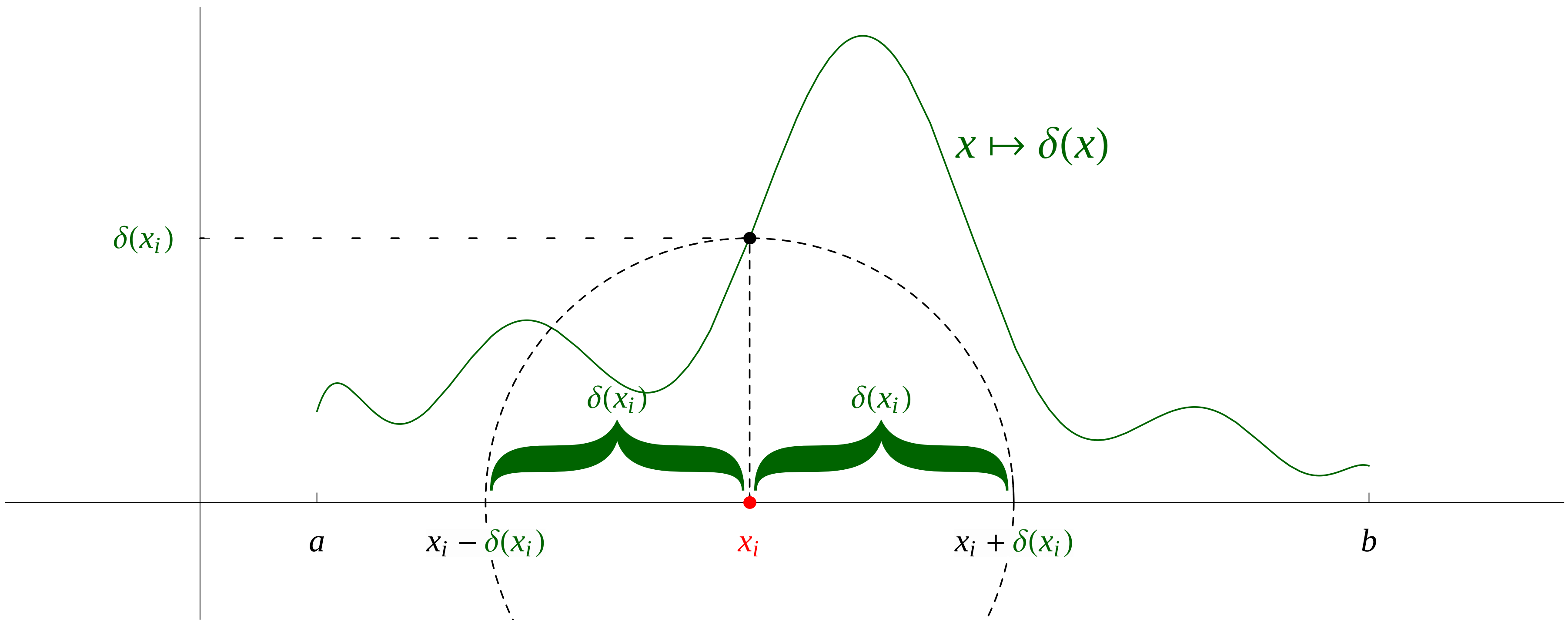
- Fissiamo un i fra 1 ed n;
- Consideriamo il punto marcato x_i.
- Calcoliamo $\delta(x_i)$.



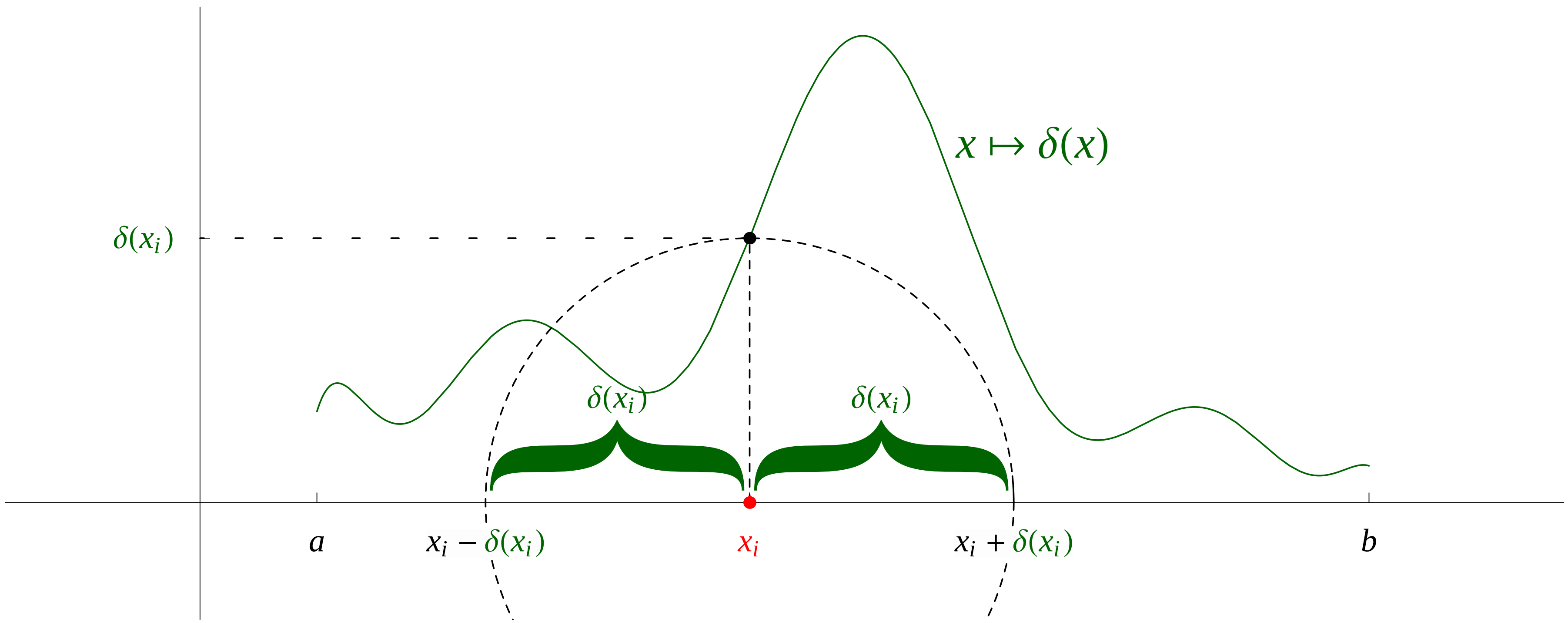
- Tracciamo il cerchio



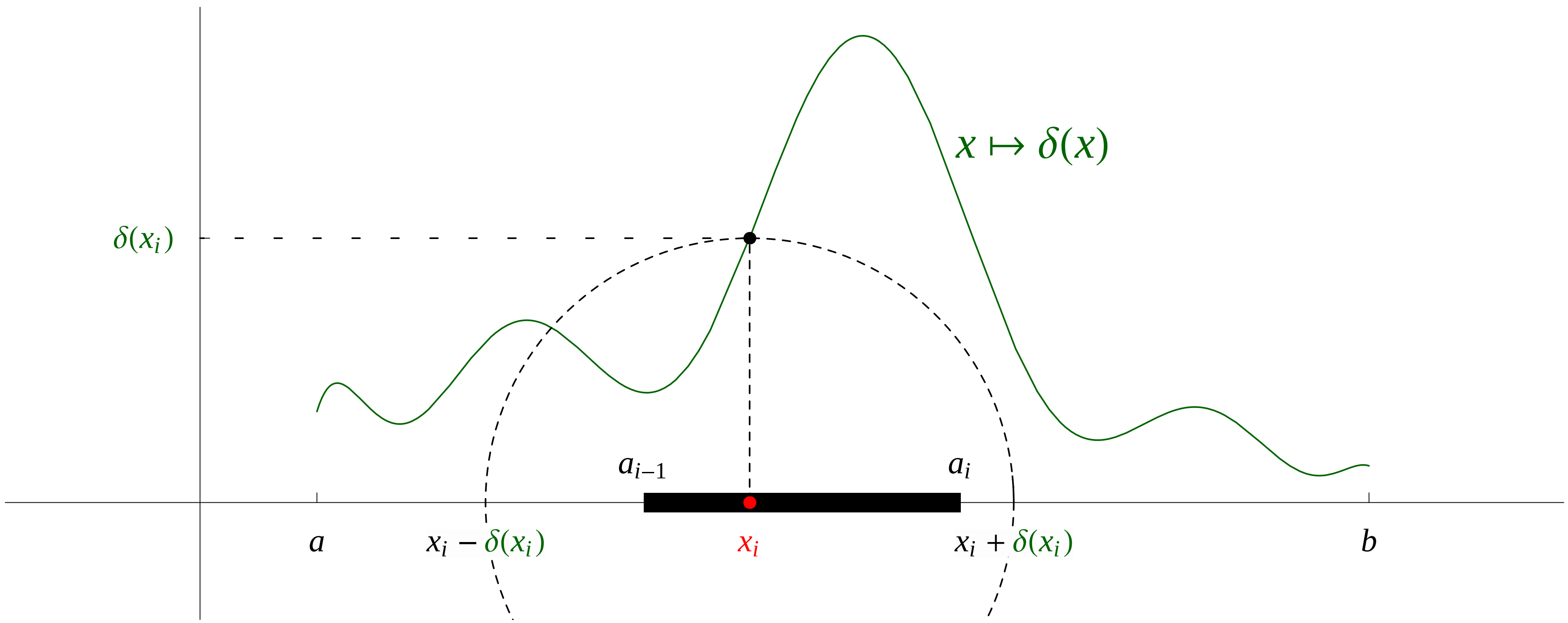
- Tracciamo il cerchio
  - **di centro** $(x_i, 0)$



- Tracciamo il cerchio
  - **di centro** $(x_i, 0)$
  - **e raggio** $\delta(x_i)$.



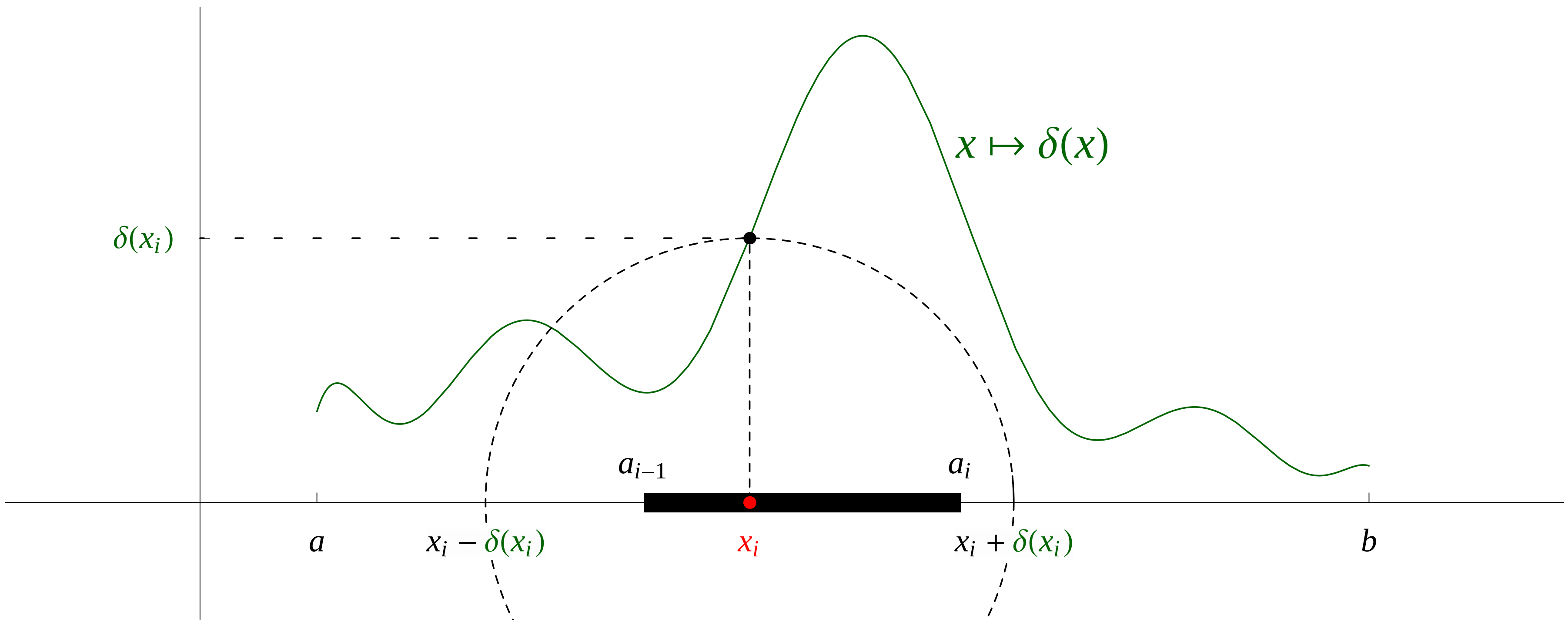
- Tracciamo il cerchio
  - **di centro** $(x_i, 0)$
  - **e raggio** $\delta(x_i)$**.**
    - Il cerchio incontra l'asse x nei punti $x_i - \delta(x_i)$ e $x_i + \delta(x_i)$.



- Ebbene, la condizione di adattamento

$$x_i - \delta(x_i) \leq a_{i-1} < a_i \leq x_i + \delta(x_i)$$

vuol dire che

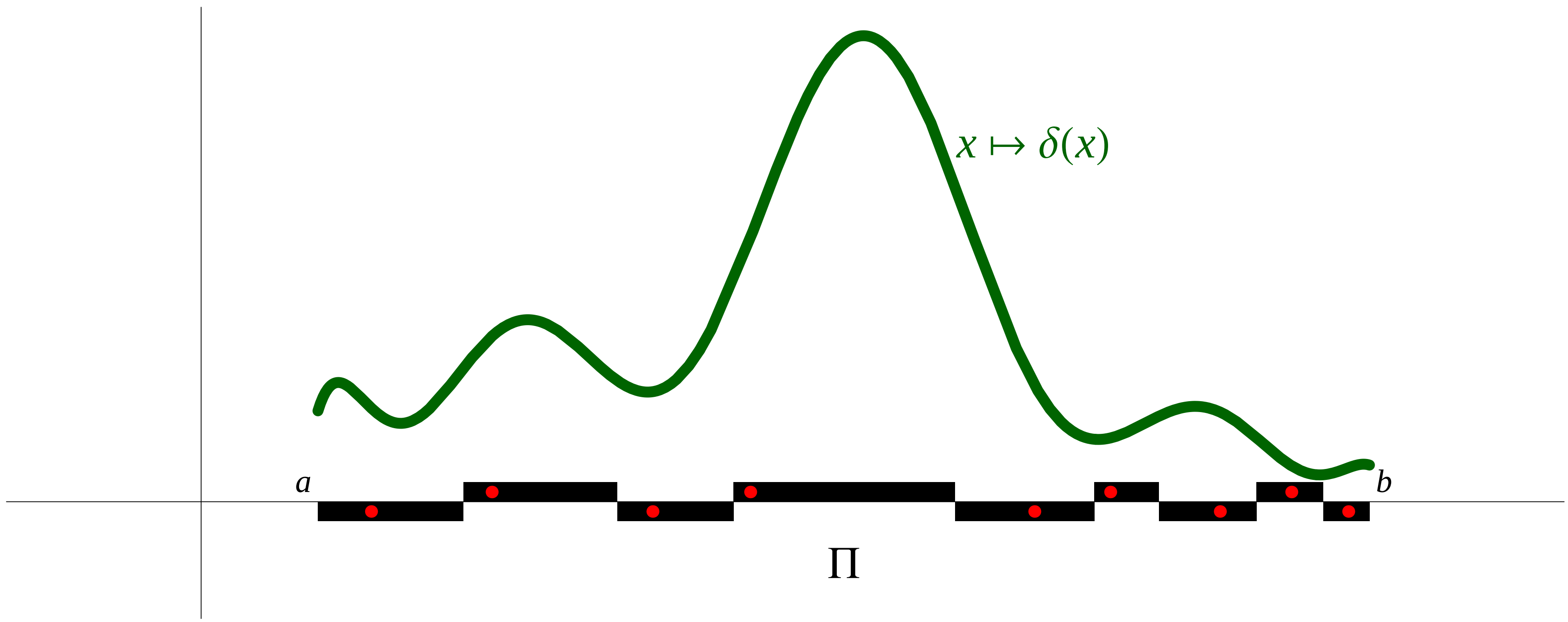


- Ebbene, la condizione di adattamento

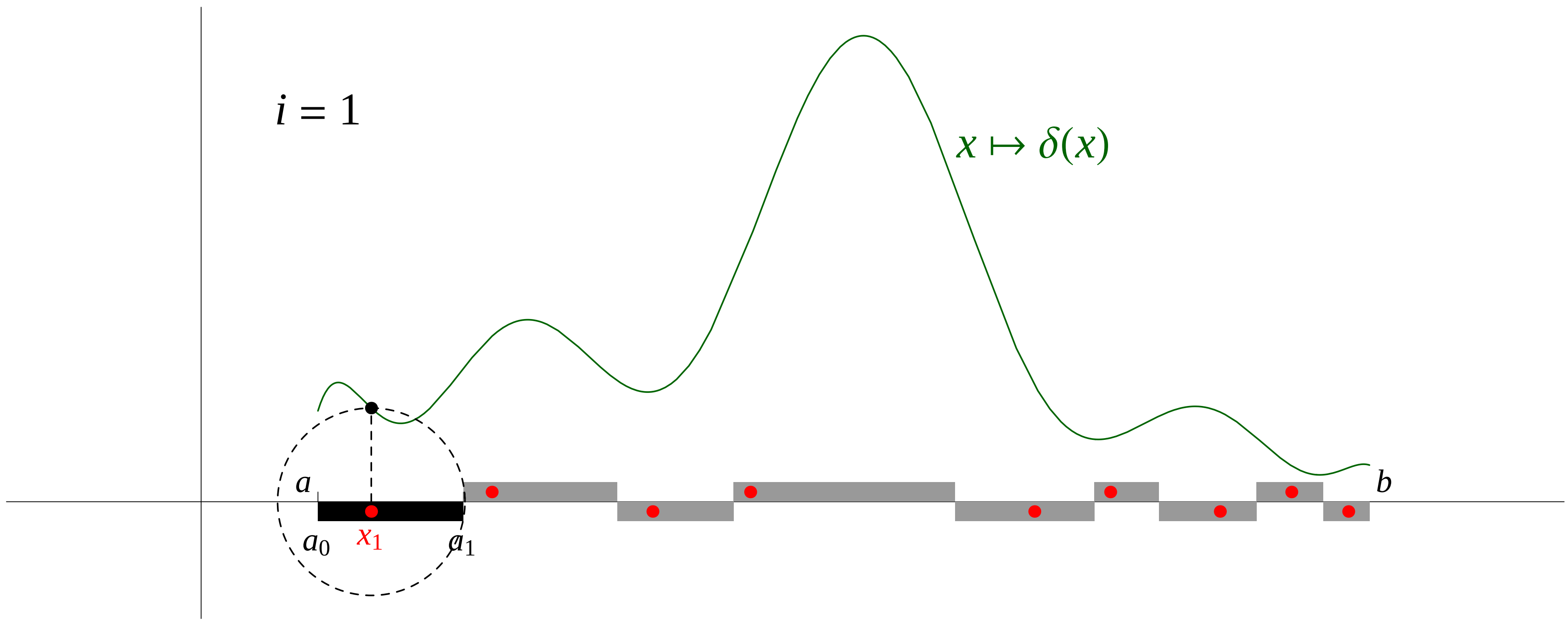
$$x_i - \delta(x_i) \leq a_{i-1} < a_i \leq x_i + \delta(x_i)$$

vuol dire che

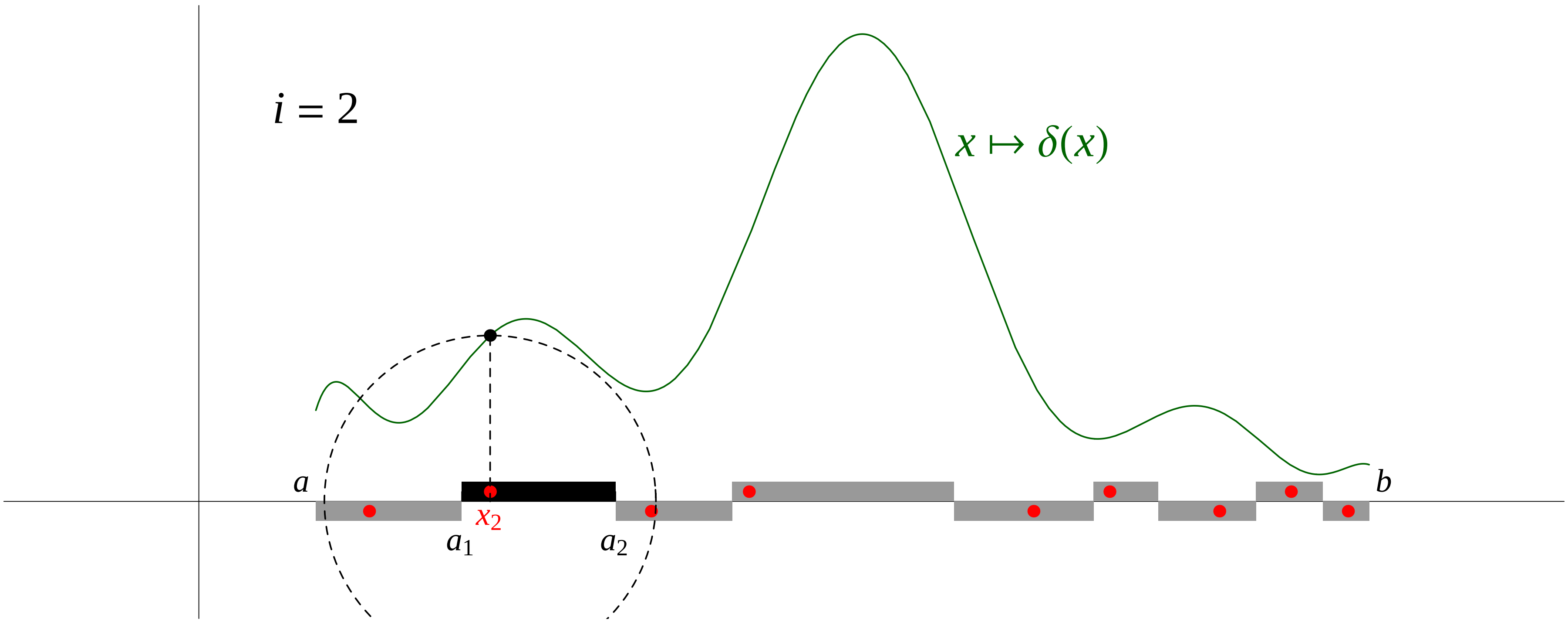
- **l'intervallino $[a_{i-1}, a_i]$ è contenuto nel cerchio!**



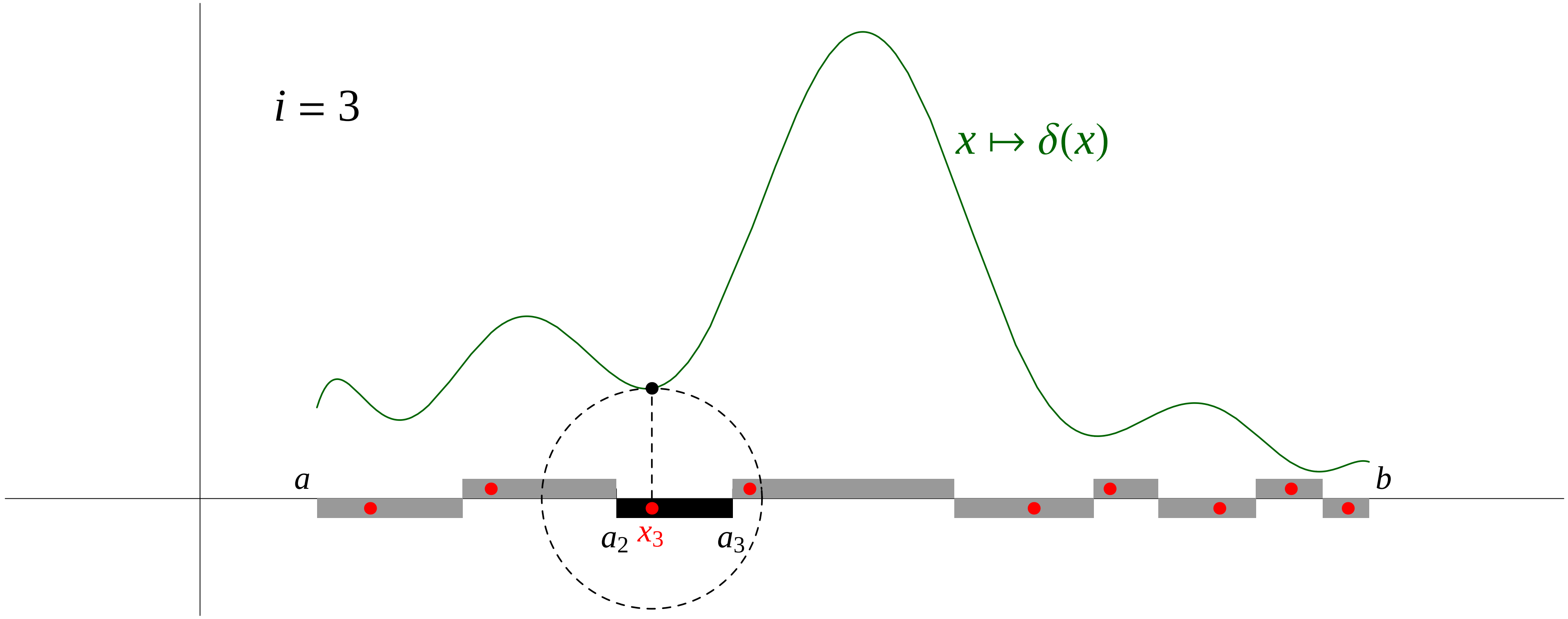
- Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio



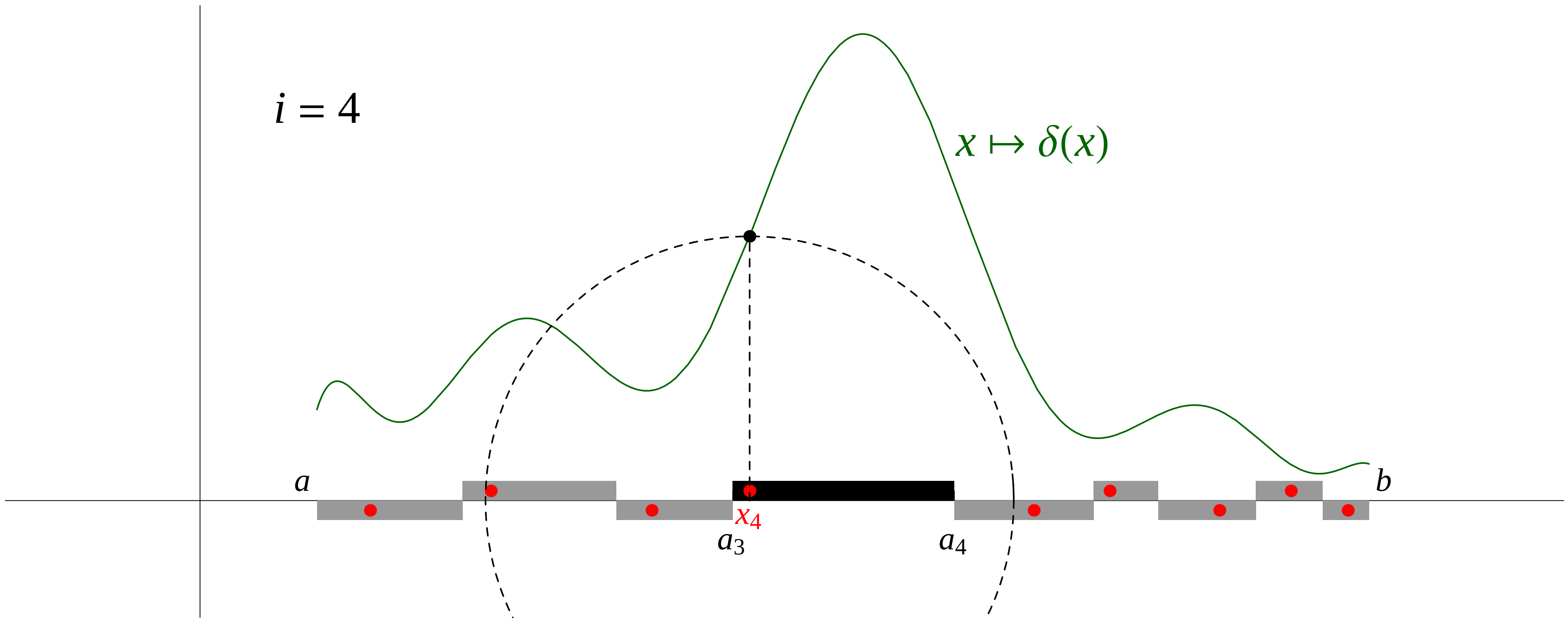
- Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio
  - **per** $i = 1$



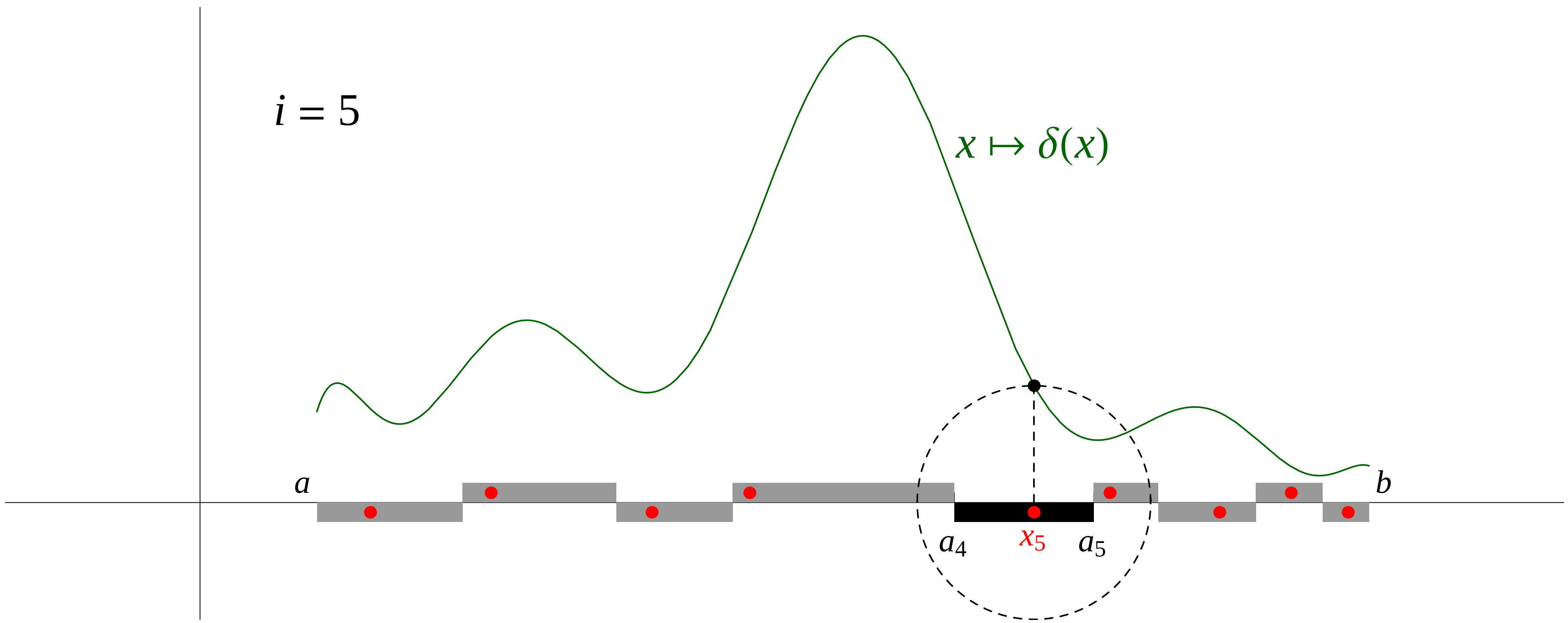
- Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio
  - **per** $i = 2$



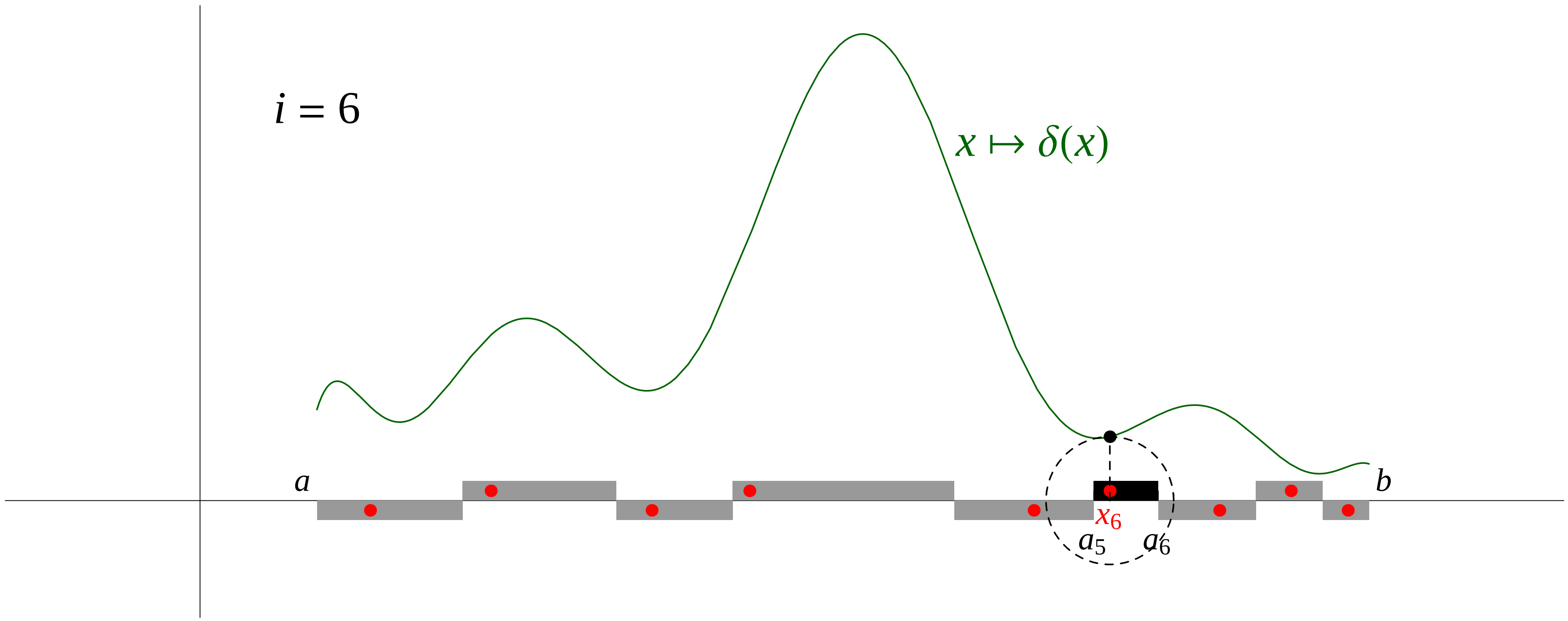
- Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio
  - **per** $i = 3$



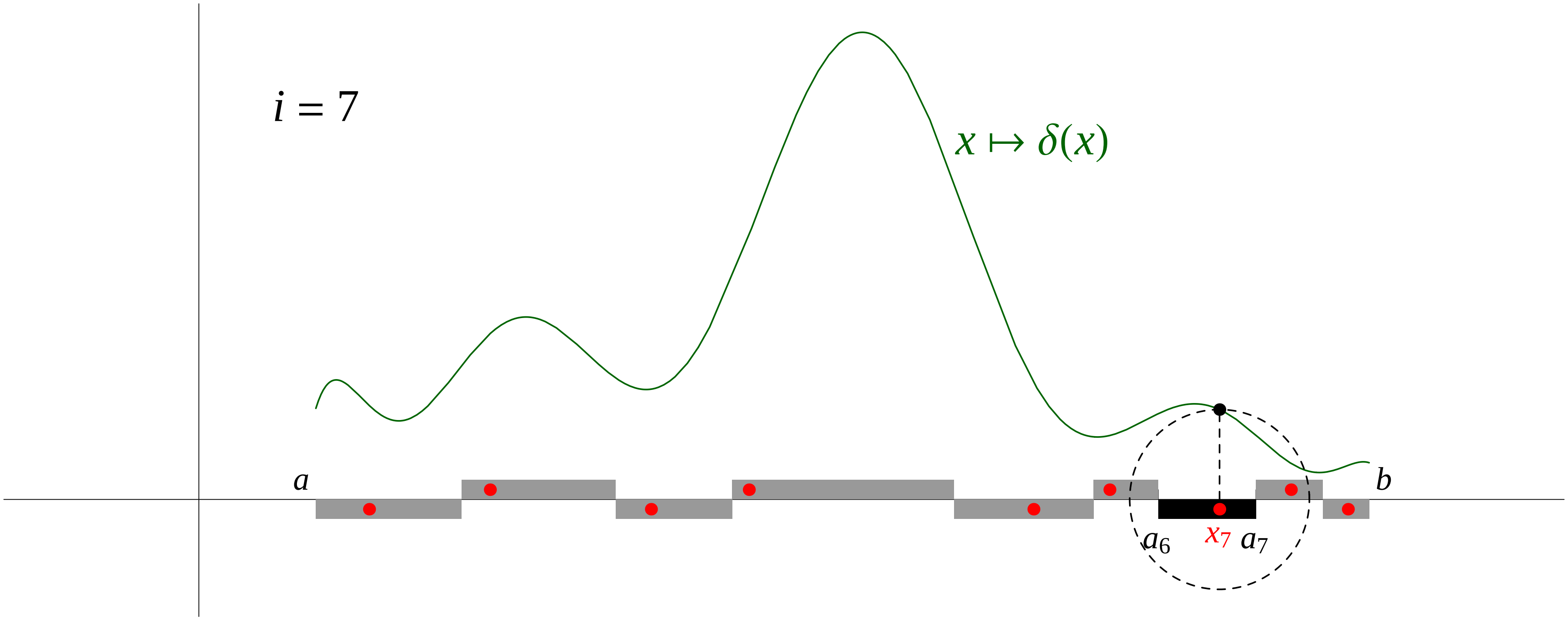
- Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio
  - **per** $i = 4$



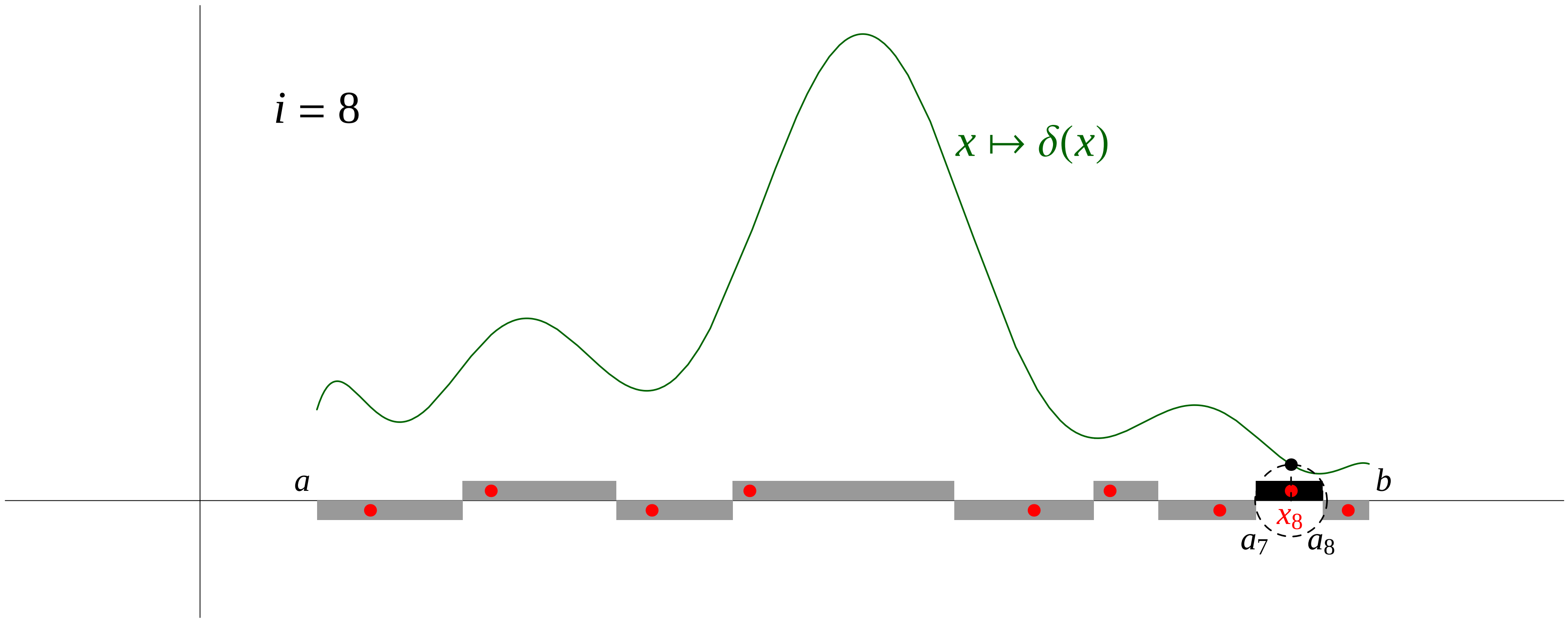
- Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio
  - **per** $i = 5$



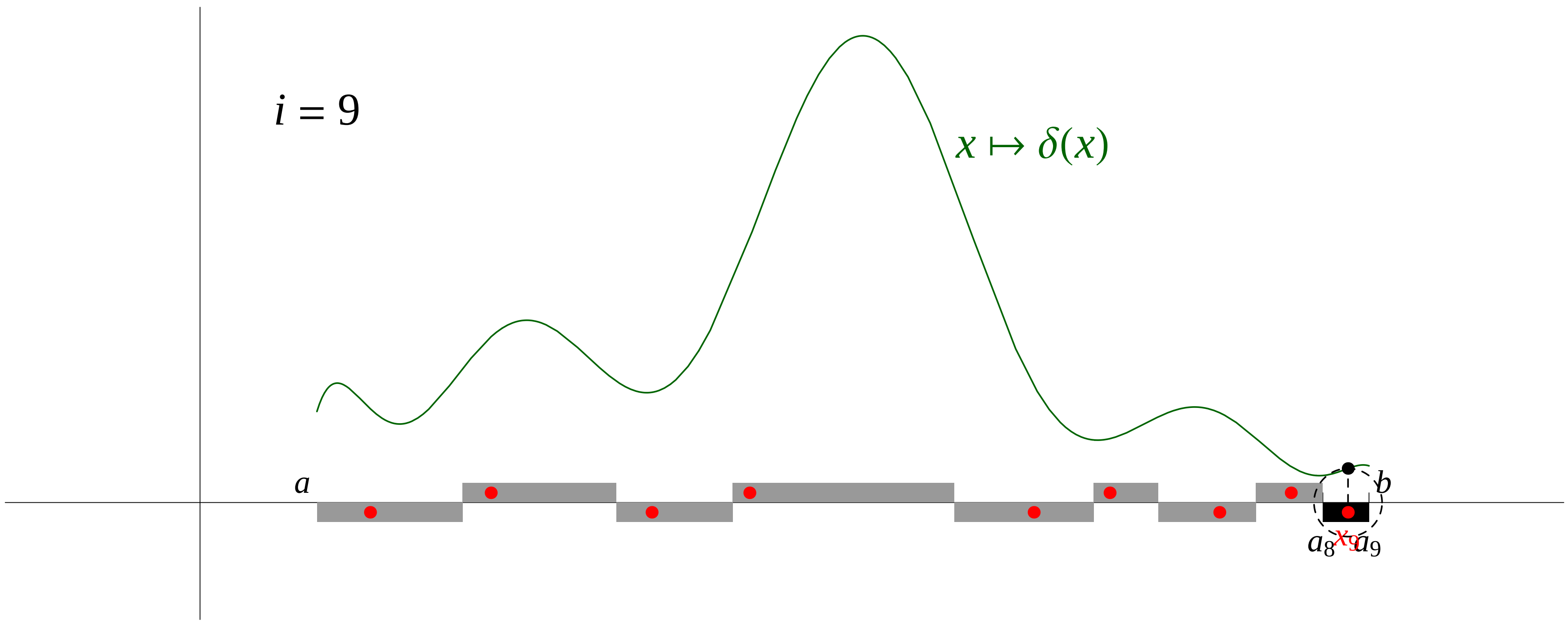
- Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio
  - **per** $i = 6$



- Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio
  - **per** $i = 7$



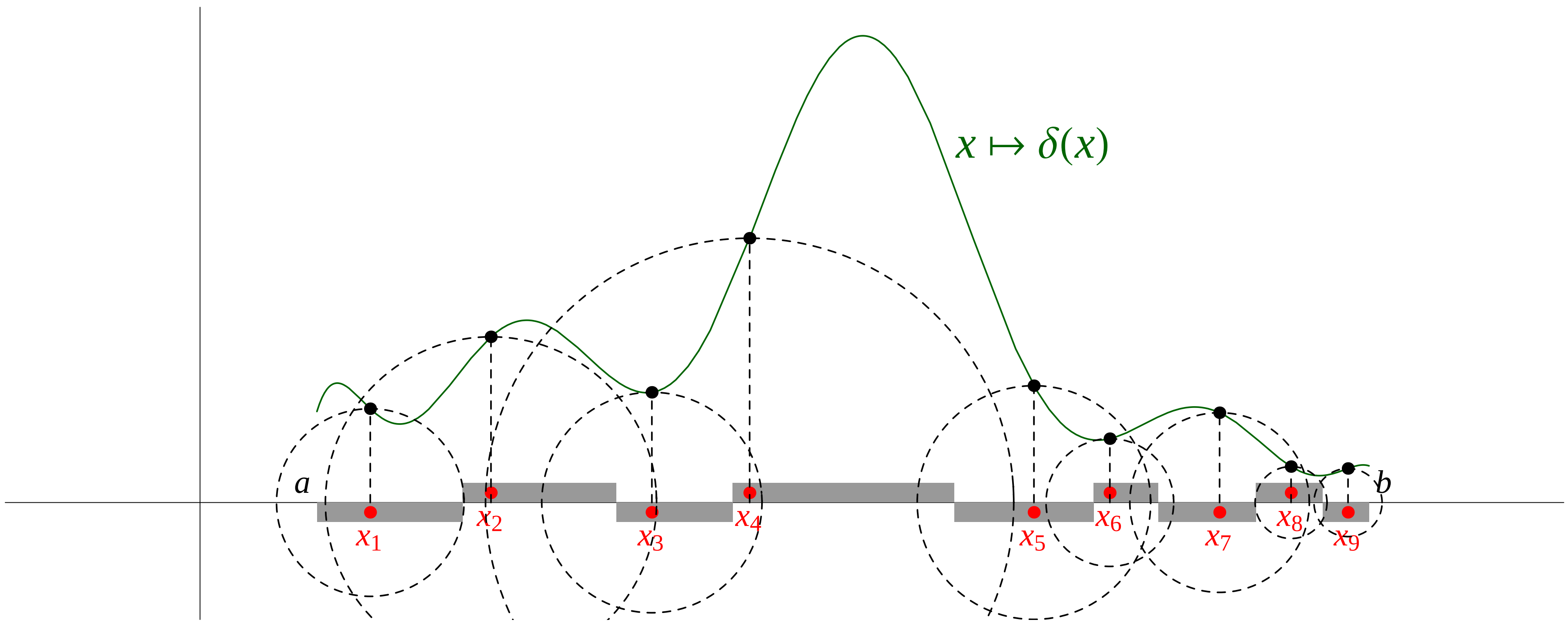
- Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio
  - **per** $i = 8$



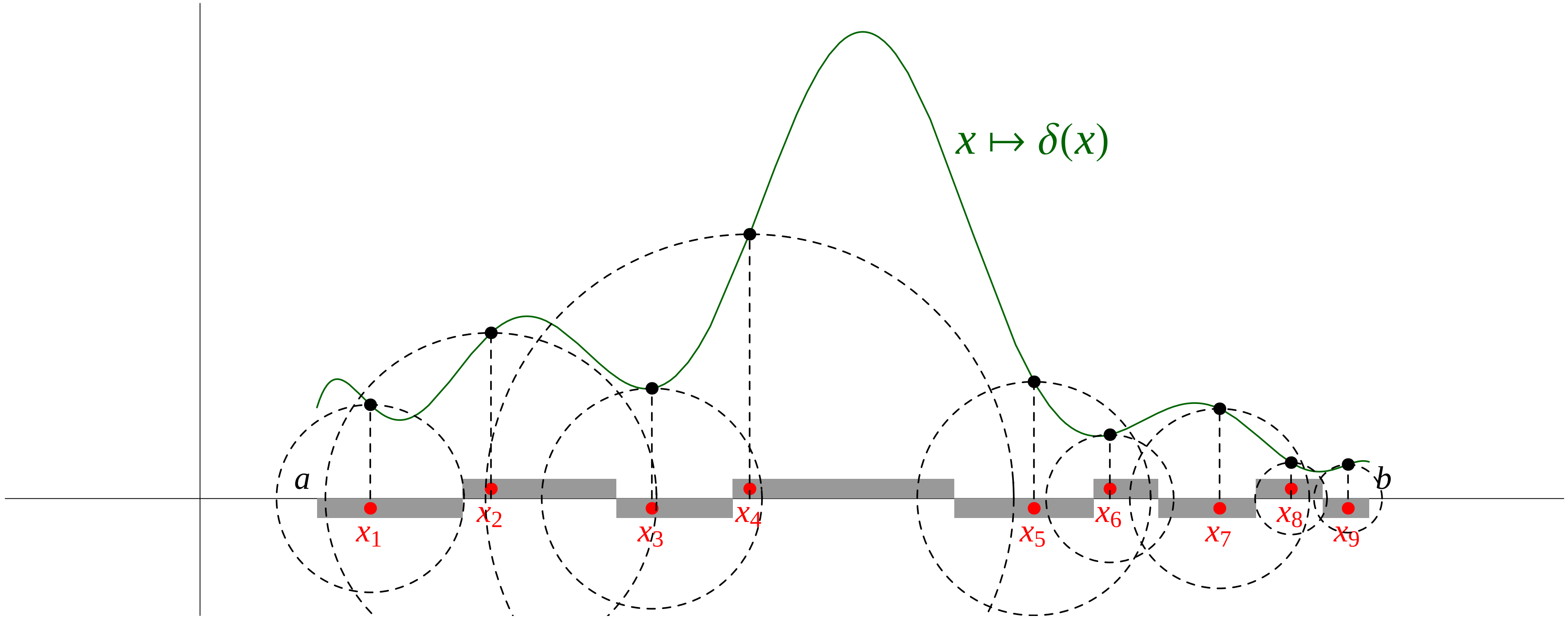
□ Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio

- **per** $i = 9$

spiegazione



- Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio



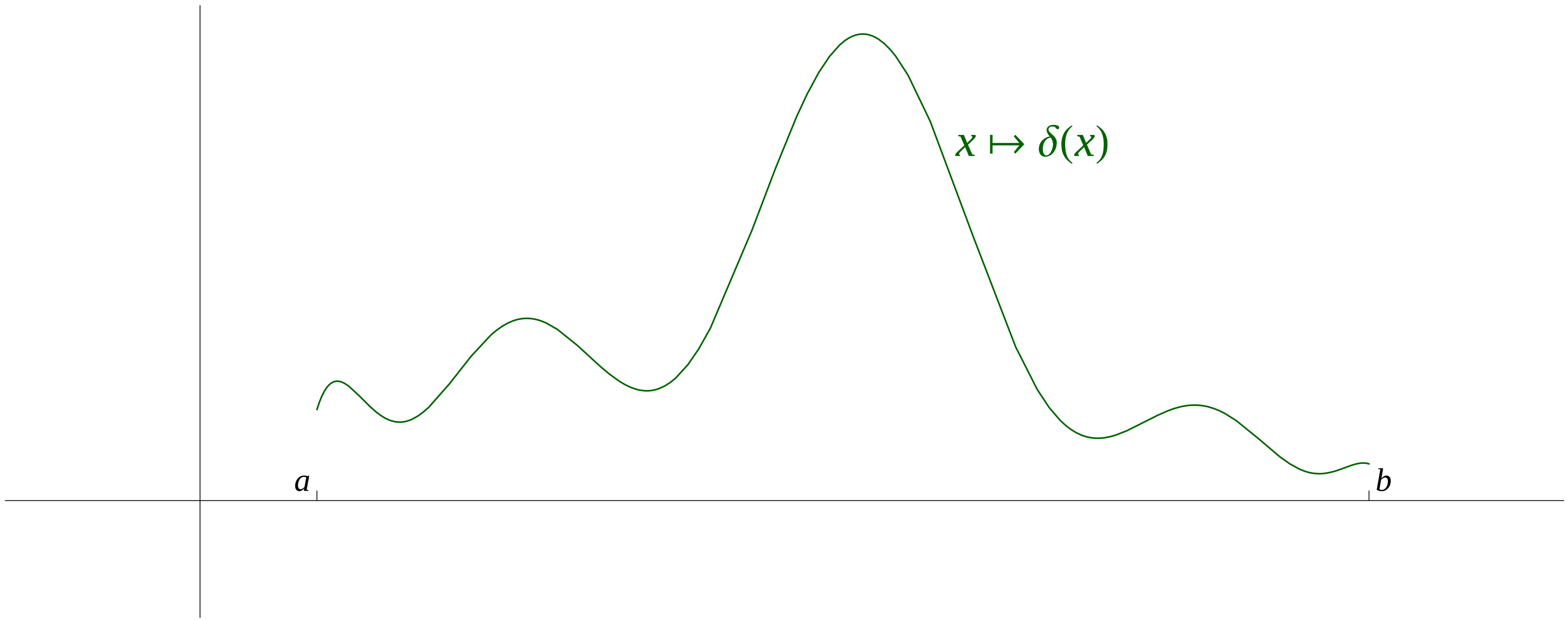
- Affinché $\Pi \prec \delta$ bisogna che $[a_{i-1}, a_i]$ sia contenuto nel cerchio
  - **insomma, per tutti gli i.**

- In forma tabellare:

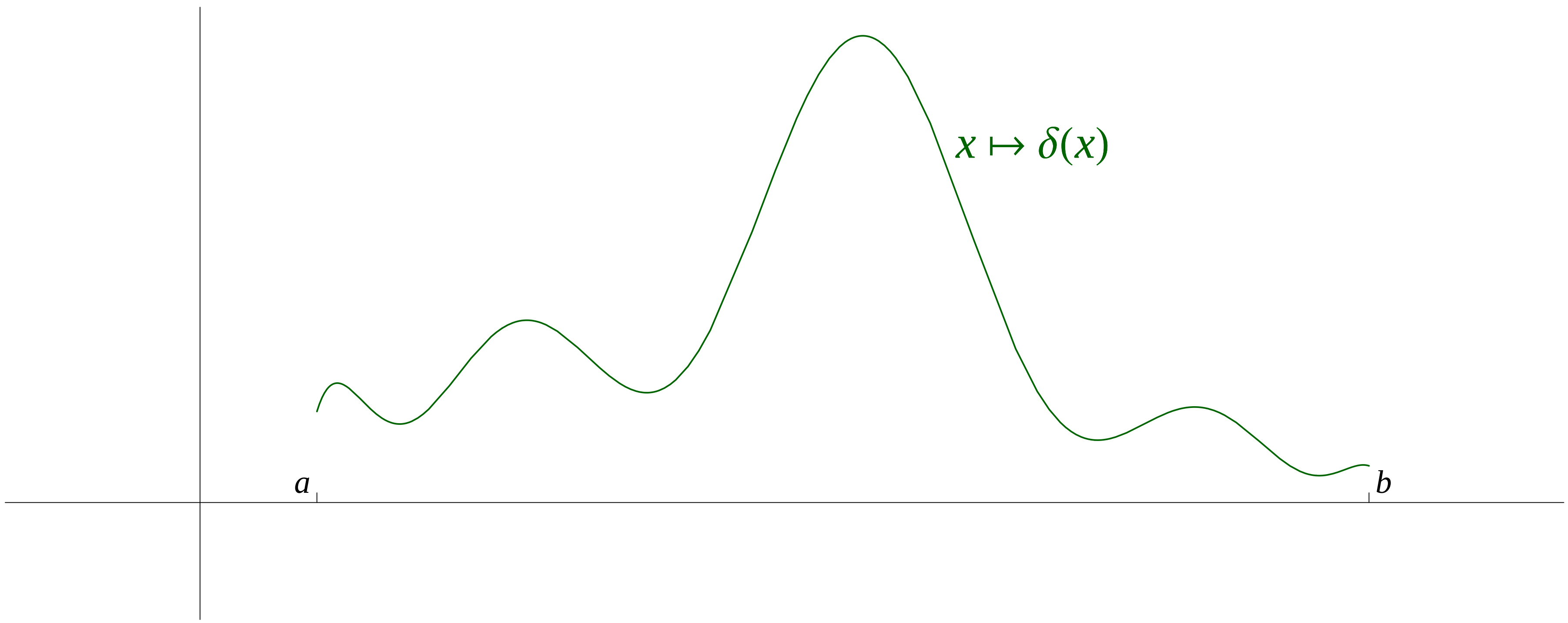
Π			adattamento al calibro			
i	a_i	x_i	$\delta(x_i)$	$x_i - \delta(x_i)$	$x_i + \delta(x_i)$	$x_i - \delta(x_i) \leq a_{i-1} <$ $< a_i \leq x_i + \delta(x_i)$
0	0,30000					
1	0,67372	0,43692	0,24058	0,19634	0,67749	**vero**
2	1,06861	0,74672	0,42494	0,32178	1,17165	**vero**
3	1,36708	1,15961	0,28261	0,87700	1,44221	**vero**
4	1,93574	1,41053	0,67776	0,73276	2,08829	**vero**
5	2,29350	2,14013	0,29954	1,84059	2,43967	**vero**
6	2,45922	2,33497	0,16380	2,17117	2,49877	**vero**
7	2,70993	2,61651	0,23031	2,38620	2,84682	**vero**
8	2,88152	2,79996	0,09223	2,70773	2,89219	**vero**
9	3,00000	2,94618	0,08736	2,85882	3,03354	**vero**
						$\Pi \prec \delta$: **vero**

Esempio

Esempio

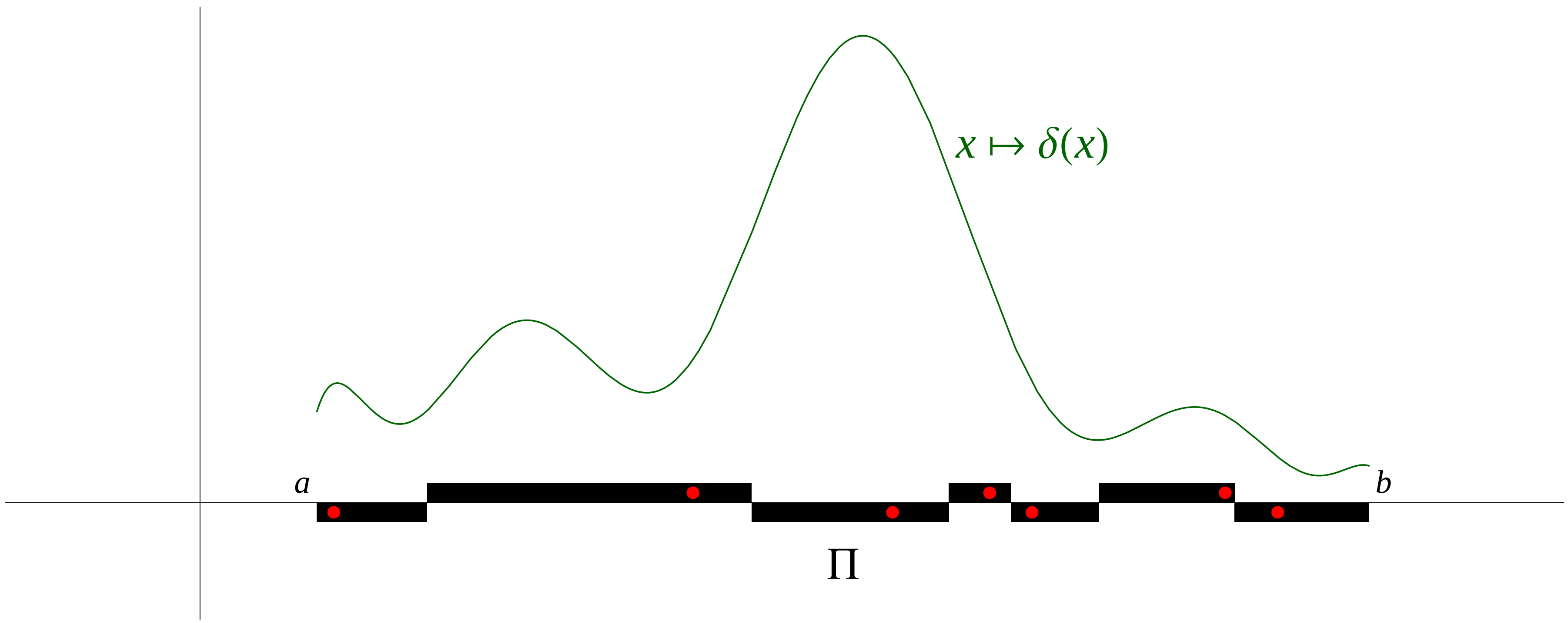


- Facciamo un altro esempio



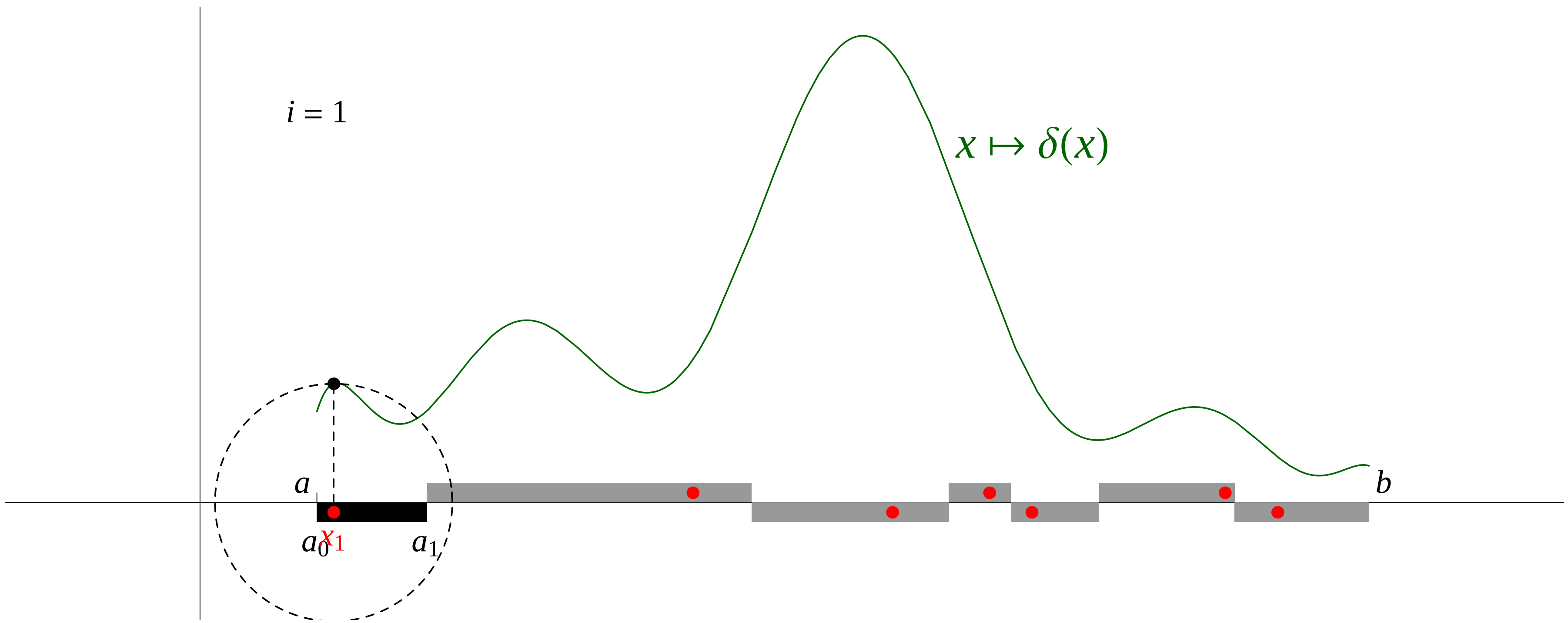
- Facciamo un altro esempio
  - **Con lo stesso calibro** $\delta(x)$,

Esempio



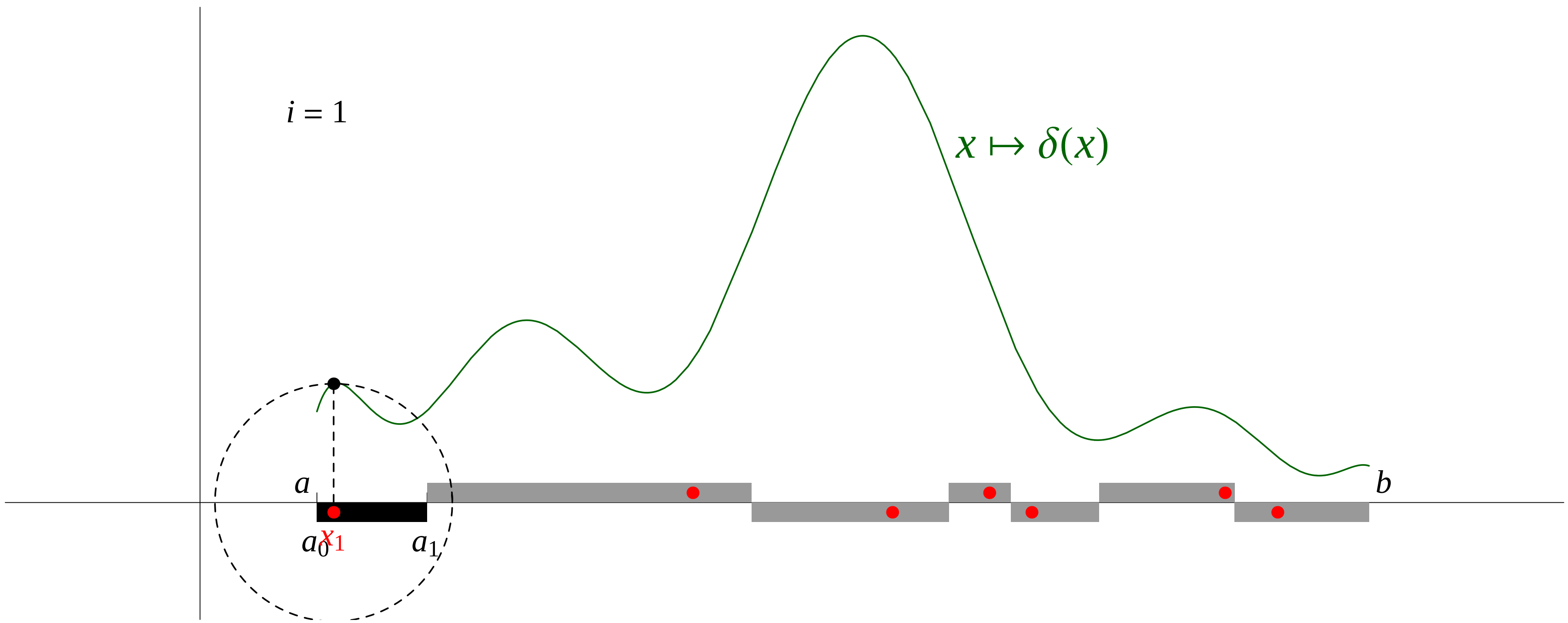
- Facciamo un altro esempio
  - **Con lo stesso calibro $\delta(x)$,**
  - **ma con una suddivisione Π diversa.**

Esempio

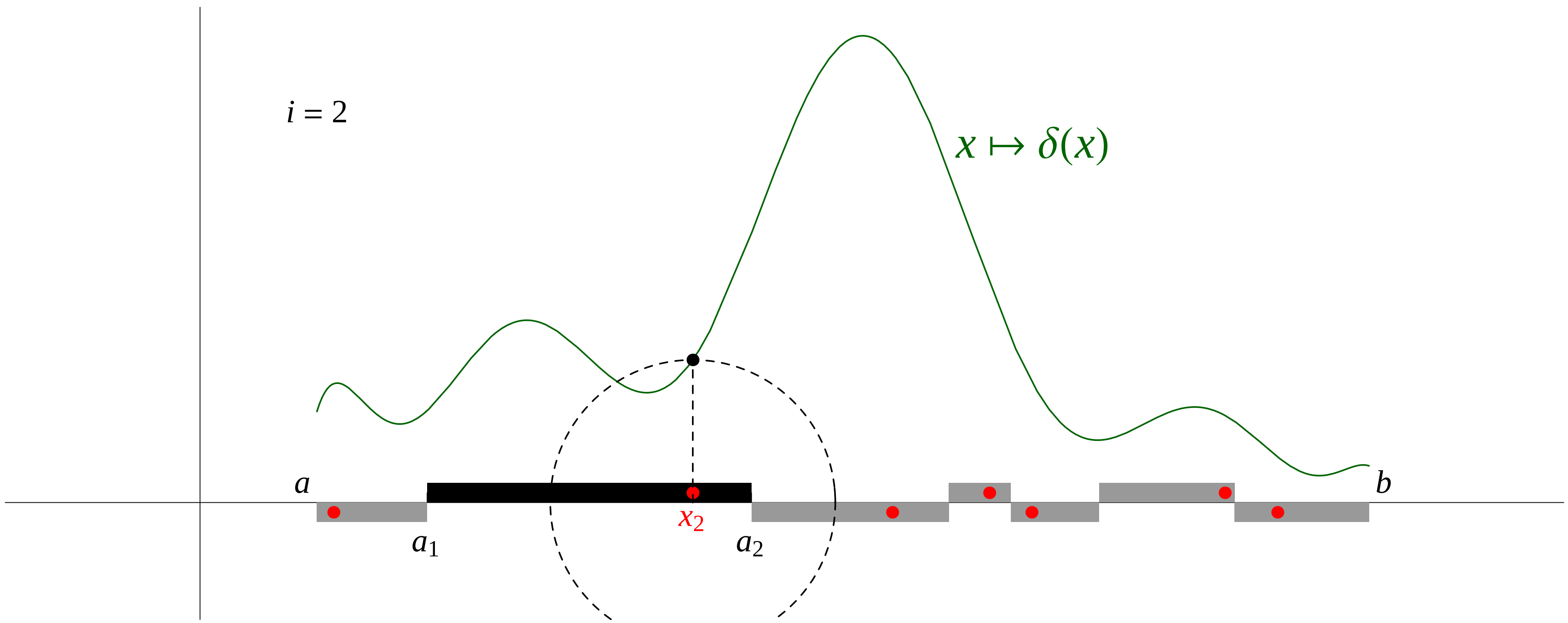


- In questo esempio:

Esempio



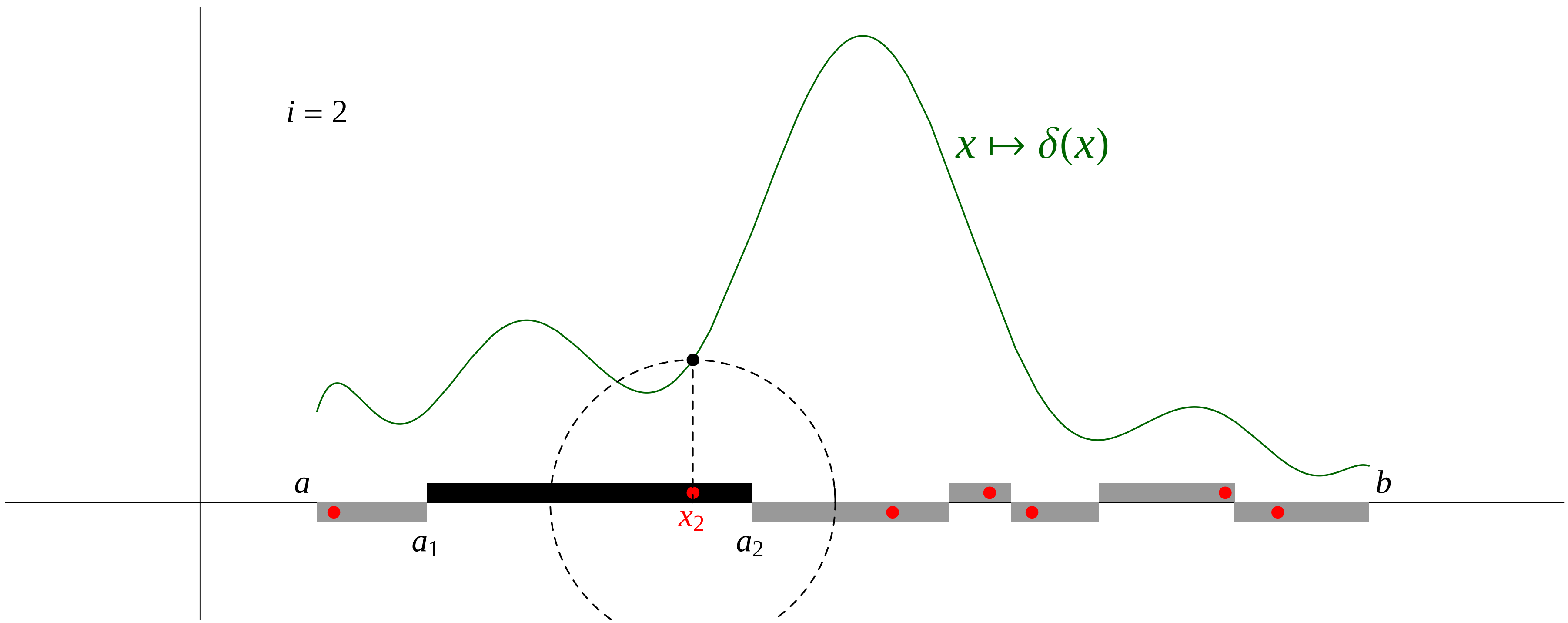
- In questo esempio:
  - **per $i = 1$ l'intervallino è contenuto nel cerchietto;**



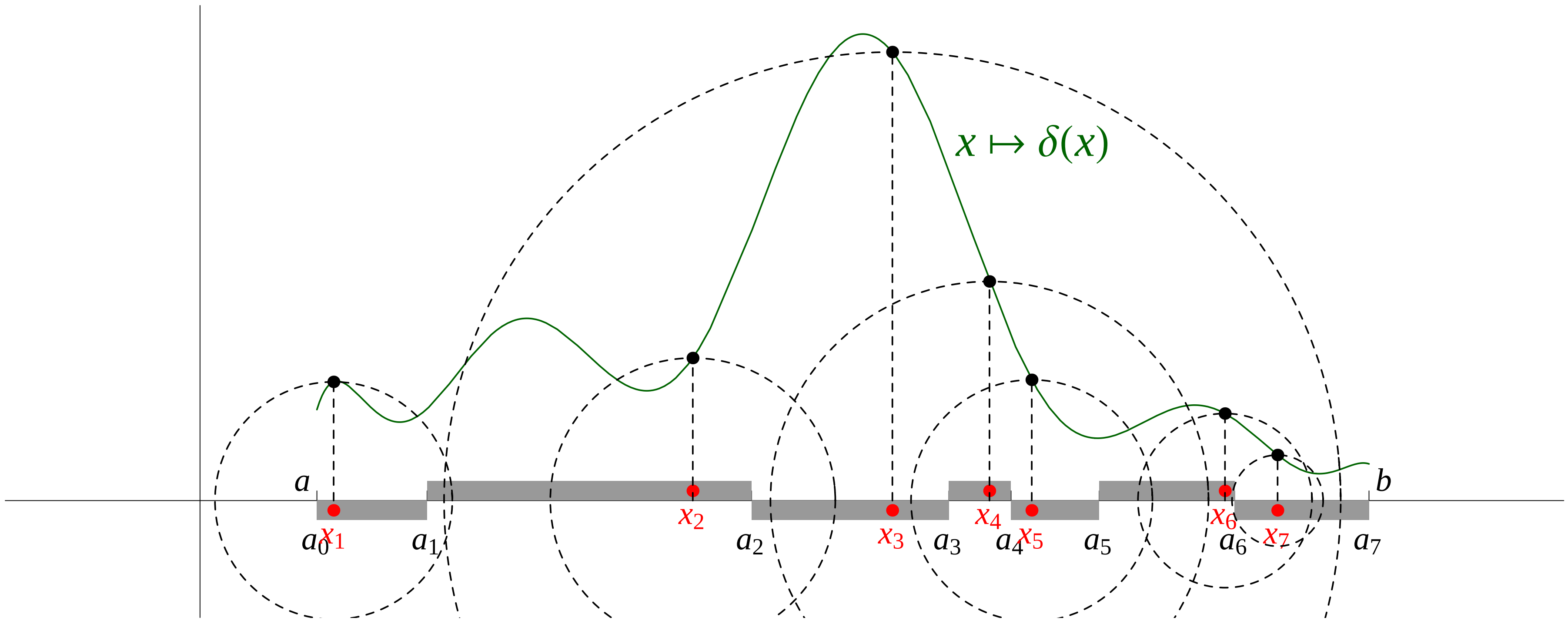
☐ In questo esempio:

- **per** $i = 1$ **l'intervallino è contenuto nel cerchietto;**
- **per** $i = 2$ **no!**

Esempio



- In questo esempio:
  - **per** $i = 1$ **l'intervallino è contenuto nel cerchietto;**
  - **per** $i = 2$ **no!**
- Quindi Π non è adattata a δ; in simboli: $\Pi \not\prec \delta$.



- Ci sono altri intervallini non contenuti nel rispettivo cerchietto?

Esempio

- In forma tabellare:

Π			**adattamento al calibro**			
i	a_i	x_i	$\delta(x_i)$	$x_i - \delta(x_i)$	$x_i + \delta(x_i)$	$x_i - \delta(x_i) \leq a_{i-1} \leq \leq a_i \leq x_i + \delta(x_i)$
0	0,30000					
1	0,58278	0,34292	0,30453	0,03839	0,64745	**vero**
2	1,41527	1,26466	0,36573	0,89893	1,63039	**falso**
3	1,92174	1,77686	1,15054	0,62632	2,92740	**vero**
4	2,08133	2,02599	0,56209	1,46390	2,58808	**vero**
5	2,30770	2,13448	0,30975	1,82473	2,44423	**vero**
6	2,65504	2,63041	0,22337	2,40704	2,85378	**falso**
7	3,00000	2,76539	0,11695	2,64844	2,88235	**falso**
						$\Pi \prec \delta$: **falso**

Cap. 7
Integrale di calibro

Definizione di Integrale

- *Abbiamo ora tutti i concetti necessari:*

- ***Abbiamo ora tutti i concetti necessari:***
  - calibri

- ***Abbiamo ora tutti i concetti necessari:***
  - calibri
  - e adattamento di una suddivisione a un calibro,

Definizione di Integrale

- ***Abbiamo ora tutti i concetti necessari:***
  - calibri
  - e adattamento di una suddivisione a un calibro,

  per dare la definizione formale dell'integrale secondo Henstock-Kurzweil.

- ***Abbiamo ora tutti i concetti necessari:***
  - calibri
  - e adattamento di una suddivisione a un calibro,

  per dare la definizione formale dell'integrale secondo Henstock-Kurzweil.

  - Lo faremo in stretto parallelo con la definizione secondo Riemann

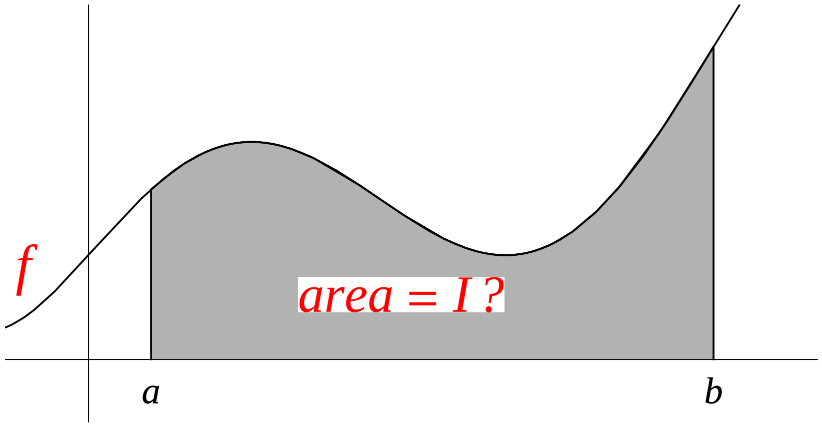
- ***Abbiamo ora tutti i concetti necessari:***
  - calibri
  - e adattamento di una suddivisione a un calibro,

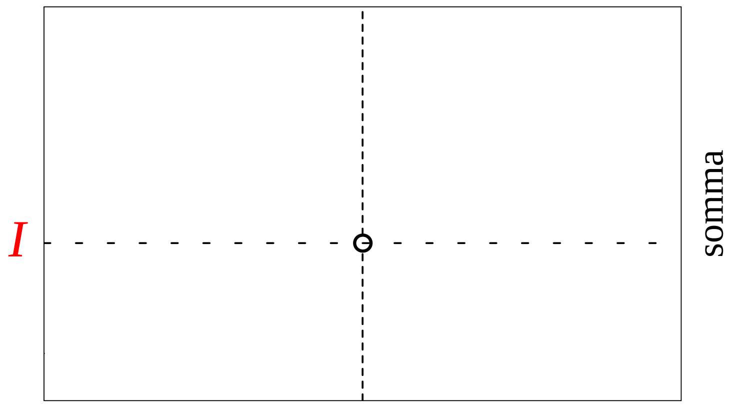
  per dare la definizione formale dell'integrale secondo Henstock-Kurzweil.
  - Lo faremo in stretto parallelo con la definizione secondo Riemann
    - **con la differenza che il vecchio piano** $(\mathrm{amp}(\Pi), S(f, \Pi))$, **ora perde la prima coordinata.**

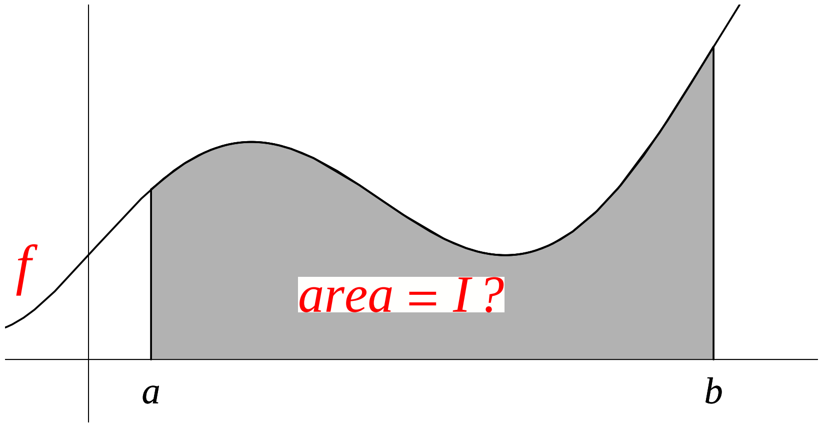
- ***Abbiamo ora tutti i concetti necessari:***
  - calibri
  - e adattamento di una suddivisione a un calibro,

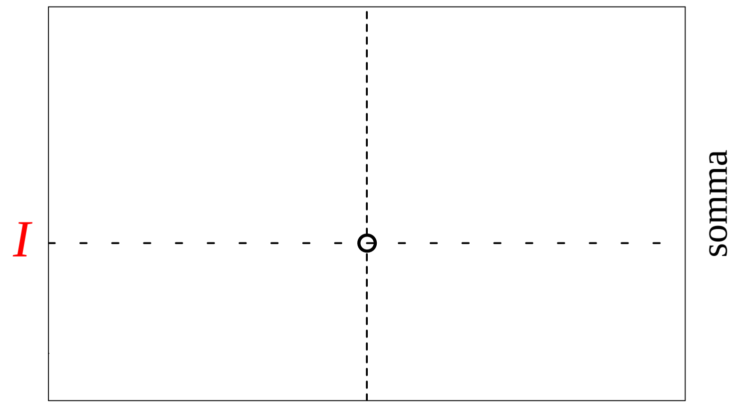
  per dare la definizione formale dell'integrale secondo Henstock-Kurzweil.

  - Lo faremo in stretto parallelo con la definizione secondo Riemann
    - **con la differenza che il vecchio piano** $(\mathrm{amp}(\Pi), S(f, \Pi))$**, ora perde la prima coordinata.**
    - **Comunque lasceremo l'asse delle somme di Riemann** $S(f, \Pi)$ **in verticale.**

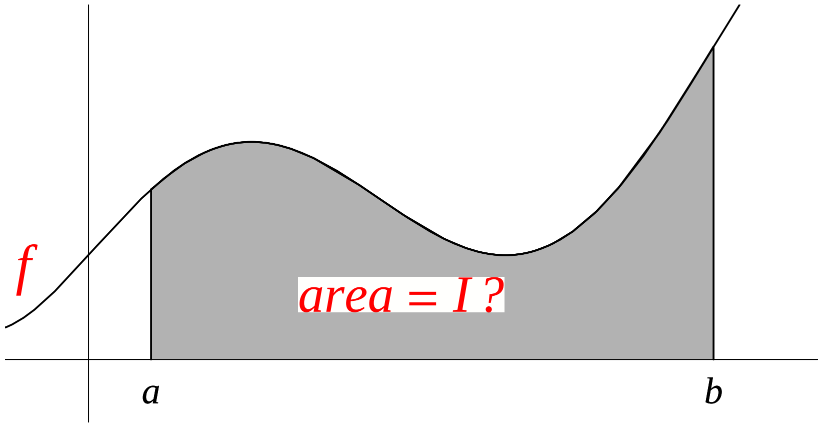

f
area = I ?
a
b

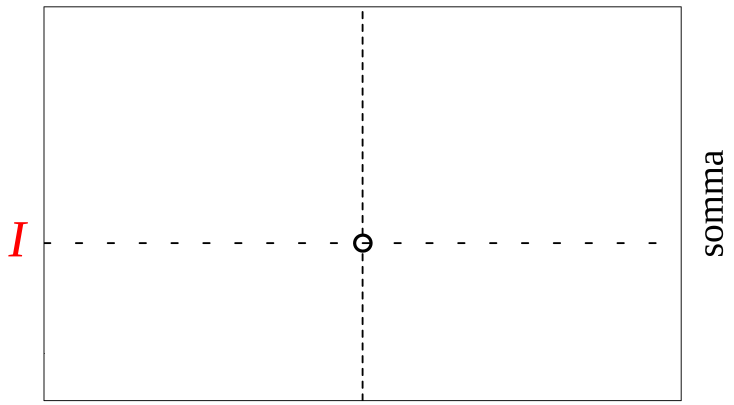

I
somma



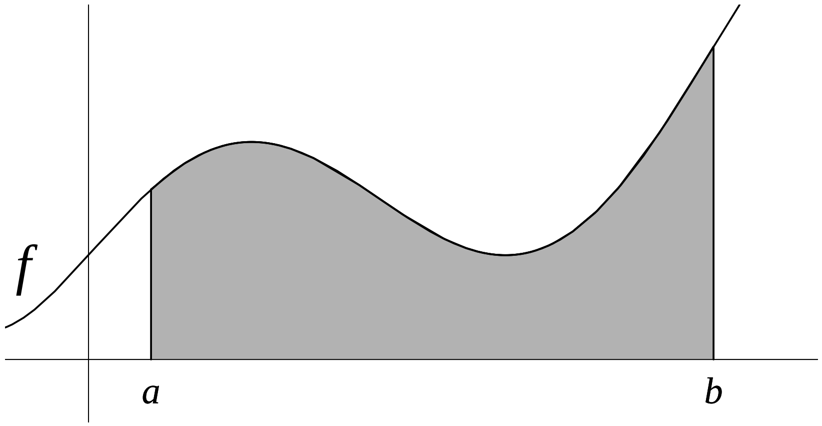


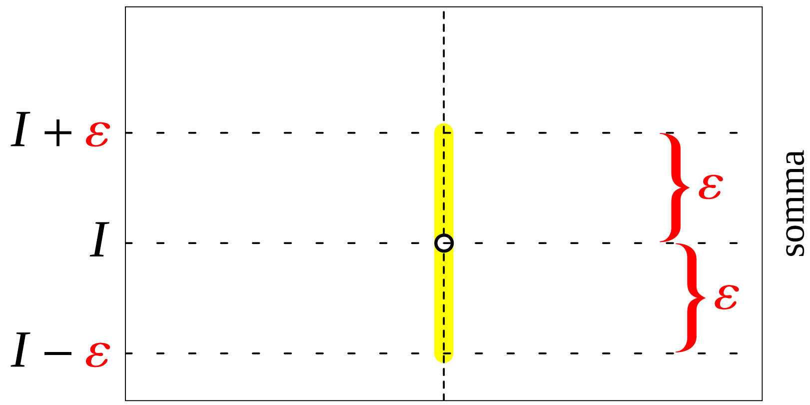
- Data una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,



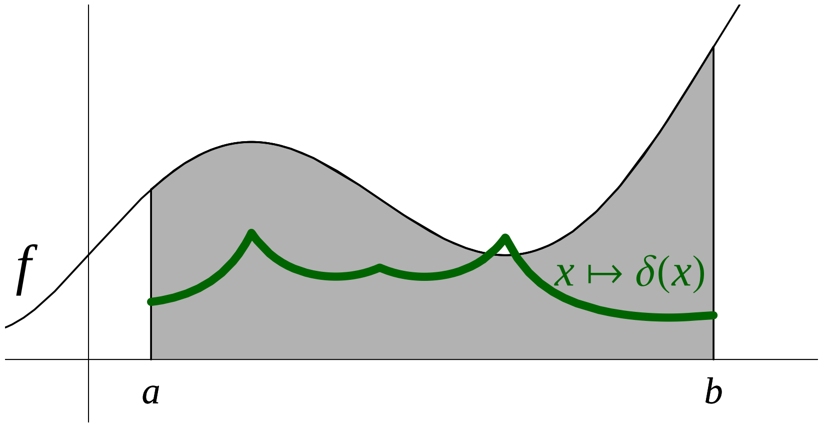


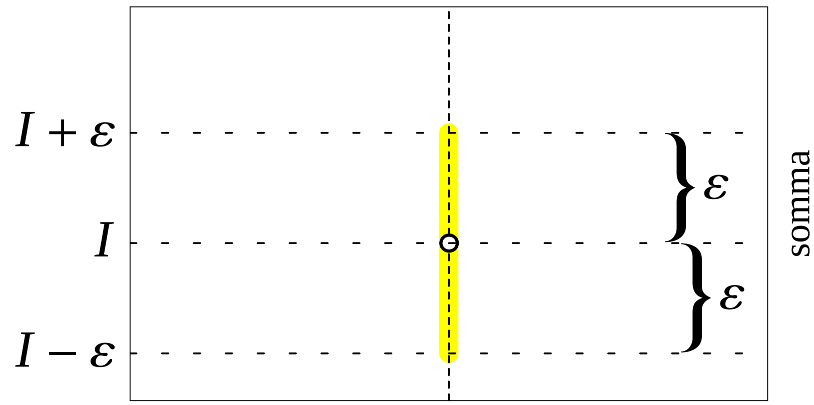
- Data una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,
- si dice che f è *integrabile con integrale* I se:



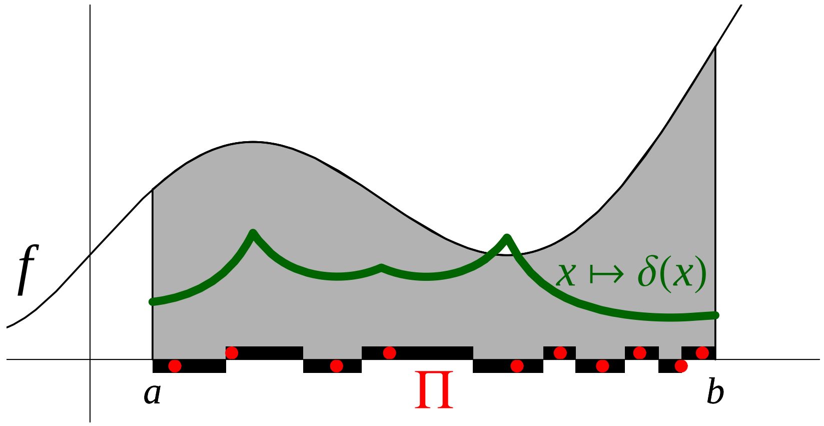


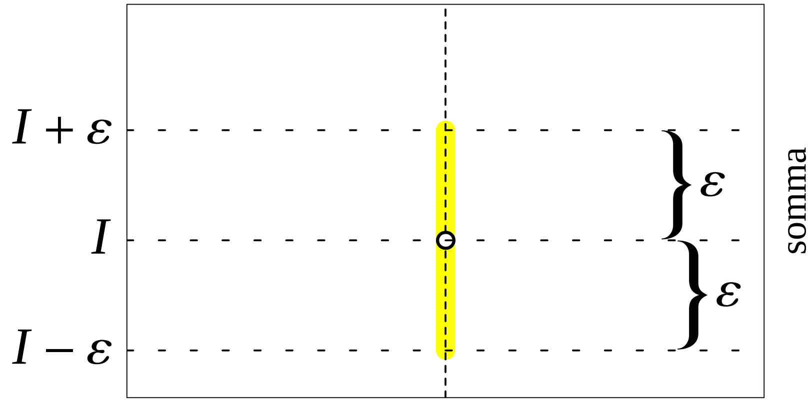
- Data una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,
- si dice che f è *integrabile con integrale* I se:
  - **per ogni** $\varepsilon > 0$



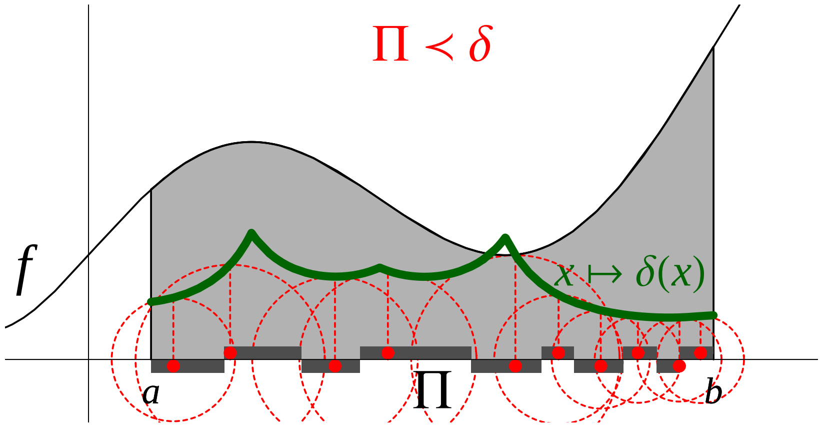


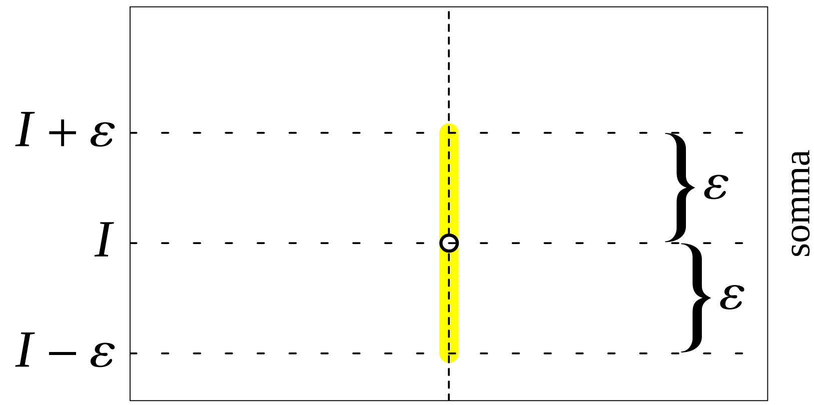
- Data una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,
- si dice che f *è integrabile con integrale* I se:
  - **per ogni** $\varepsilon > 0$
  - **esiste un calibro** $\delta(x) > 0$



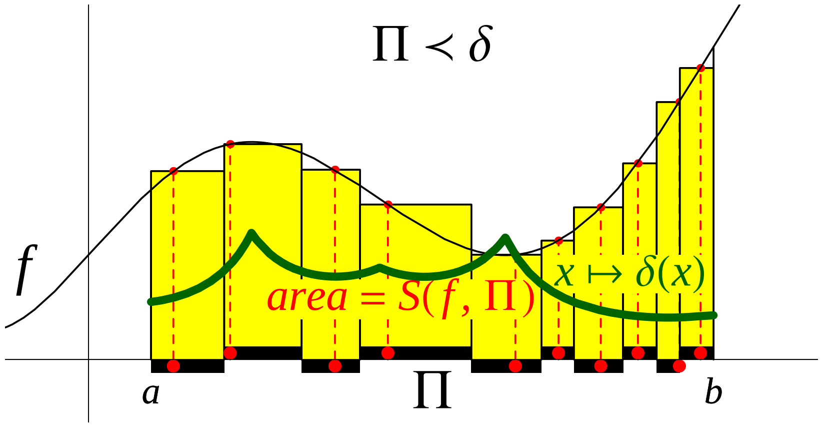


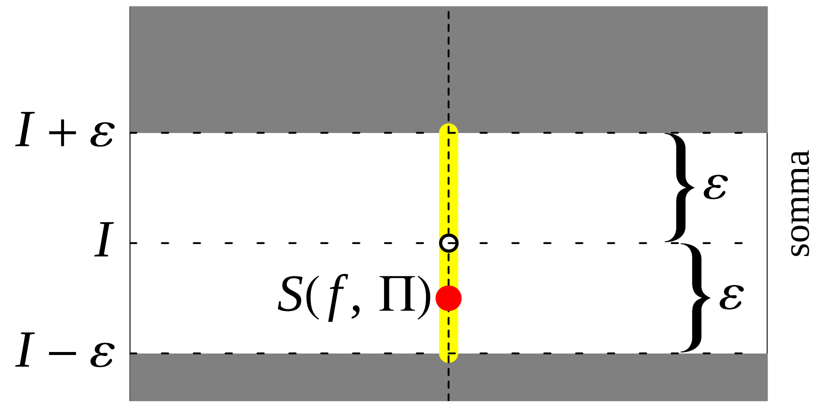
- Data una $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e un numero $I\in\mathbb{R}$,
- si dice che f è *integrabile con integrale* I se:
  - **per ogni** $\varepsilon>0$
  - **esiste un calibro** $\delta(x)>0$ **tale che:**
    - per ogni suddivisione marcata Π di $[a,b]$





- Data una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,
- si dice che f *è integrabile con integrale* I se:
  - **per ogni** $\varepsilon > 0$
  - **esiste un calibro** $\delta(x) > 0$ **tale che:**
    - per ogni suddivisione marcata Π di $[a, b]$
    - se $\Pi \prec \delta$





- Data una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$,
- si dice che f è *integrabile con integrale* I se:
  - **per ogni** $\varepsilon > 0$
  - **esiste un calibro** $\delta(x) > 0$ **tale che:**
    - per ogni suddivisione marcata Π di $[a, b]$
    - se $\Pi \prec \delta$ allora $\left|S(f, \Pi) - I\right| < \varepsilon$.

Confronto

- *Ricordiamoci la nostra idea guida:*

Confronto

- ***Ricordiamoci la nostra idea guida:***
  - se la suddivisioni Π è abbastanza fine

Confronto

- ***Ricordiamoci la nostra idea guida:***
  - se la suddivisioni Π è abbastanza fine
  - la somma $S(f, \Pi)$ è vicina al valore "vero".

Confronto

- ***Ricordiamoci la nostra idea guida:***
  - se la suddivisioni Π è abbastanza fine
  - la somma $S(f, \Pi)$ è vicina al valore "vero".
- ***Gli integrali di Riemann e di Calibro differiscono per il significato tecnico da dare a "Π è abbastanza fine"***

- ***Ricordiamoci la nostra idea guida:***
  - se la suddivisioni Π è abbastanza fine
  - la somma $S(f, \Pi)$ è vicina al valore "vero".
- ***Gli integrali di Riemann e di Calibro differiscono per il significato tecnico da dare a "Π è abbastanza fine"***
  - nell'integrale secondo Riemann vuol dire che "amp(Π) è minore di un opportuno numero $\delta > 0$".

- ***Ricordiamoci la nostra idea guida:***
  - se la suddivisioni Π è abbastanza fine
  - la somma $S(f, \Pi)$ è vicina al valore “vero”.
- ***Gli integrali di Riemann e di Calibro differiscono per il significato tecnico da dare a “Π è abbastanza fine”***
  - nell’integrale secondo Riemann vuol dire che “amp(Π) è minore di un opportuno numero $\delta > 0$”.
  - Nell’integrale di calibro, vuol dire che “Π è adattata a un opportuno calibro $\delta(x) > 0$”.

Confronto

- ***Ricordiamoci i problemi che avevamo evidenziato per l'integrale di Riemann ragionando su*** $1/\sqrt{x}$***:***

- ***Ricordiamoci i problemi che avevamo evidenziato per l'integrale di Riemann ragionando su $1/\sqrt{x}$:***
  - le ampiezze $a_i - a_{i-1}$ andrebbero prese più piccole nelle zone dove f varia velocemente.

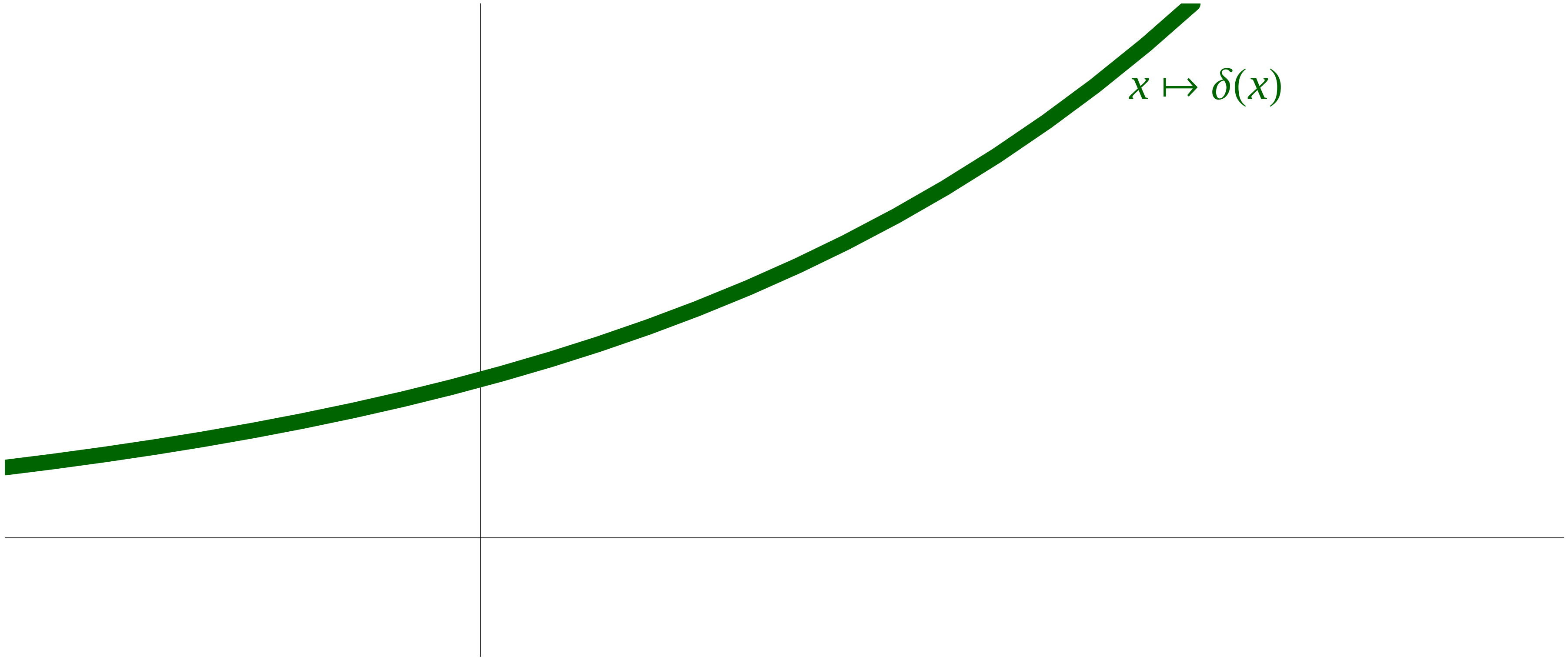
- ***Ricordiamoci i problemi che avevamo evidenziato per l'integrale di Riemann ragionando su $1/\sqrt{x}$:***
  - le ampiezze $a_i - a_{i-1}$ andrebbero prese più piccole nelle zone dove f varia velocemente.
  - quando $f(x)$ diverge per $x \to \bar{x}$, la somma $S(f, \Pi)$ può sballare se si sceglie un punto marcato x_i vicino a $\bar{x}$;

Confronto

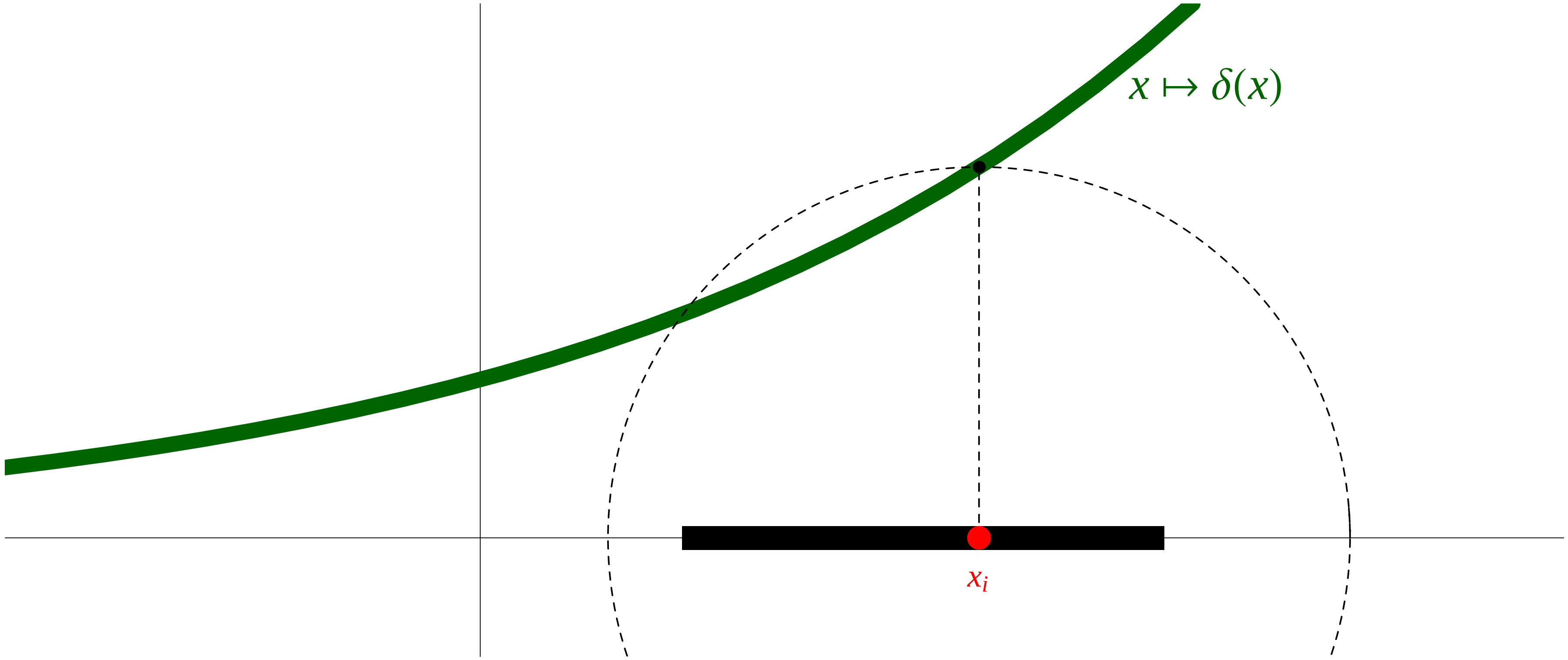
- ***Ricordiamoci i problemi che avevamo evidenziato per l'integrale di Riemann ragionando su*** $1/\sqrt{x}$***:***
  - le ampiezze $a_i - a_{i-1}$ andrebbero prese più piccole nelle zone dove f varia velocemente.
  - quando $f(x)$ diverge per $x \to \bar{x}$, la somma $S(f, \Pi)$ può sballare se si sceglie un punto marcato x_i vicino a $\bar{x}$;
- ***Vediamo ora come l'integrale di calibro non presenti queste difficoltà.***

Regolazione ampiezze

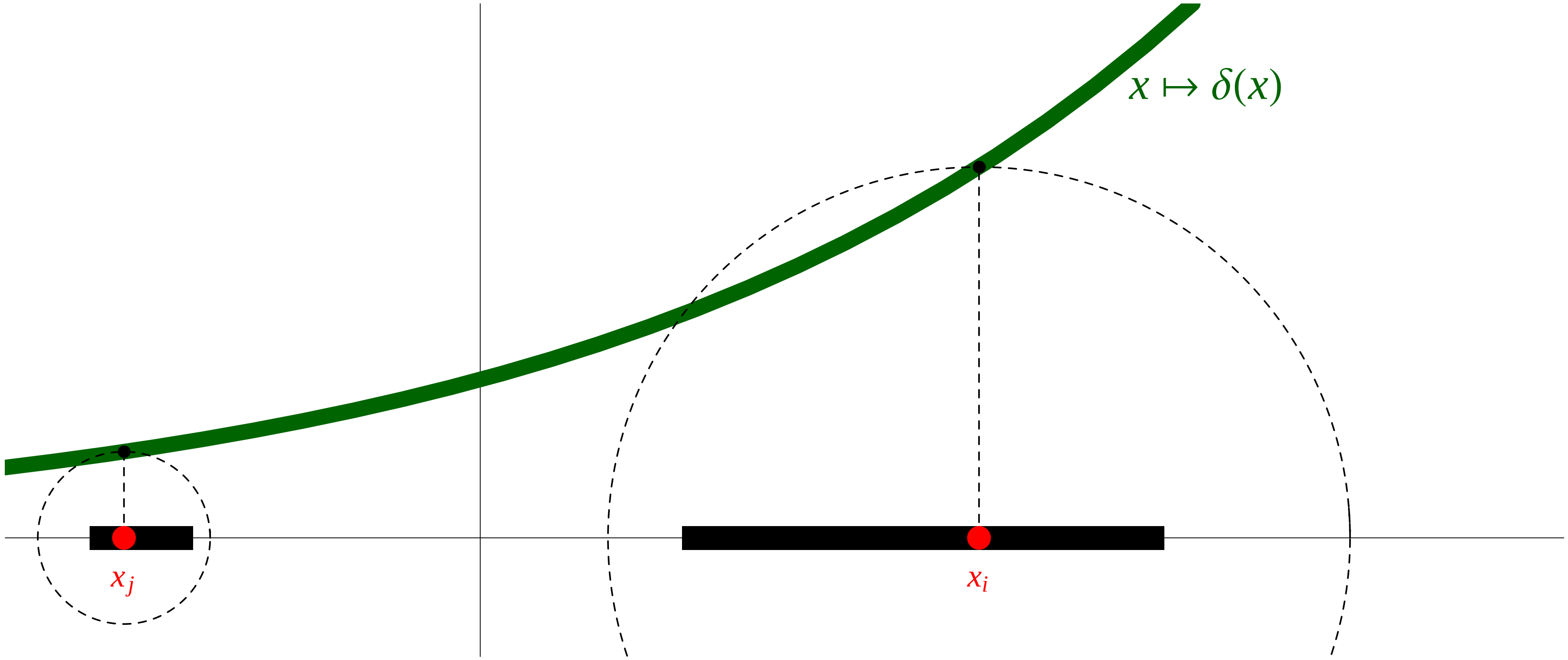
Regolazione ampiezze



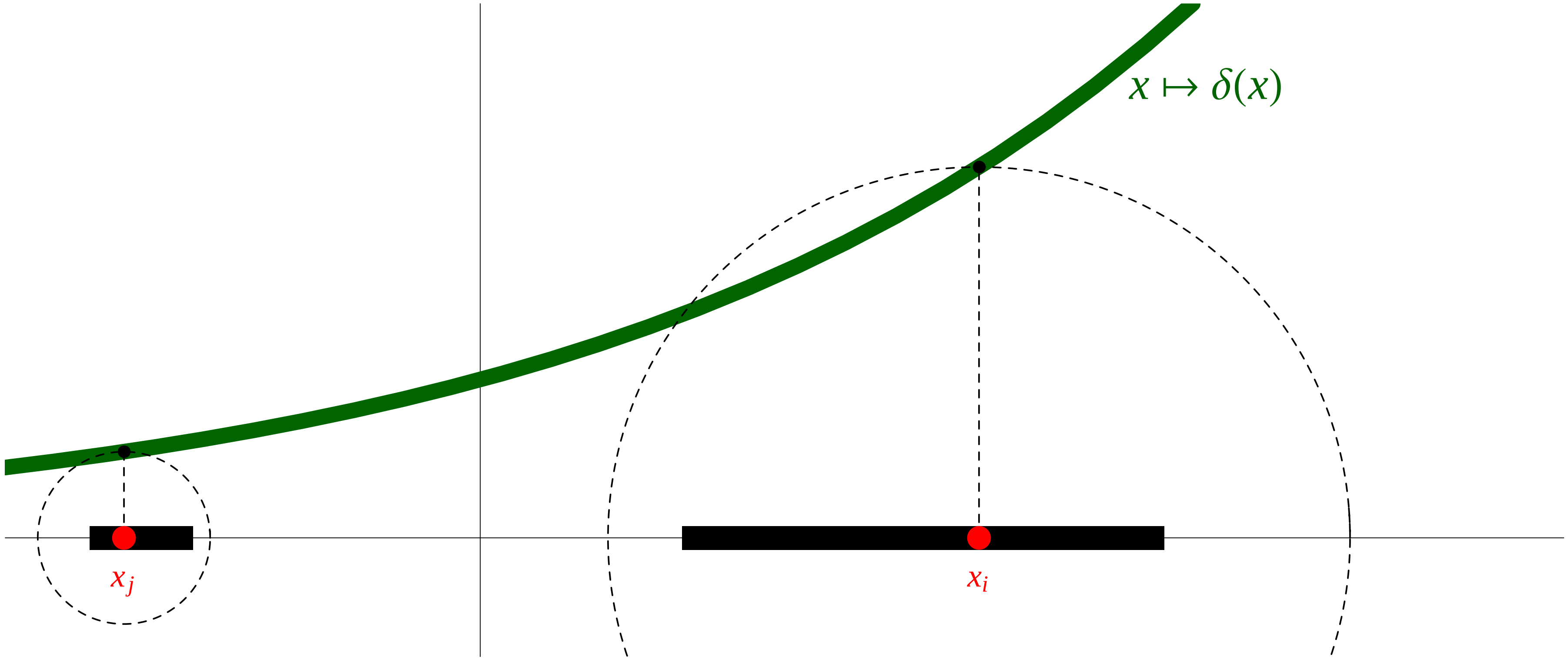
- Prendiamo un calibro $\delta(x)$ che è più piccolo in certe zone e più grande in altre.



- Dove $\delta(x)$ è grande l'intervallino può essere grande.

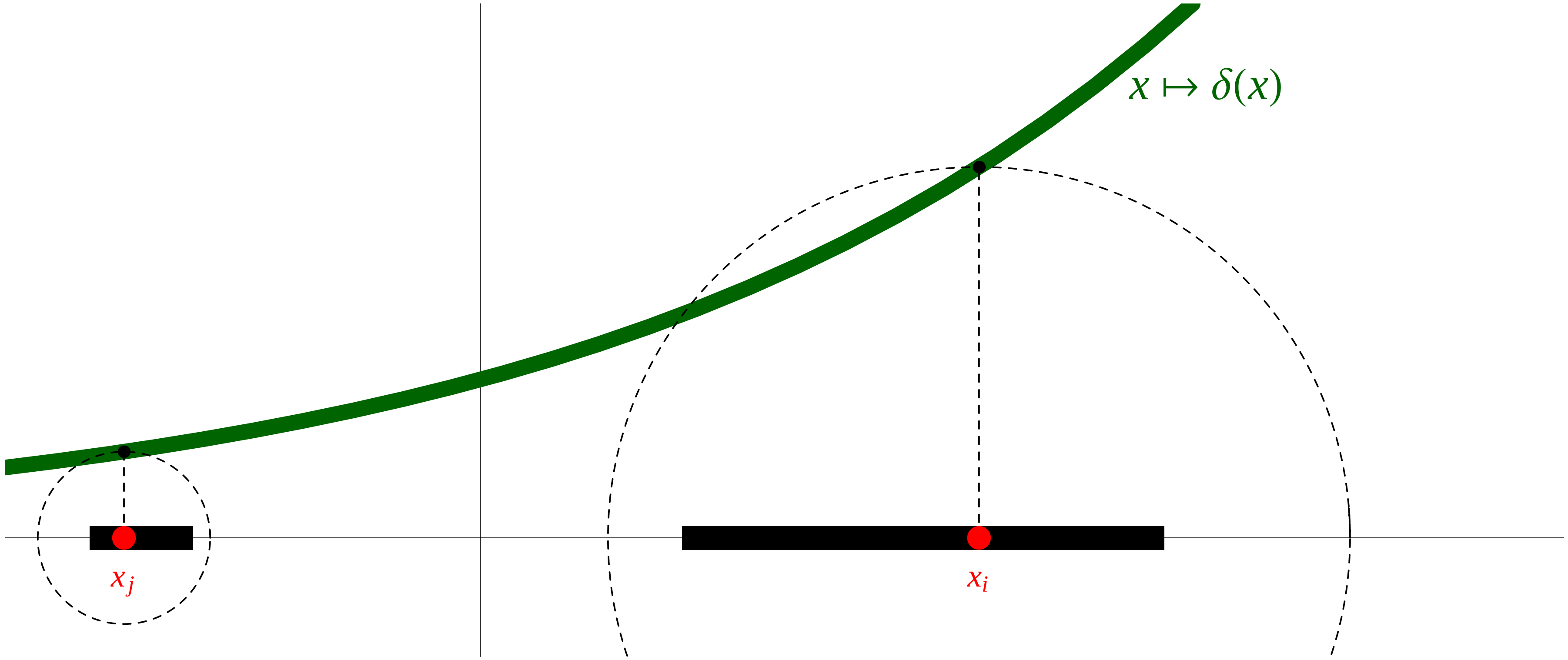


- Dove $\delta(x)$ è grande l'intervallino può essere grande.
- Dove $\delta(x)$ è piccolo l'intervallino dev'essere piccolo.



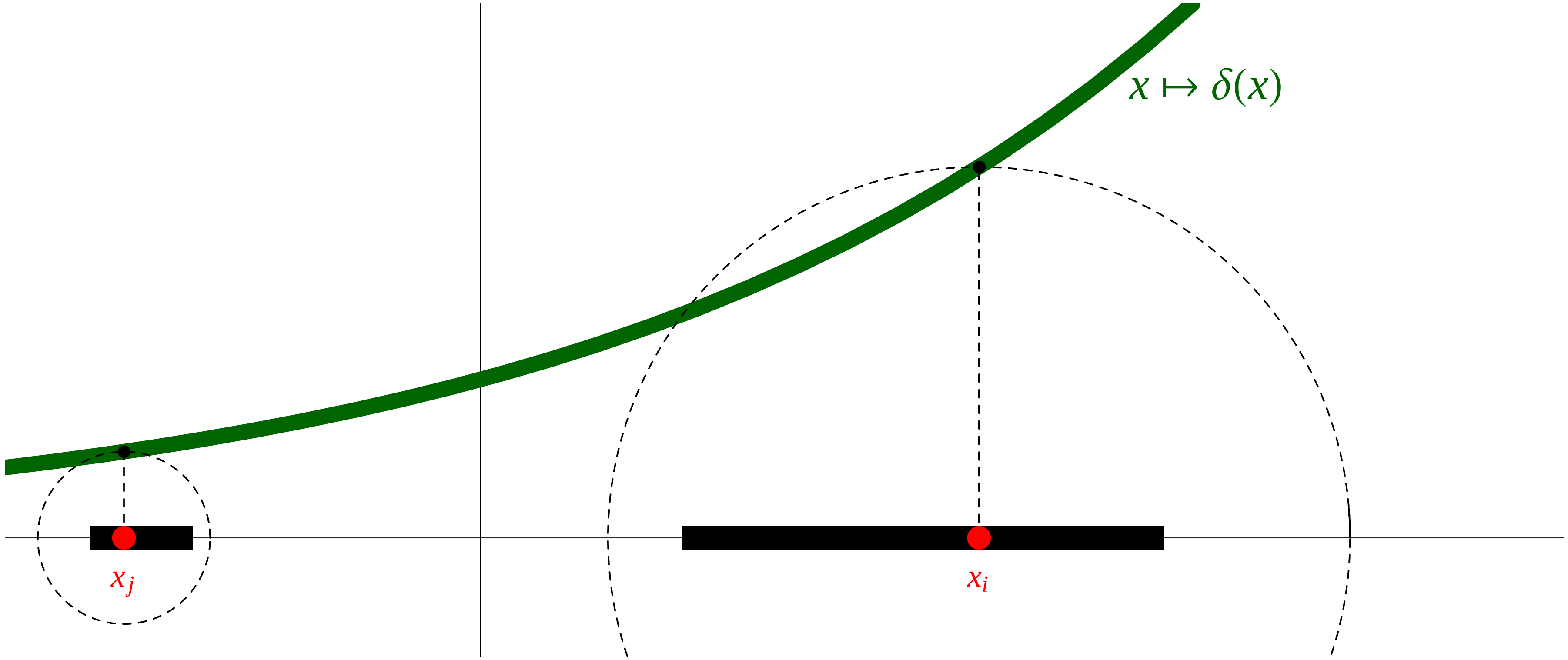
- Scegliendo bene il calibro $\delta(x)$

Regolazione ampiezze



- Scegliendo bene il calibro $\delta(x)$
  - **per le Π che sono $\prec \delta$**

Regolazione ampiezze



- Scegliendo bene il calibro $\delta(x)$
  - **per le Π che sono $\prec \delta$**
  - **le ampiezze $a_i - a_{i-1}$ sono regolate diversamente in diverse zone.**

Calibri e p.ti marcati

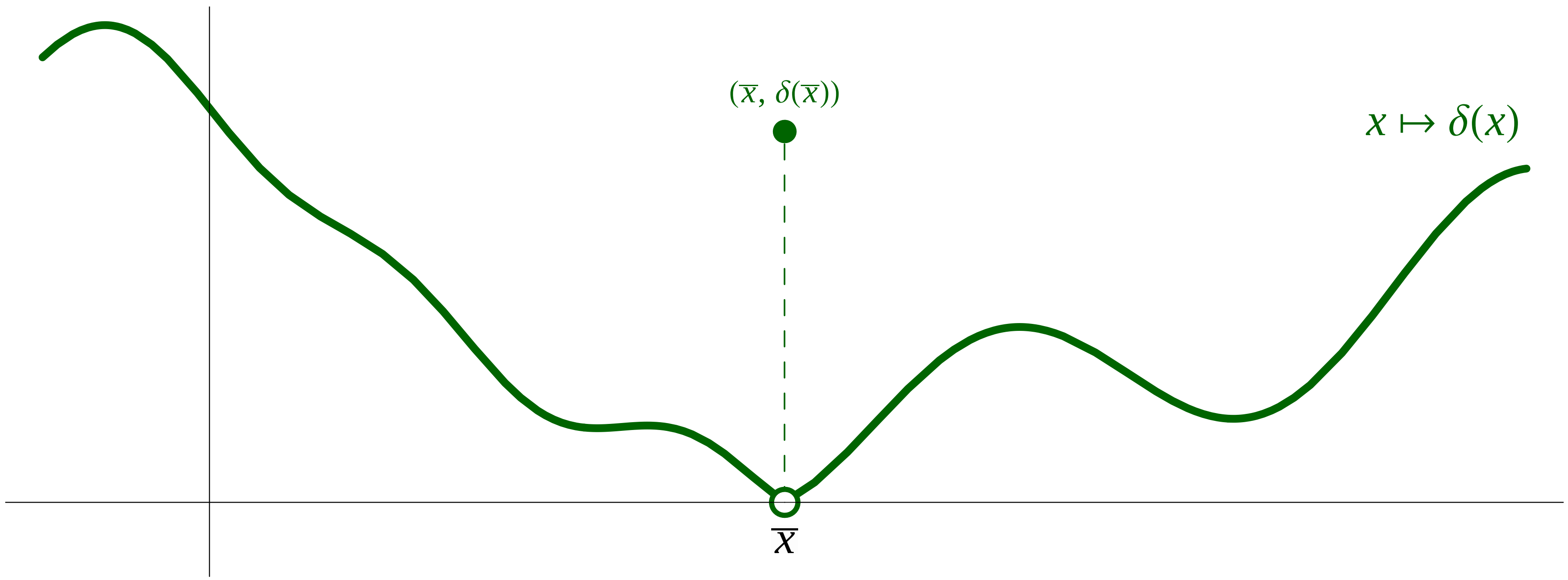
Calibri e p.ti marcati

- *Meno ovvio è come i calibri possano regolare la posizione dei punti marcati* x_i.

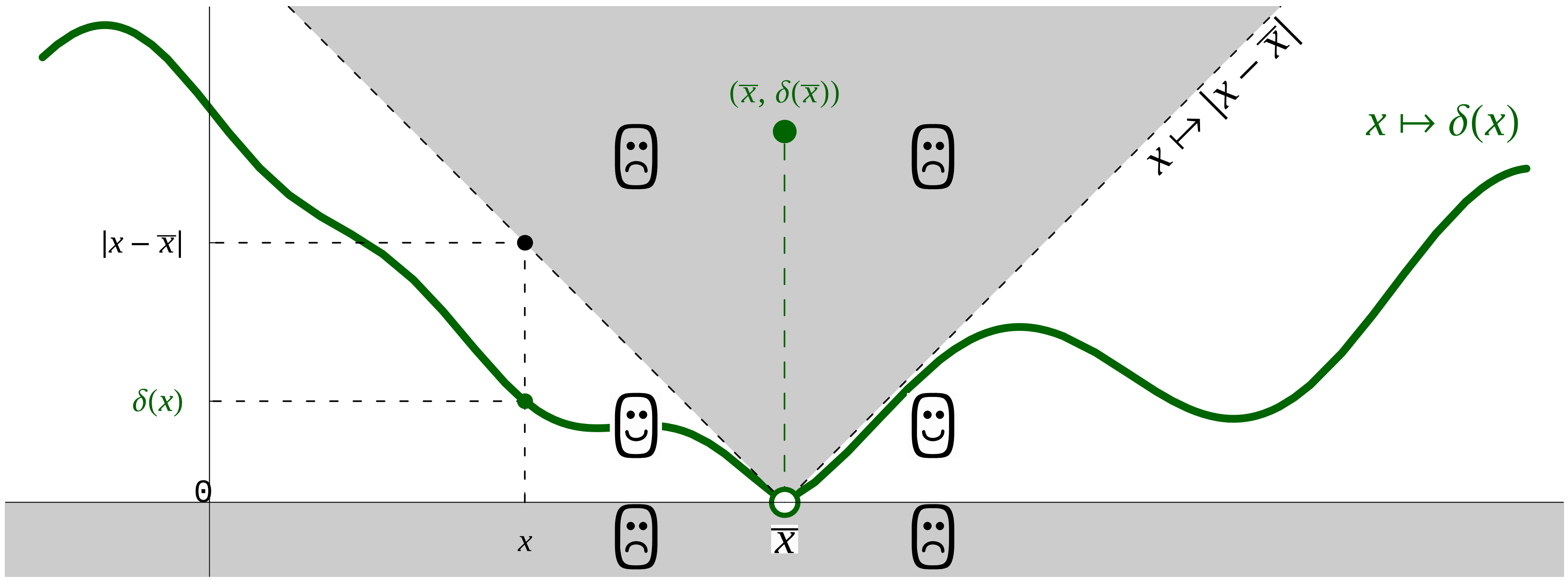
Calibri e p.ti marcati

- ***Meno ovvio è come i calibri possano regolare la posizione dei punti marcati*** x_i**.**
  - Meno ovvio, ma non difficile:

- ***Meno ovvio è come i calibri possano regolare la posizione dei punti marcati*** x_i**.**
  - Meno ovvio, ma non difficile:
  - si tratta di un trucco, riassunto dal seguente enunciato.



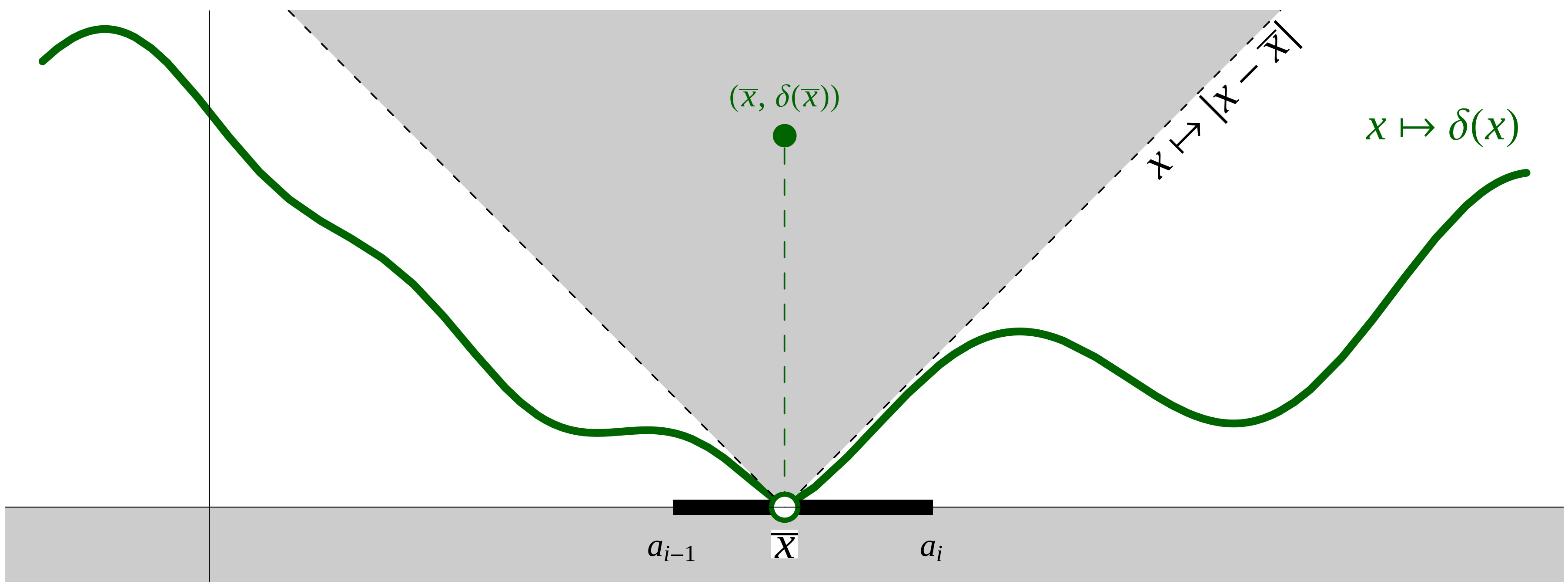
- **Proposizione.** Sono dati un calibro $\delta(x)$, un punto $\bar{x}$ e una suddivisione $\Pi \prec \delta$.



□ **Proposizione.** Sono dati un calibro $\delta(x)$, un punto $\bar{x}$ e una suddivisione $\Pi \prec \delta$.

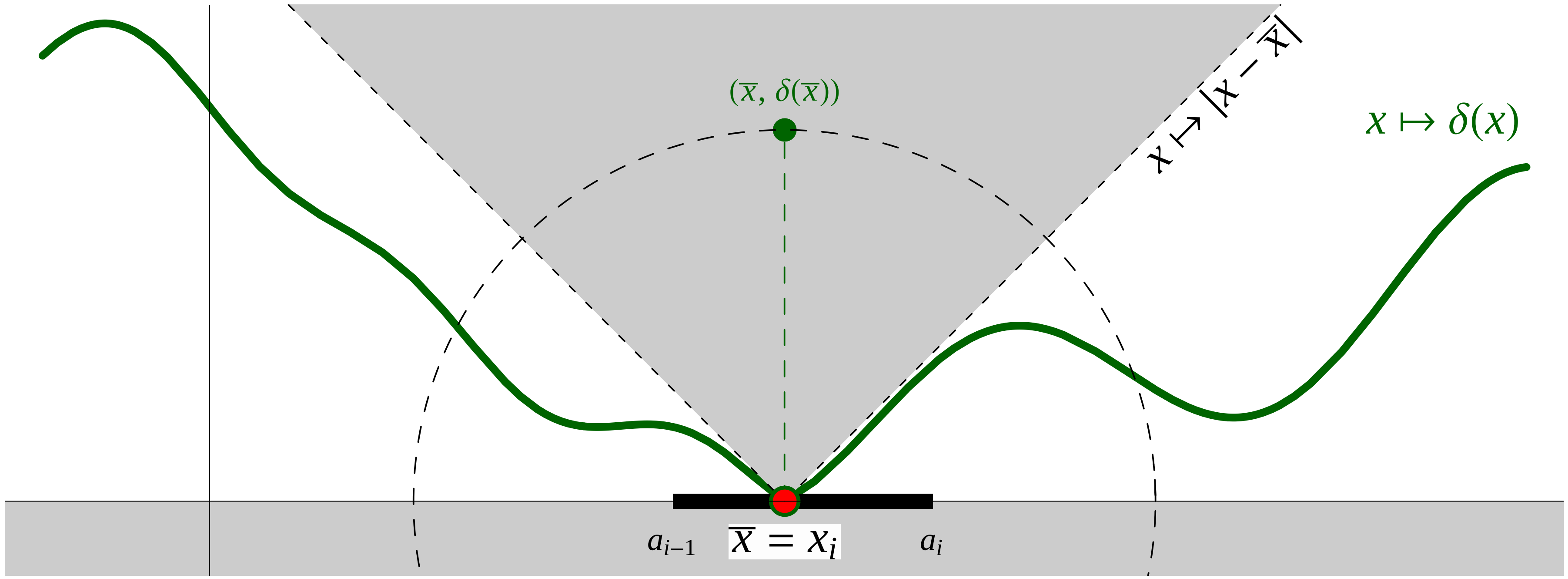
- **Supponiamo che** $0 < \delta(x) < |x-\bar{x}|$ $\forall x \neq \bar{x}$.

Calibri e p.ti marcati



□ Proposizione. Sono dati un calibro $\delta(x)$, un punto $\bar{x}$ e una suddivisione $\Pi \prec \delta$.

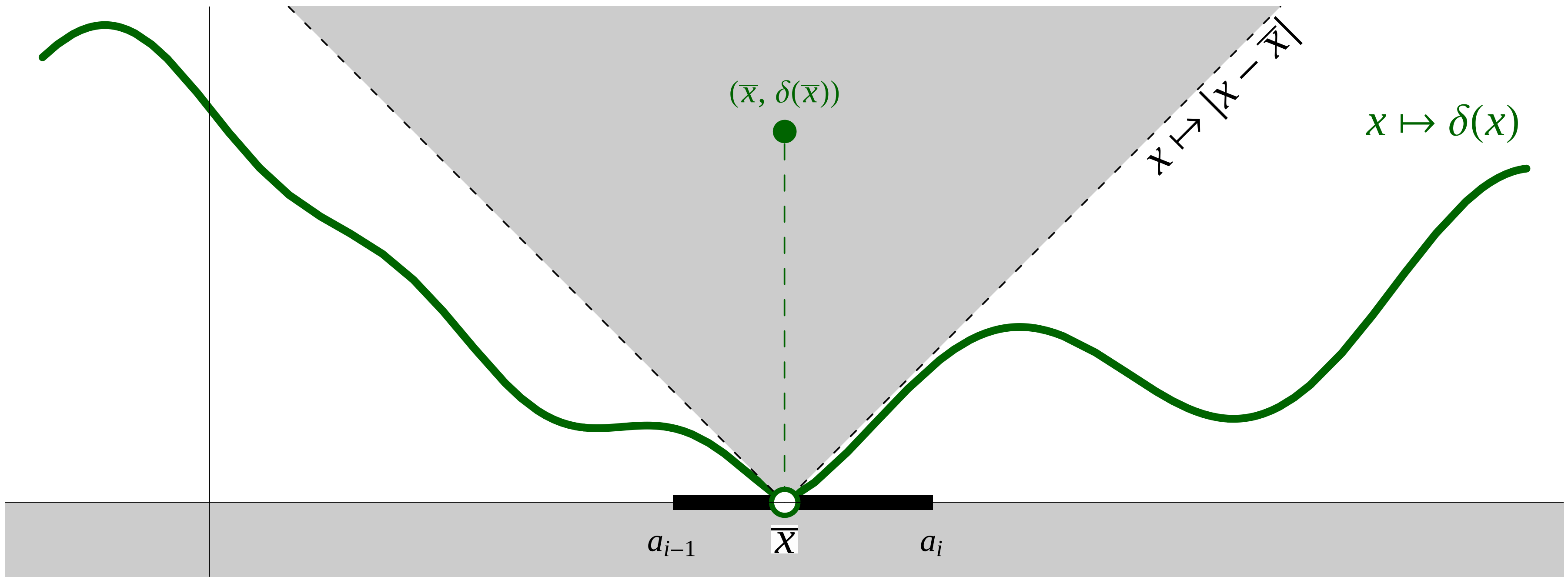
- **Supponiamo che** $0 < \delta(x) < |x - \bar{x}|$ $\forall x \neq \bar{x}$.
- **Sia** $[a_{i-1}, a_i]$ **un intervallino di** Π **che contiene** $\bar{x}$.



□ **Proposizione.** Sono dati un calibro $\delta(x)$, un punto $\bar{x}$ e una suddivisione $\Pi \prec \delta$.

- **Supponiamo che** $0 < \delta(x) < |x - \bar{x}|$ $\forall x \neq \bar{x}$.
- **Sia** $[a_{i-1}, a_i]$ **un intervallino di** Π **che contiene** $\bar{x}$.

○ Allora $\bar{x} = x_i$.

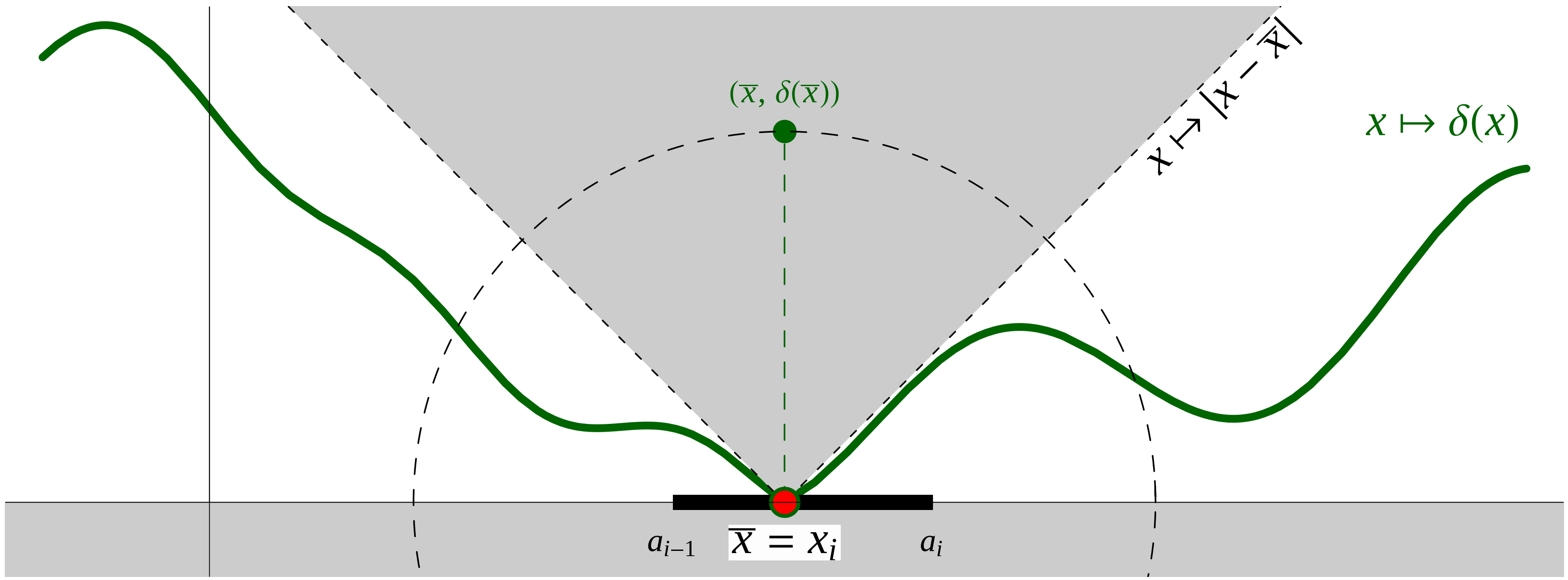


□ Proposizione. Sono dati un calibro $\delta(x)$, un punto $\bar{x}$ e una suddivisione $\Pi \prec \delta$.

- **Supponiamo che** $0 < \delta(x) < |x - \bar{x}|$ $\forall x \neq \bar{x}$.

∘ (In altre parole) Allora

$$\bar{x} \in [a_{i-1}, a_i]$$

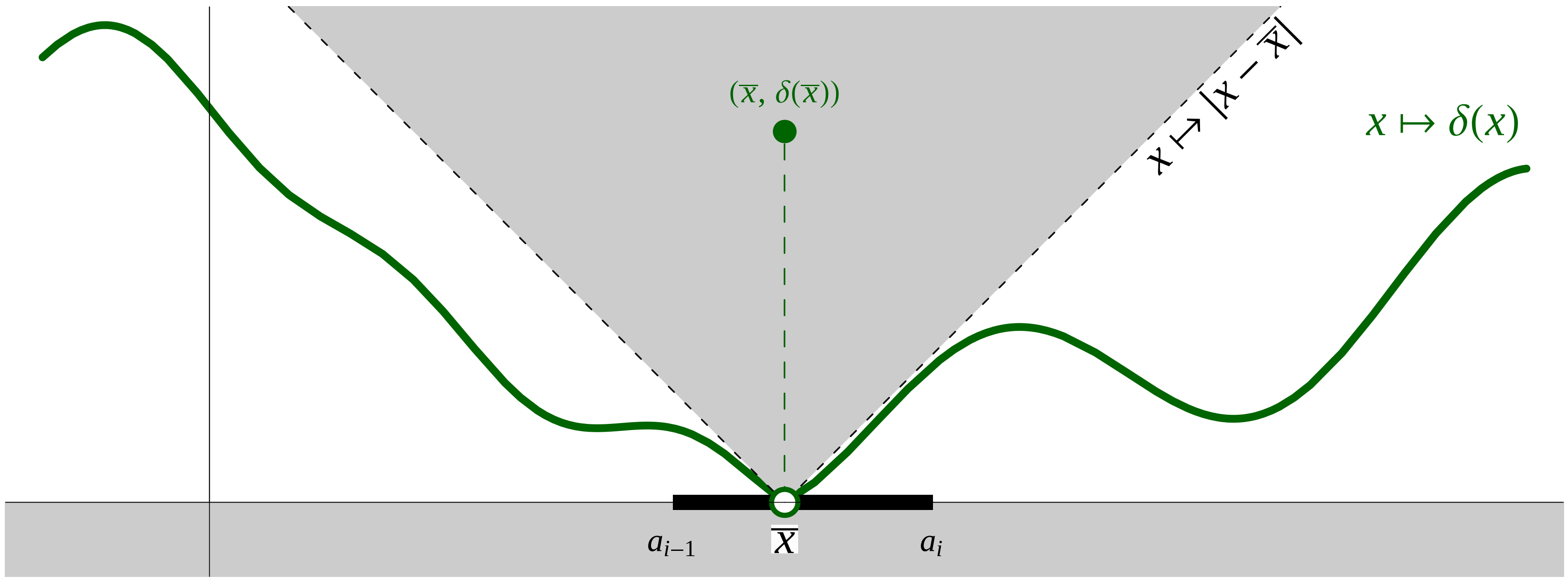


□ Proposizione. Sono dati un calibro $\delta(x)$, un punto $\bar{x}$ e una suddivisione $\Pi \prec \delta$.

- **Supponiamo che** $0 < \delta(x) < |x - \bar{x}|$ $\forall x \neq \bar{x}$.

○ (In altre parole) Allora

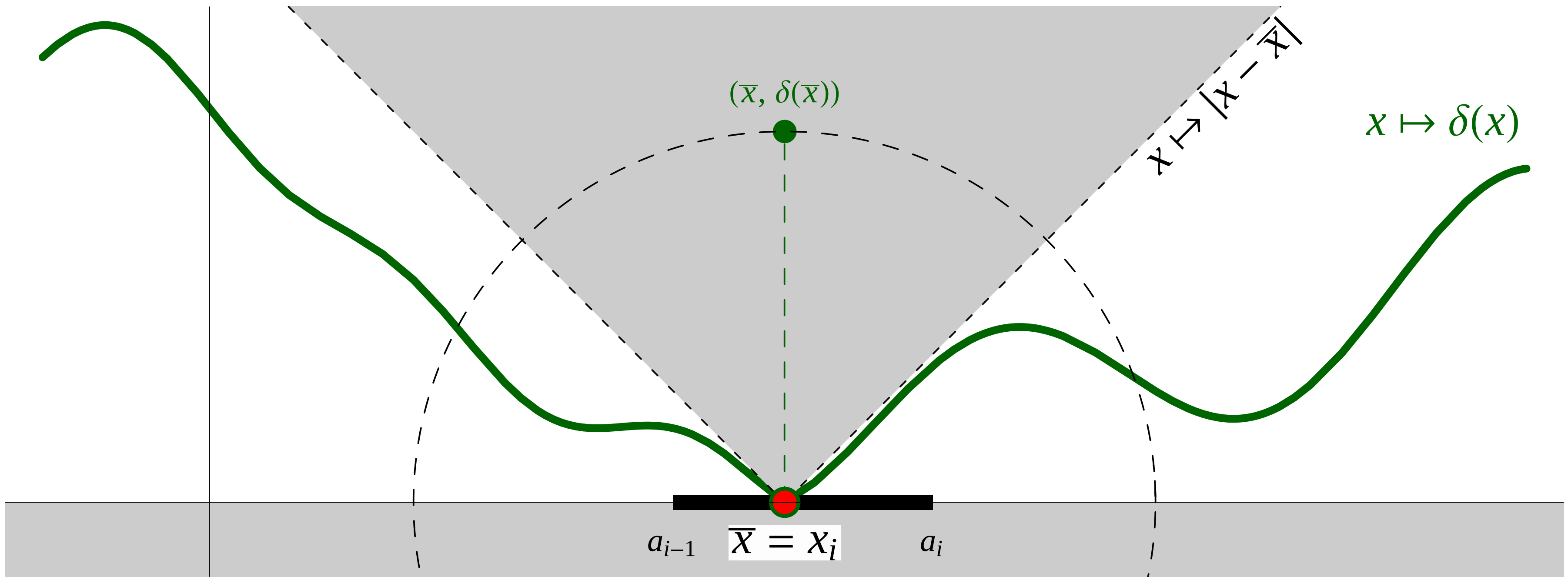
$$\bar{x} \in [a_{i-1}, a_i] \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x_i.$$



□ Proposizione. Sono dati un calibro $\delta(x)$, un punto $\bar{x}$ e una suddivisione $\Pi \prec \delta$.

- **Supponiamo che** $0 < \delta(x) < |x - \bar{x}|$ $\forall x \neq \bar{x}$.

○ (In altre parole ancora) Un intervallino contenente $\bar{x}$



□ Proposizione. Sono dati un calibro $\delta(x)$, un punto $\bar{x}$ e una suddivisione $\Pi \prec \delta$.

- **Supponiamo che** $0 < \delta(x) < |x - \bar{x}|$ $\forall x \neq \bar{x}$.

○ (In altre parole ancora) Un intervallino contenente $\bar{x}$ ha necessariamente $\bar{x}$ come punto marcato.

- Abbiamo detto ≪Un intervallino contenente $\bar{x}$≫. Ce ne potrebbe essere più di uno? (Esercizio).

- Abbiamo detto ≪*Un* intervallino contenente $\bar{x}$≫. Ce ne potrebbe essere più di uno? (Esercizio).

□ Dimostrazione: Dire che

$$\bar{x} \in [a_{i-1}, a_i] \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x_i$$

- Abbiamo detto ≪*Un* intervallino contenente $\bar{x}$≫. Ce ne potrebbe essere più di uno? (Esercizio).

□ Dimostrazione: Dire che

$$\bar{x} \in [a_{i-1}, a_i] \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x_i$$

equivale a dire che

$$\bar{x} \notin [a_{i-1}, a_i] \quad \Leftarrow \quad \bar{x} \neq x_i$$

Calibri e p.ti marcati

- Abbiamo detto ≪*Un* intervallino contenente $\bar{x}$≫. Ce ne potrebbe essere più di uno? (Esercizio).

□ Dimostrazione: Dire che

$$\bar{x} \in [a_{i-1}, a_i] \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x_i$$

equivale a dire che

$$\bar{x} \notin [a_{i-1}, a_i] \quad \Leftarrow \quad \bar{x} \neq x_i$$

- Ci proponiamo quindi di dimostrare che

- Abbiamo detto ≪*Un* intervallino contenente $\bar{x}$≫. Ce ne potrebbe essere più di uno? (Esercizio).

□ Dimostrazione: Dire che

$$\bar{x} \in [a_{i-1}, a_i] \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x_i$$

equivale a dire che

$$\bar{x} \notin [a_{i-1}, a_i] \quad \Leftarrow \quad \bar{x} \neq x_i$$

- Ci proponiamo quindi di dimostrare che
  - **se un punto marcato non coincide con $\bar{x}$,**

- Abbiamo detto ≪*Un* intervallino contenente $\bar{x}$≫. Ce ne potrebbe essere più di uno? (Esercizio).

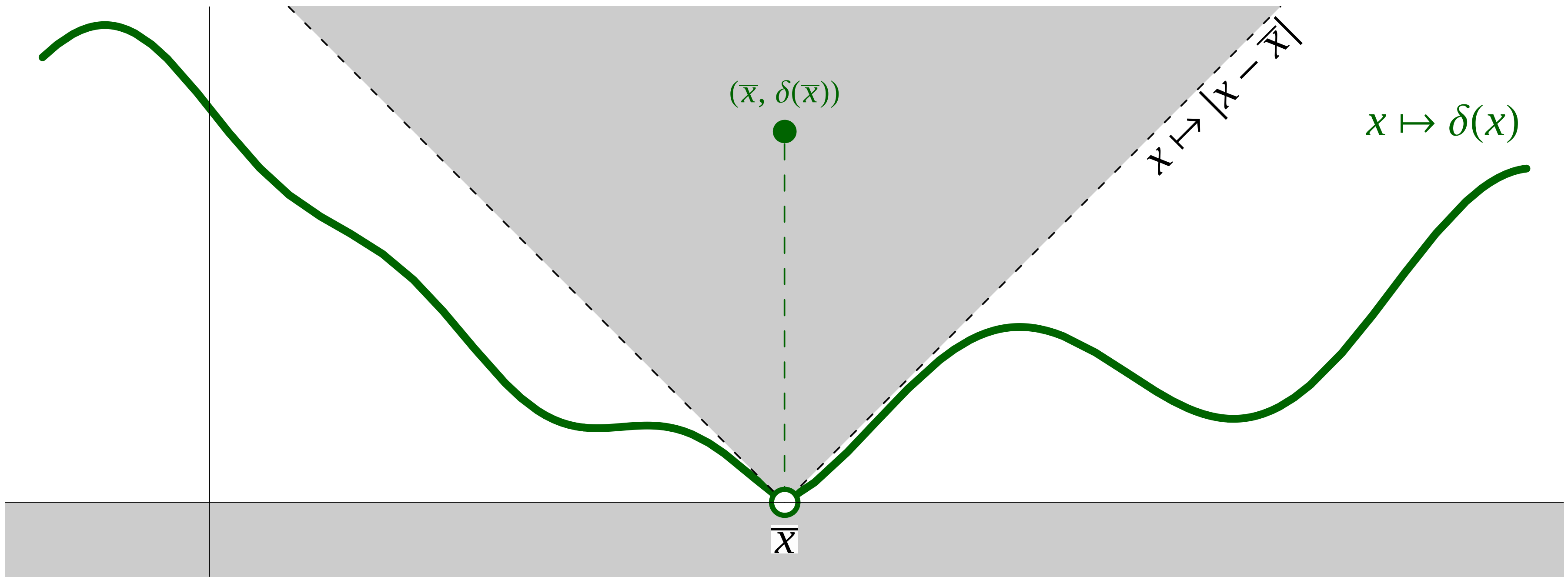
☐ Dimostrazione: Dire che

$$\bar{x} \in [a_{i-1}, a_i] \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x_i$$

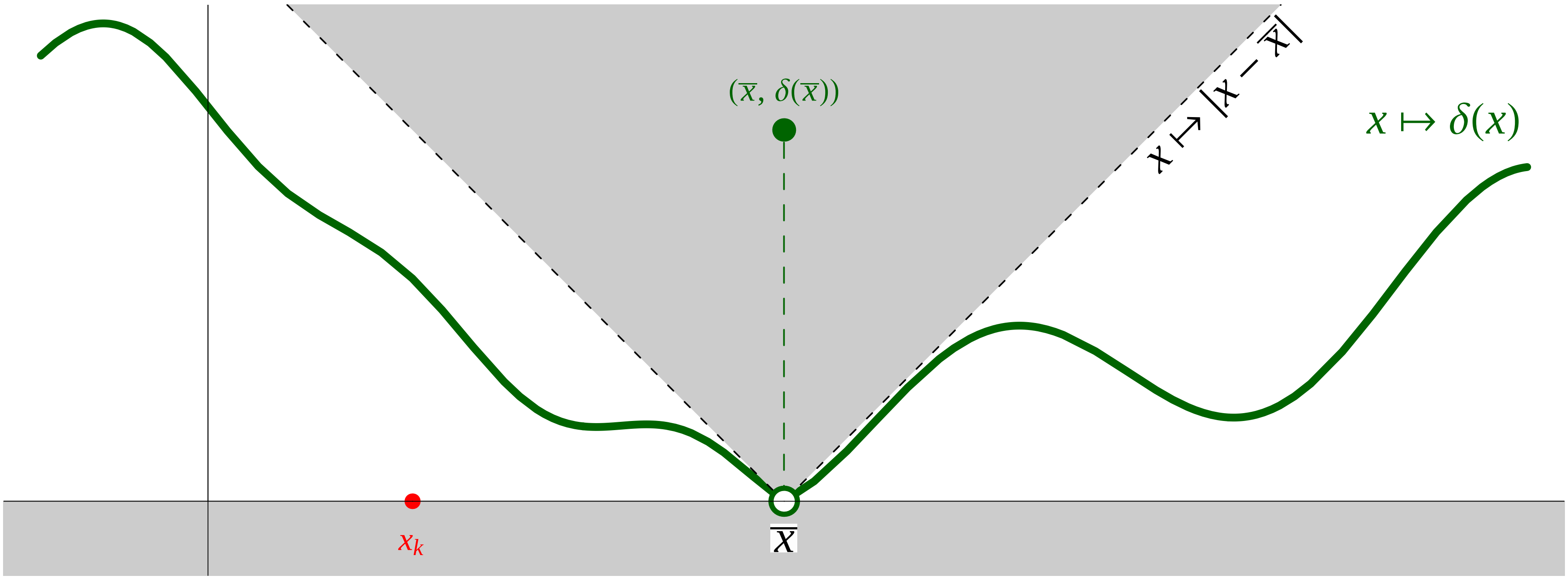
equivale a dire che

$$\bar{x} \notin [a_{i-1}, a_i] \quad \Leftarrow \quad \bar{x} \neq x_i$$

- Ci proponiamo quindi di dimostrare che
  - **se un punto marcato non coincide con $\bar{x}$,**
  - **allora il suo intervallino non contiene $\bar{x}$.**



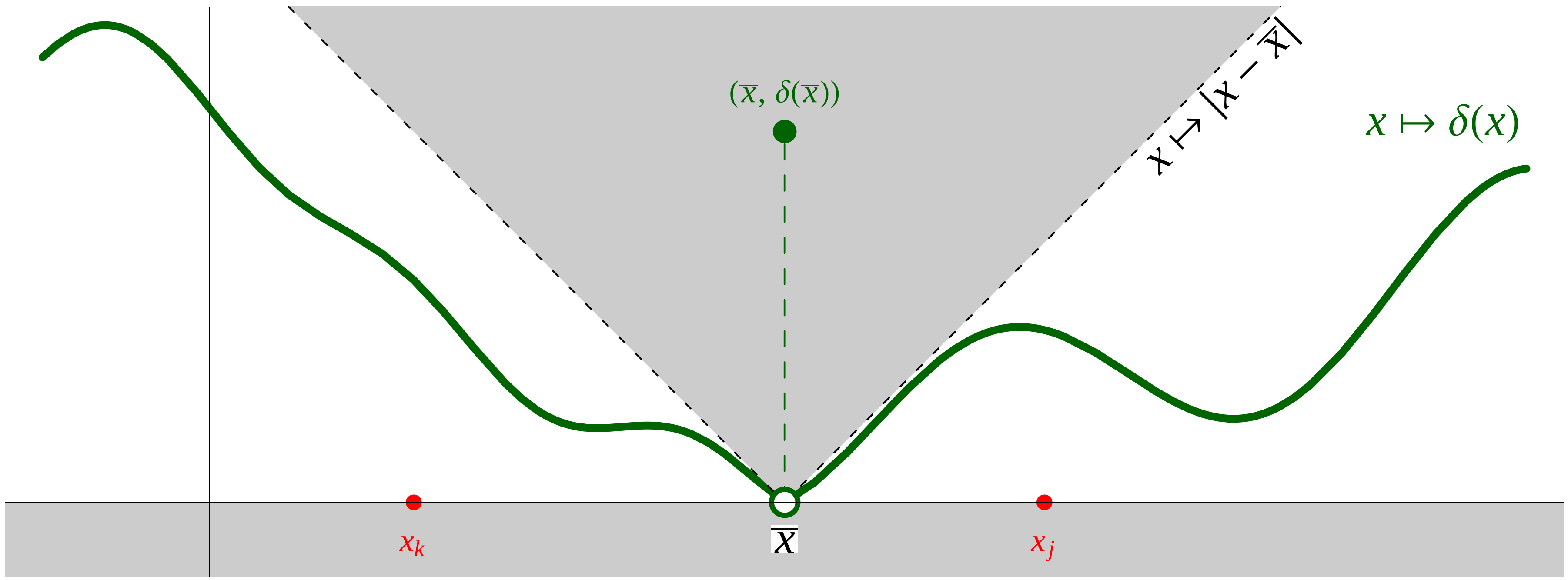
- Prendiamo dunque un punto marcato che non sia $\bar{x}$:



□ Prendiamo dunque un punto marcato che non sia $\bar{x}$:

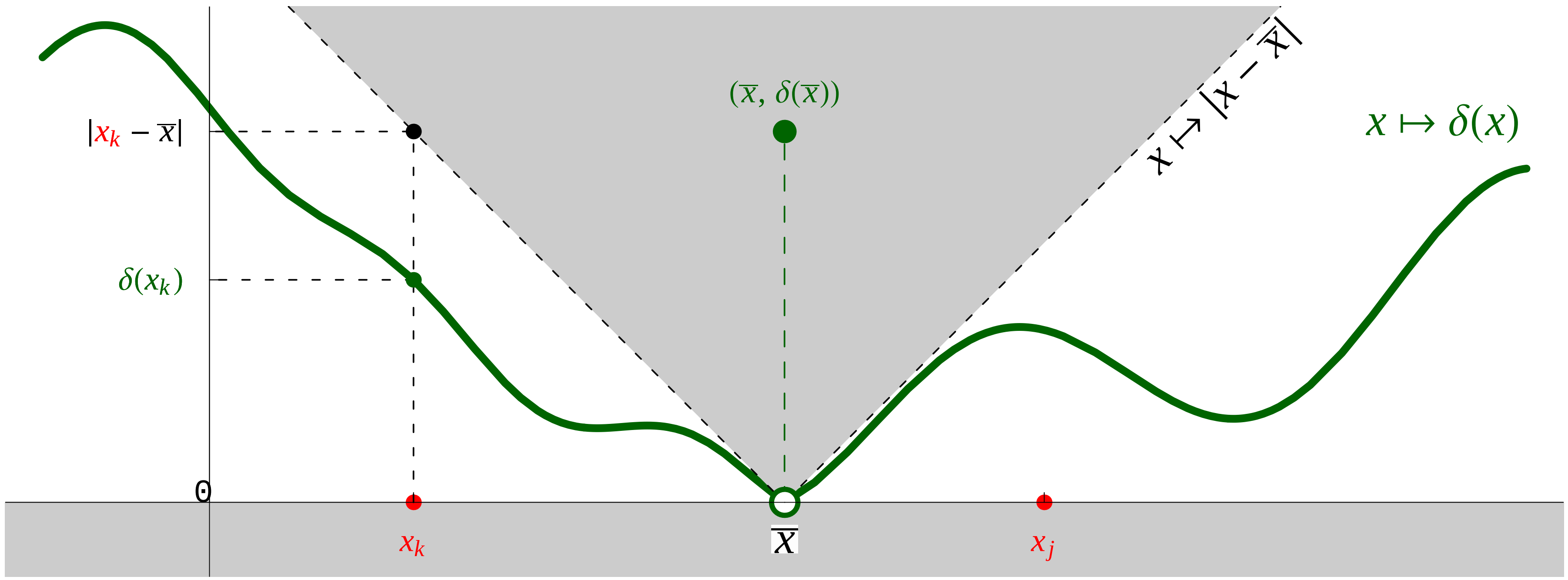
- **per esempio x_k, che sta a sinistra di $\bar{x}$,**

Calibri e p.ti marcati

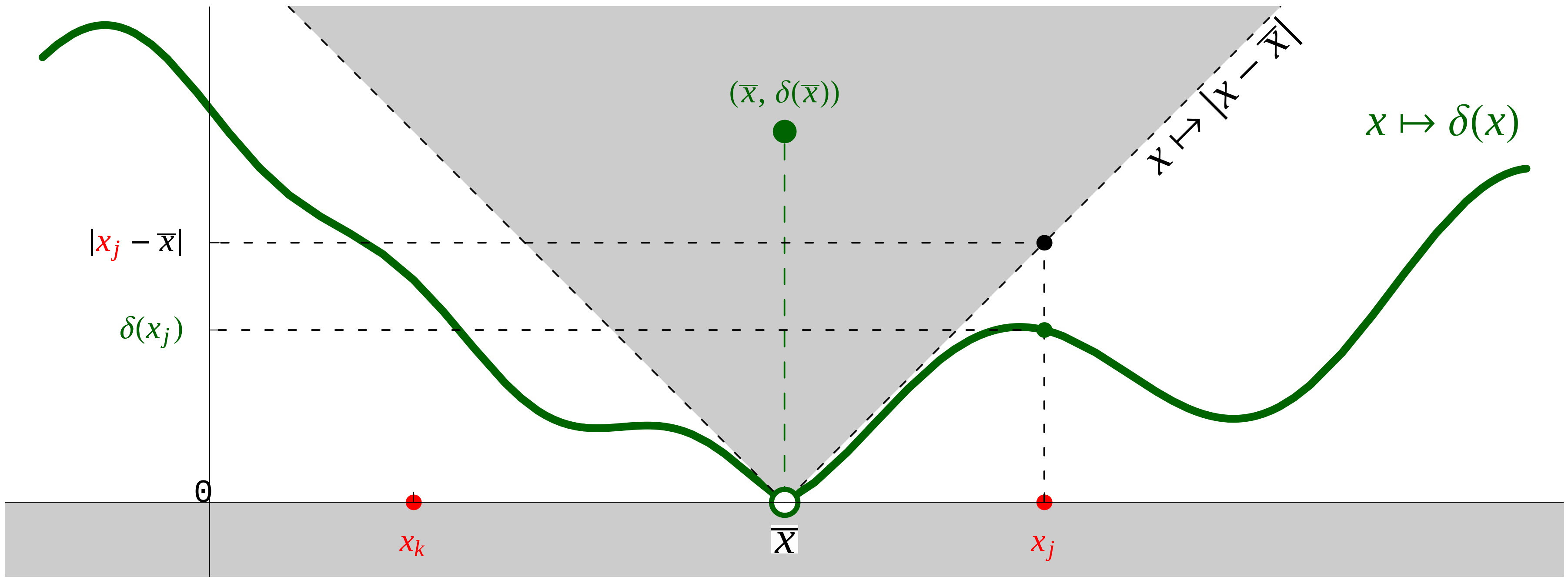


- Prendiamo dunque un punto marcato che non sia $\bar{x}$:
  - **per esempio x_k, che sta a sinistra di $\bar{x}$,**
  - **o x_j, che sta a destra di $\bar{x}$.**

Calibri e p.ti marcati

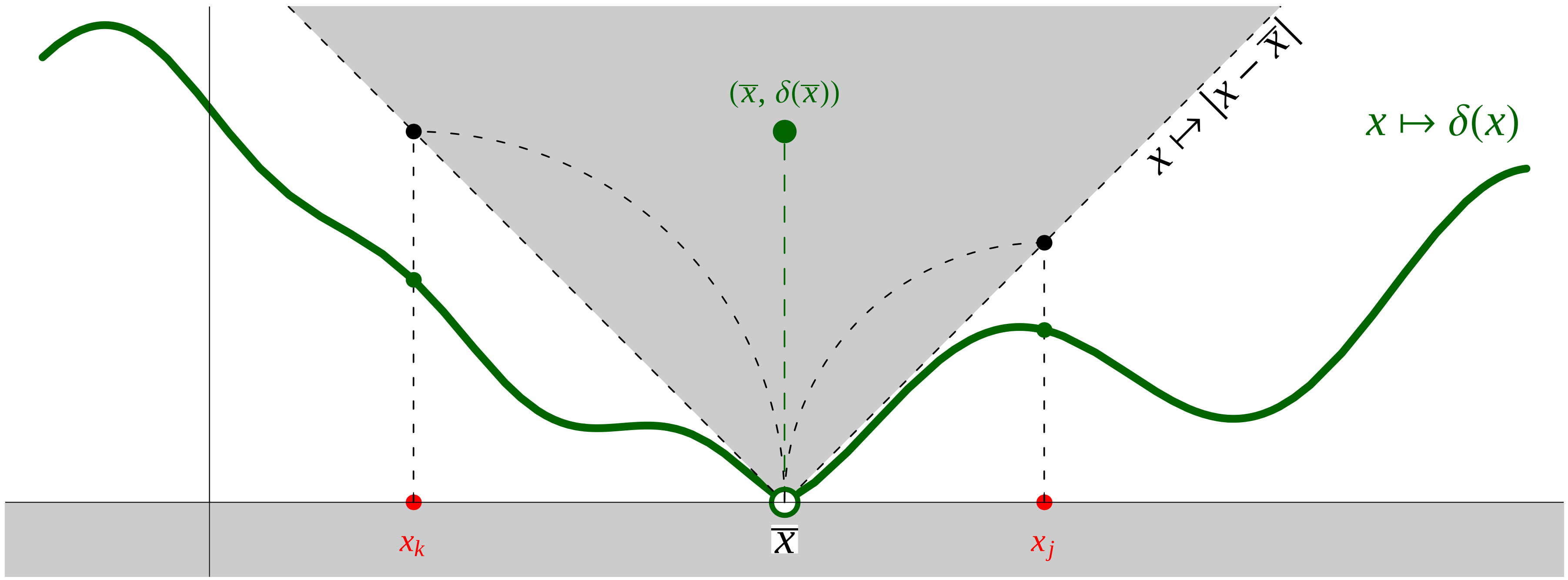


- Prendiamo dunque un punto marcato che non sia $\bar{x}$:
  - **per esempio x_k, che sta a sinistra di $\bar{x}$,**
  - **o x_j, che sta a destra di $\bar{x}$.**
- Per ipotesi $\delta(x_k) < |x_k - \bar{x}|$

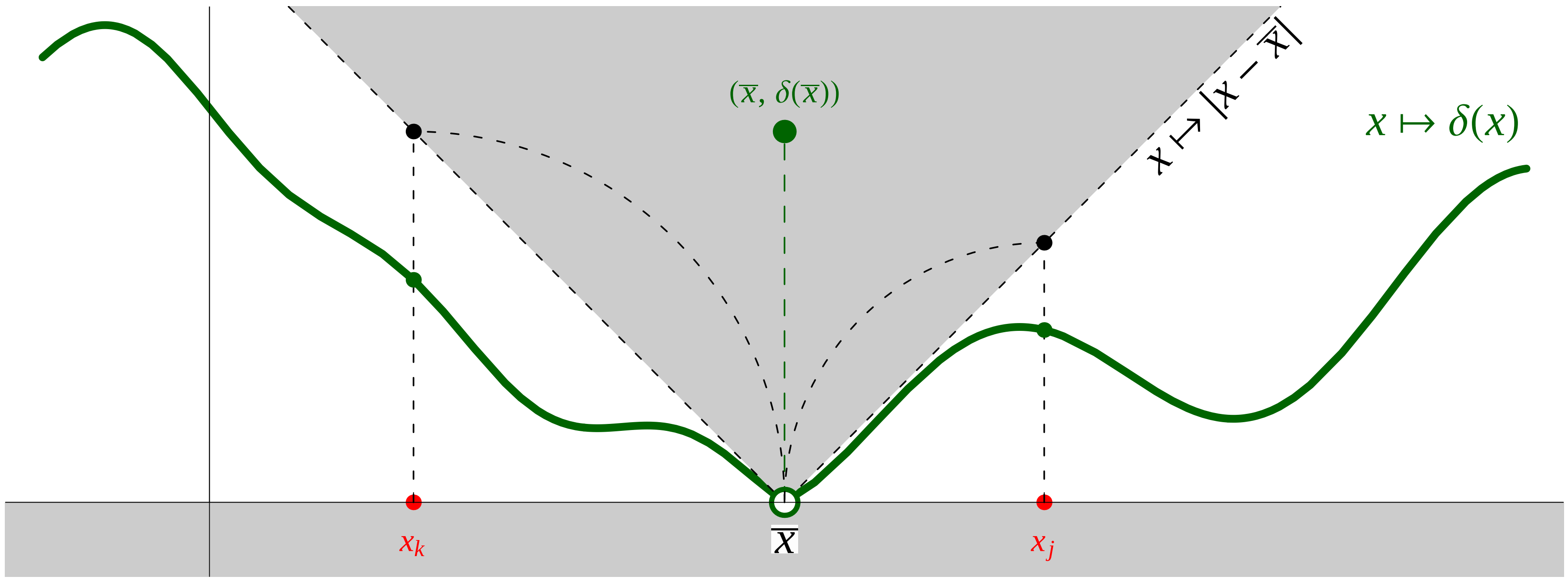


- Prendiamo dunque un punto marcato che non sia $\bar{x}$:
  - **per esempio x_k, che sta a sinistra di $\bar{x}$,**
  - **o x_j, che sta a destra di $\bar{x}$.**
- Per ipotesi $\delta(x_k) < |x_k - \bar{x}|$ e $\delta(x_j) < |x_j - \bar{x}|$.

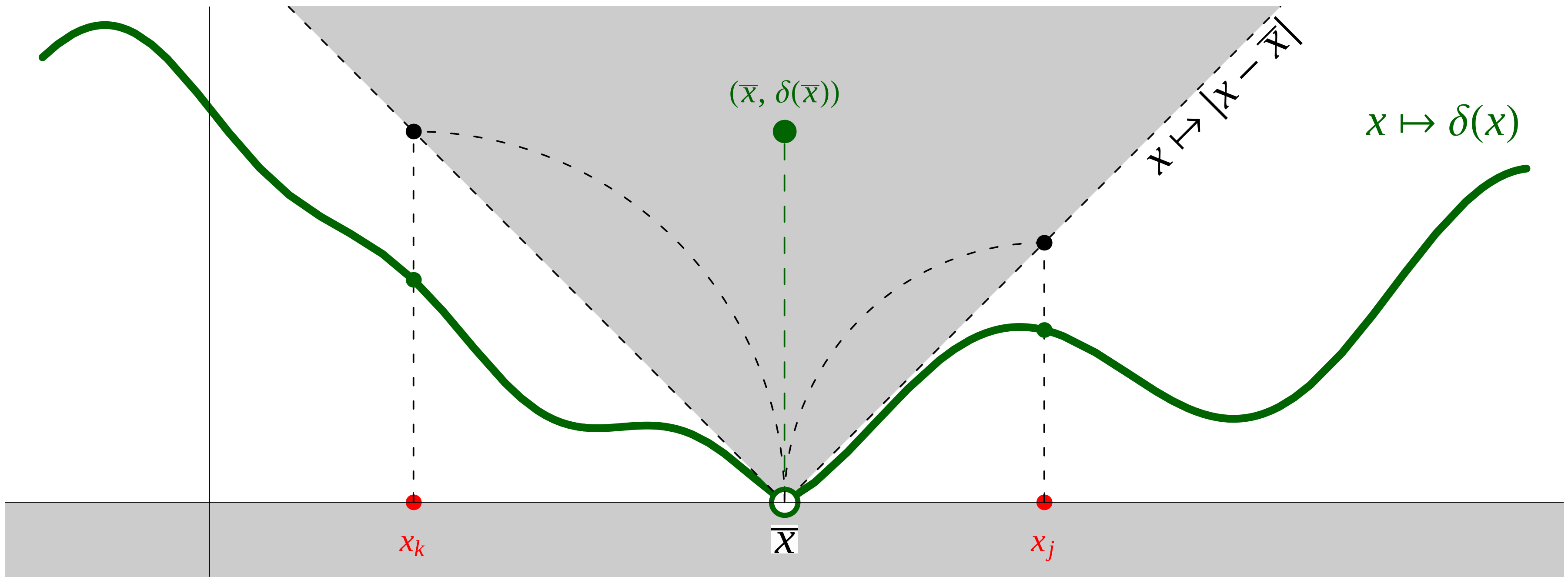
Calibri e p.ti marcati



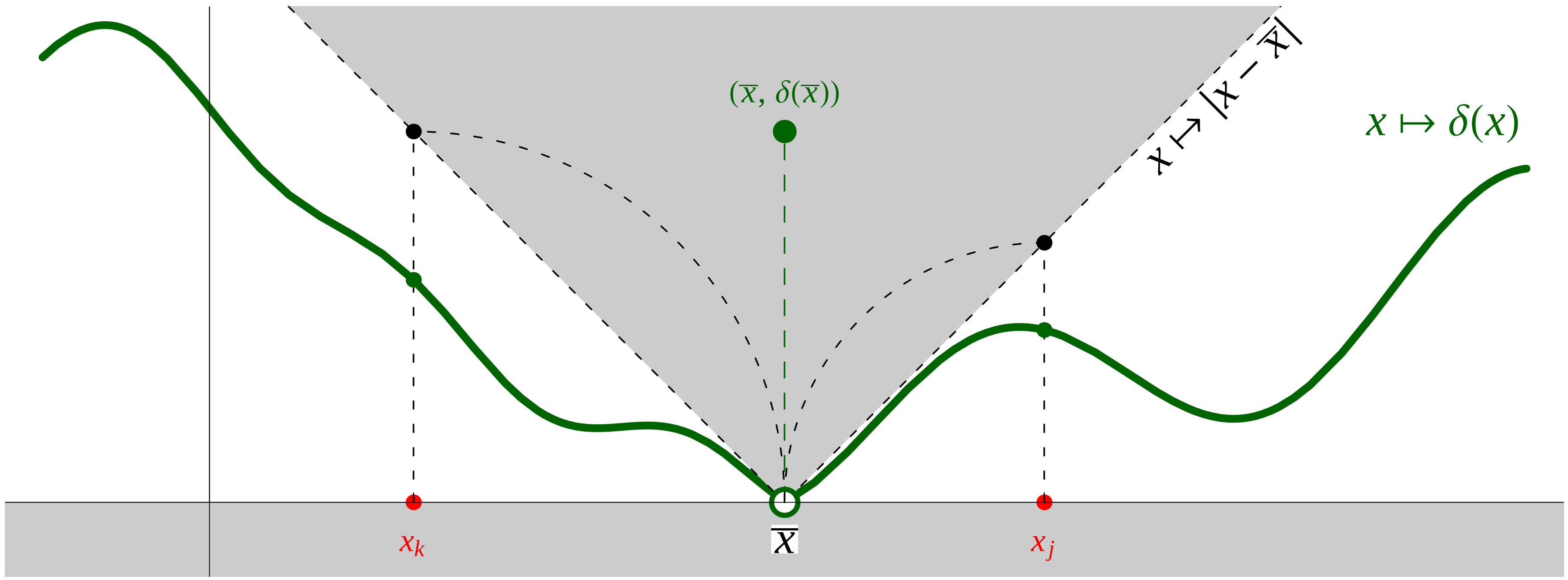
- Tracciamo i cerchi



- Tracciamo i cerchi
  - **di centri** $(x_k, 0)$, $(x_j, 0)$

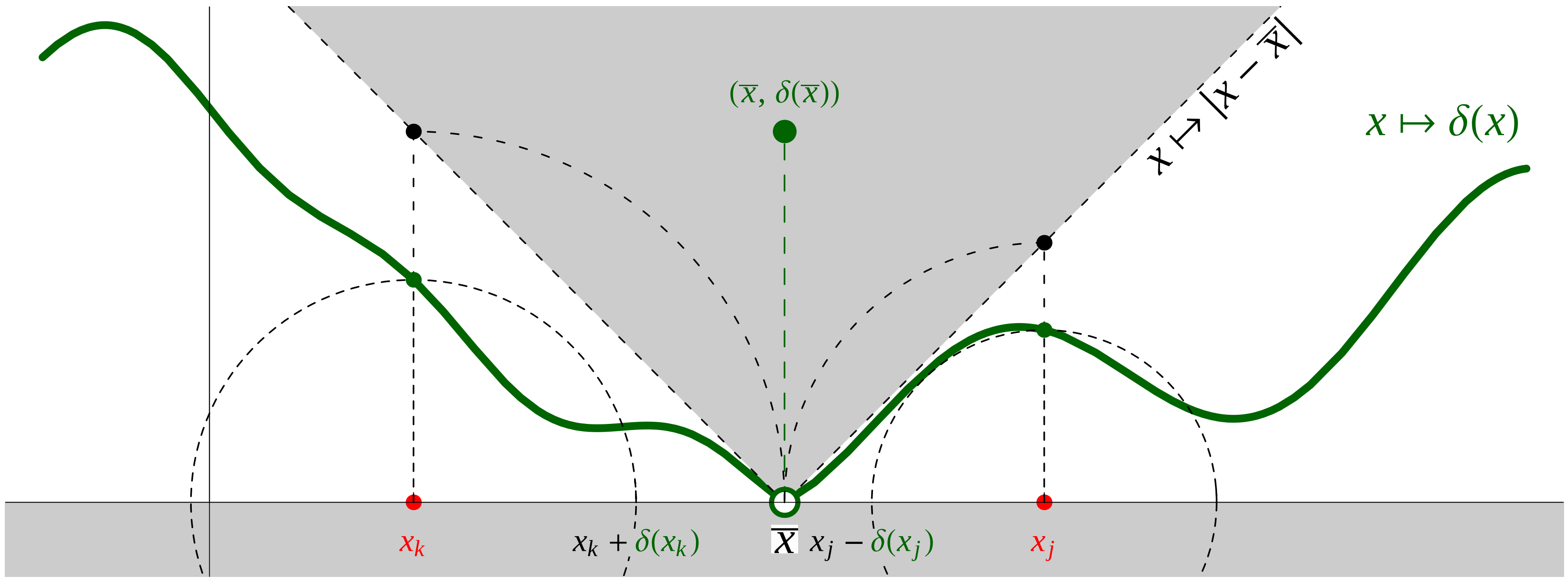


- Tracciamo i cerchi
  - **di centri** $(x_k, 0)$, $(x_j, 0)$
  - **e raggi** $|x_k - \bar{x}|$ **e** $|x_j - \bar{x}|$.

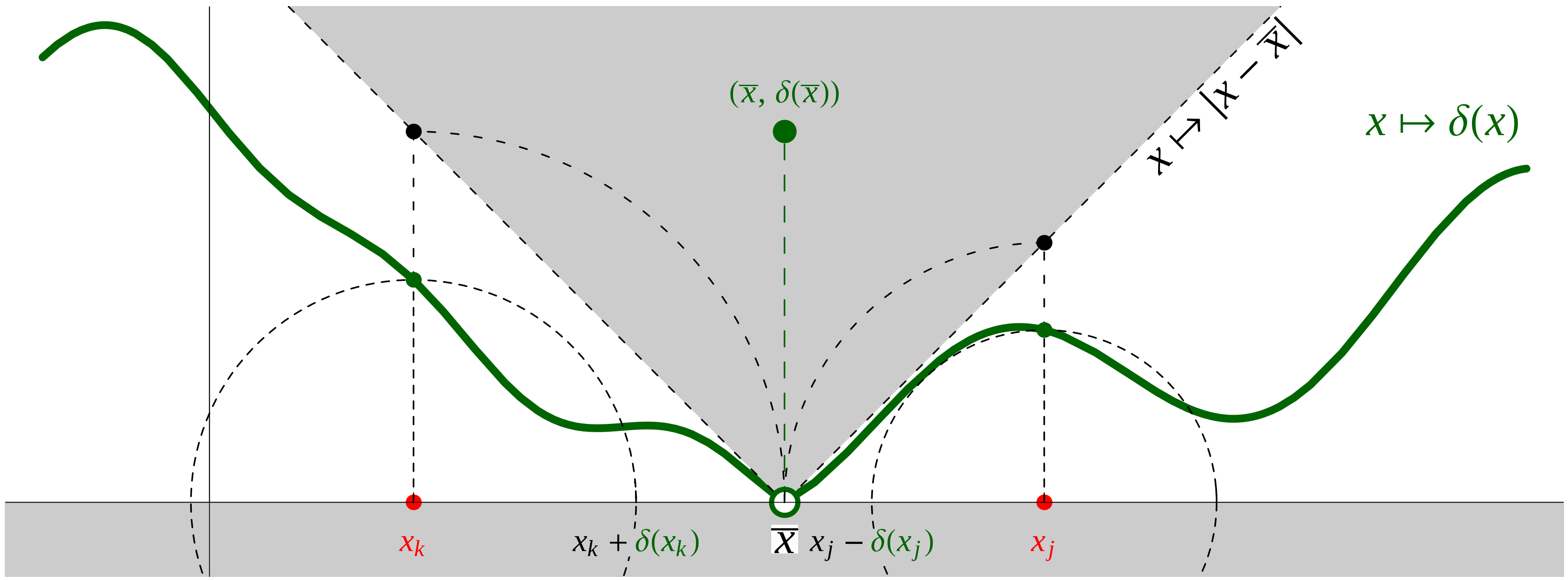


- Tracciamo i cerchi
  - **di centri** $(x_k, 0)$**,** $(x_j, 0)$
  - **e raggi** $|x_k - \bar{x}|$ **e** $|x_j - \bar{x}|$**.**
- Il punto $(\bar{x}, 0)$ è in comune ai due cerchi.

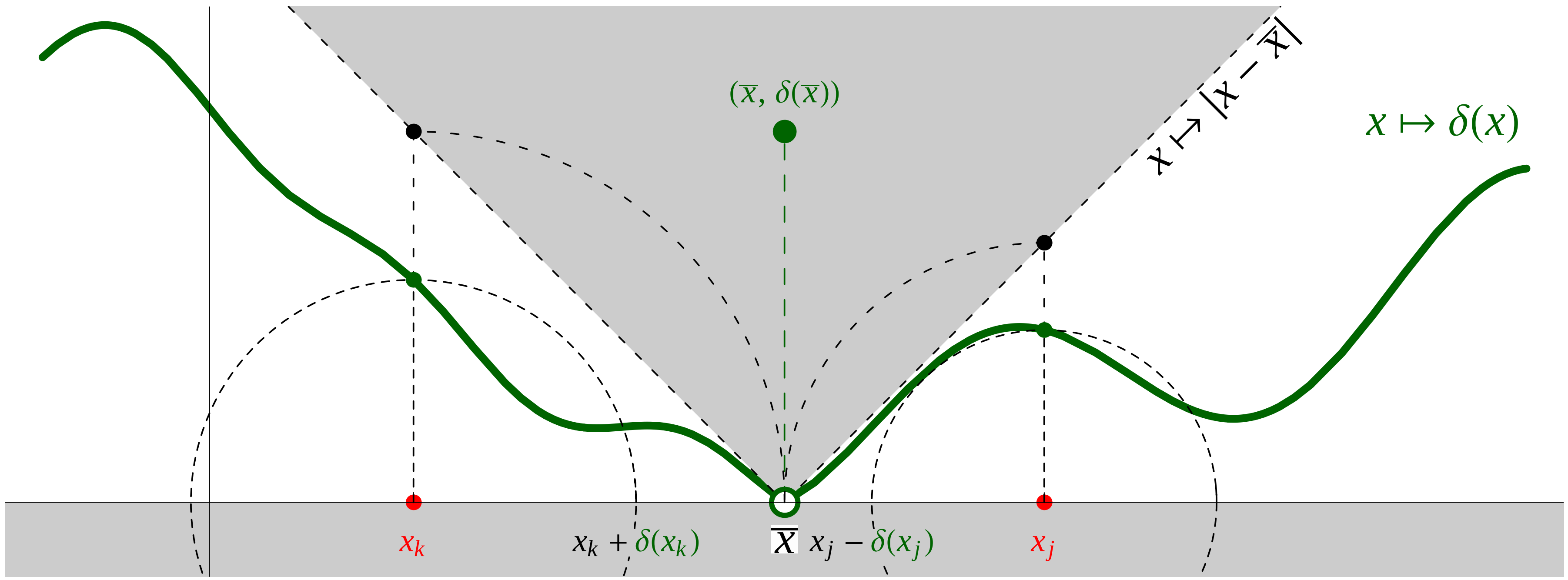
Calibri e p.ti marcati



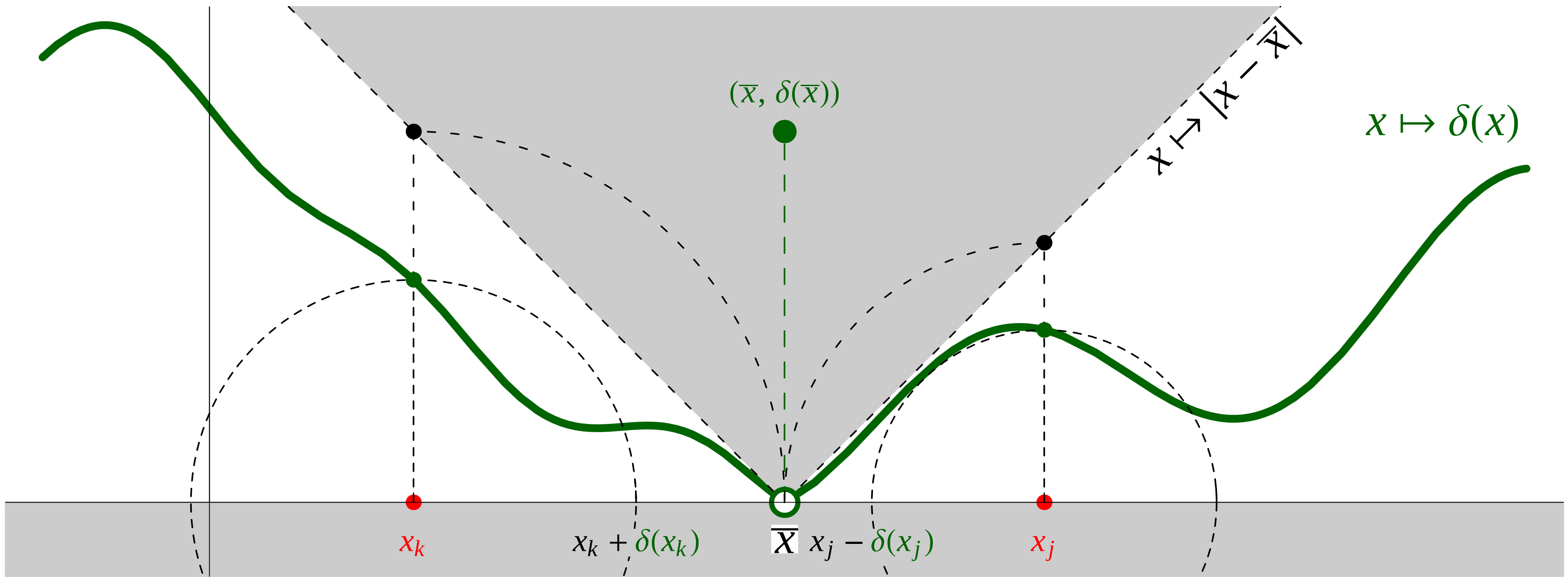
- Quindi i dischi



- Quindi i dischi
  - **di centri** $(x_k, 0)$, $(x_j, 0)$

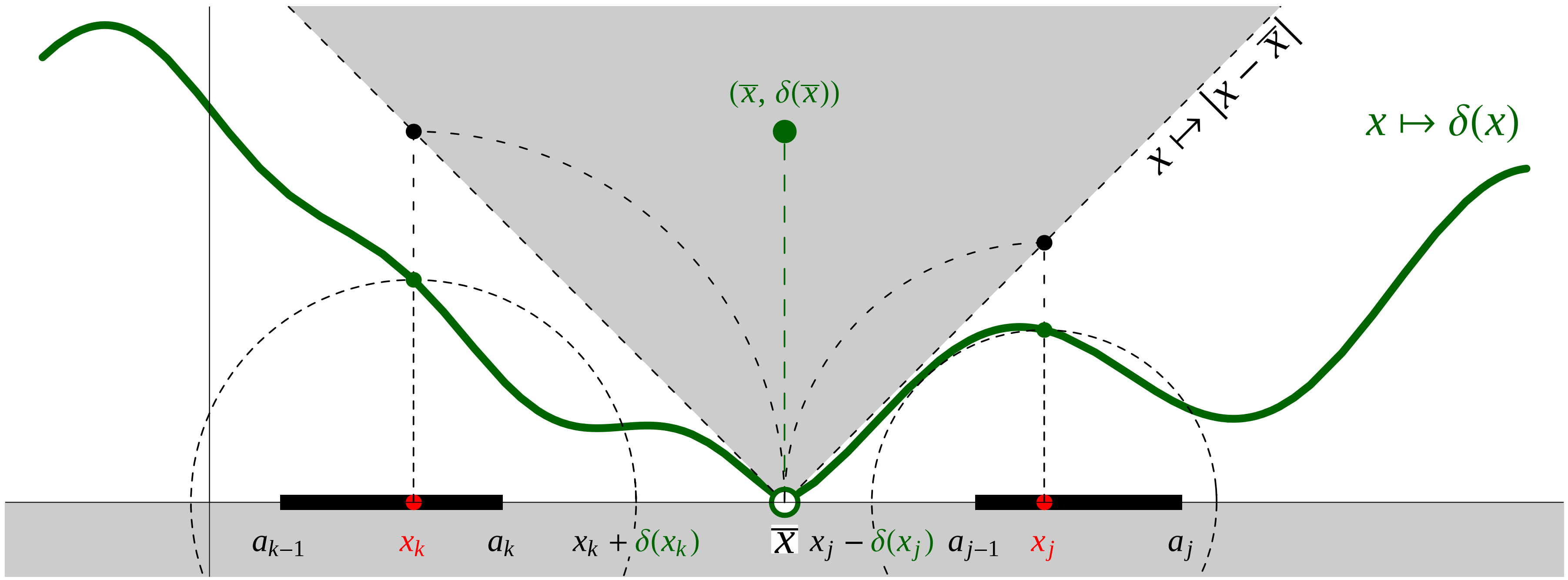


- Quindi i dischi
  - **di centri** $(x_k, 0)$, $(x_j, 0)$
  - **e raggi** $\delta(x_k)$ **e** $\delta(x_j)$

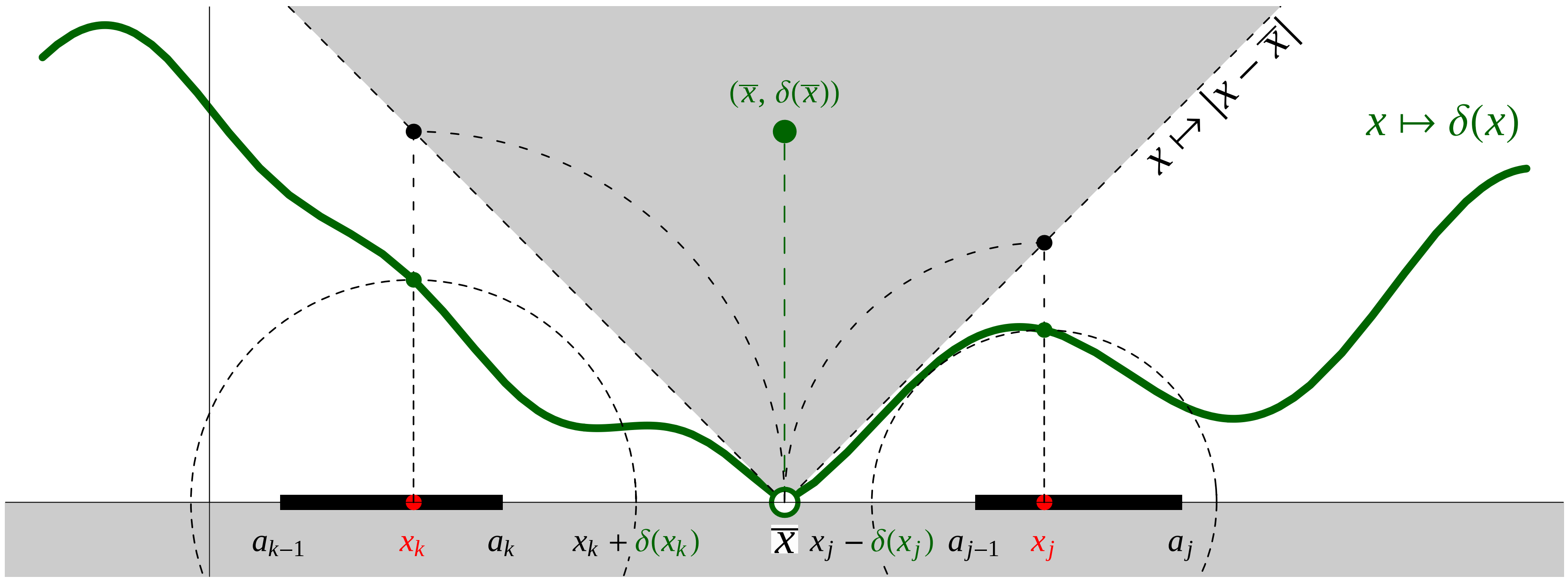


- Quindi i dischi
  - **di centri** $(x_k, 0)$**,** $(x_j, 0)$
  - **e raggi** $\delta(x_k)$ **e** $\delta(x_j)$

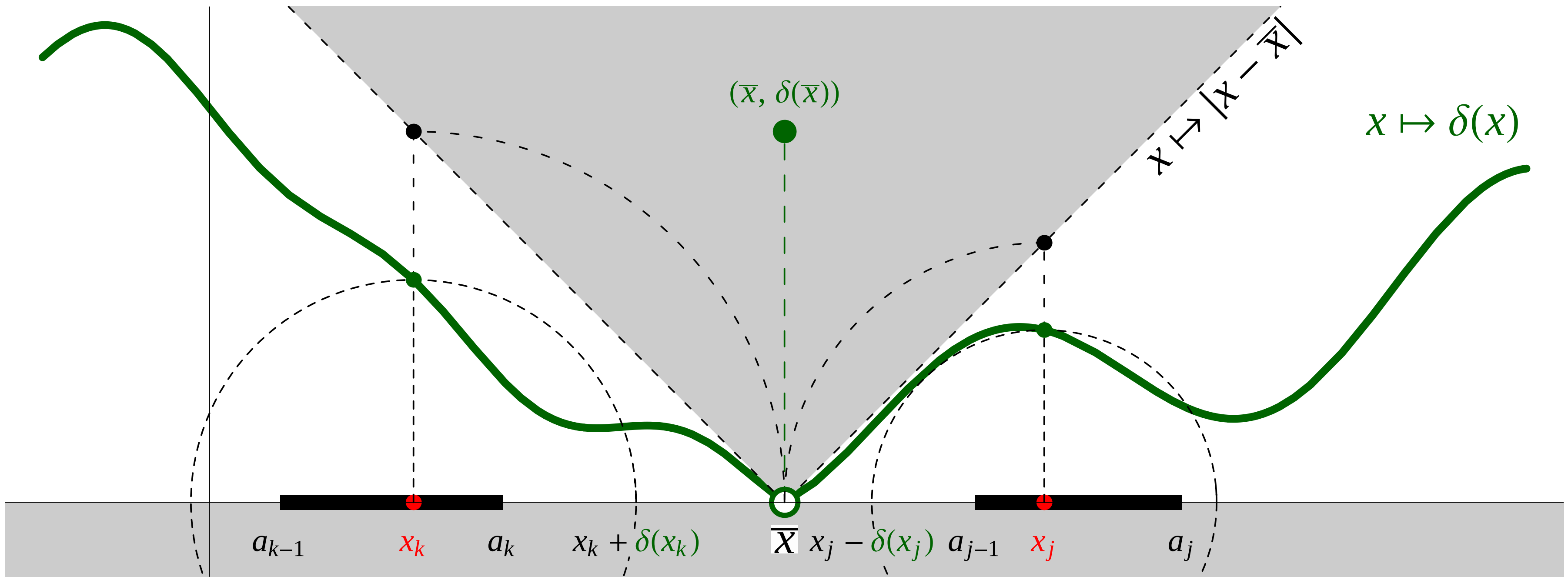
non contengono il punto $(\bar{x}, 0)$.



- Pertanto gli intervallini $[a_{k-1}, a_k]$ e $[a_{j-1}, a_j]$,

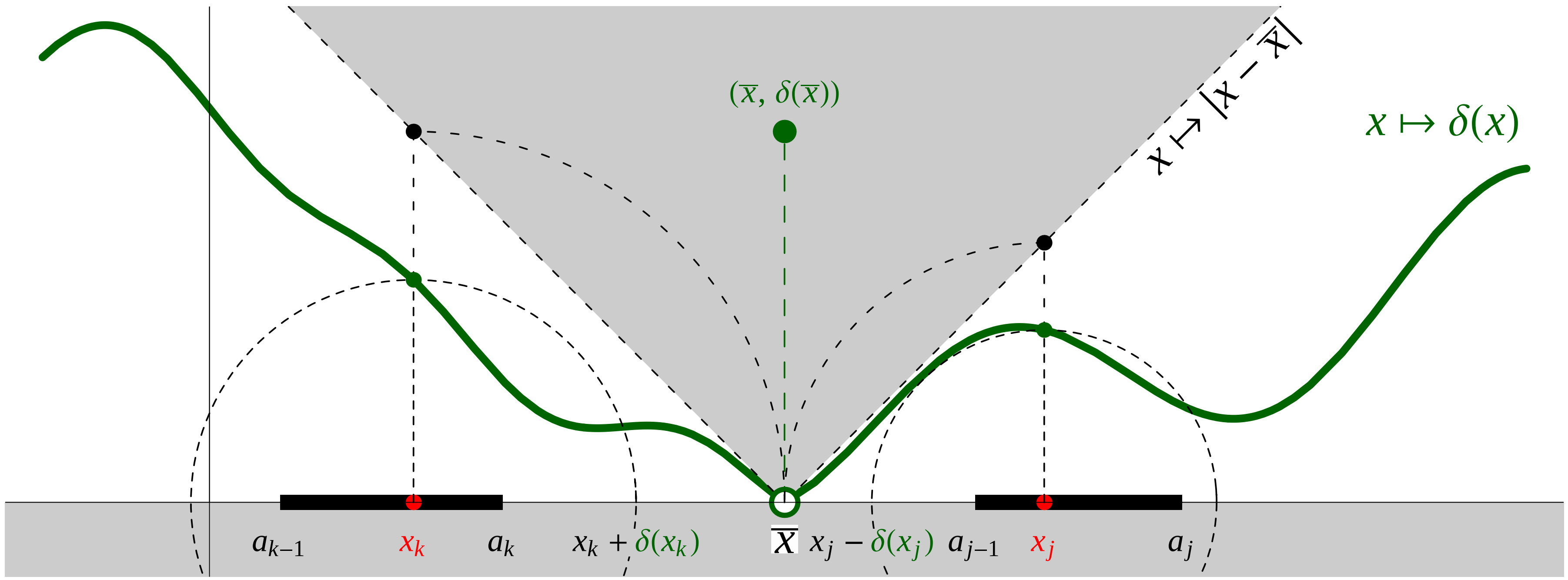


- Pertanto gli intervallini $[a_{k-1}, a_k]$ e $[a_{j-1}, a_j]$,
  - **essendo dentro nei dischi,**



- Pertanto gli intervallini $[a_{k-1}, a_k]$ e $[a_{j-1}, a_j]$,
  - **essendo dentro nei dischi,**

  non contengono $\bar{x}$,



- Pertanto gli intervallini $[a_{k-1}, a_k]$ e $[a_{j-1}, a_j]$,
  - **essendo dentro nei dischi,**

  non contengono $\bar{x}$,
- come volevasi dimostrare!

Cap. 8

Esistenza di suddivisioni adattate

Costruire suddivisioni

Costruire suddivisioni

- *Con l'integrale di Riemann è facile costruire suddivisioni* Π *con ampiezza piccola a piacere.*

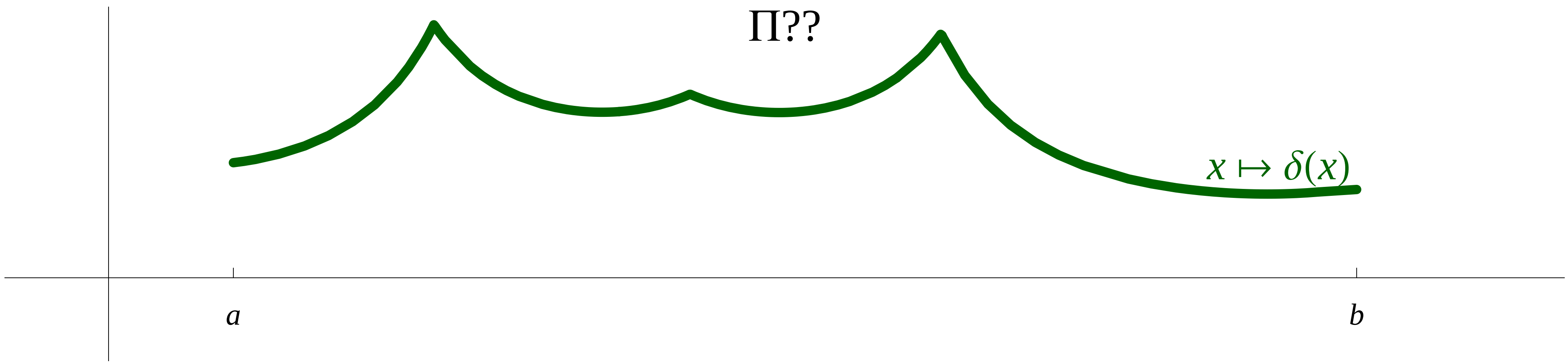
Costruire suddivisioni

- ***Con l'integrale di Riemann è facile costruire suddivisioni Π con ampiezza piccola a piacere.***
  - **Per esempio si può partire da a e aggiungere un δ alla volta fino a raggiungere b; i punti marcati sono arbitrari.**

Costruire suddivisioni

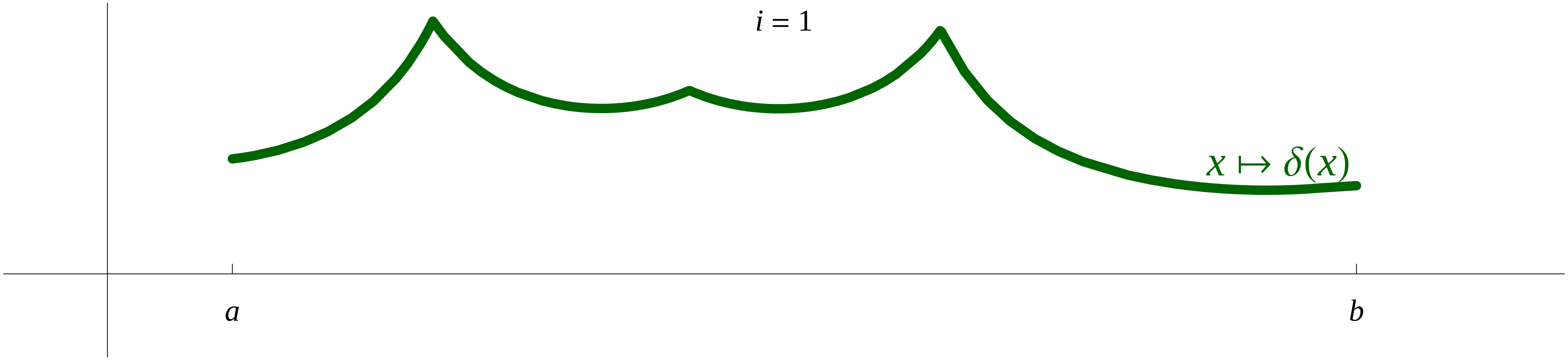
- ***Con l'integrale di Riemann è facile costruire suddivisioni Π con ampiezza piccola a piacere.***
  - **Per esempio si può partire da a e aggiungere un δ alla volta fino a raggiungere b; i punti marcati sono arbitrari.**
- ***Invece, dato un calibro $\delta(x)$, può non essere tanto ovvio come costruire una suddivisione Π adattata.***

- ***Con l'integrale di Riemann è facile costruire suddivisioni Π con ampiezza piccola a piacere.***
  - **Per esempio si può partire da a e aggiungere un δ alla volta fino a raggiungere b; i punti marcati sono arbitrari.**
- ***Invece, dato un calibro $\delta(x)$, può non essere tanto ovvio come costruire una suddivisione Π adattata.***
- ***Vediamo un esempio.***

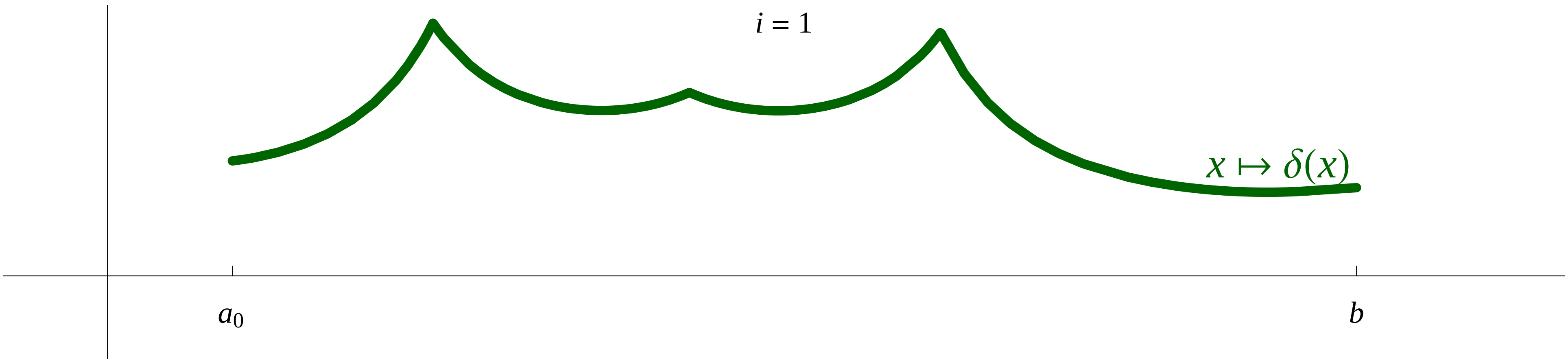


- Partiamo da un calibro come quello in figura.

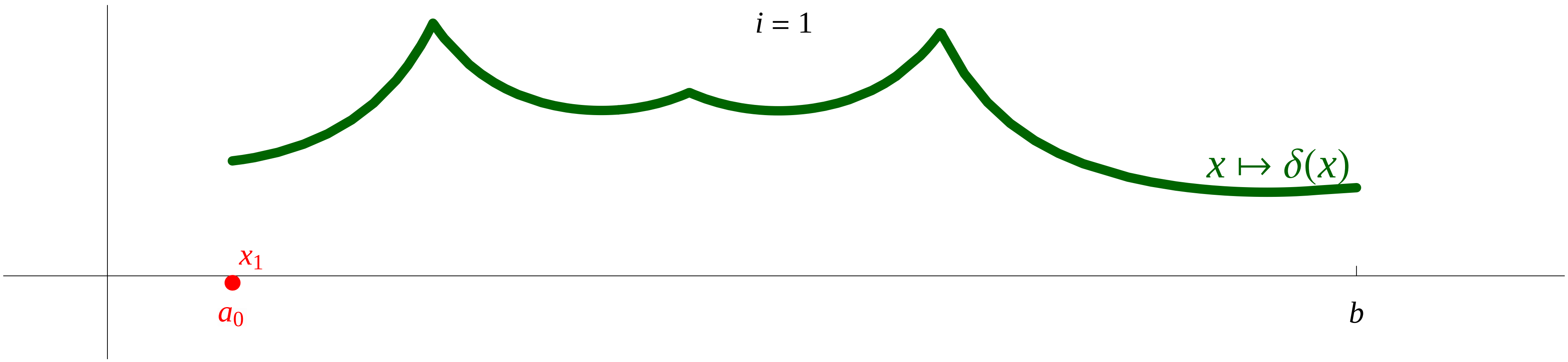
Costruire suddivisioni



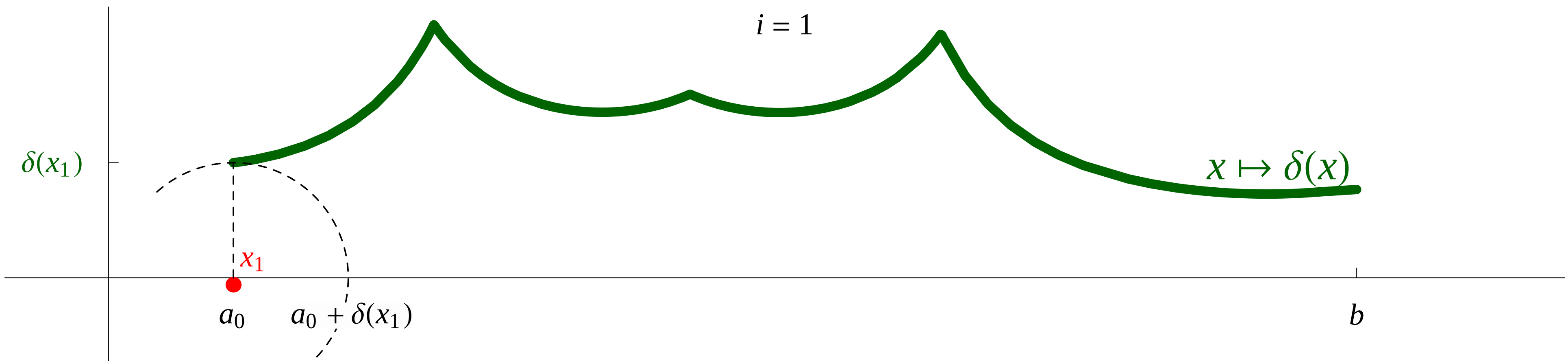
- Costruiamo il primo intervallino ($i = 1$):



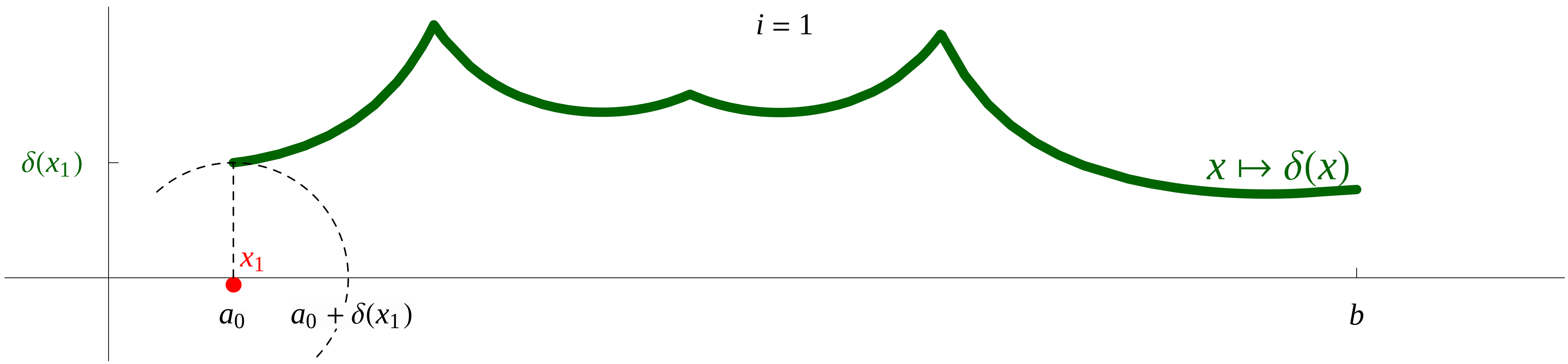
- Costruiamo il primo intervallino ($i = 1$):
  - **il punto a_0 è obbligato: $a_0 = a$.**



- Costruiamo il primo intervallino ($i = 1$):
  - **il punto a_0 è obbligato: $a_0 = a$.**
  - **Prendiamo il primo punto marcato $x_1 = a_0$.**

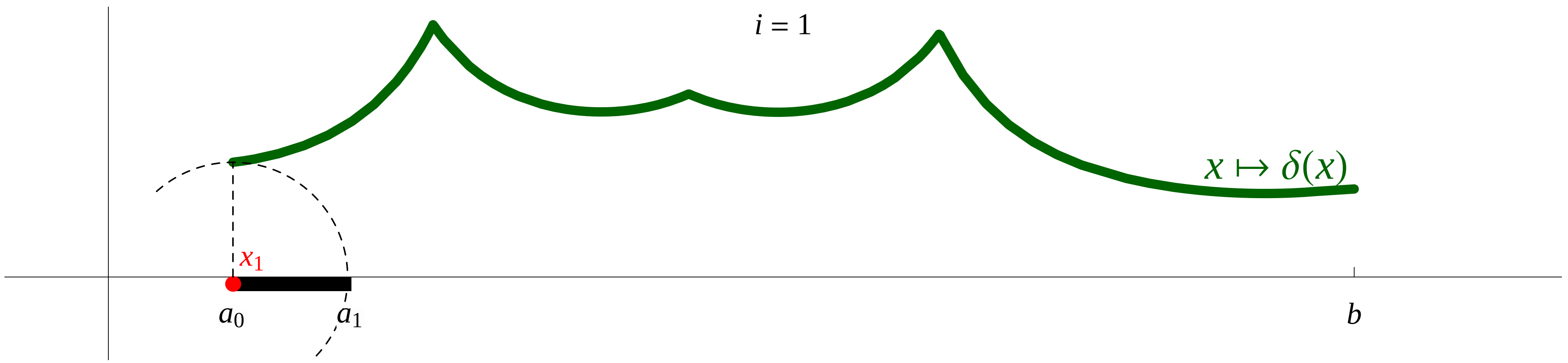


- Costruiamo il primo intervallino ($i = 1$):
  - **il punto a_0 è obbligato: $a_0 = a$.**
  - **Prendiamo il primo punto marcato $x_1 = a_0$.**
  - **Calcoliamo $\delta(x_1)$ e tracciamo il cerchietto.**



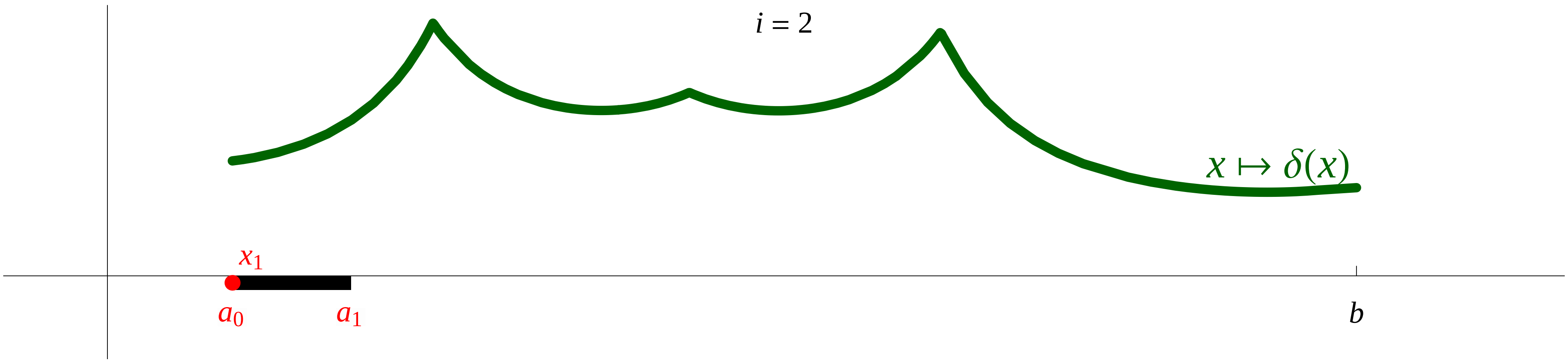
□ Costruiamo il primo intervallino $(i = 1)$:

- **il punto a_0 è obbligato: $a_0 = a$.**
- **Prendiamo il primo punto marcato $x_1 = a_0$.**
- **Calcoliamo $\delta(x_1)$ e tracciamo il cerchietto.**
- **Perché la suddivisione venga adattata bisogna che $a_0 < a_1 \leq a_0 + \delta(x_1)$.**



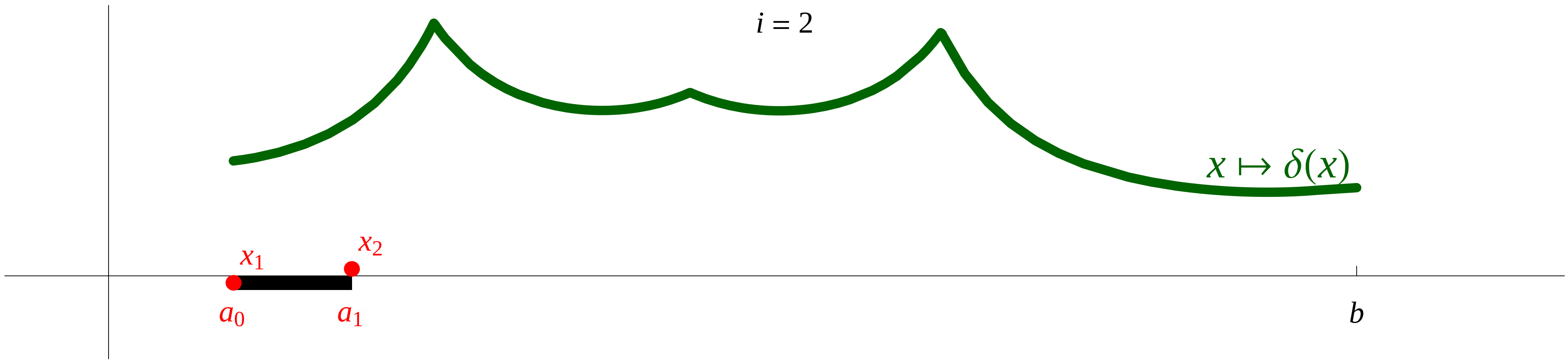
- Costruiamo il primo intervallino $(i = 1)$:
  - **il punto a_0 è obbligato: $a_0 = a$.**
  - **Prendiamo il primo punto marcato $x_1 = a_0$.**
  - **Calcoliamo $\delta(x_1)$ e tracciamo il cerchietto.**
  - **Perché la suddivisione venga adattata bisogna che** $a_0 < a_1 \leq a_0 + \delta(x_1)$.
  - **Prendiamo $a_1 = a_0 + \delta(x_1)$.**

Costruire suddivisioni

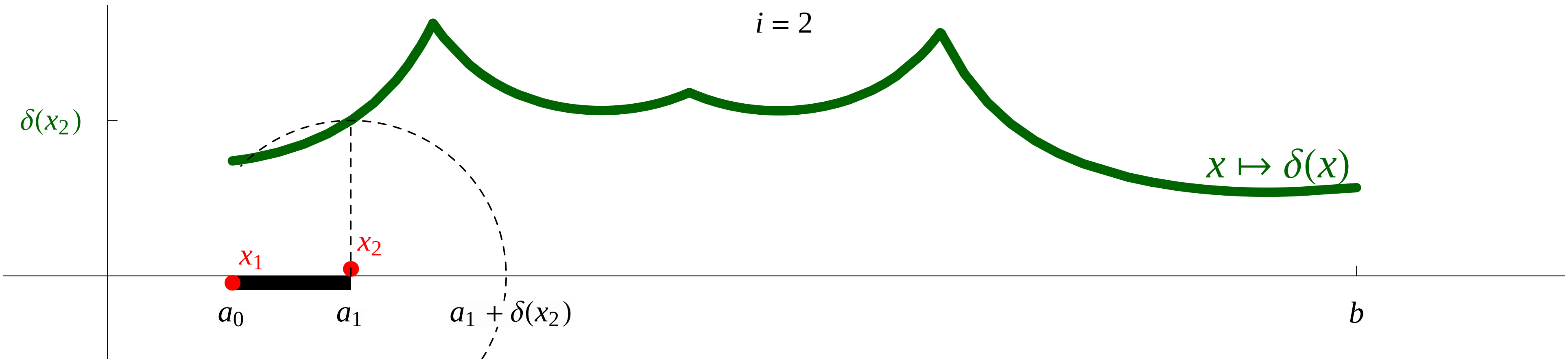


- Costruiamo il secondo intervallino ($i = 2$):

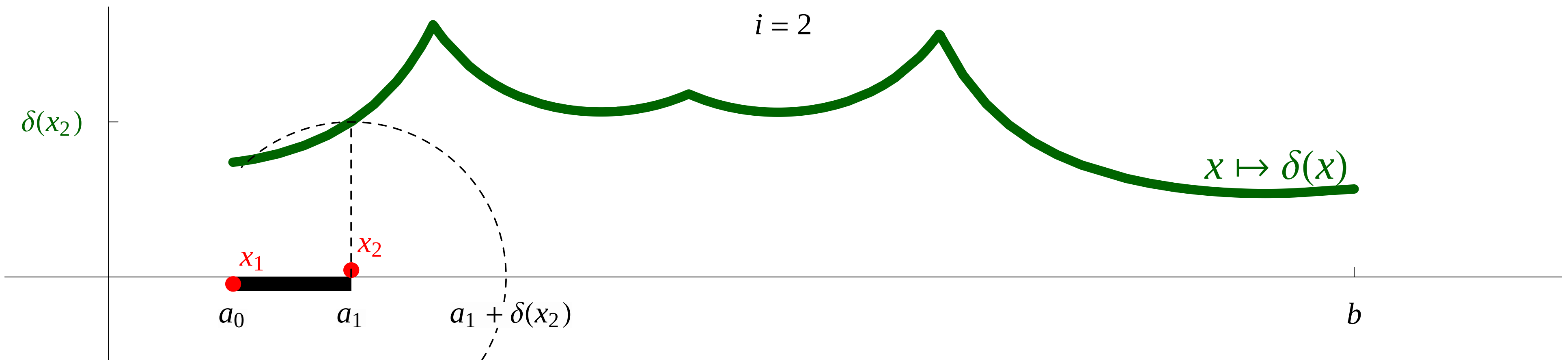
Costruire suddivisioni



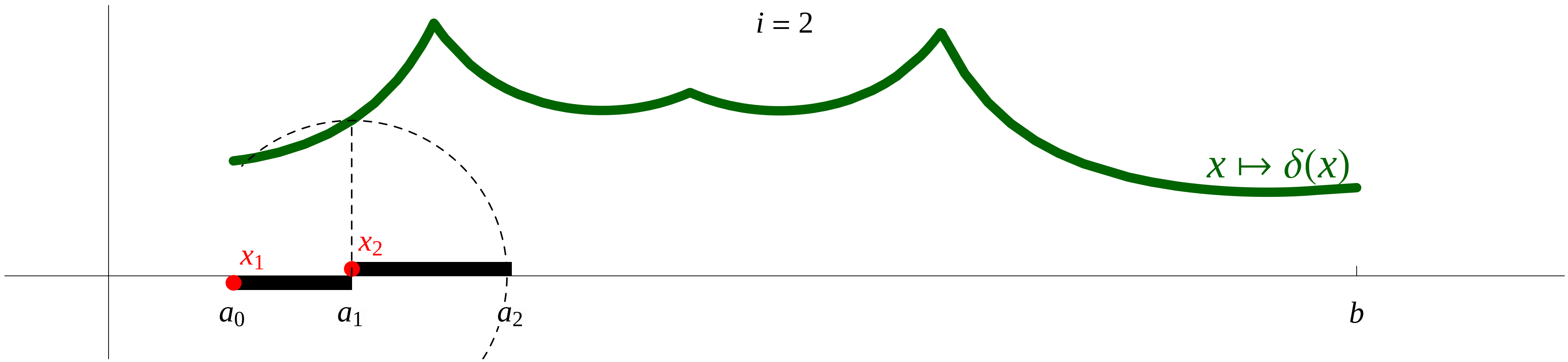
- Costruiamo il secondo intervallino ($i = 2$):
  - **Prendiamo il secondo punto marcato $x_2 = a_1$.**



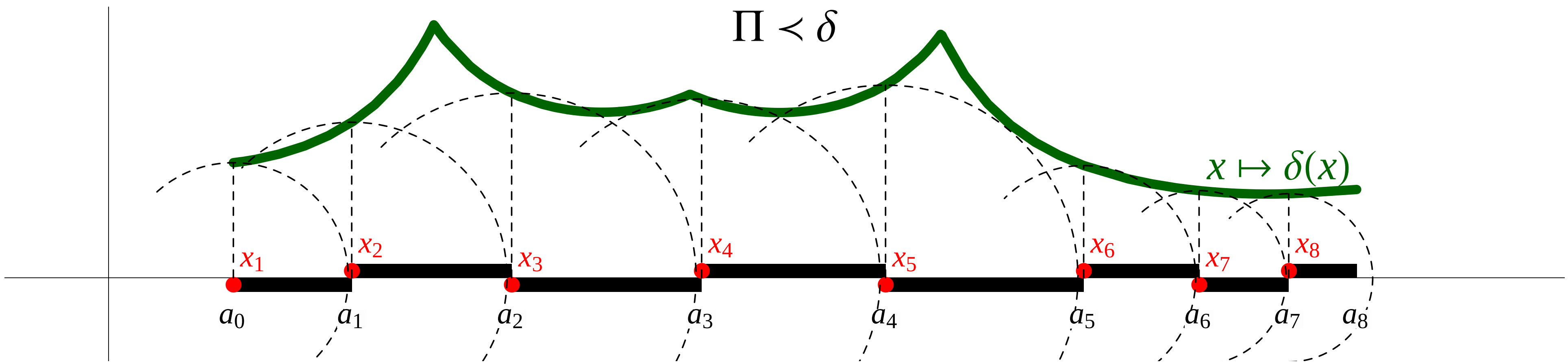
- Costruiamo il secondo intervallino ($i = 2$):
  - **Prendiamo il secondo punto marcato $x_2 = a_1$.**
  - **Calcoliamo $\delta(x_2)$ e tracciamo il cerchietto.**



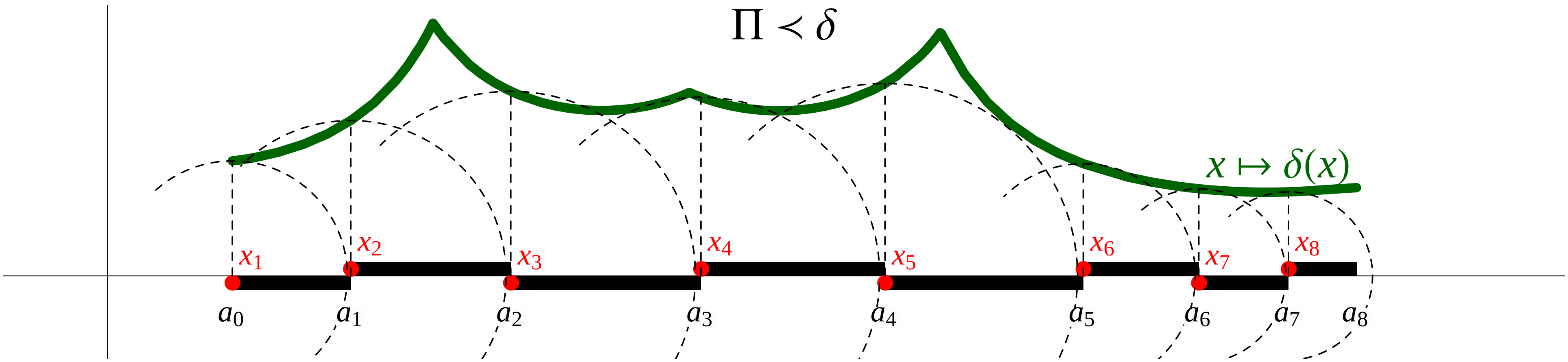
- Costruiamo il secondo intervallino ($i = 2$):
  - **Prendiamo il secondo punto marcato $x_2 = a_1$.**
  - **Calcoliamo $\delta(x_2)$ e tracciamo il cerchietto.**
  - **Perché la suddivisione venga adattata bisogna che $a_1 < a_2 \leq a_1 + \delta(x_2)$.**



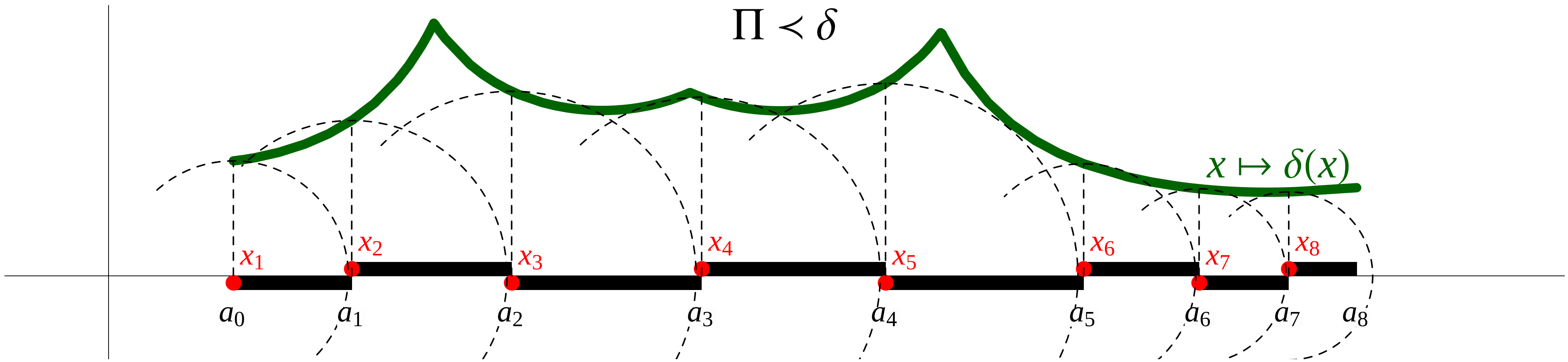
- Costruiamo il secondo intervallino ($i = 2$):
  - **Prendiamo il secondo punto marcato** $x_2 = a_1$.
  - **Calcoliamo** $\delta(x_2)$ **e tracciamo il cerchietto.**
  - **Perché la suddivisione venga adattata bisogna che** $a_1 < a_2 \leq a_1 + \delta(x_2)$.
  - **Prendiamo** $a_2 = a_1 + \delta(x_2)$.



- Continuando in questo modo si arriva all'estremo b in un numero finito di passi



- Continuando in questo modo si arriva all'estremo b in un numero finito di passi
- Abbiamo prodotto una suddivisione Π adattata a δ.

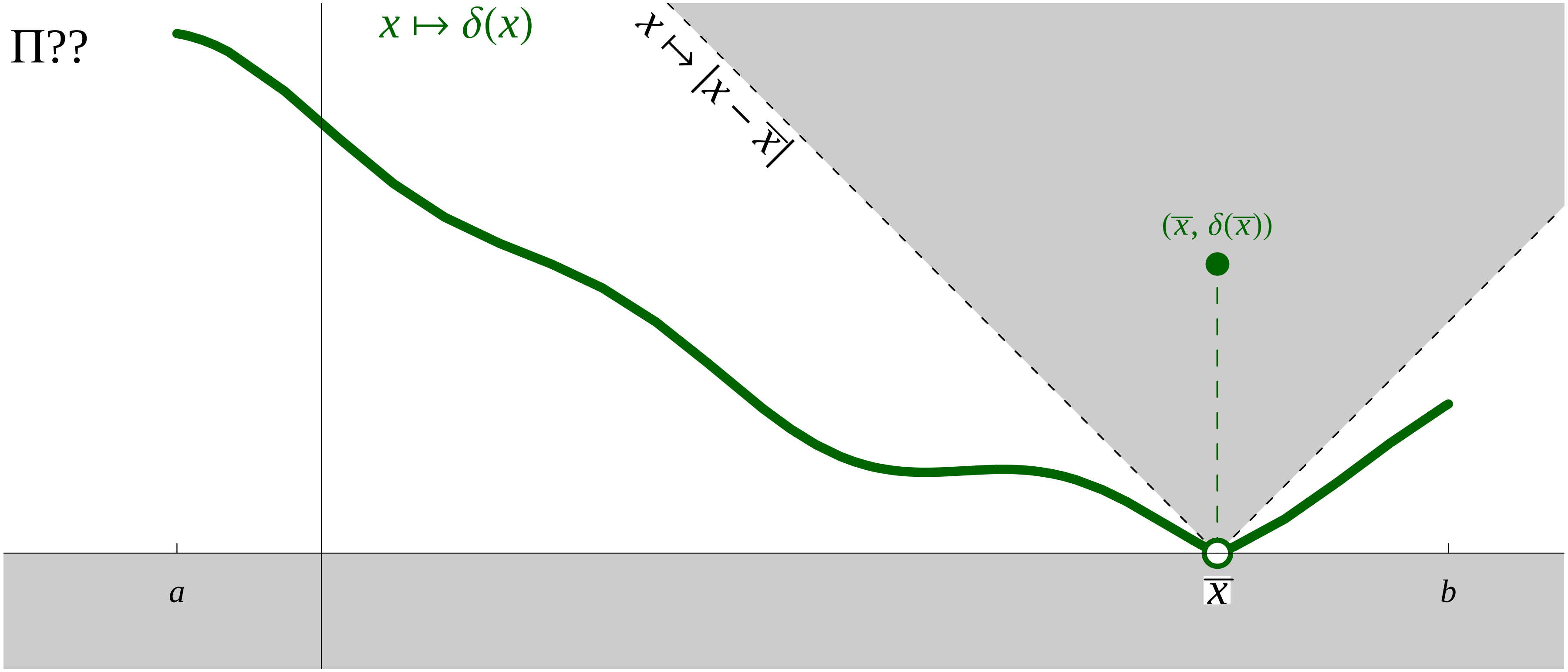


- Continuando in questo modo si arriva all'estremo b in un numero finito di passi
- Abbiamo prodotto una suddivisione Π adattata a δ.

- ***Però questo metodo fallisce con certi tipi di calibri.***

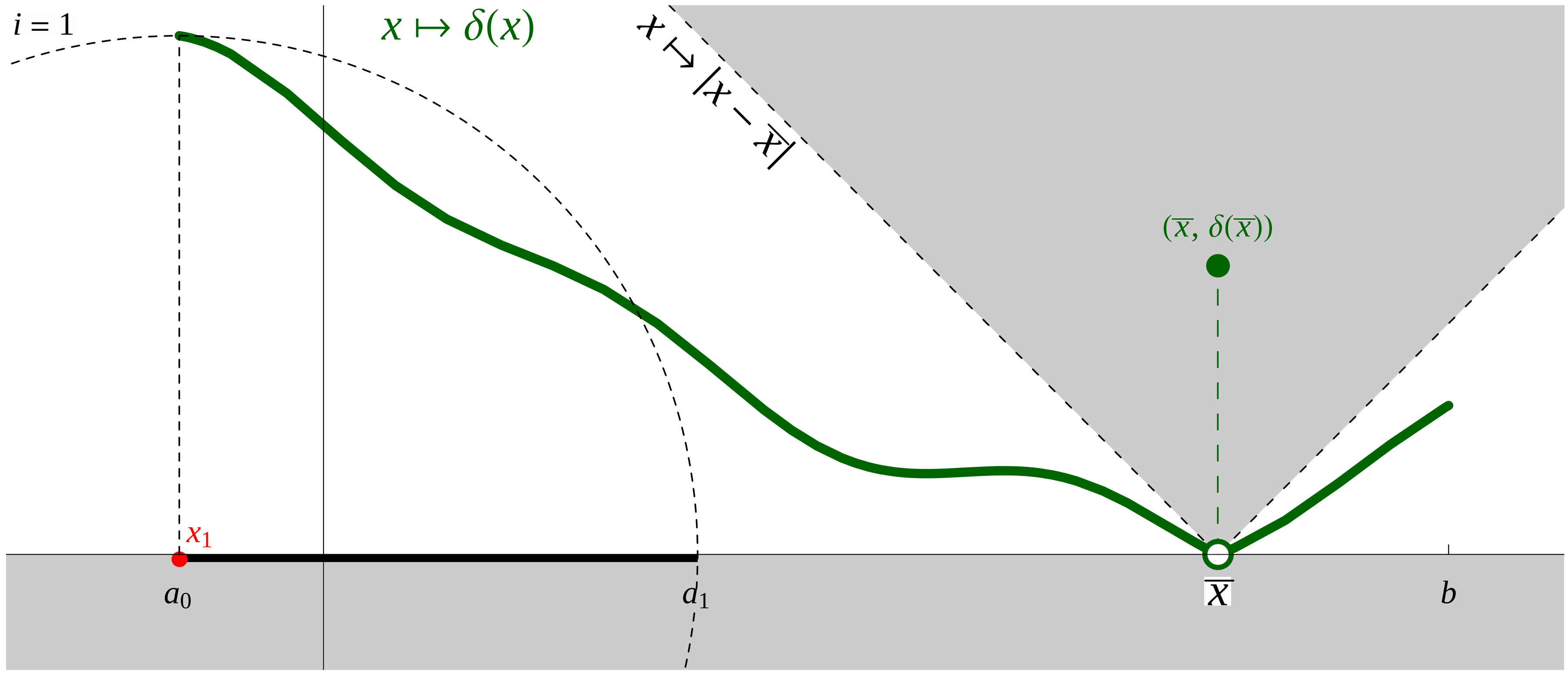
Costruzione fallita

Costruzione fallita

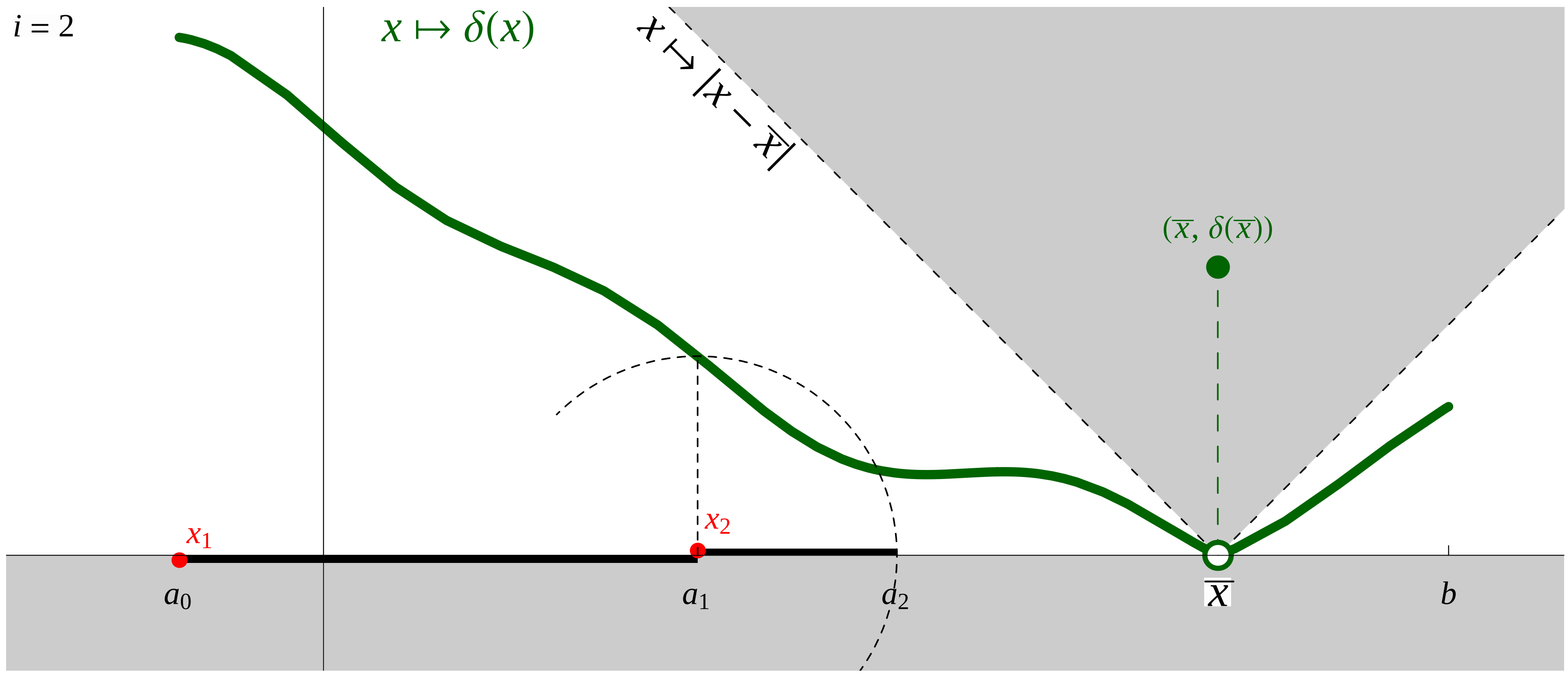


- Prendiamo questo calibro già noto.

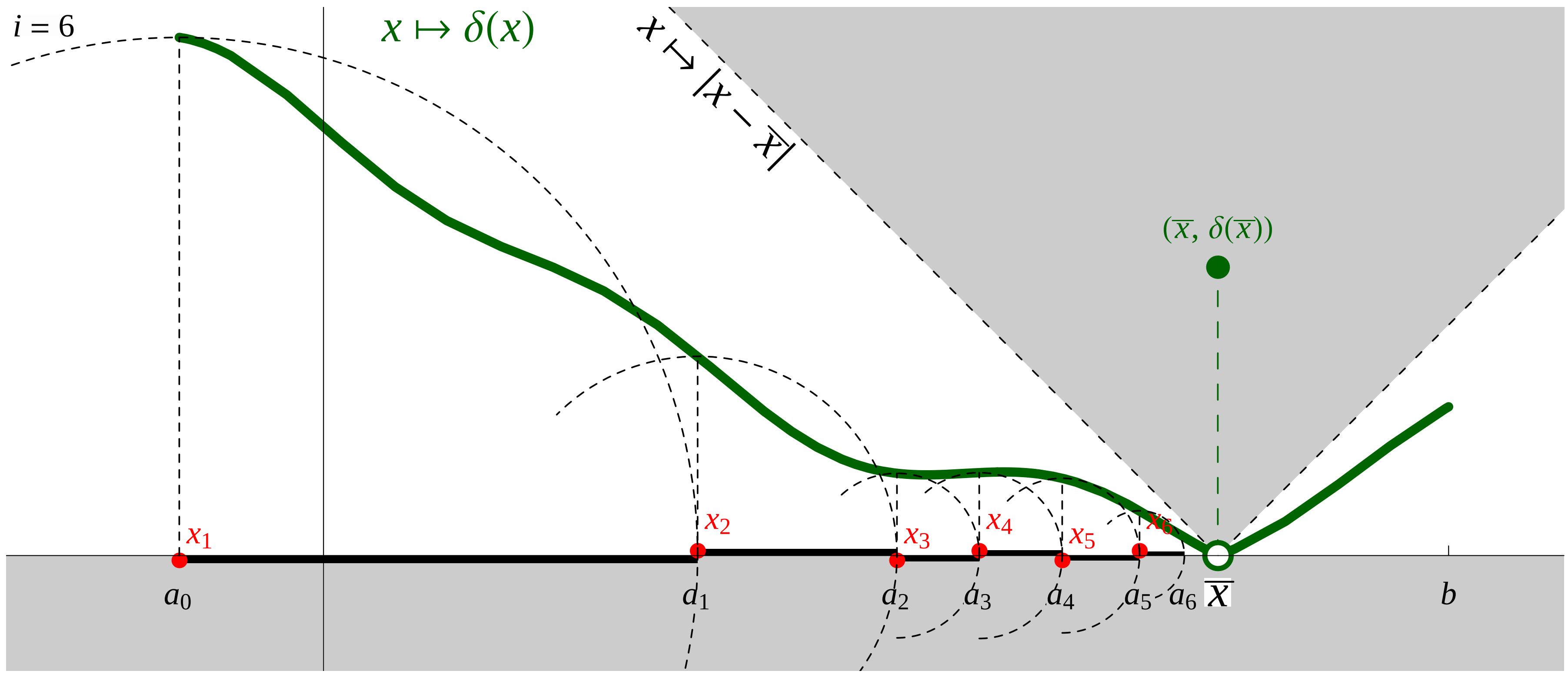
Costruzione fallita



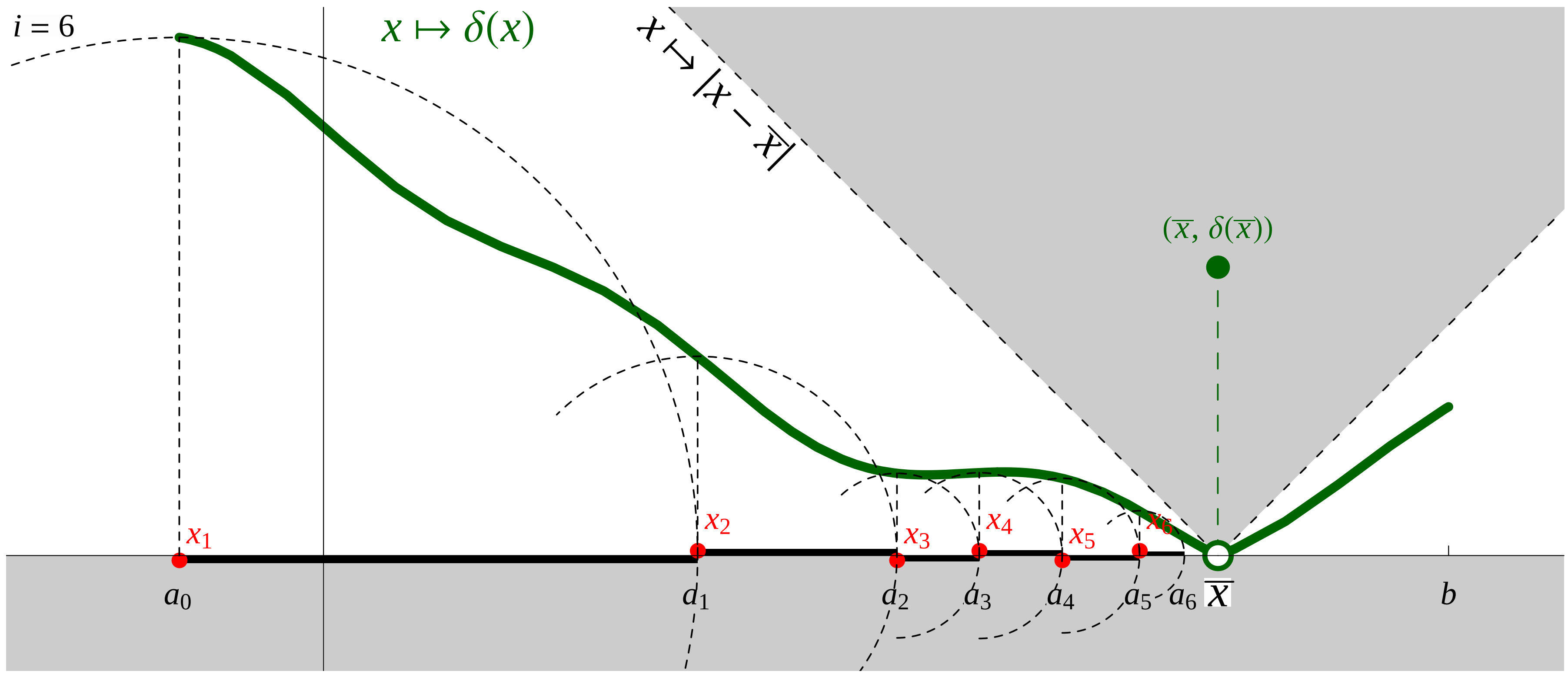
- Prendiamo questo calibro già noto.
  - **Il primo intervallino si fa tranquillamente.**



- Prendiamo questo calibro già noto.
  - **Il primo intervallino si fa tranquillamente.**
  - **Anche il secondo intervallino viene liscio.**

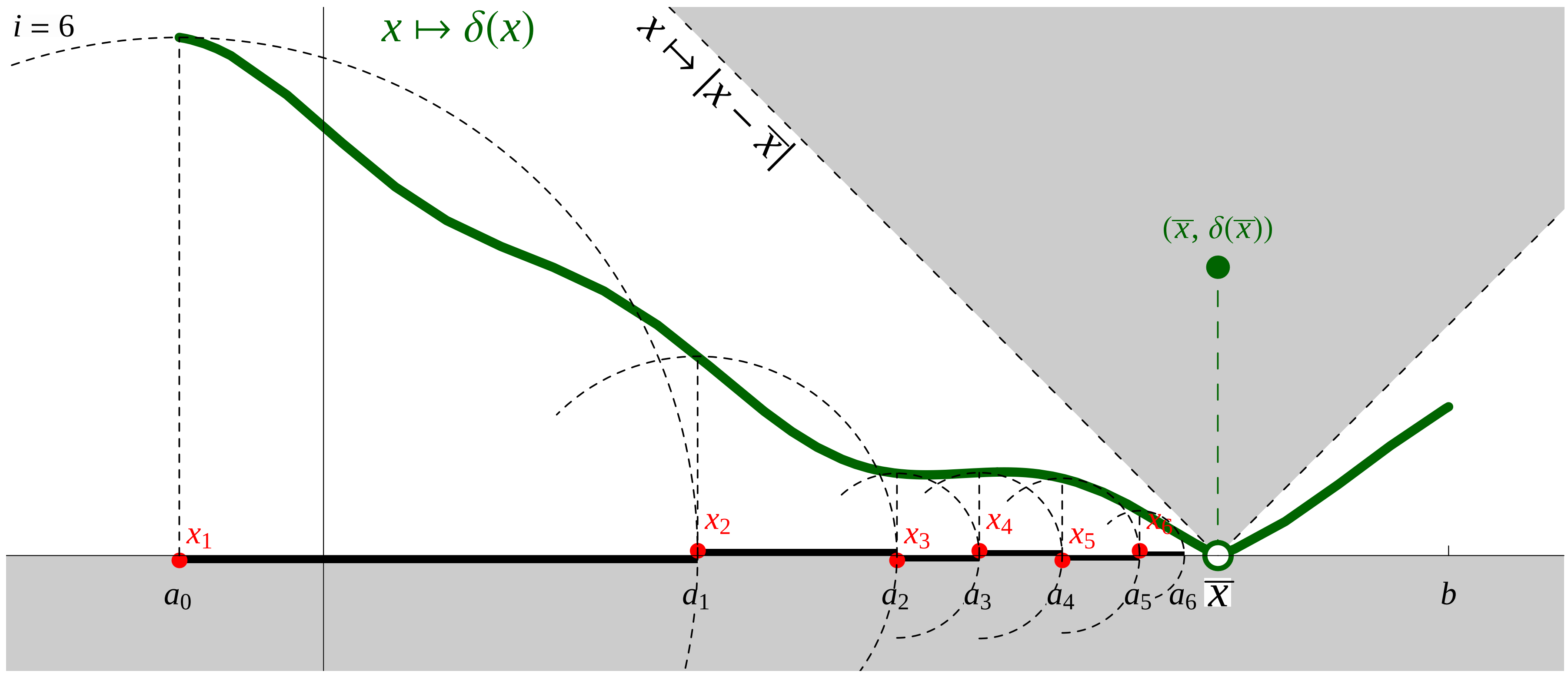


- Prendiamo questo calibro già noto.
  - **Il primo intervallino si fa tranquillamente.**
  - **Anche il secondo intervallino viene liscio.**
  - **Si arriva facilmente per esempio a 6 intervallini.**

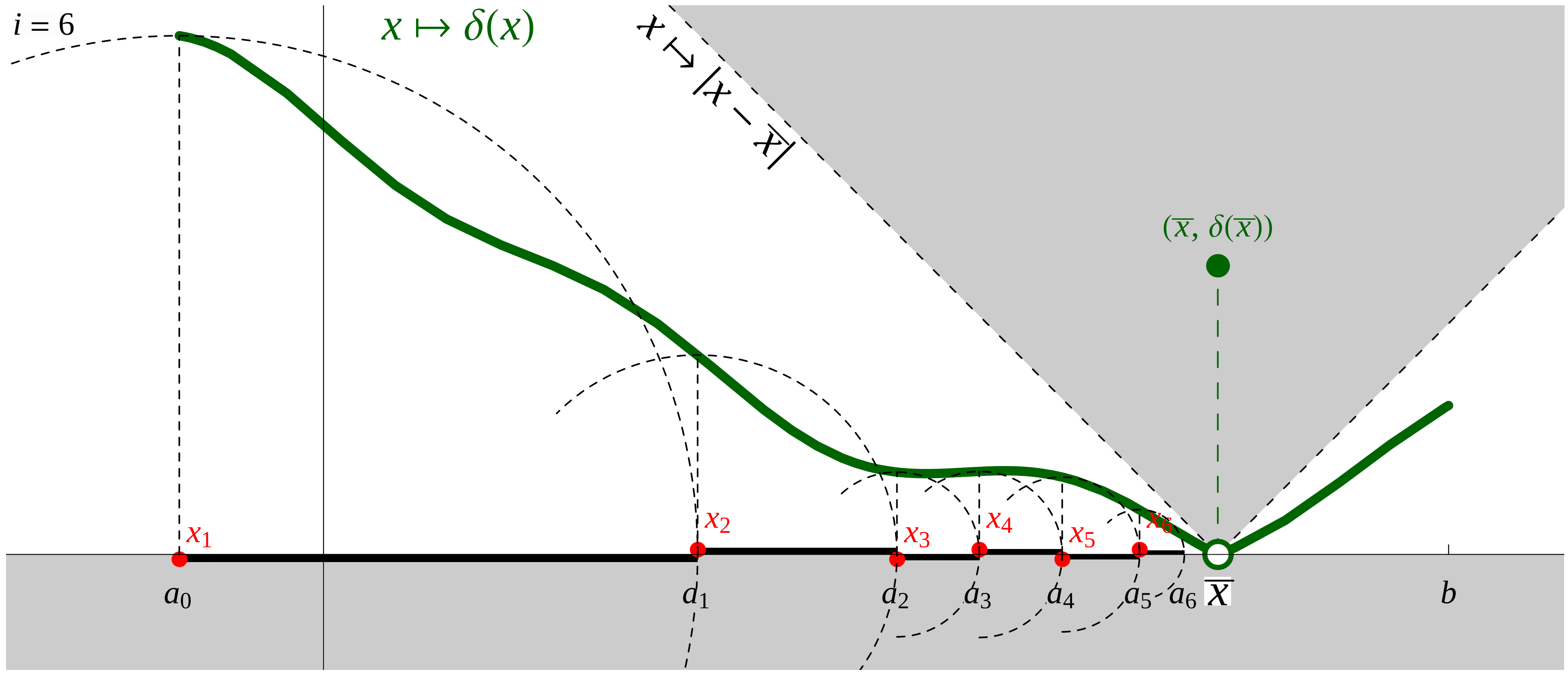


- Il problema è che questo procedimento non riuscirà *mai* ad arrivare a $\bar{x}$ in un numero finito di passi,

Costruzione fallita

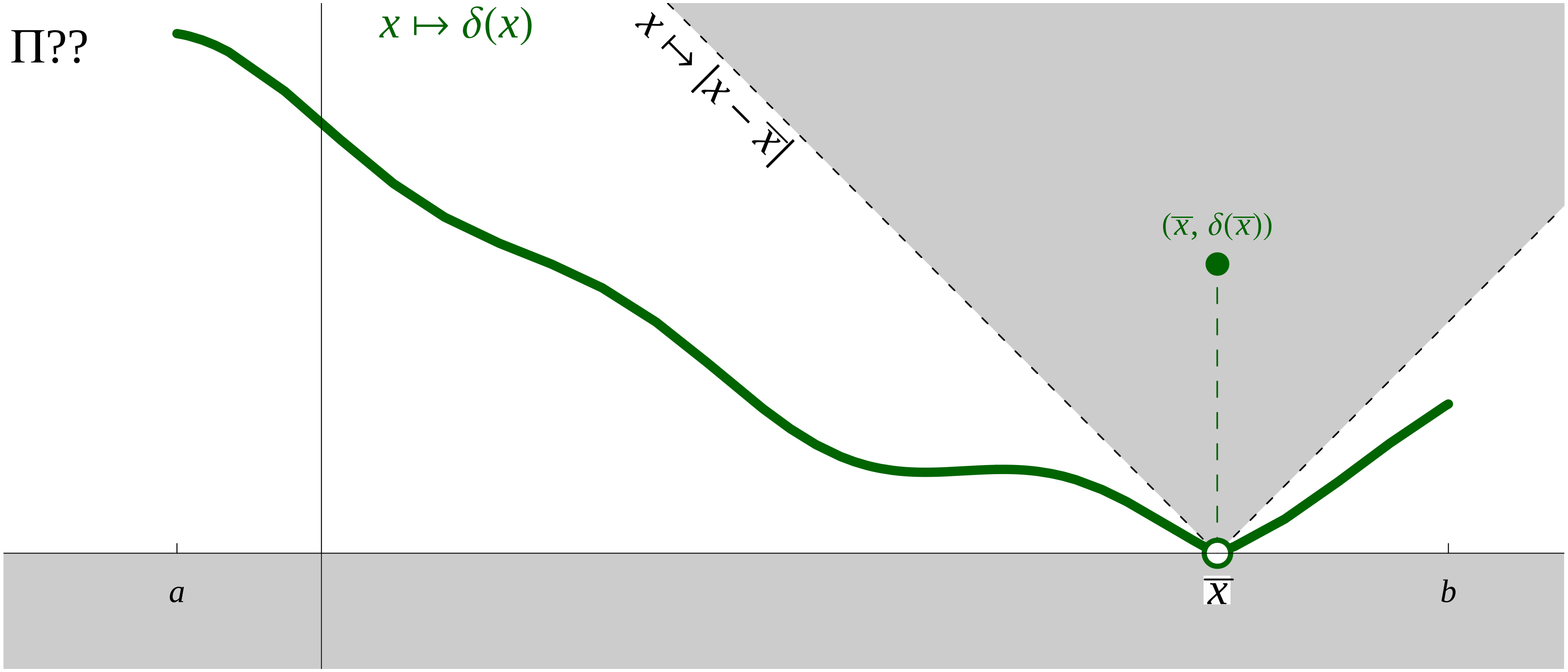


- Il problema è che questo procedimento non riuscirà *mai* ad arrivare a $\bar{x}$ in un numero finito di passi,
  - **tanto meno a scavalcare $\bar{x}$ per giungere fino a b.**



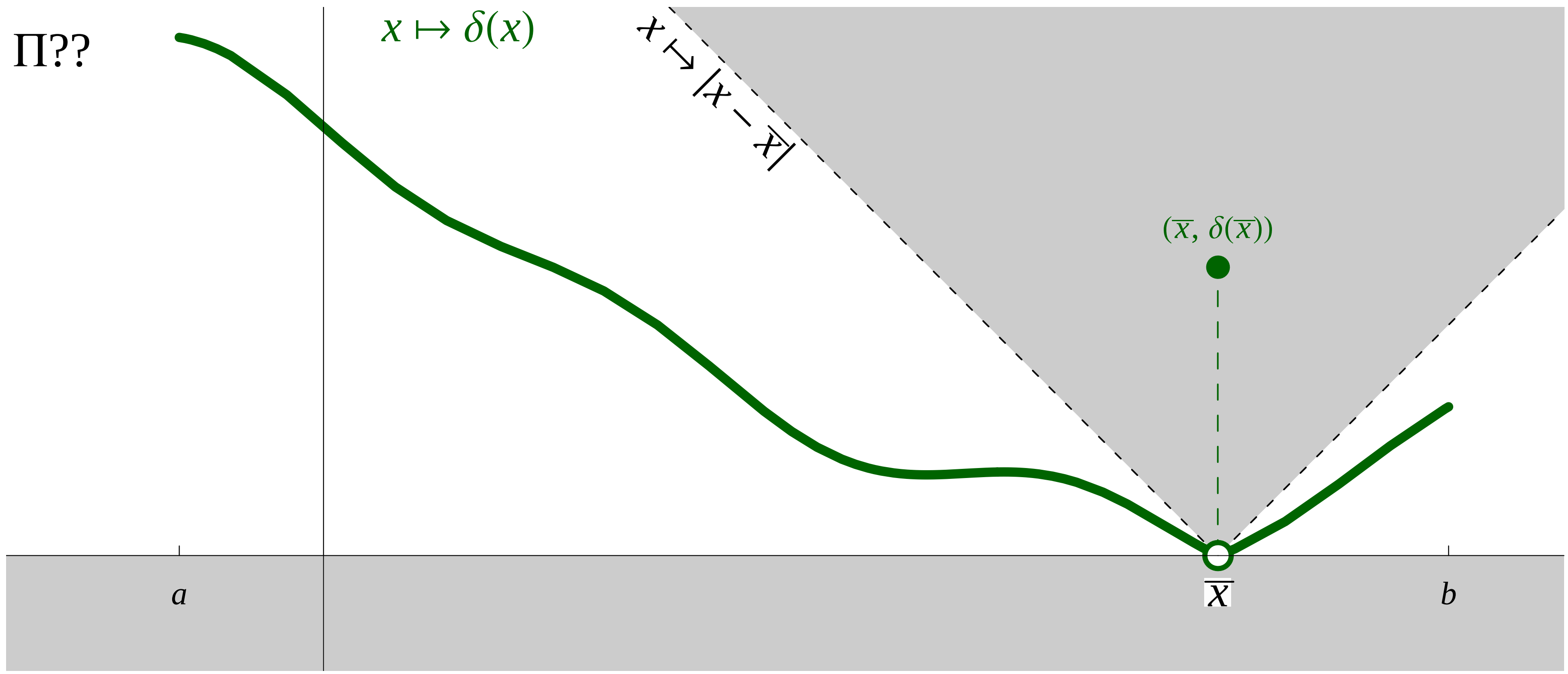
- Il problema è che questo procedimento non riuscirà *mai* ad arrivare a $\bar{x}$ in un numero finito di passi,
  - **tanto meno a scavalcare $\bar{x}$ per giungere fino a b.**
- Riuscite a intuire il perché? E a dimostrarlo?

Costruzione fallita

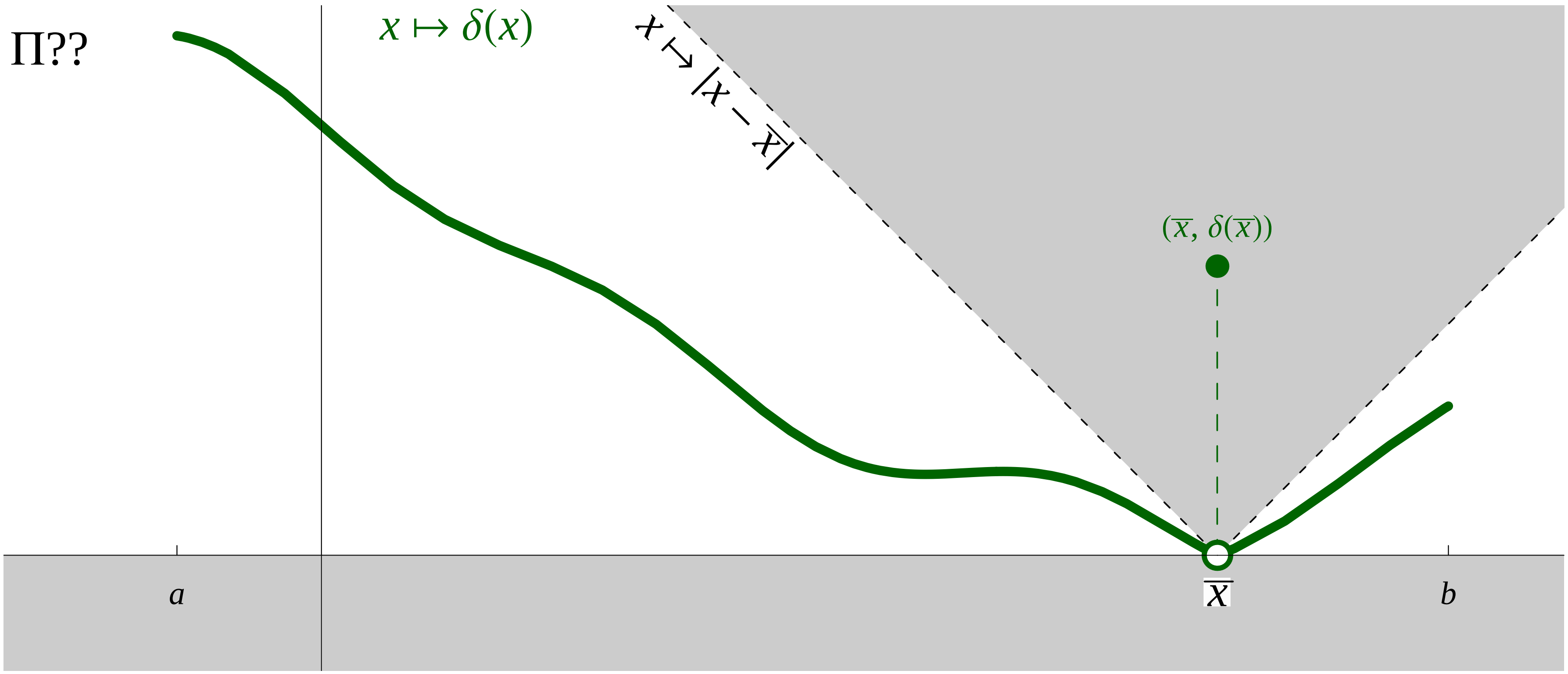


- La situazione non è disperata:

Costruzione fallita



- La situazione non è disperata:
  - **basta un cambio di strategia e una suddivisione adattata si trova velocemente.**



- La situazione non è disperata:
  - **basta un cambio di strategia e una suddivisione adattata si trova velocemente.**
  - **Provateci!**

Costruzione fallita

- Tuttavia sospetto che anche la nuova strategia fallisca con calibri più elaborati.

Costruzione fallita

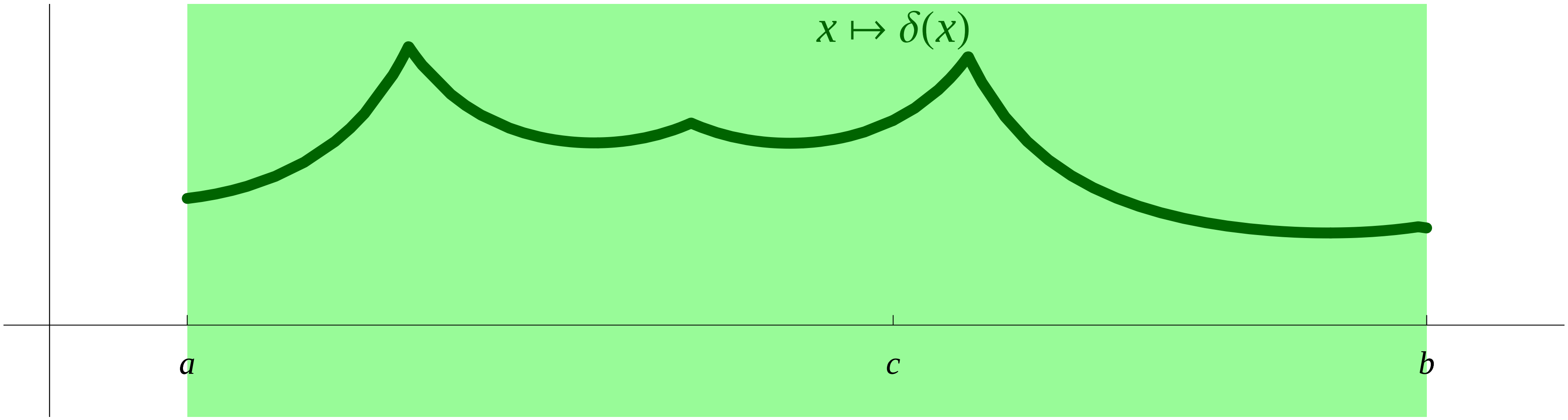
- Tuttavia sospetto che anche la nuova strategia fallisca con calibri più elaborati.
- Dubito che si possa scrivere un algoritmo che produca una suddivisione adattata per *qualunque* calibro.

Costruzione fallita

- Tuttavia sospetto che anche la nuova strategia fallisca con calibri più elaborati.
- Dubito che si possa scrivere un algoritmo che produca una suddivisione adattata per *qualunque* calibro.
- Prima di dare il teorema principale sull'esistenza di suddivisioni adattate a un calibro, vediamo brevemente la tecnica della concatenazione di due suddivisioni adattate.

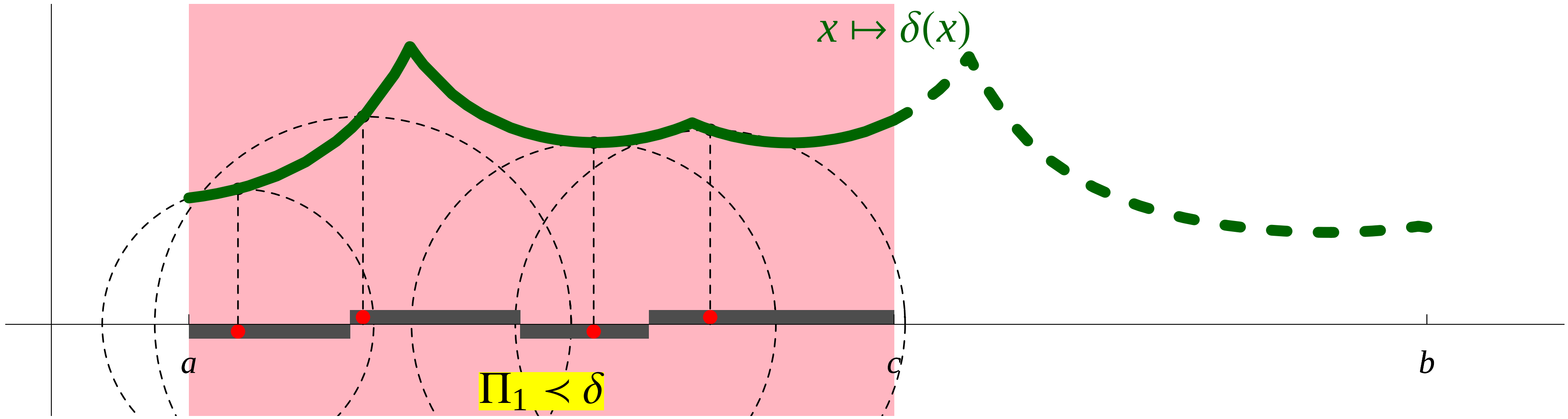
Concatenazione

Concatenazione

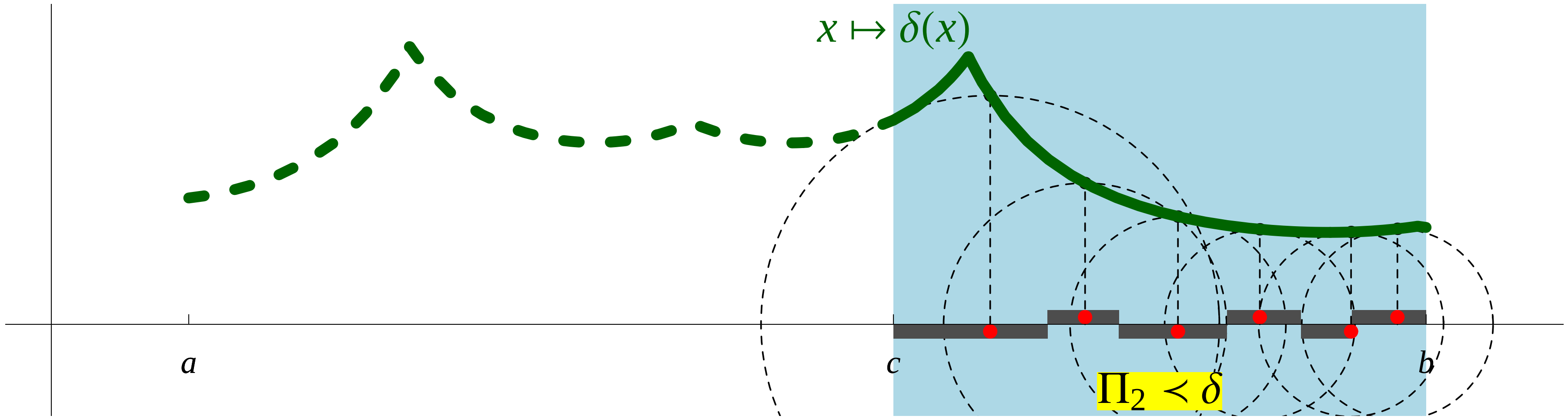


- **Abbiamo tre punti** $a < c < b$ **e un calibro** $\delta(x)$ **su** $[a, b]$**.**

Concatenazione

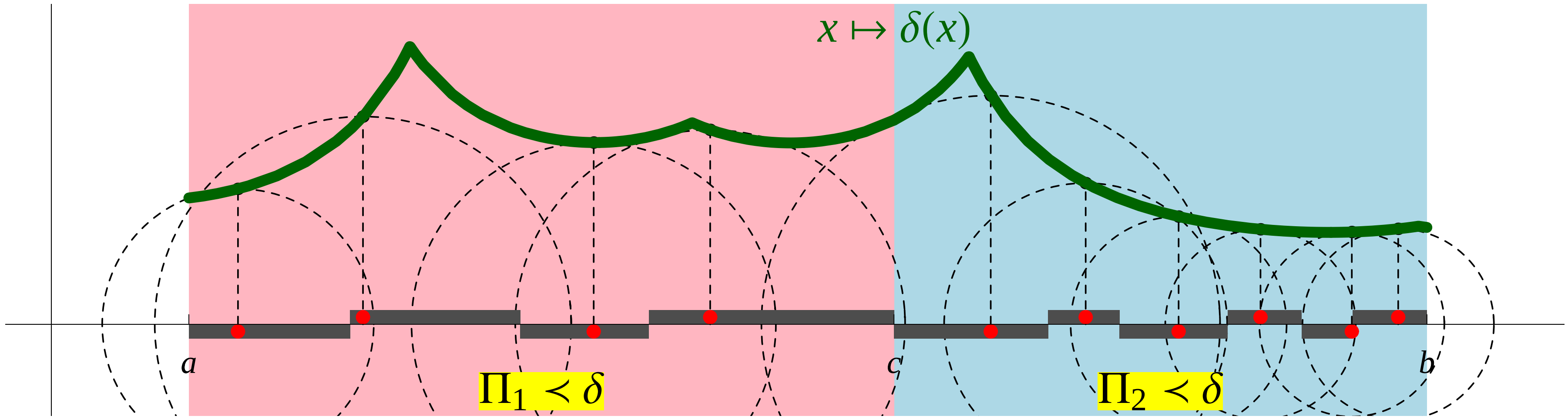


- **Abbiamo tre punti** $a < c < b$ **e un calibro** $\delta(x)$ **su** $[a, b]$**.**
  - Supponiamo di avere una suddivisione Π_1 di $[a, c]$ adattata a $\delta(x)$,

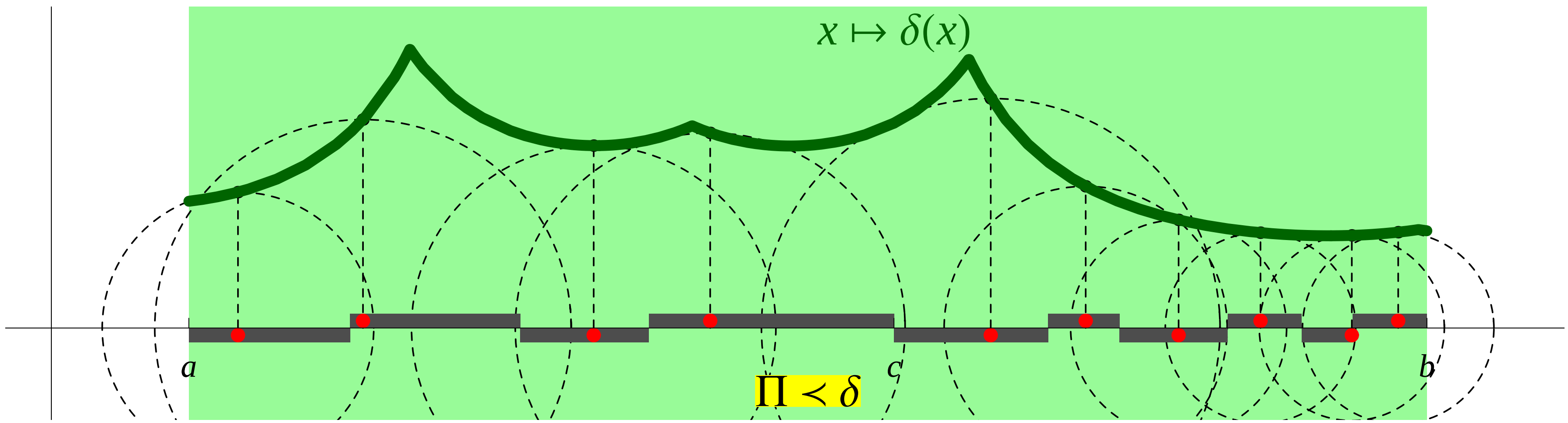


- **Abbiamo tre punti $a < c < b$ e un calibro $\delta(x)$ su $[a, b]$.**
  - Supponiamo di avere una suddivisione Π_1 di $[a, c]$ adattata a $\delta(x)$,
  - e di avere anche una suddivisione Π_2 di $[c, b]$, pure adattata a $\delta(x)$.

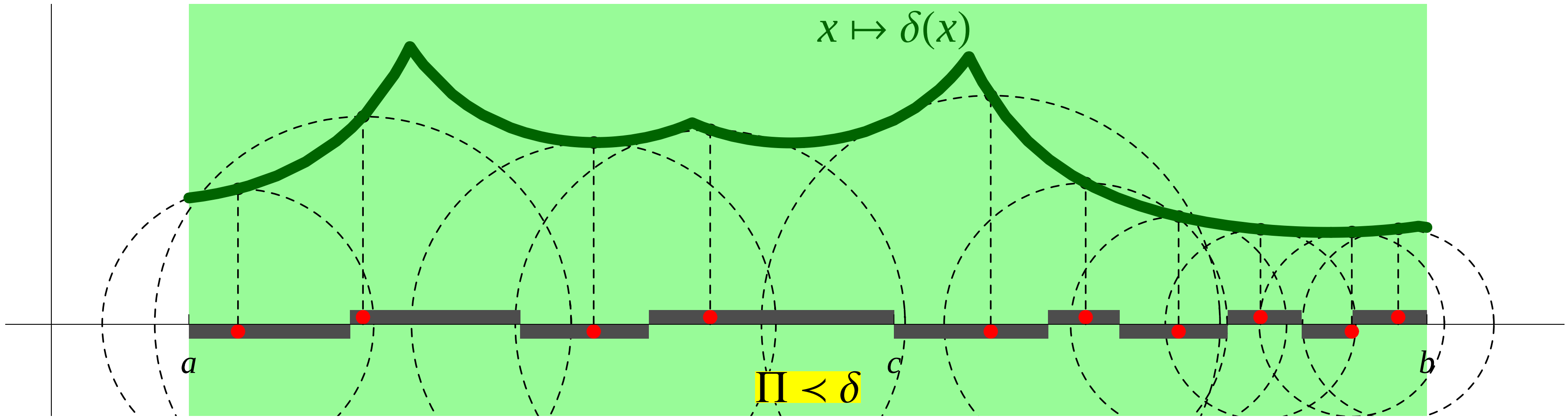
Concatenazione



- **Abbiamo tre punti $a < c < b$ e un calibro $\delta(x)$ su $[a, b]$.**
  - Supponiamo di avere una suddivisione Π_1 di $[a, c]$ adattata a $\delta(x)$,
  - e di avere anche una suddivisione Π_2 di $[c, b]$, pure adattata a $\delta(x)$.
- **Consideriamo Π_1 e Π_2 una accanto all'altra.**



- **Abbiamo tre punti $a < c < b$ e un calibro $\delta(x)$ su $[a, b]$.**
  - Supponiamo di avere una suddivisione Π_1 di $[a, c]$ adattata a $\delta(x)$,
  - e di avere anche una suddivisione Π_2 di $[c, b]$, pure adattata a $\delta(x)$.
- **Consideriamo Π_1 e Π_2 una accanto all'altra.**
- **Viene fuori una suddivisione Π di tutto $[a, b]$, pure lei adattata a $\delta(x)$.**



- **Abbiamo tre punti $a < c < b$ e un calibro $\delta(x)$ su $[a, b]$.**
  - Supponiamo di avere una suddivisione Π_1 di $[a, c]$ adattata a $\delta(x)$,
  - e di avere anche una suddivisione Π_2 di $[c, b]$, pure adattata a $\delta(x)$.
- **Consideriamo Π_1 e Π_2 una accanto all'altra.**
- **Viene fuori una suddivisione Π di tutto $[a, b]$, pure lei adattata a $\delta(x)$.**
  - Π sarà detta "concatenazione" di Π_1 e Π_2.

Esistenza

Esistenza

- *Ecco il risultato di base sulle suddivisioni adattate:*

Esistenza

- *Ecco il risultato di base sulle suddivisioni adattate:*
- ***Teorema.*** ***Data un calibro*** $\delta(x)$ ***su*** $[a, b]$***, esiste sempre una suddivisione*** Π ***adattata a*** δ***.***

Esistenza

- *Ecco il risultato di base sulle suddivisioni adattate:*
- ***Teorema.*** ***Data un calibro $\delta(x)$ su $[a, b]$, esiste sempre una suddivisione Π adattata a δ.***
  - La dimostrazione che vedremo *non è costruttiva*:

Esistenza

- *Ecco il risultato di base sulle suddivisioni adattate:*
- ***Teorema.*** ***Data un calibro*** $\delta(x)$ ***su*** $[a, b]$***, esiste sempre una suddivisione*** Π ***adattata a*** δ***.***
  - La dimostrazione che vedremo *non è costruttiva*:
    - ***non*** **mostra come** ***costruire*** **una suddivisione adattata a un calibro dato,**

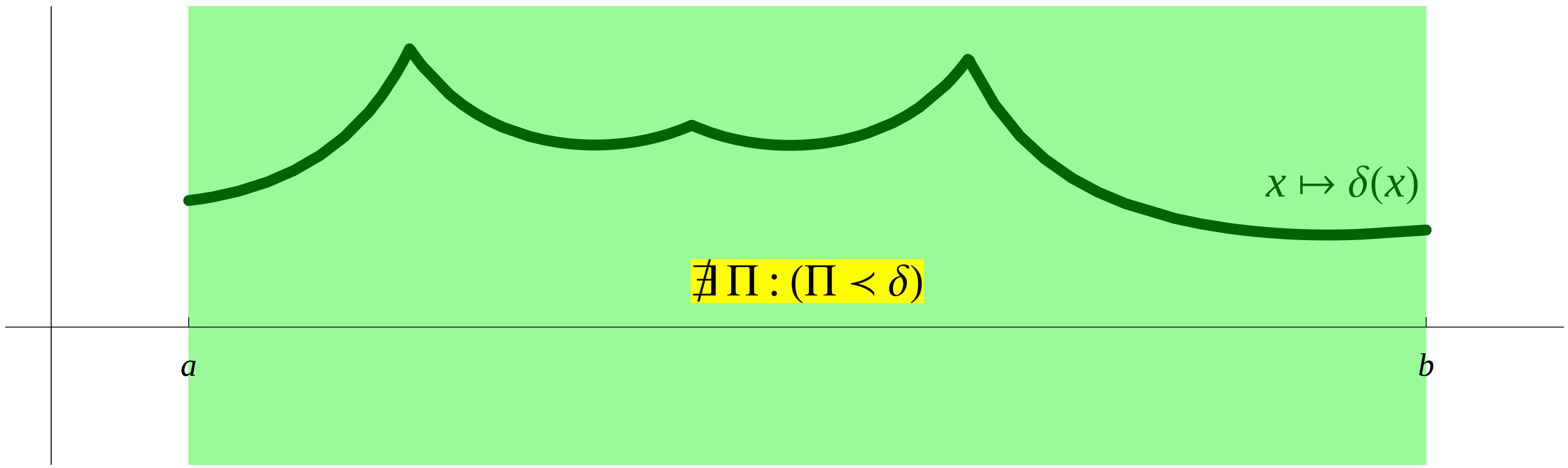
Esistenza

- *Ecco il risultato di base sulle suddivisioni adattate:*
- ***Teorema.*** ***Data un calibro $\delta(x)$ su $[a, b]$, esiste sempre una suddivisione Π adattata a δ.***
  - La dimostrazione che vedremo *non è costruttiva*:
    - ***non*** **mostra come** ***costruire*** **una suddivisione adattata a un calibro dato,**
    - **ma fa vedere che** ***è assurdo negare*** **che ci siano suddivisioni adattate,**

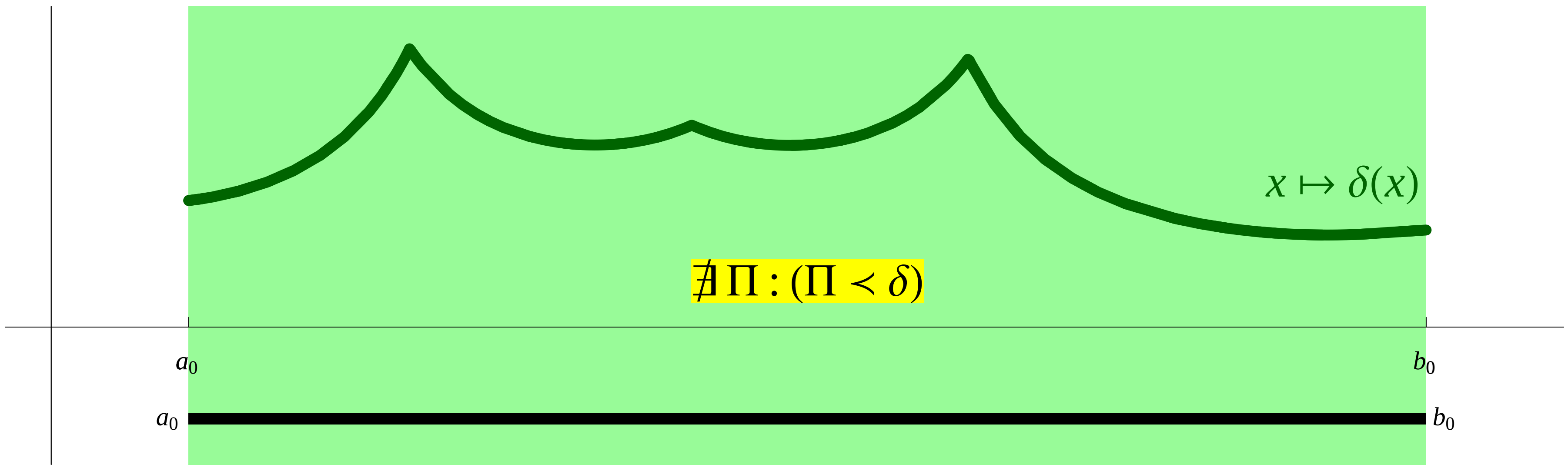
- *Ecco il risultato di base sulle suddivisioni adattate:*
- ***Teorema.*** ***Data un calibro $\delta(x)$ su $[a, b]$, esiste sempre una suddivisione Π adattata a δ.***
  - La dimostrazione che vedremo *non è costruttiva*:
    - ***non*** **mostra come *costruire* una suddivisione adattata a un calibro dato,**
    - **ma fa vedere che *è assurdo negare* che ci siano suddivisioni adattate,**
      - nel senso che la negazione conduce a contraddizioni.

Esistenza

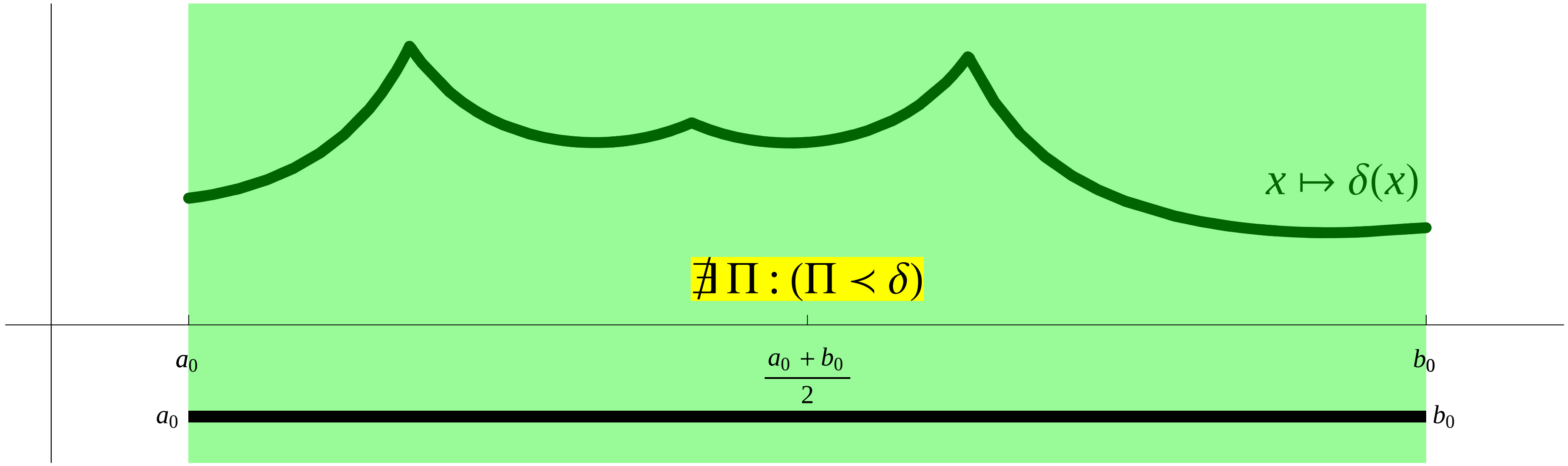
- *Ecco il risultato di base sulle suddivisioni adattate:*
- ***Teorema.*** ***Data un calibro $\delta(x)$ su $[a, b]$, esiste sempre una suddivisione Π adattata a δ.***
  - La dimostrazione che vedremo *non è costruttiva*:
    - ***non*** **mostra come** ***costruire*** **una suddivisione adattata a un calibro dato,**
    - **ma fa vedere che** ***è assurdo negare*** **che ci siano suddivisioni adattate,**
      - nel senso che la negazione conduce a contraddizioni.
  - Dimostrazione. Supponiamo (per assurdo) che non esistano suddivisioni di $[a, b]$ adattate a δ.



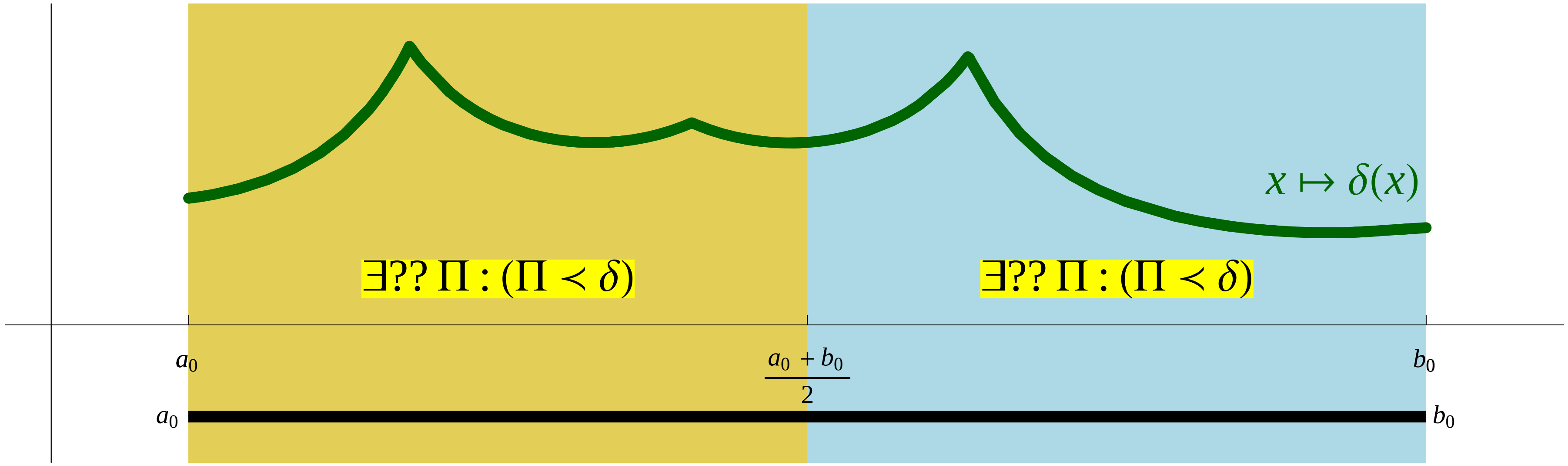
- Con l'idea della **bisezione** costruiremo una successione di intervalli inclusi.



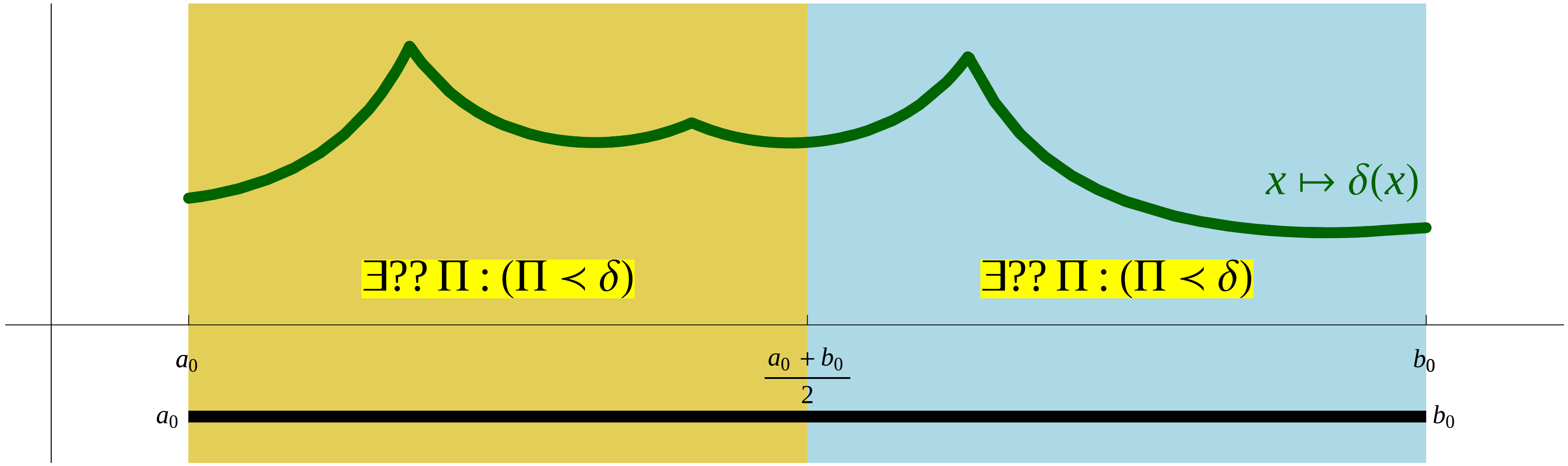
- **Con l'idea della bisezione costruiremo una successione di intervalli inclusi.**
- **L'intervallo iniziale è $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$.**



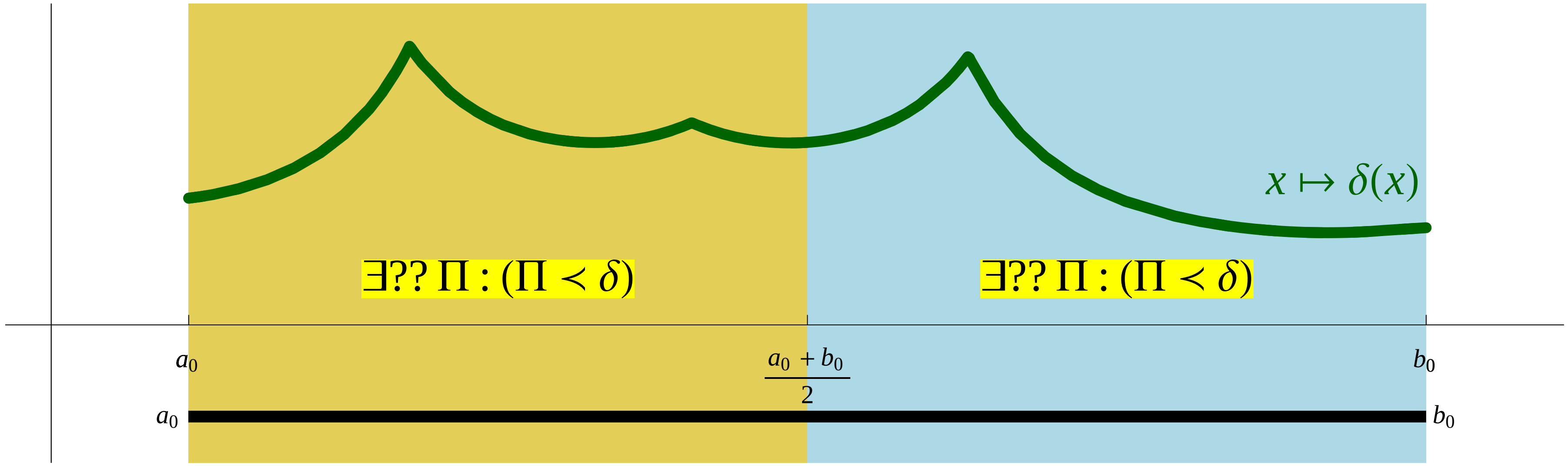
- **Con l'idea della bisezione costruiremo una successione di intervalli inclusi.**
- **L'intervallo iniziale è** $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$**.**
- **Il punto di mezzo** $(a_0 + b_0)/2$ **divide** I_0 **in due metà.**



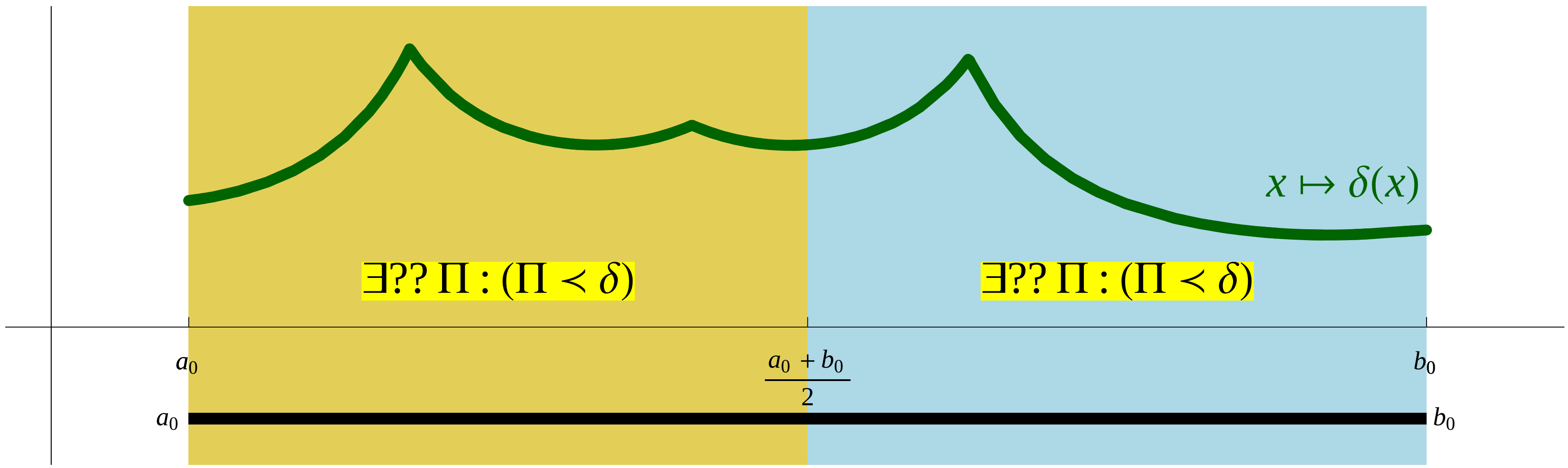
- **Con l'idea della bisezione costruiremo una successione di intervalli inclusi.**
- **L'intervallo iniziale è $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$.**
- **Il punto di mezzo $(a_0 + b_0)/2$ divide I_0 in due metà.**
- **Chiediamoci se su ciascuna delle metà esiste o no una suddivisione adattata.**



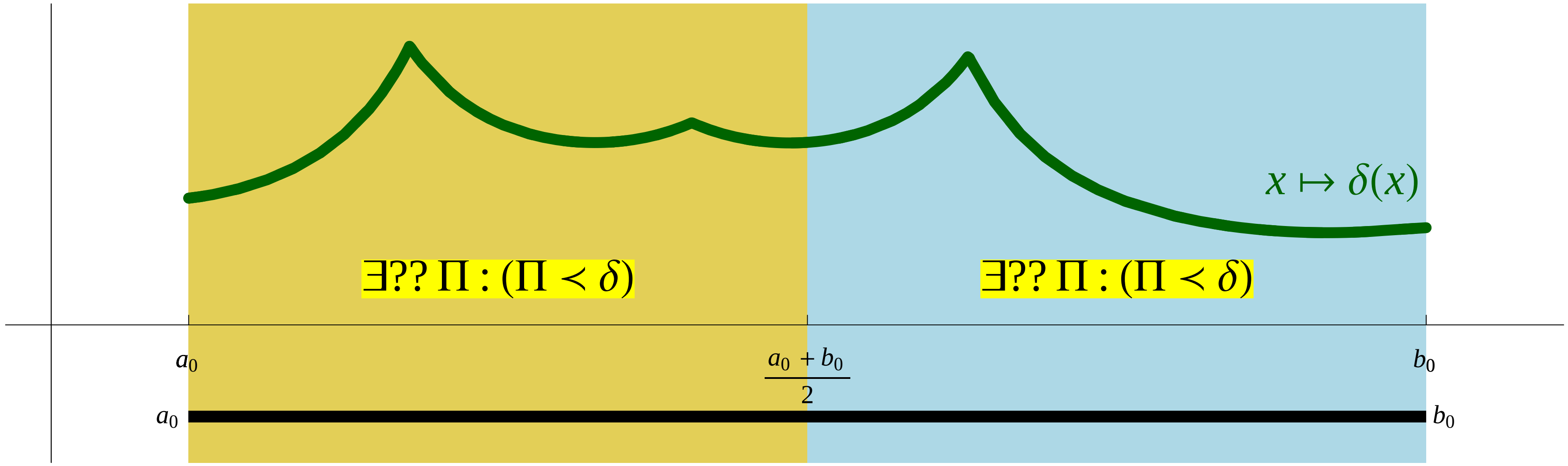
- Le due metà *non* possono avere *entrambe* una suddivisione adattata!



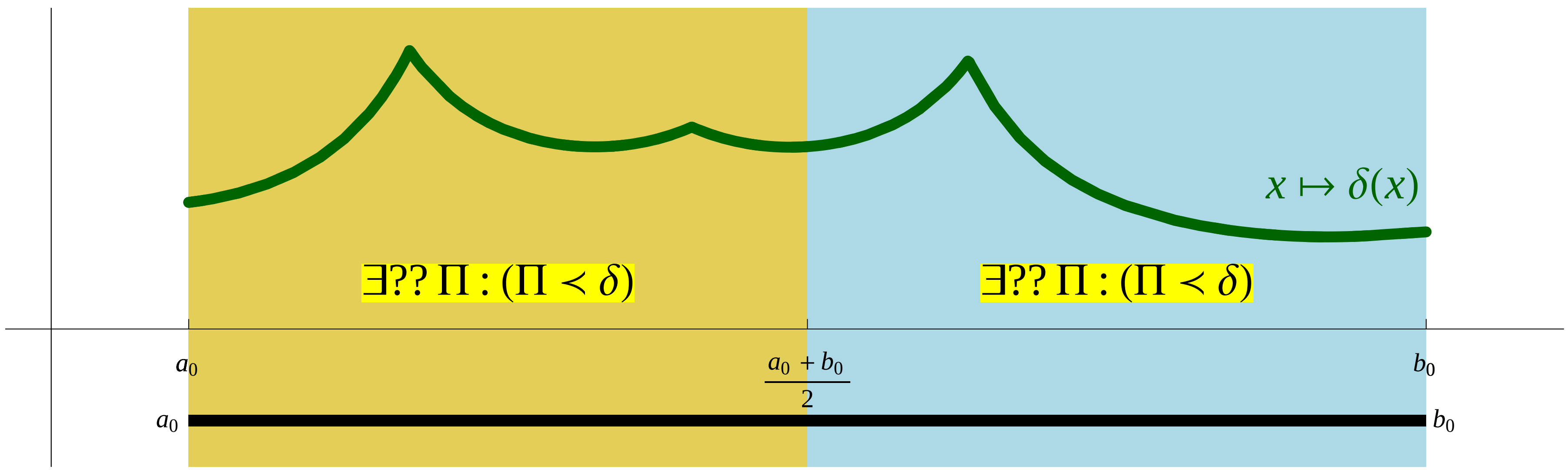
- Le due metà *non* possono avere *entrambe* una suddivisione adattata!
- Infatti



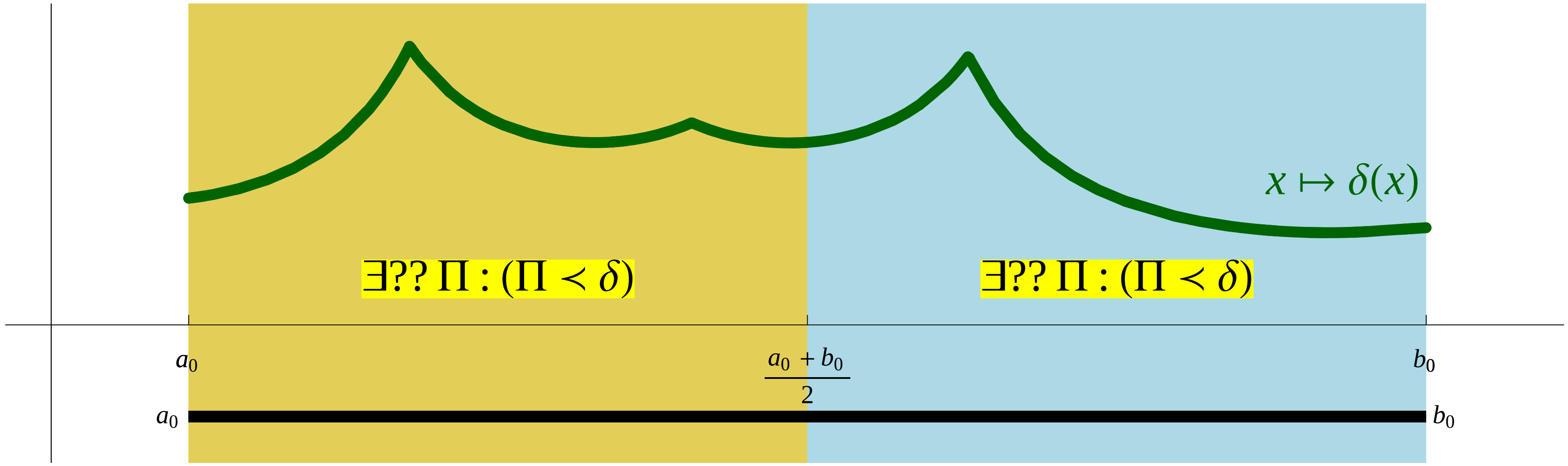
- **Le due metà *non* possono avere *entrambe* una suddivisione adattata!**
- **Infatti**
  - se ciascuna di loro l'avesse



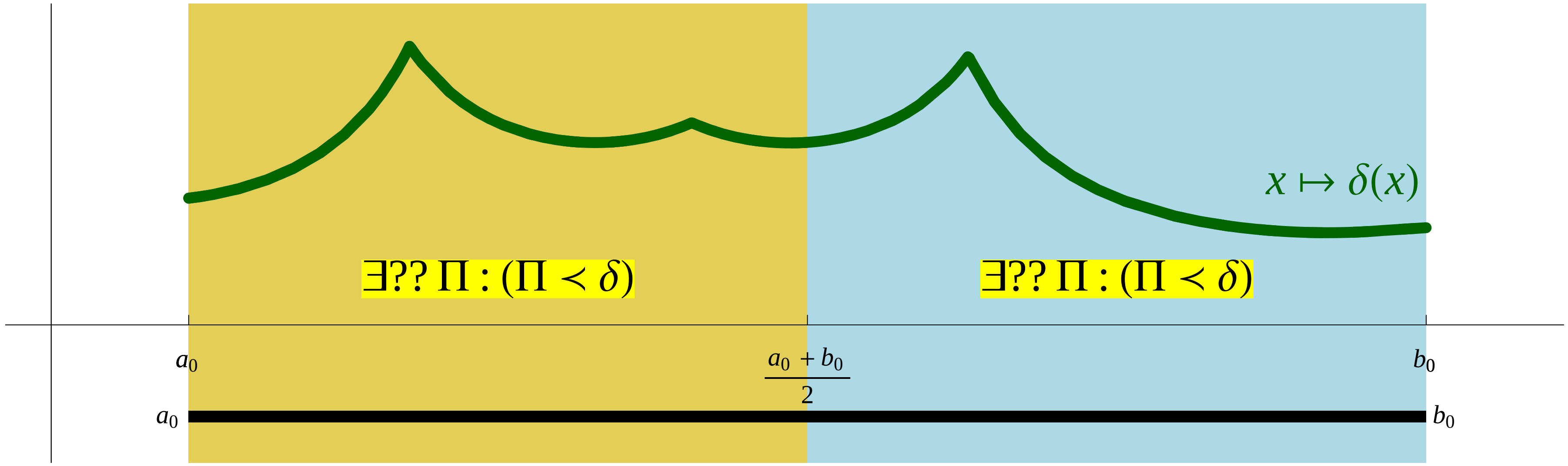
- **Le due metà *non* possono avere *entrambe* una suddivisione adattata!**
- **Infatti**
  - se ciascuna di loro l'avesse
  - potremmo concatenarle fra loro



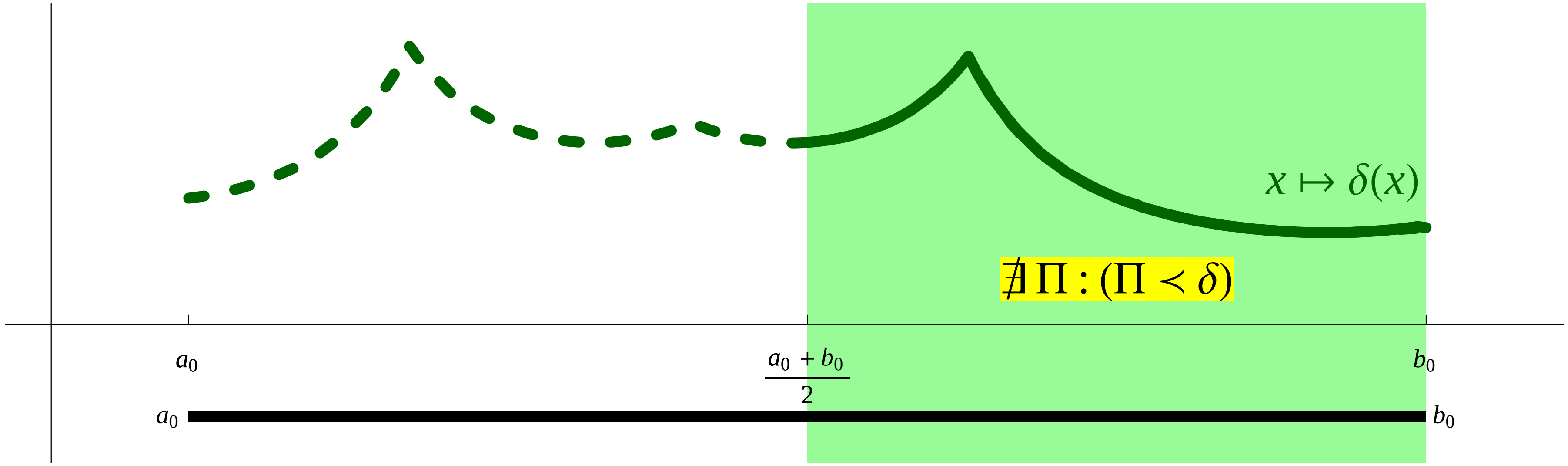
- **Le due metà *non* possono avere *entrambe* una suddivisione adattata!**
- **Infatti**
  - se ciascuna di loro l'avesse
  - potremmo concatenarle fra loro
  - e avremmo così una suddivisione adattata di I_0,



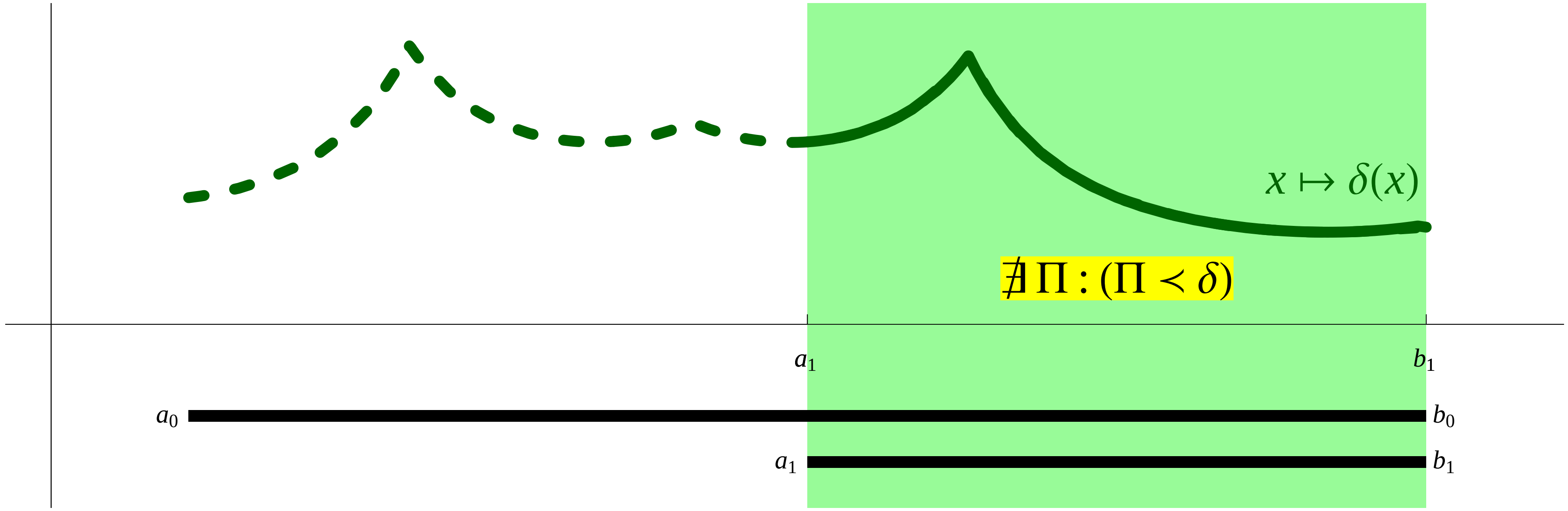
- **Le due metà *non* possono avere *entrambe* una suddivisione adattata!**
- **Infatti**
  - se ciascuna di loro l'avesse
  - potremmo concatenarle fra loro
  - e avremmo così una suddivisione adattata di I_0,
  - mentre abbiamo supposto che su I_0 non ce ne fossero.



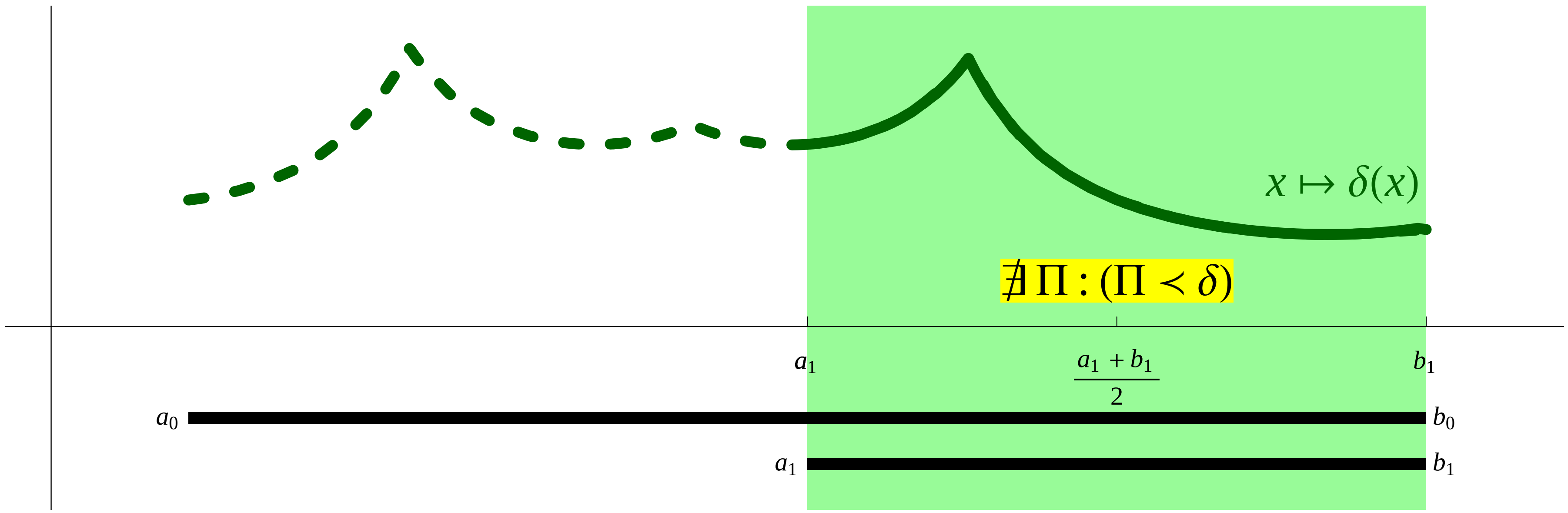
- ***Almeno una*** delle due metà ***non*** ha suddivisioni adattate



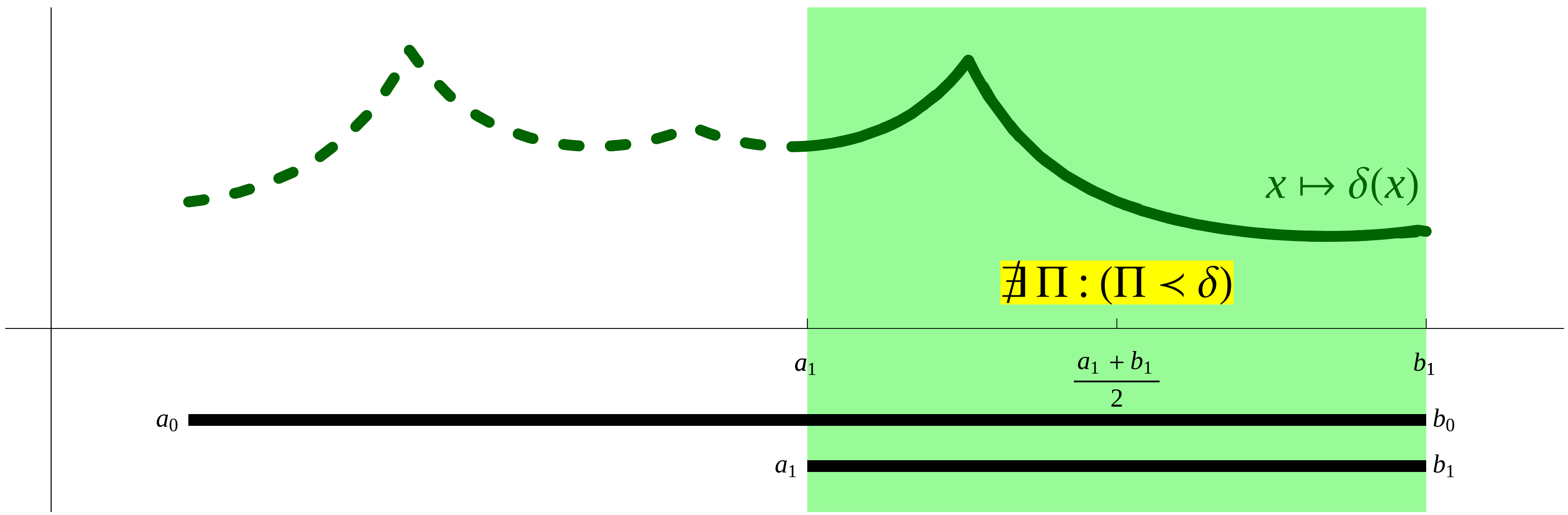
- ***Almeno una*** delle due metà ***non*** ha suddivisioni adattate.
- Per fissare le idee supponiamo che la metà a **destra** non abbia suddivisioni adattate.



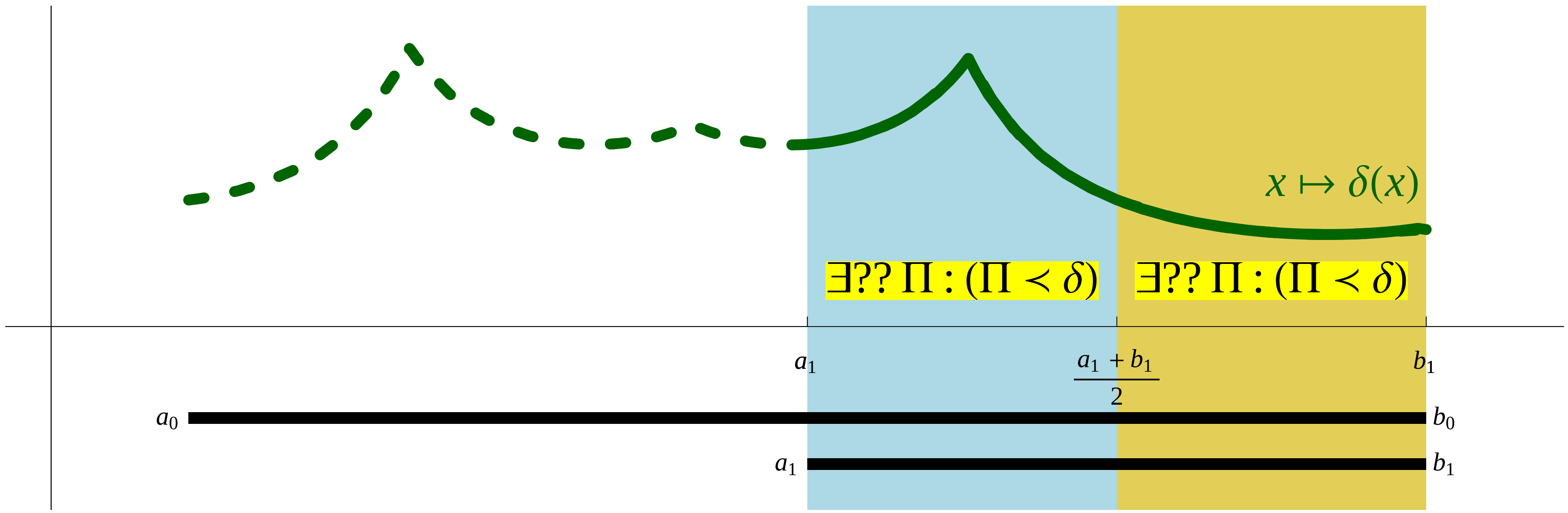
- **Sia $I_1 = [a_1, b_1]$ la metà scelta, che non ha suddivisioni adattate.**



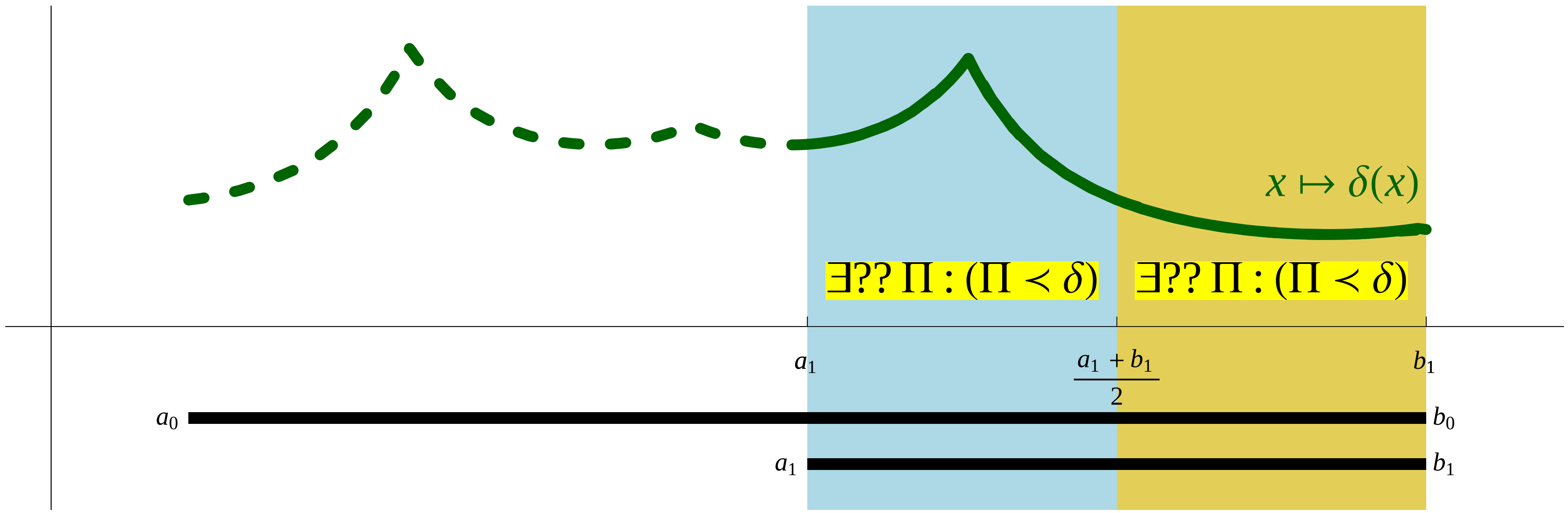
- Sia $I_1 = [a_1, b_1]$ la metà scelta, che non ha suddivisioni adattate.
- Prendiamo il punto medio di I_1, $(a_1 + b_1)/2$.



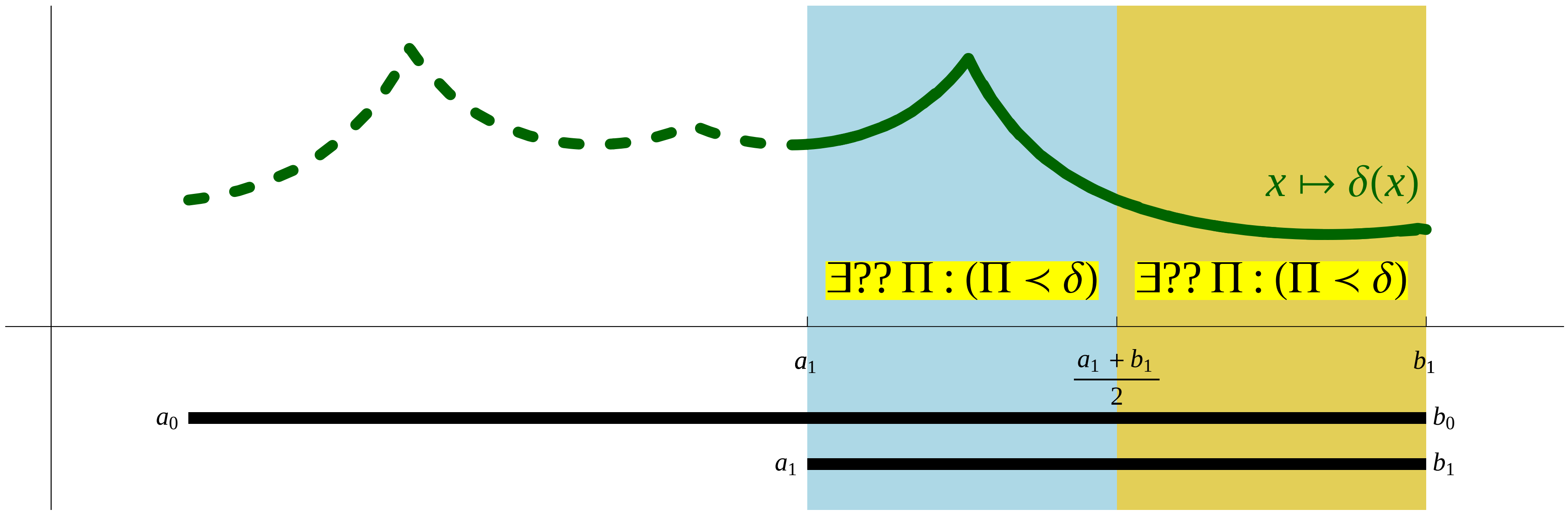
- **Sia $I_1 = [a_1, b_1]$ la metà scelta, che non ha suddivisioni adattate.**
- **Prendiamo il punto medio di I_1, $(a_1 + b_1)/2$.**
- **Questo divide a metà l'intervallo I_1.**



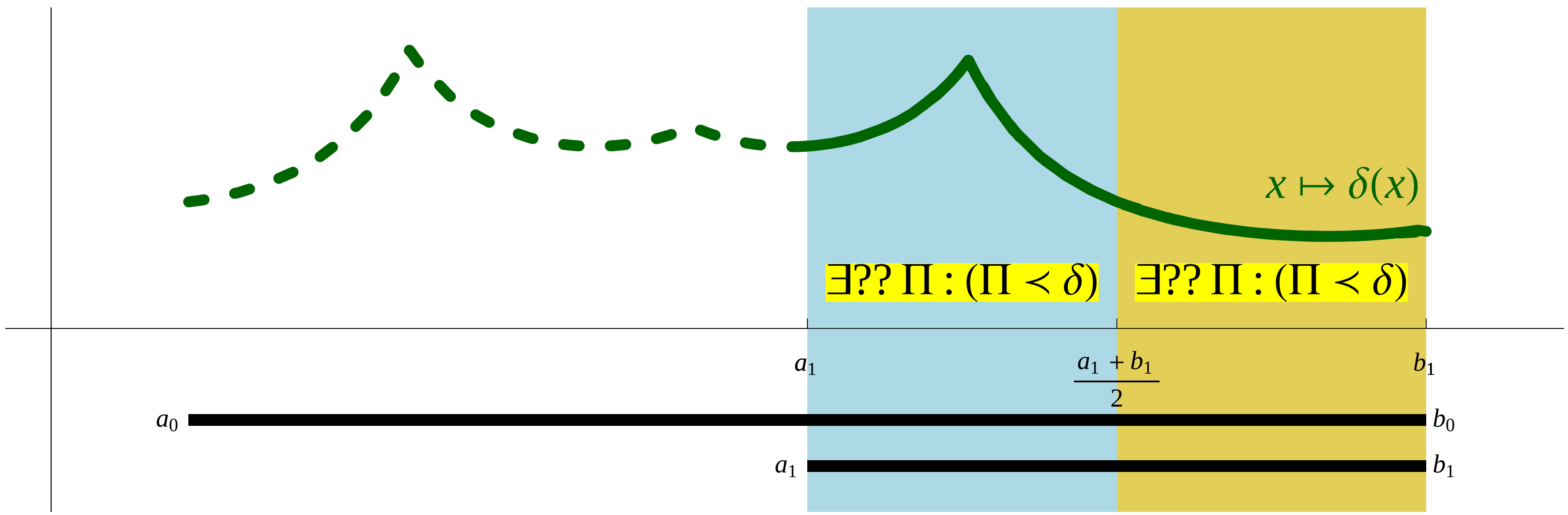
- Sia $I_1 = [a_1, b_1]$ la metà scelta, che non ha suddivisioni adattate.
- Prendiamo il punto medio di I_1, $(a_1 + b_1)/2$.
- Questo divide a metà l'intervallo I_1.
- Chiediamoci se su ciascuna delle metà esiste una suddivisione adattata.



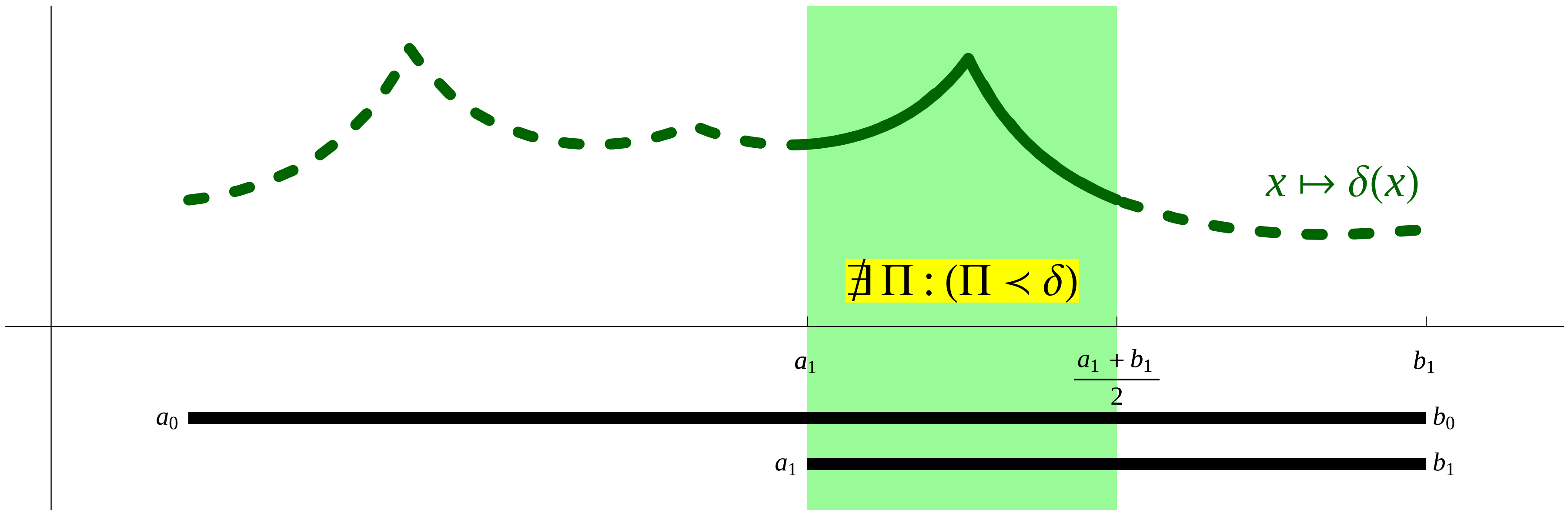
- Come prima, *almeno una* delle due metà *non* ha suddivisioni adattate



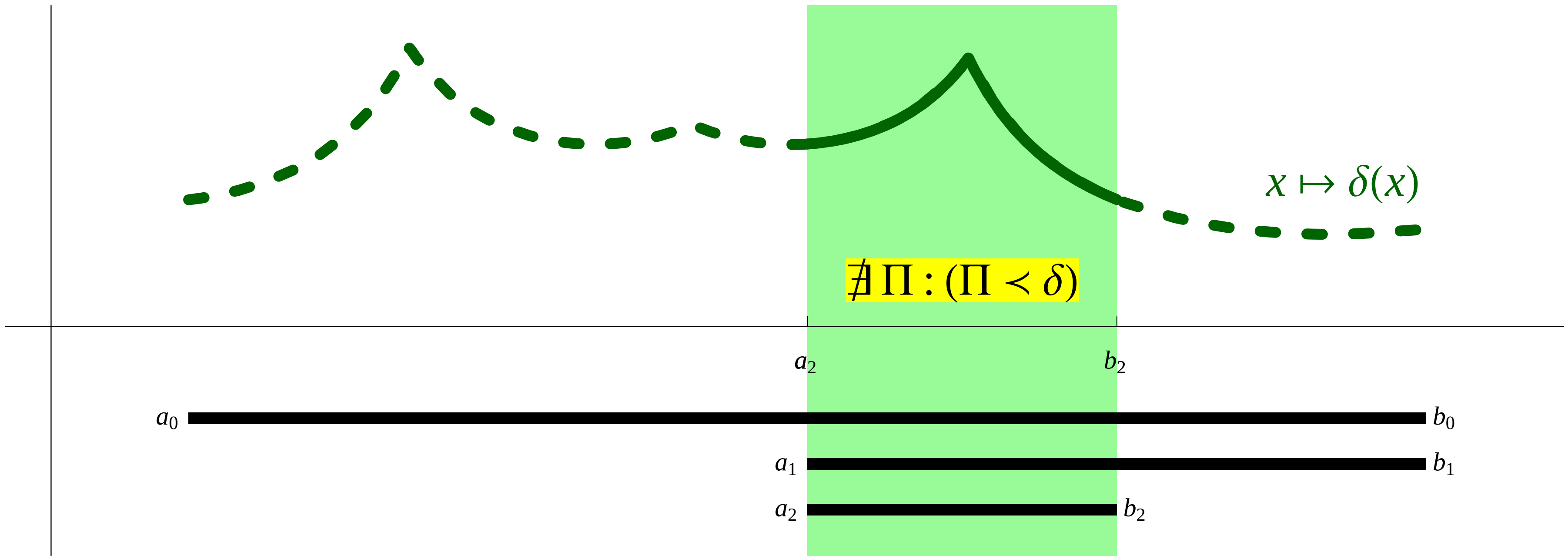
- **Come prima, *almeno una* delle due metà *non* ha suddivisioni adattate**
  - se no, potremmo concatenare le due suddivisioni e avremmo una suddivisione adattata di I_1,



- **Come prima, *almeno una* delle due metà *non* ha suddivisioni adattate**
  - se no, potremmo concatenare le due suddivisioni e avremmo una suddivisione adattata di I_1,
  - mentre avevamo stabilito che I_1 non ne aveva.

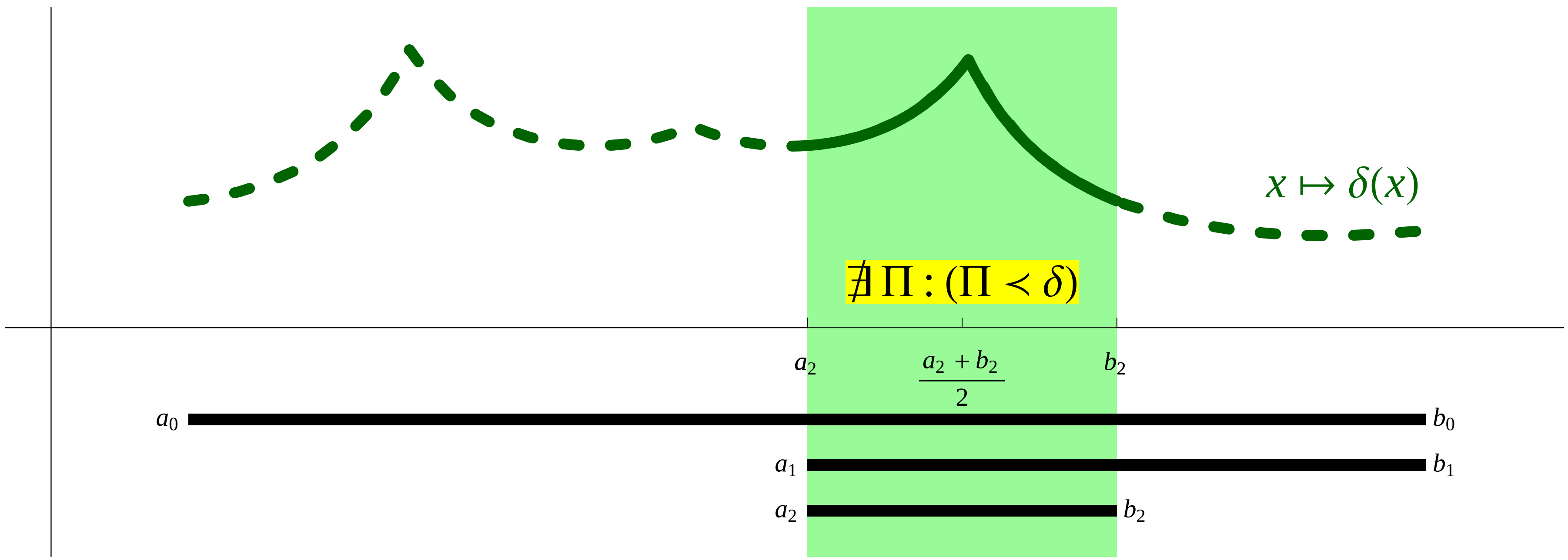


- **Come prima, *almeno una* delle due metà *non* ha suddivisioni adattate**
  - se no, potremmo concatenare le due suddivisioni e avremmo una suddivisione adattata di I_1,
  - mentre avevamo stabilito che I_1 non ne aveva.
- **Per fissare le idee supponiamo che la metà a sinistra non abbia suddivisioni adattate.**

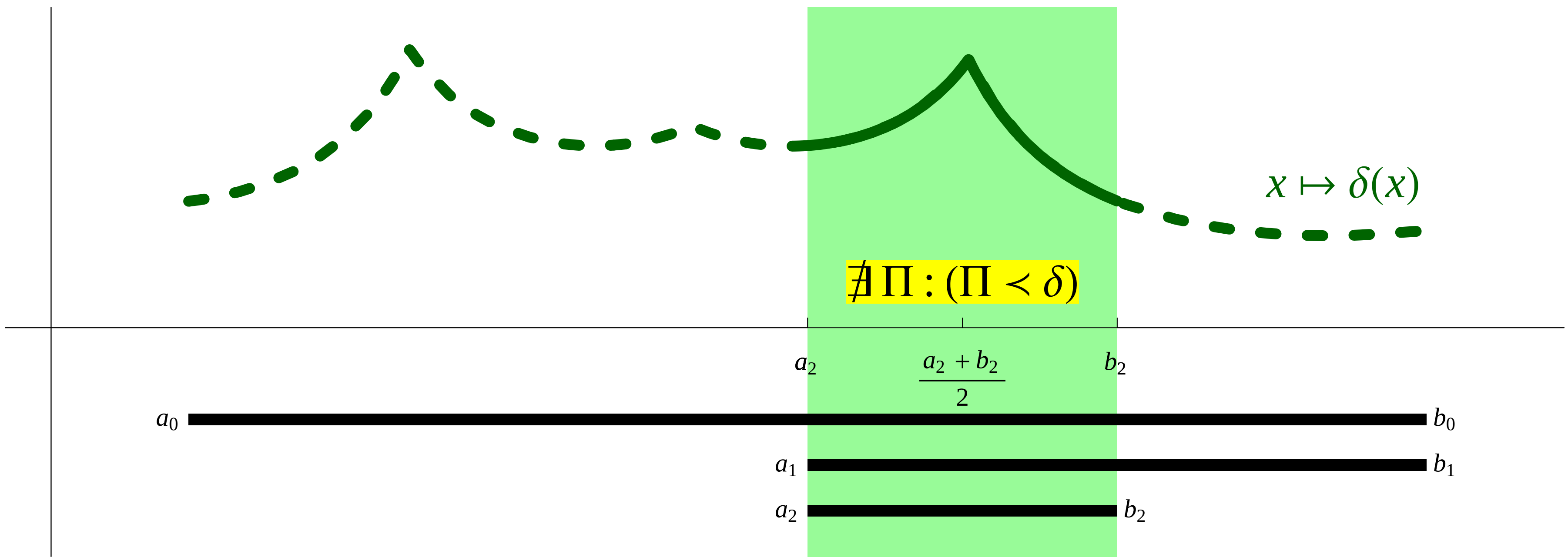


- **Sia $I_2 = [a_2, b_2]$ la metà scelta, che non ha suddivisioni adattate.**

Esistenza

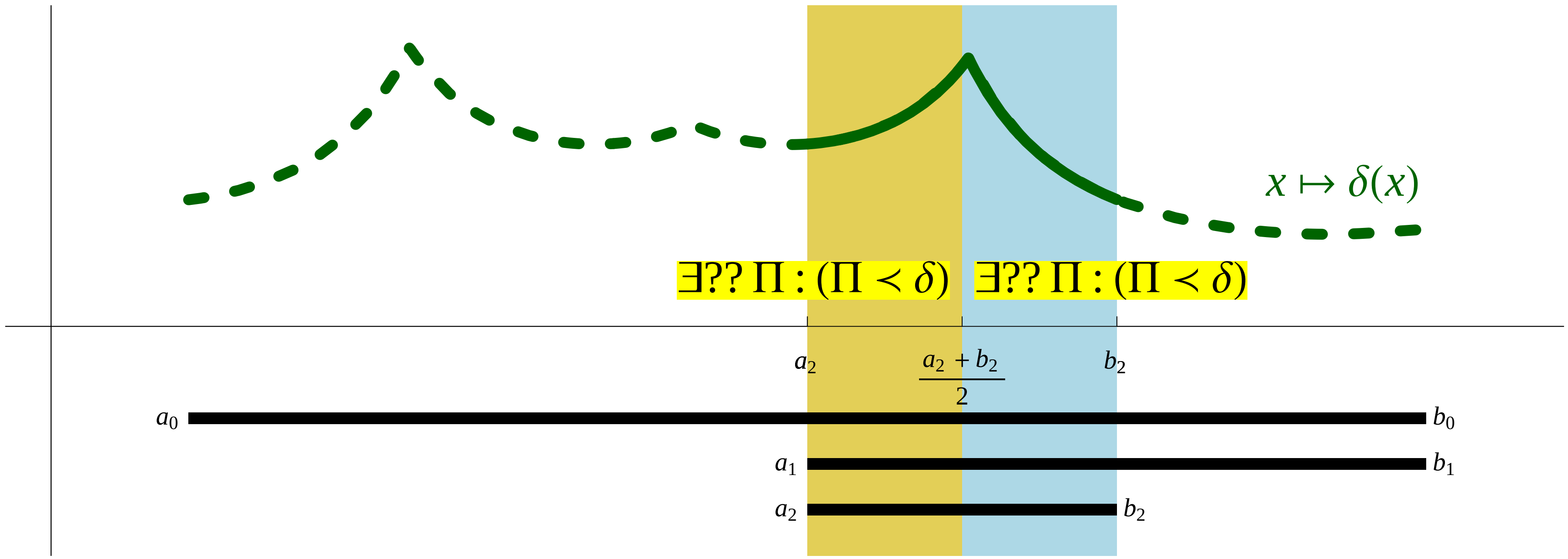


- **Sia $I_2 = [a_2, b_2]$ la metà scelta, che non ha suddivisioni adattate.**
- **Prendiamo il punto medio di I_2, $(a_2 + b_2)/2$.**



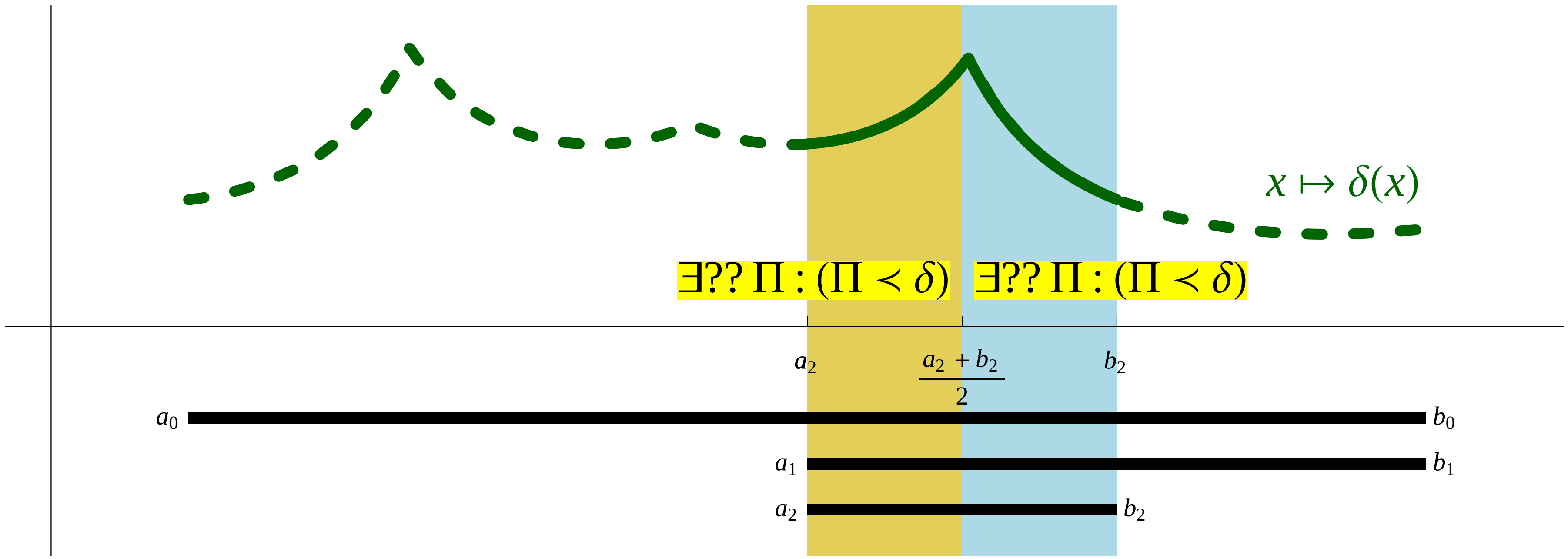
- **Sia $I_2 = [a_2, b_2]$ la metà scelta, che non ha suddivisioni adattate.**
- **Prendiamo il punto medio di I_2, $(a_2 + b_2)/2$.**
- **Questo divide a metà l'intervallo I_2.**

Esistenza

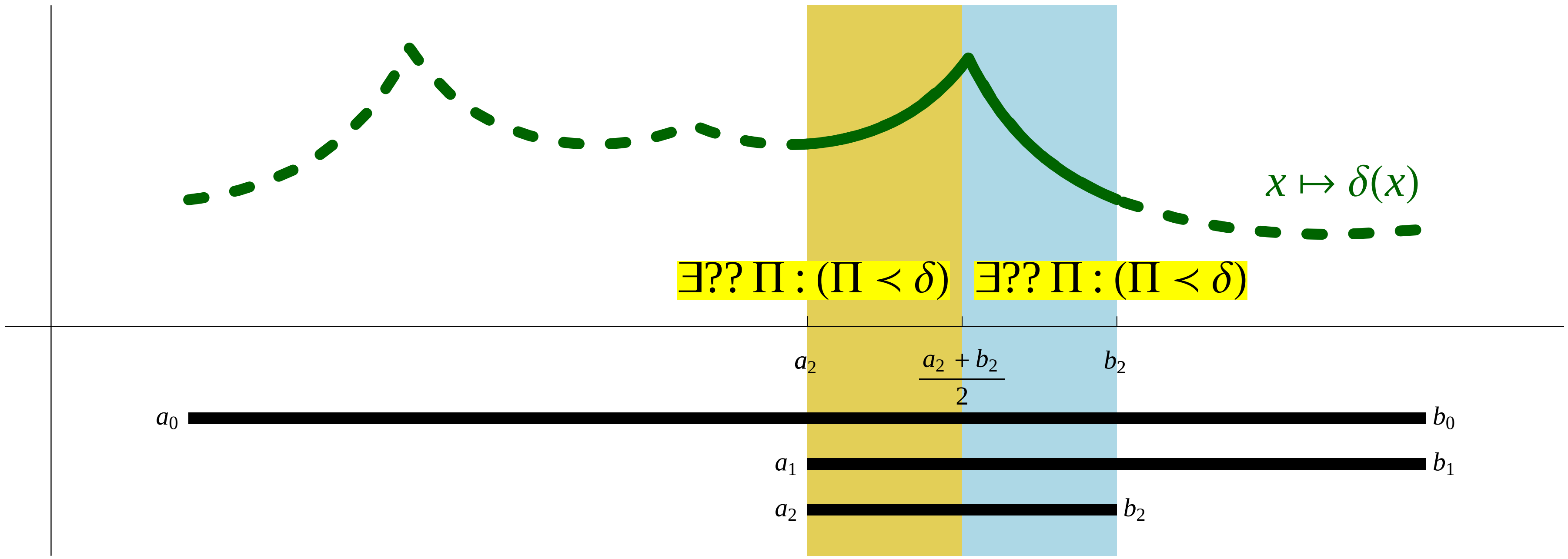


- **Sia $I_2 = [a_2, b_2]$ la metà scelta, che non ha suddivisioni adattate.**
- **Prendiamo il punto medio di I_2, $(a_2 + b_2)/2$.**
- **Questo divide a metà l'intervallo I_2.**
- **Chiediamoci se su ciascuna delle metà esiste una suddivisione adattata.**

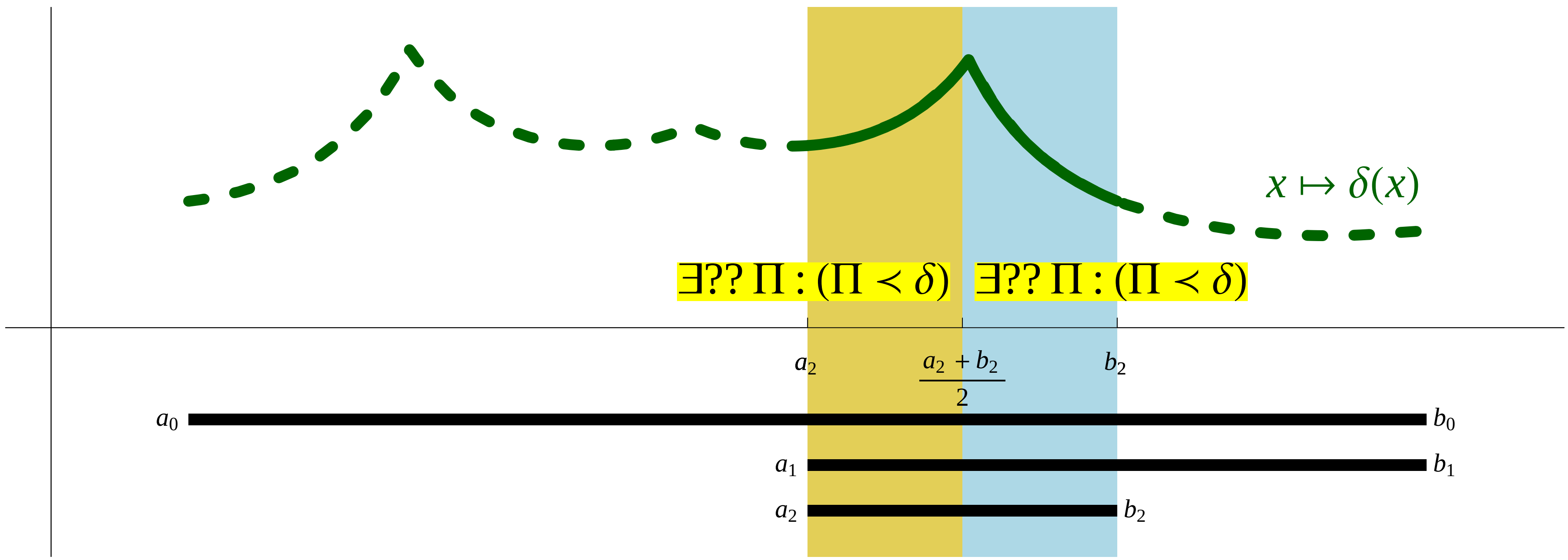
Esistenza



- Come prima, ***almeno una*** delle due metà ***non*** ha suddivisioni adattate

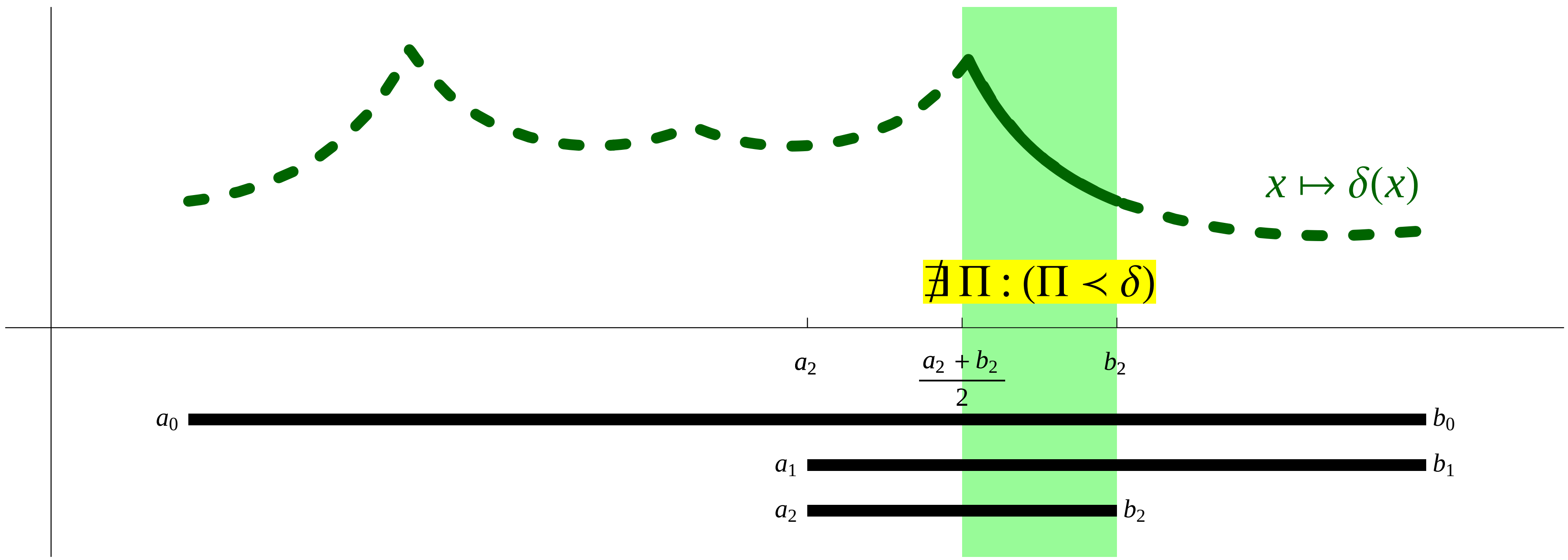


- Come prima, ***almeno una*** delle due metà ***non*** ha suddivisioni adattate
  - se no, potremmo concatenare le due suddivisioni e avremmo una suddivisione adattata di I_2,



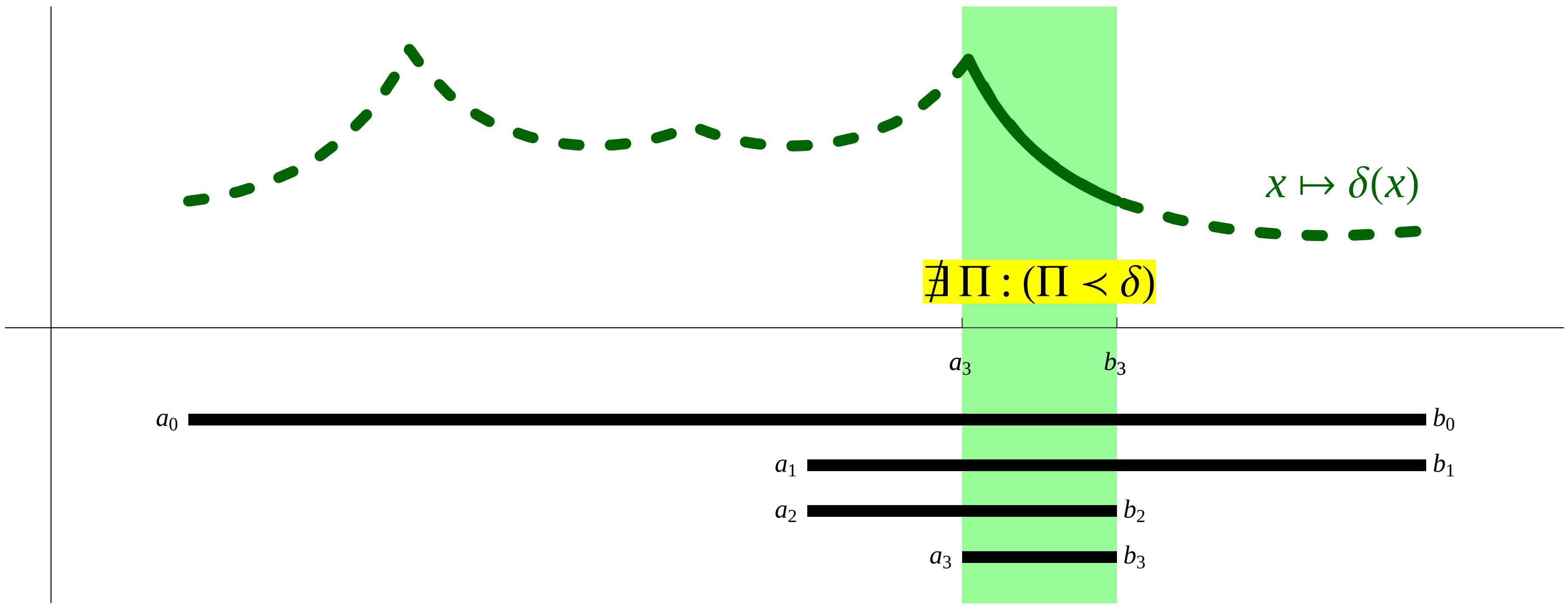
- **Come prima, *almeno una* delle due metà *non* ha suddivisioni adattate**
  - se no, potremmo concatenare le due suddivisioni e avremmo una suddivisione adattata di I_2,
  - mentre avevamo stabilito che I_2 non ne aveva.

Esistenza

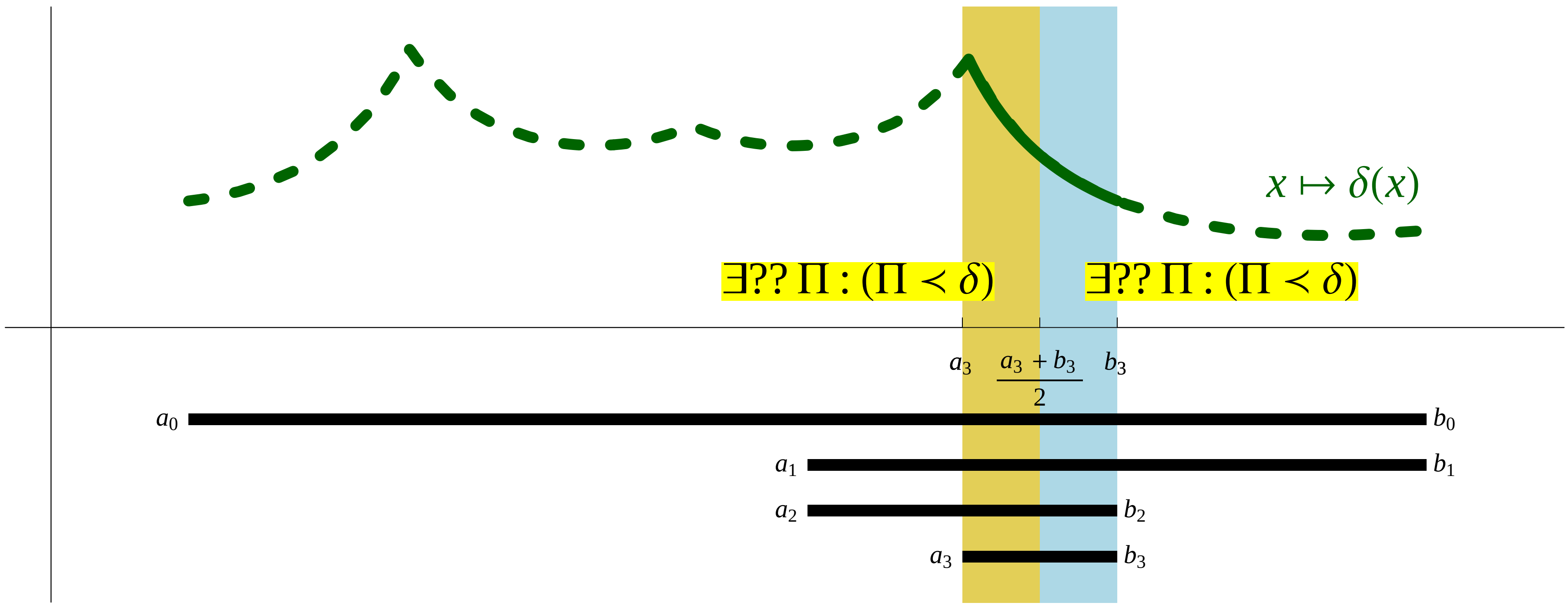


- **Come prima, *almeno una* delle due metà *non* ha suddivisioni adattate**
  - se no, potremmo concatenare le due suddivisioni e avremmo una suddivisione adattata di I_2,
  - mentre avevamo stabilito che I_2 non ne aveva.
- **Per esempio sia la metà a destra non averne.**

Esistenza

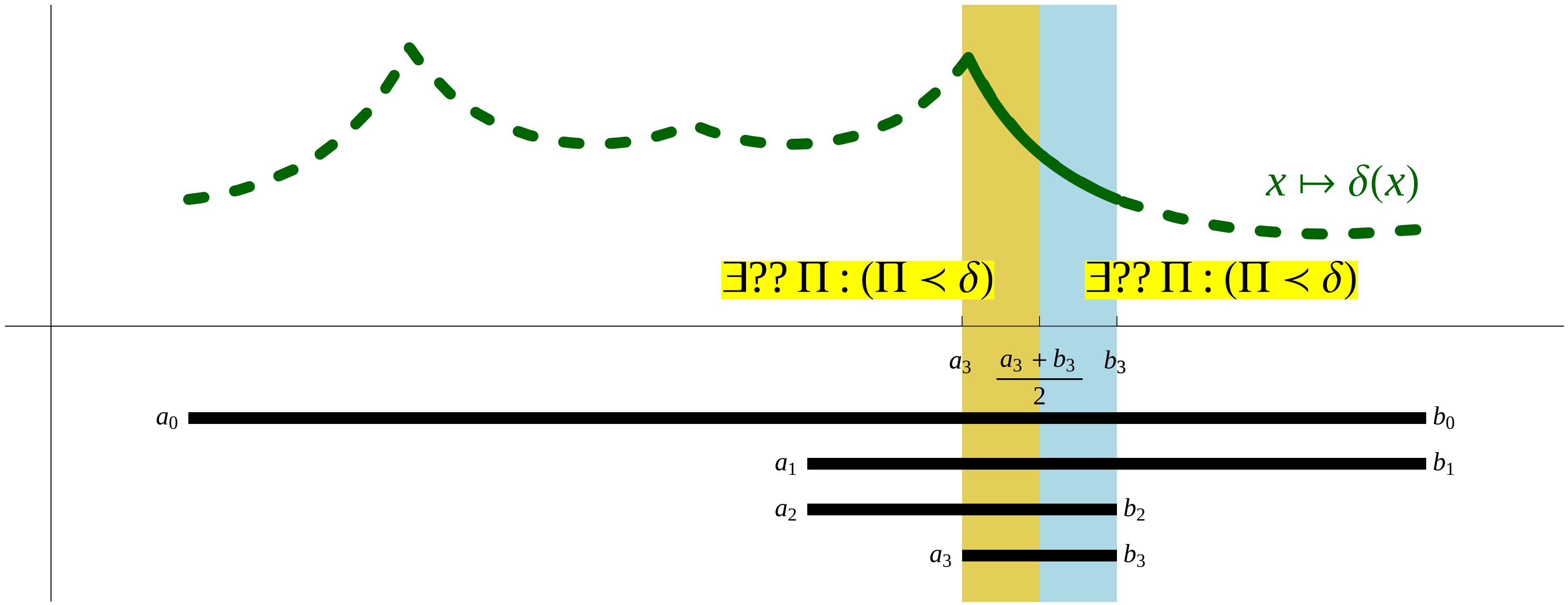


- **Sia $I_3 = [a_3, b_3]$ la metà scelta, che non ha suddivisioni adattate.**



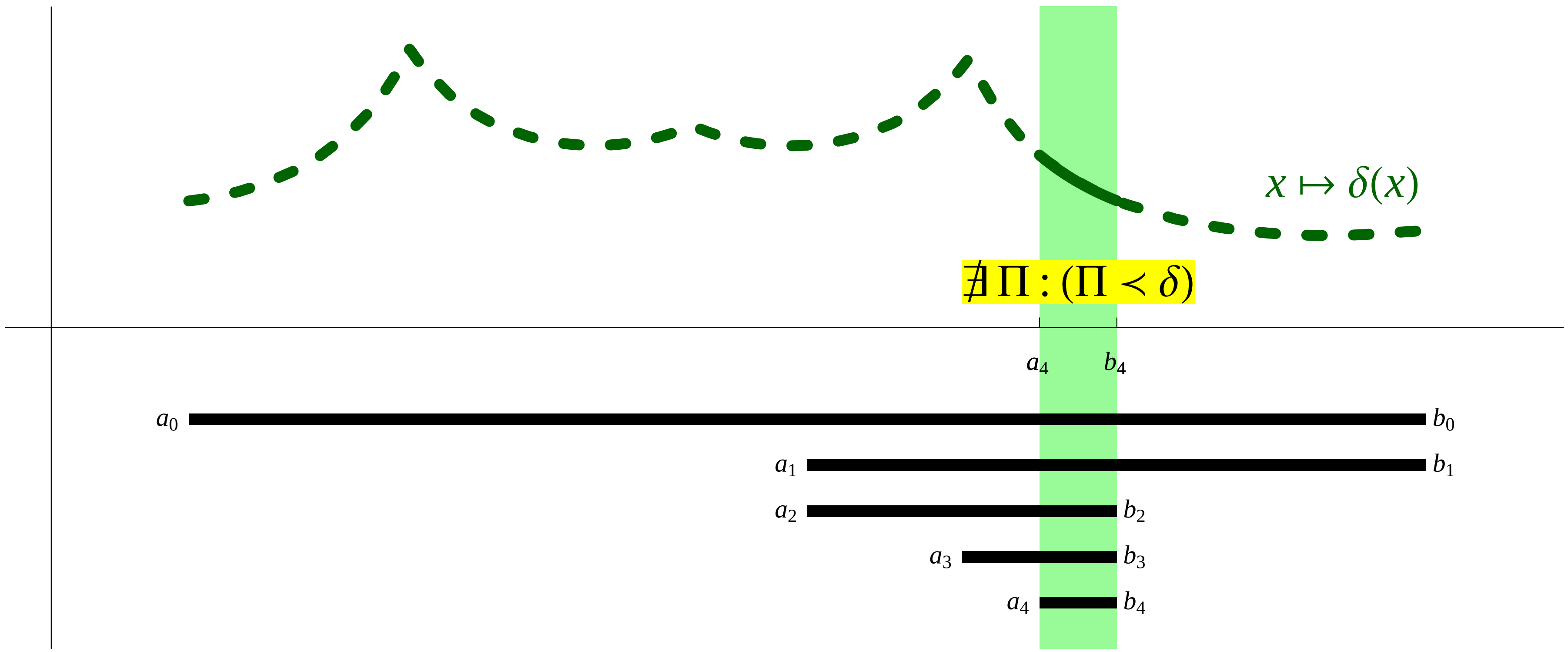
- **Sia $I_3 = [a_3, b_3]$ la metà scelta, che non ha suddivisioni adattate.**
- **Dividiamo a metà l'intervallo I_3.**

Esistenza



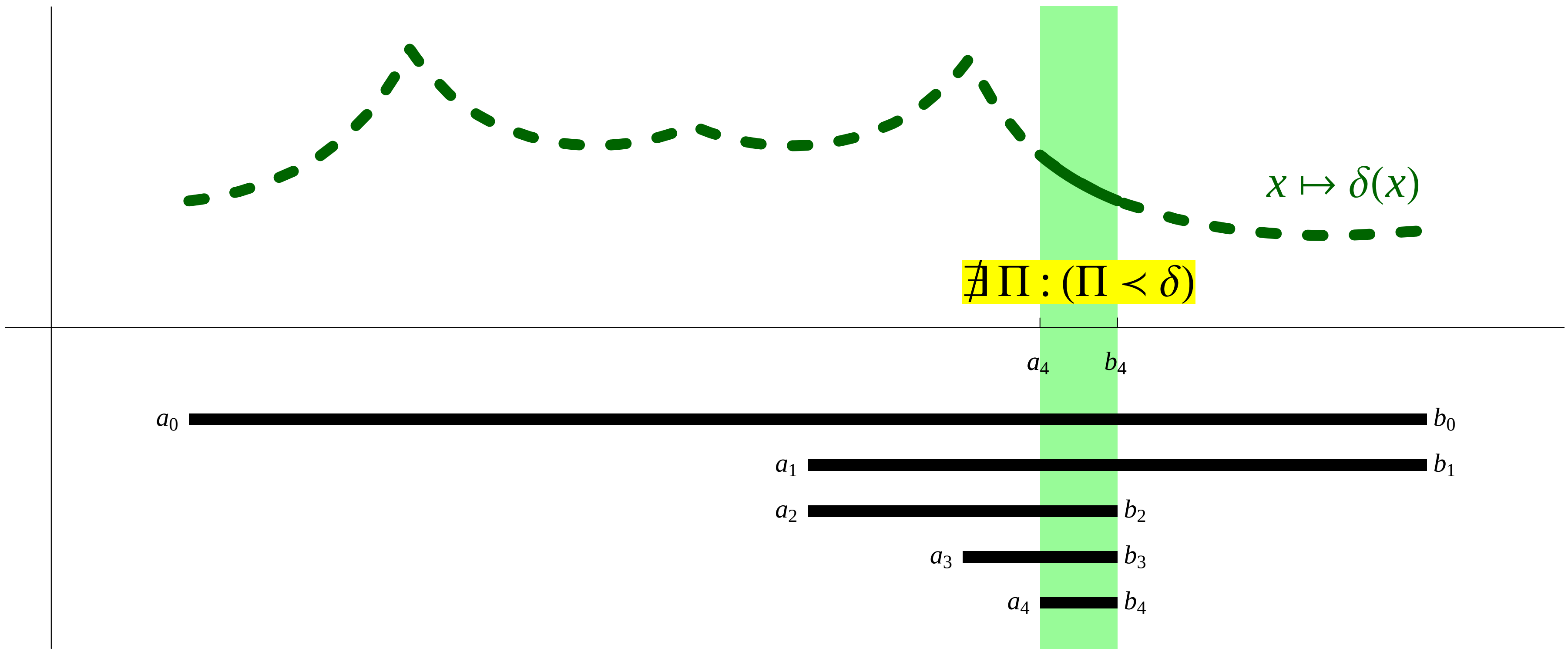
- Sia $I_3 = [a_3, b_3]$ la metà scelta, che non ha suddivisioni adattate.
- Dividiamo a metà l'intervallo I_3.
- Almeno una delle due metà *non* ha suddivisioni adattate.

Esistenza



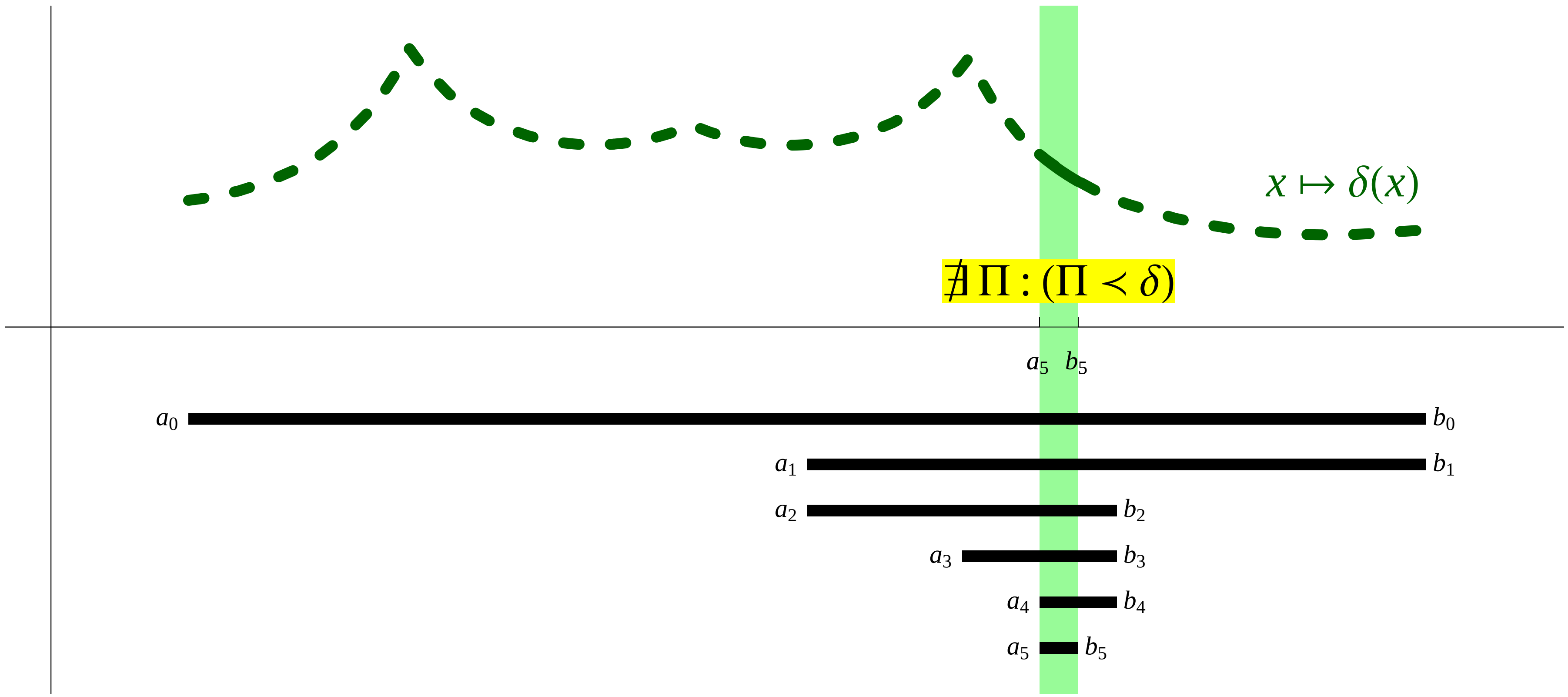
- **Sia** $I_4 = [a_4, b_4]$ **una metà di** I_3 **che non ha suddivisioni adattate.**

Esistenza

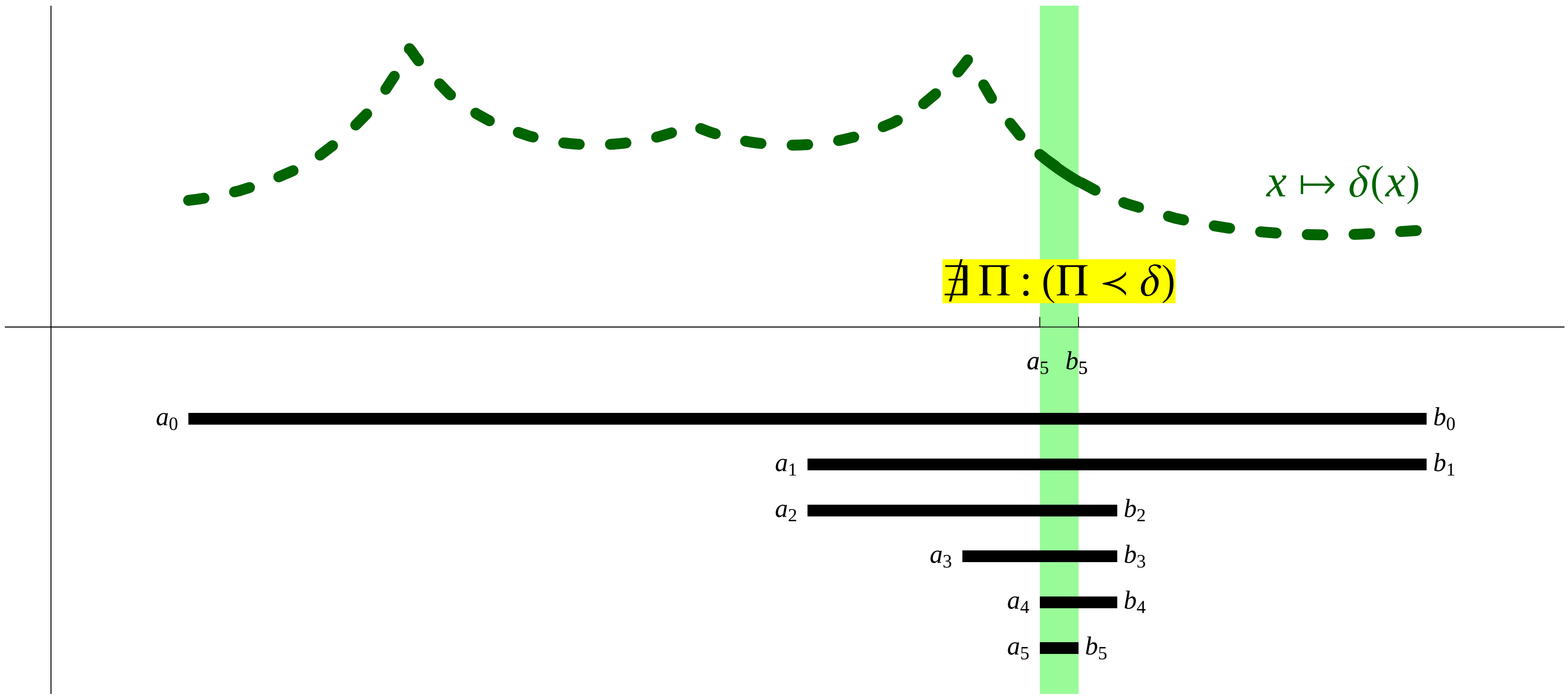


- **Sia $I_4 = [a_4, b_4]$ una metà di I_3 che non ha suddivisioni adattate.**
- **Una metà di I_4 non ha suddivisioni adattate.**

Esistenza

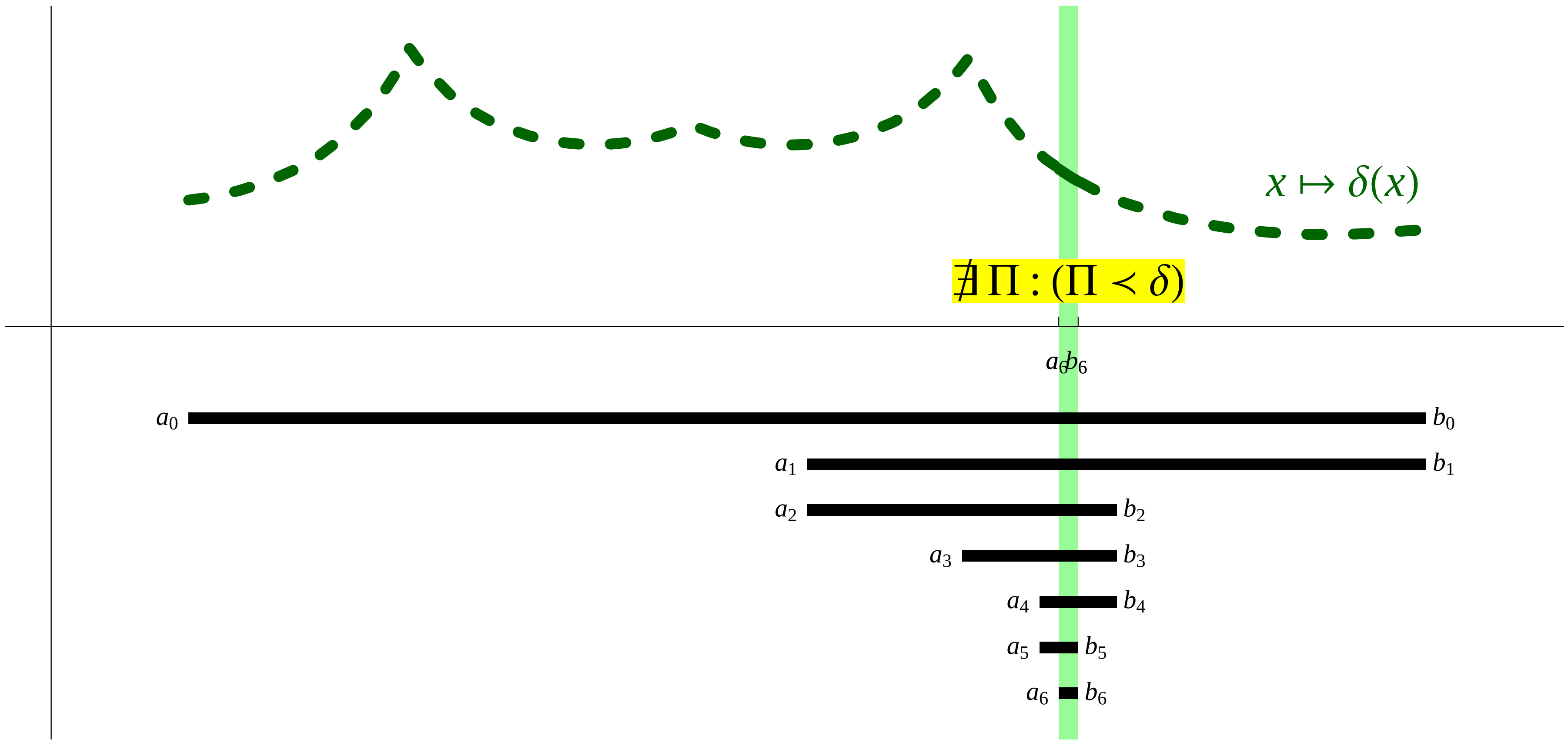


- **Sia $I_5 = [a_5, b_5]$ una metà di I_4 che non ha suddivisioni adattate.**



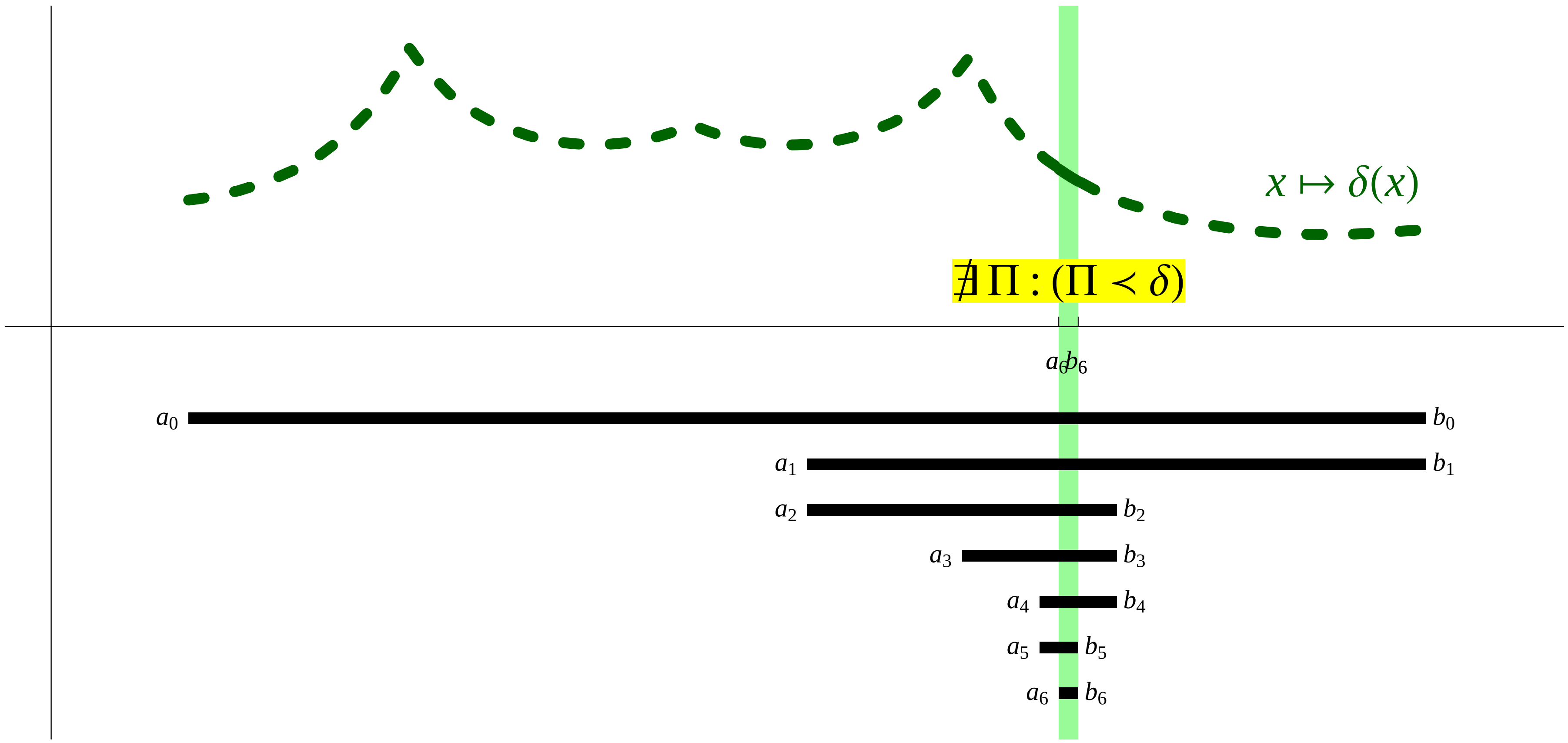
- **Sia $I_5 = [a_5, b_5]$ una metà di I_4 che non ha suddivisioni adattate.**
- **Una metà di I_5 non ha suddivisioni adattate.**

Esistenza

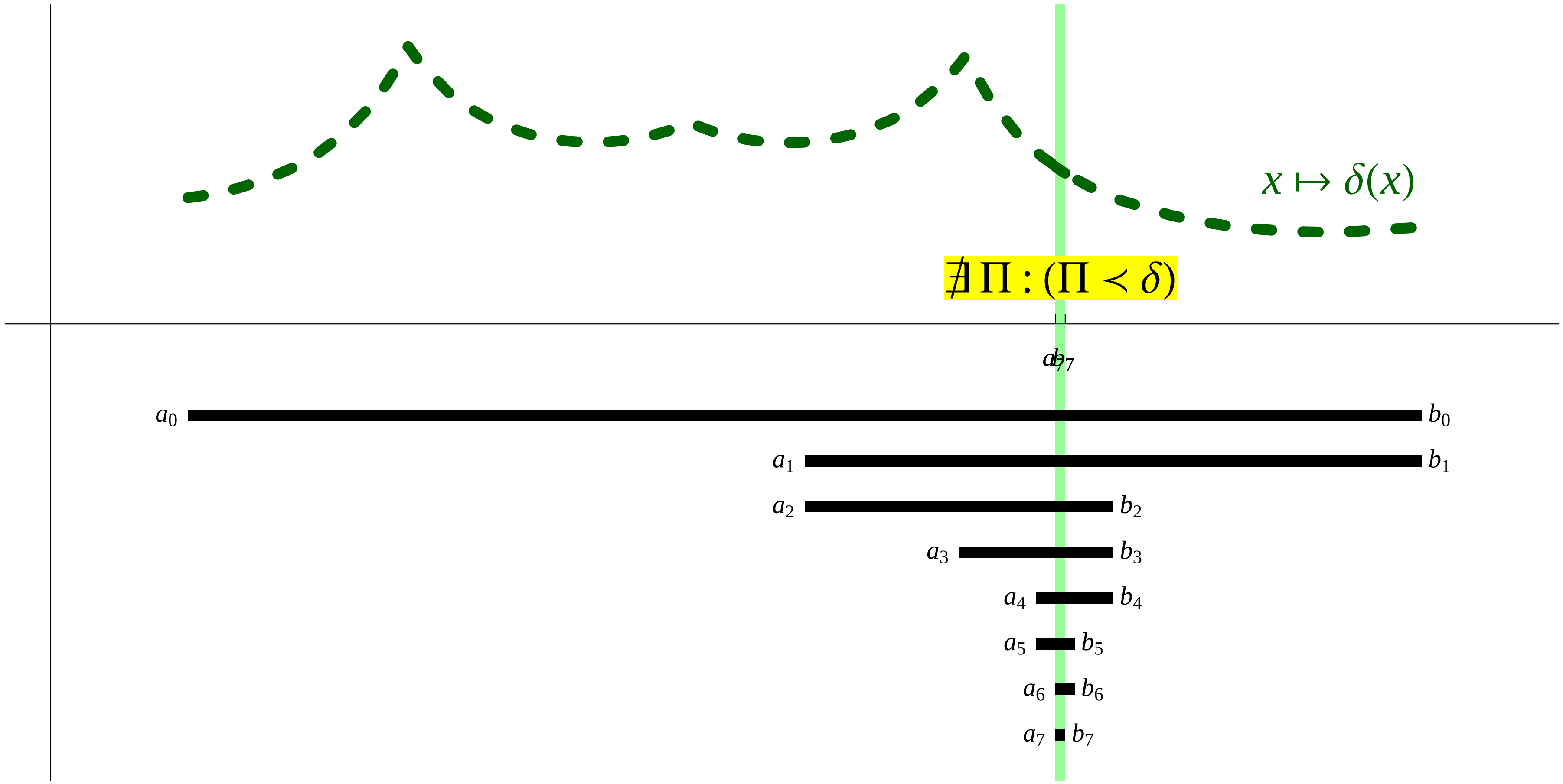


- **Sia $I_6 = [a_6, b_6]$ una metà di I_5 che non ha suddivisioni adattate.**

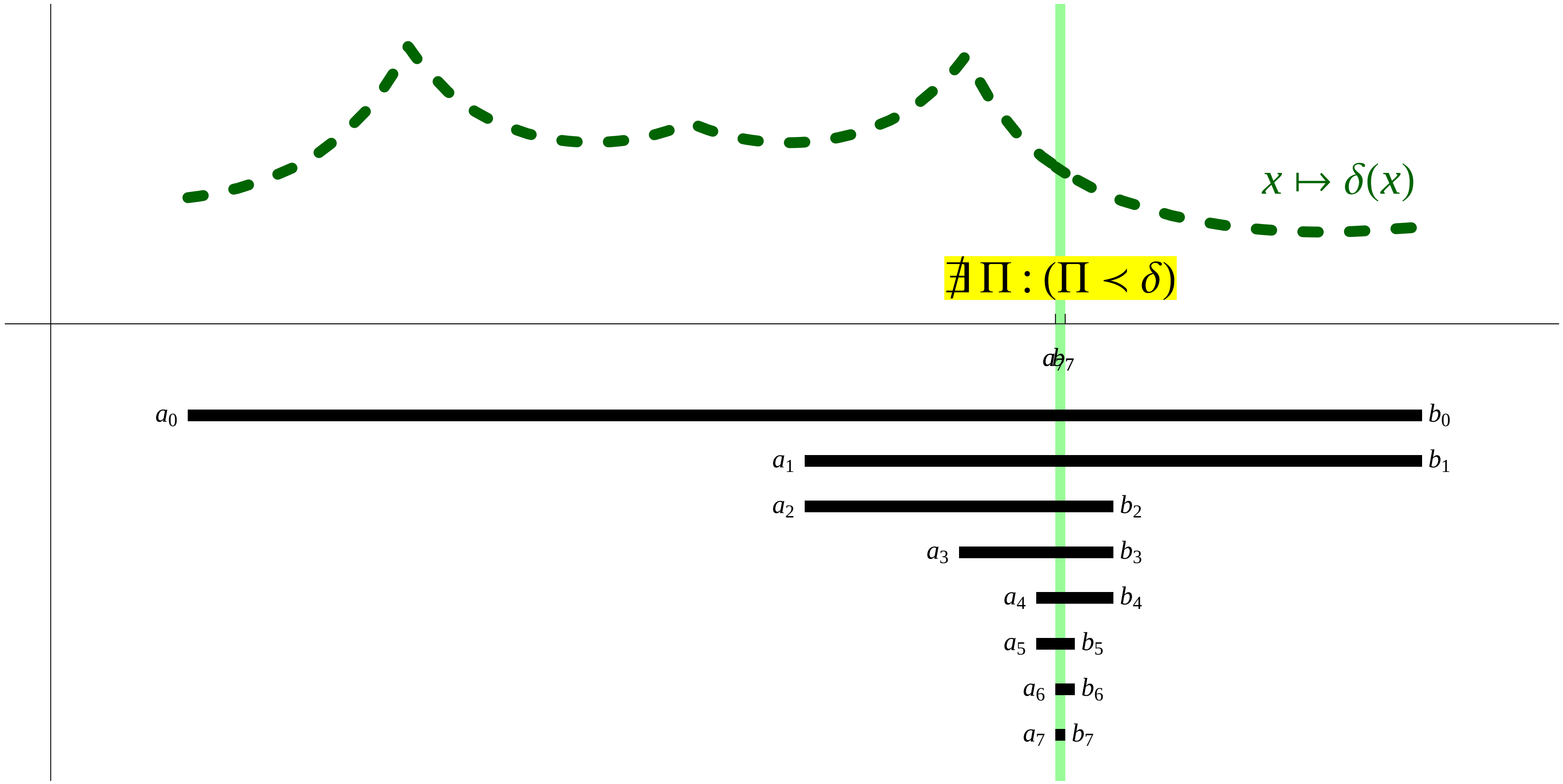
Esistenza



- Sia $I_6 = [a_6, b_6]$ una metà di I_5 che non ha suddivisioni adattate.
- Una metà di I_6 non ha suddivisioni adattate.

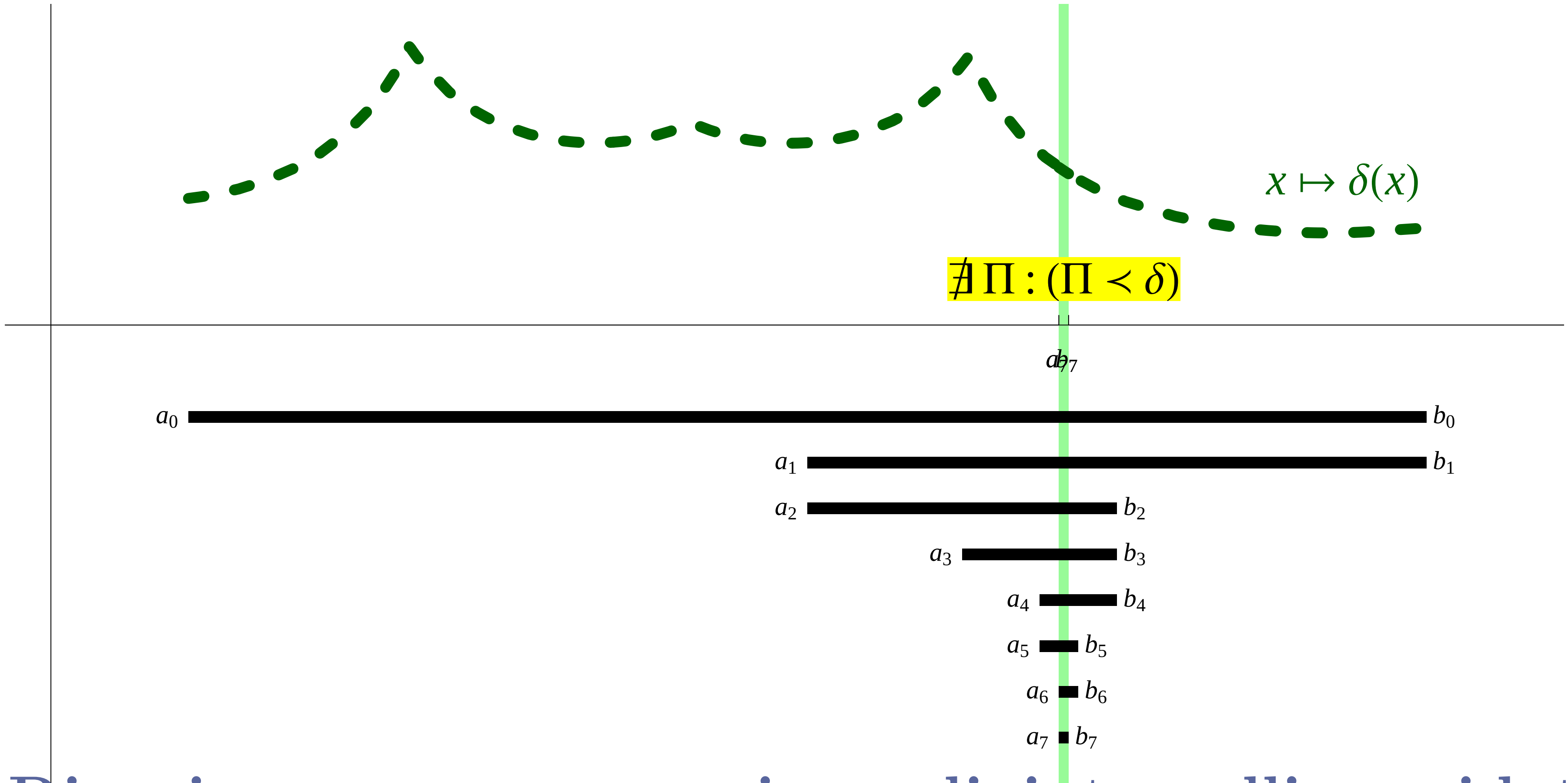


- **Sia $I_7 = [a_7, b_7]$ una metà di I_6 che non ha suddivisioni adattate.**



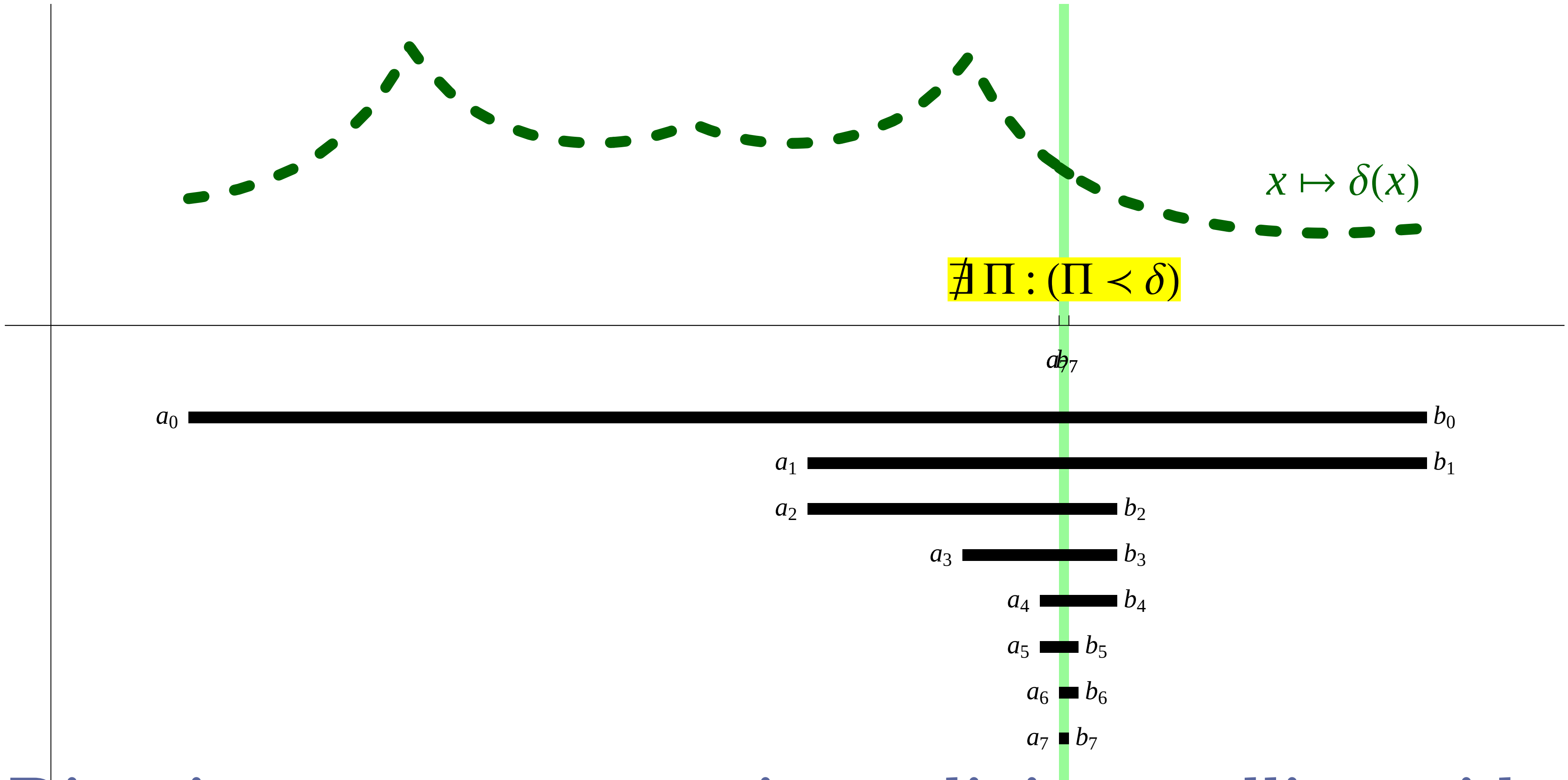
- **Sia $I_7 = [a_7, b_7]$ una metà di I_6 che non ha suddivisioni adattate.**
- **E così via.**

Esistenza



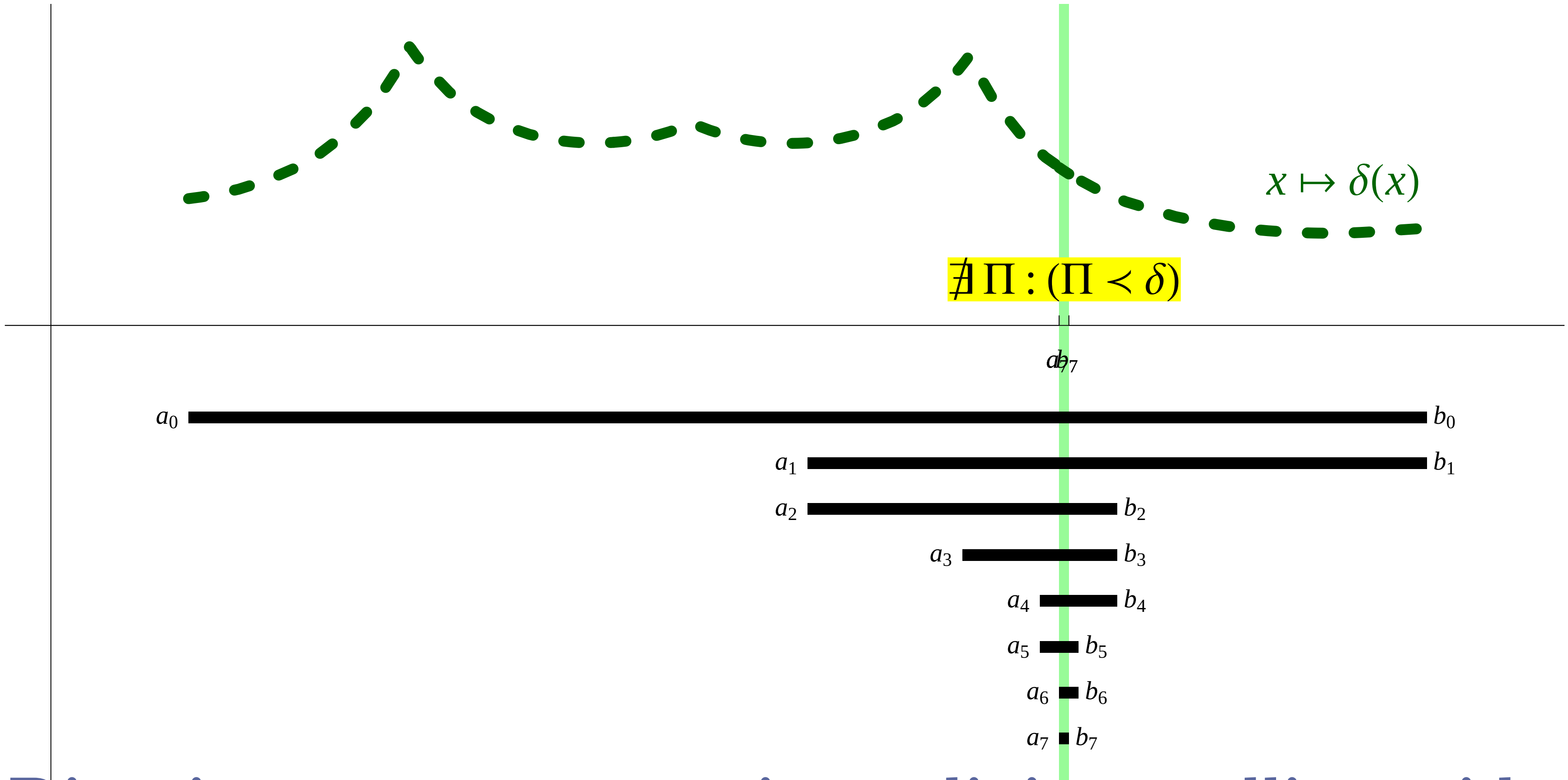
- **Ricaviamo una successione di intervalli annidati:** $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ **per i quali si può dire che**

Esistenza

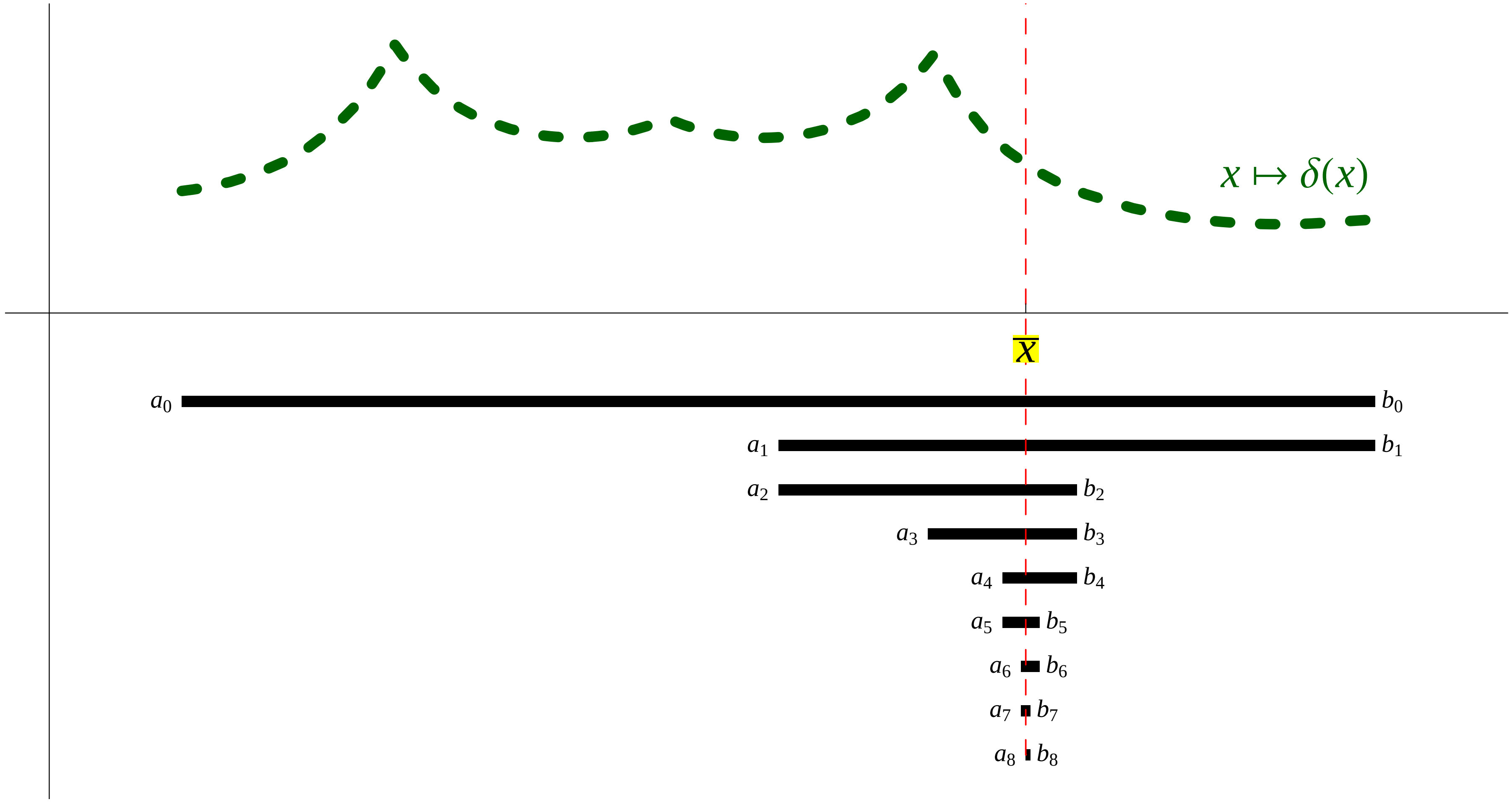


- **Ricaviamo una successione di intervalli annidati: $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ per i quali si può dire che**
  - I_{n+1} è una metà di I_n,

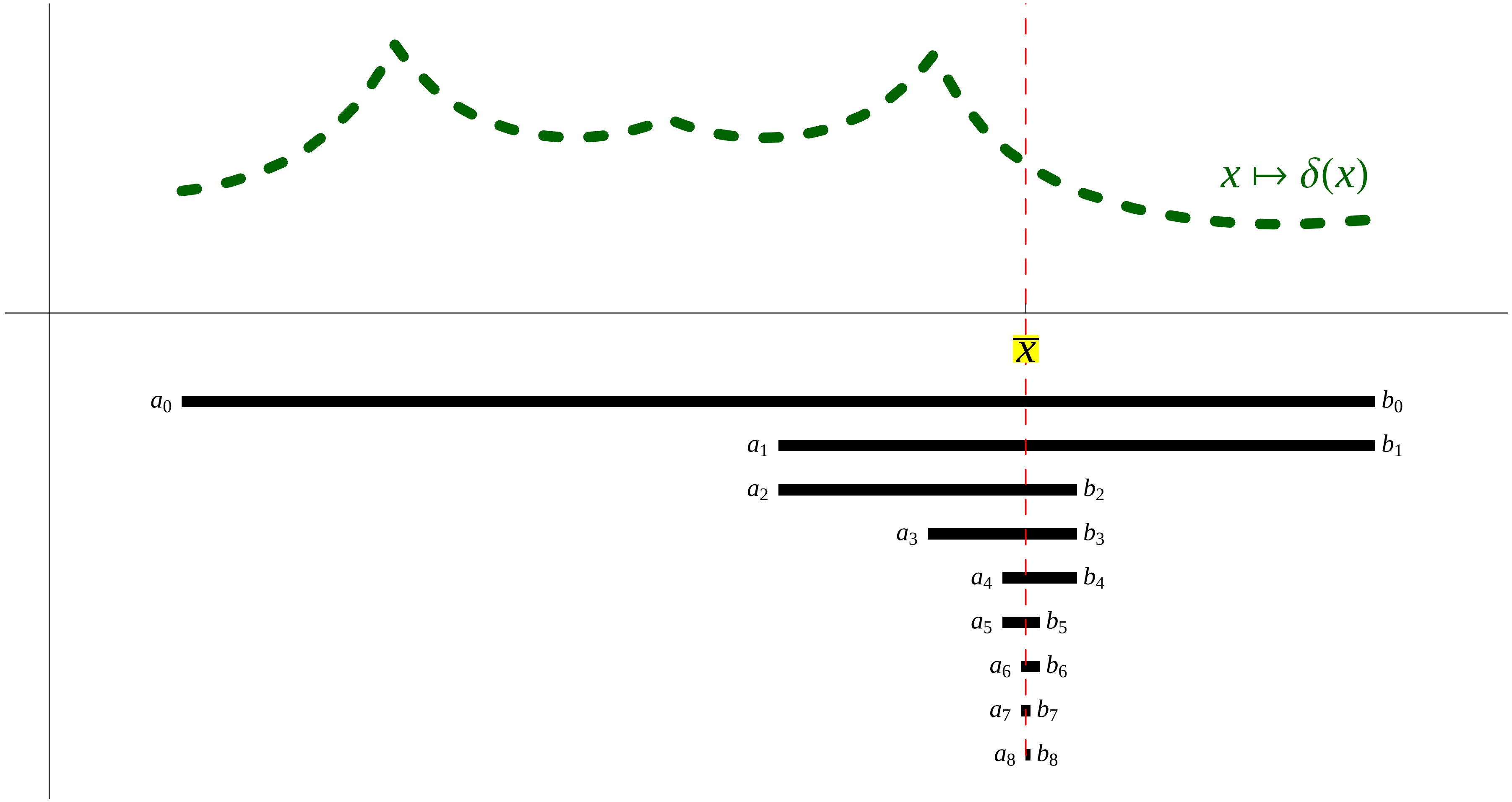
Esistenza



- **Ricaviamo una successione di intervalli annidati:** $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ **per i quali si può dire che**
  - I_{n+1} è una metà di I_n,
  - su nessun I_n esistono suddivisioni adattate a δ.

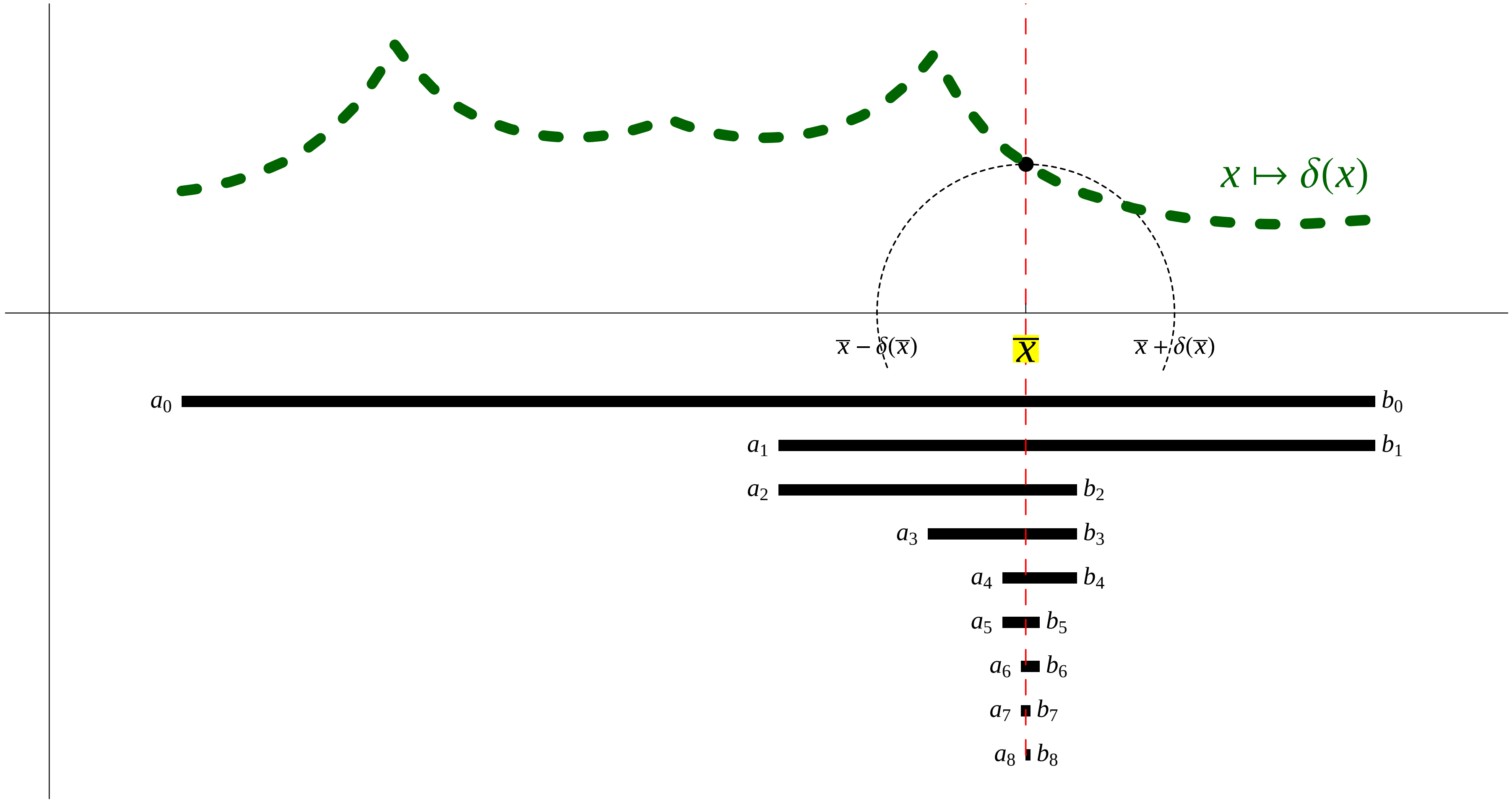


- Per il teorema di Cantor sugli intervalli inclusi:

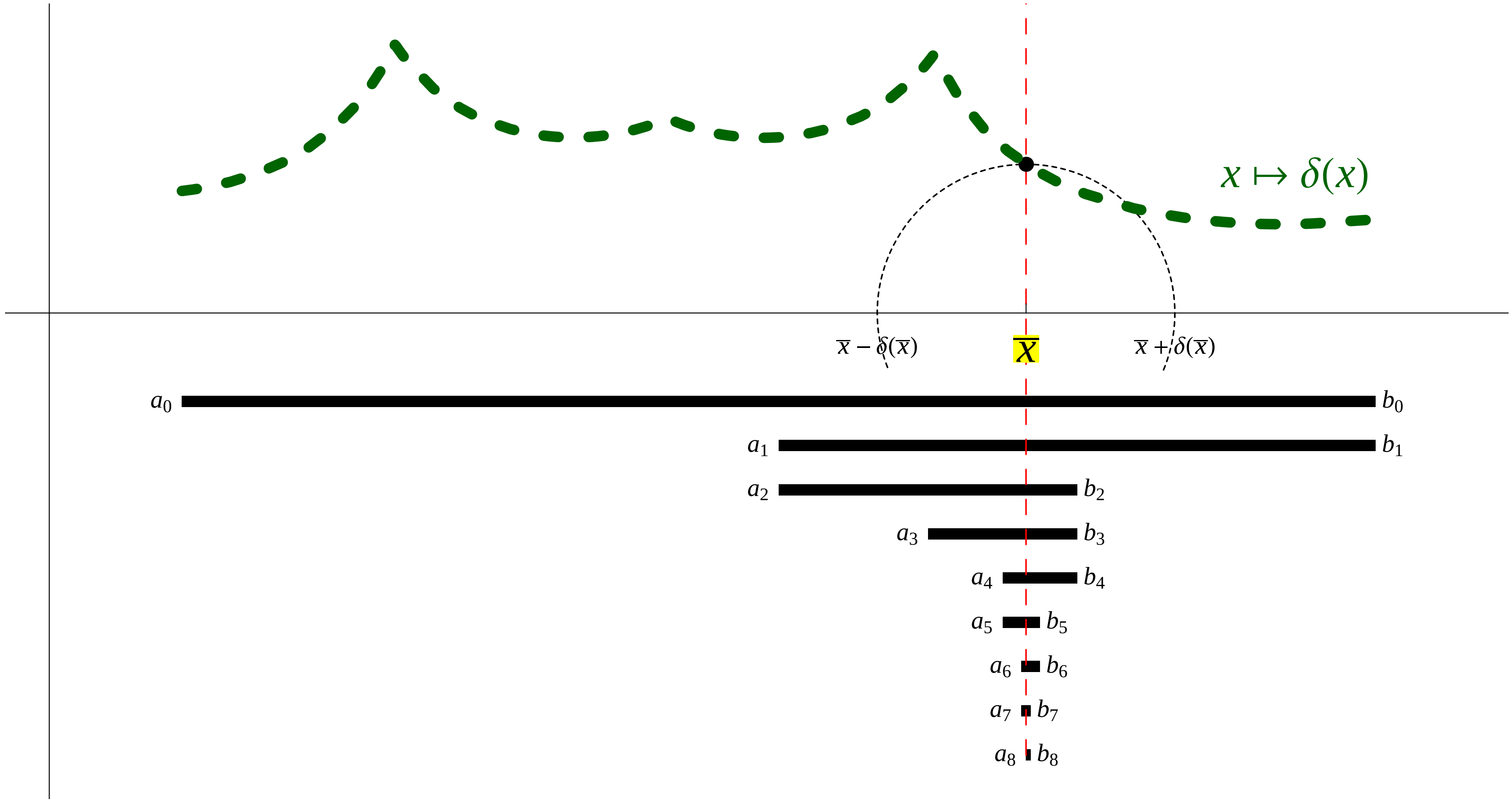


- Per il teorema di Cantor sugli intervalli inclusi:
- esiste un (unico) $\bar{x}$ che appartiene a ***tutti*** gli I_n:

$$\bar{x} \in I_n \quad \forall n$$

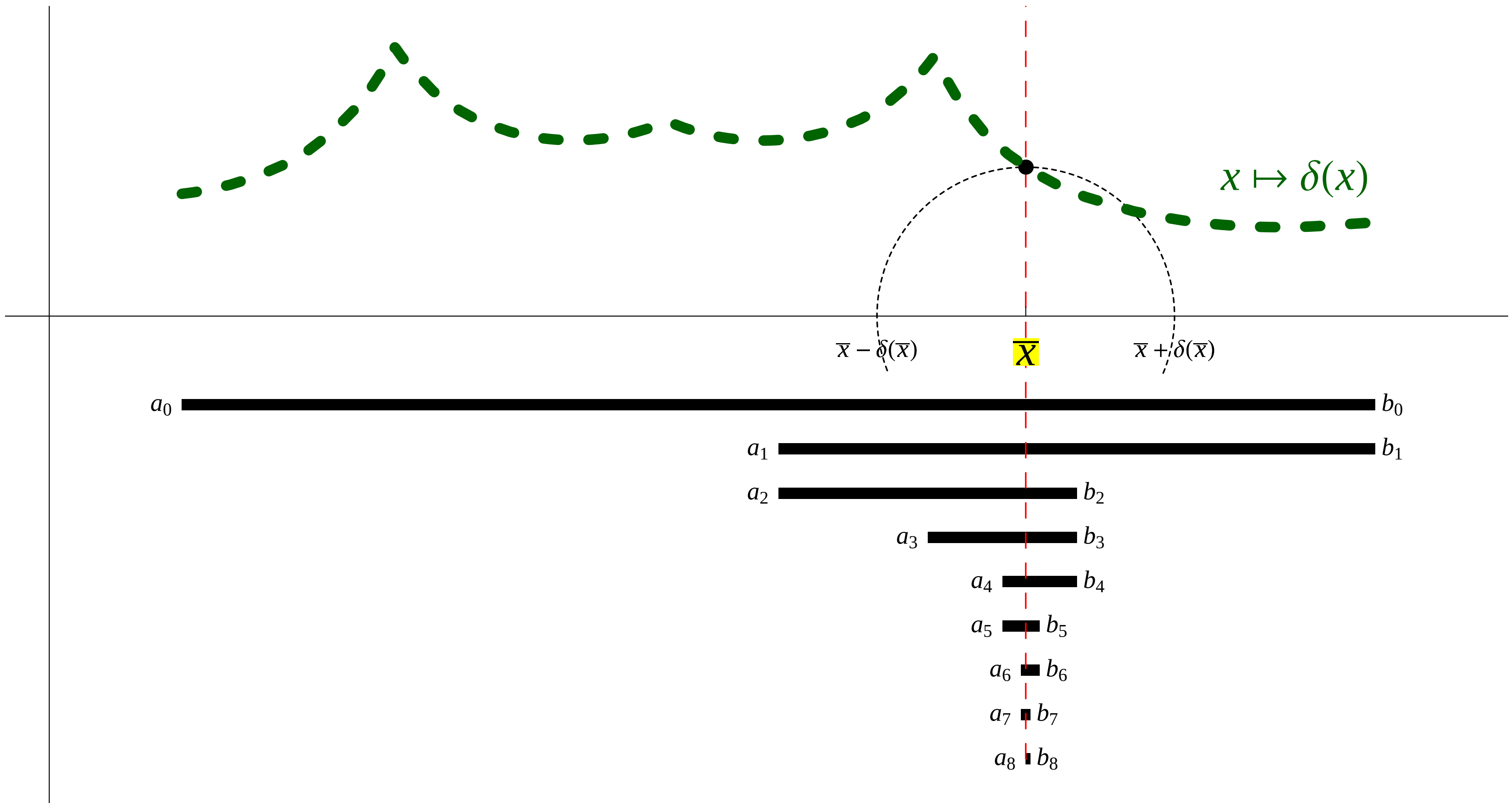


- Calcoliamo il calibro su $\bar{x}$, e tracciamo il cerchietto.

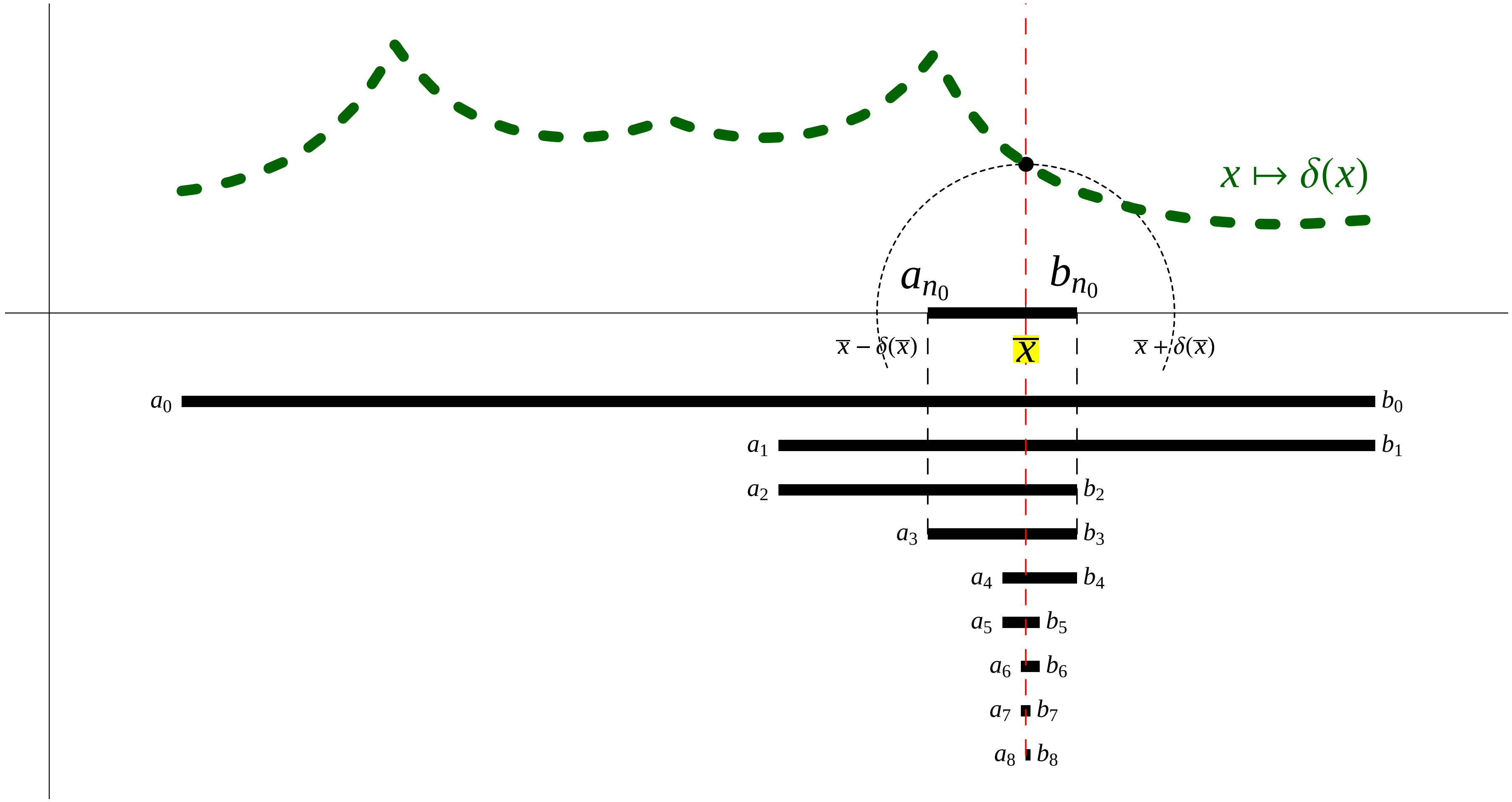


- **Calcoliamo il calibro su $\bar{x}$, e tracciamo il cerchietto.**
  - Il raggio $\delta(\bar{x})$ è > 0 per definizione di calibro.

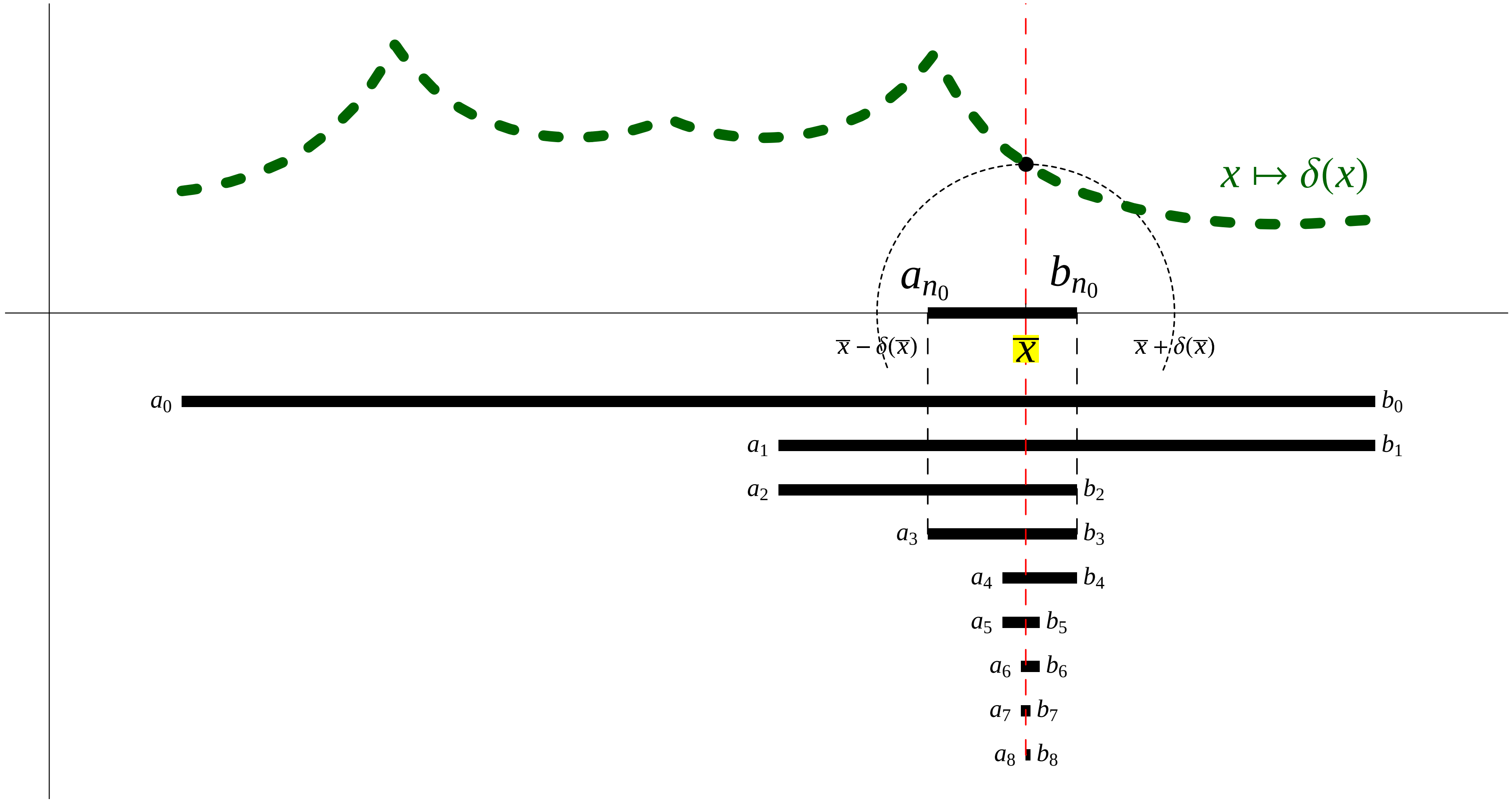
Esistenza



- **Calcoliamo il calibro su $\bar{x}$, e tracciamo il cerchietto.**
  - Il raggio $\delta(\bar{x})$ è > 0 per definizione di calibro.
  - Le lunghezze degli I_n tendono a 0 (si dimezzano a ogni passo).

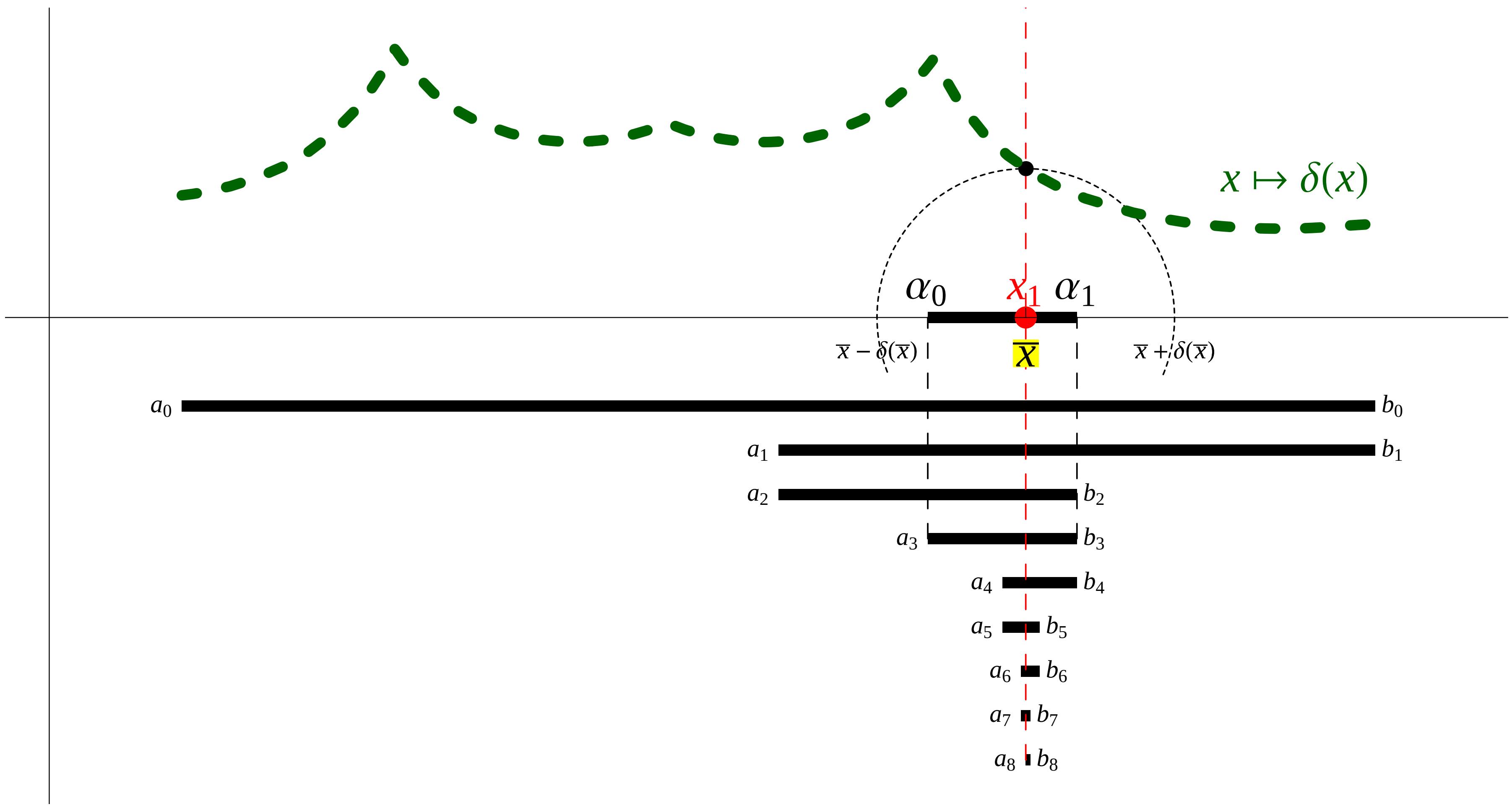


- **Quindi per un certo n_0 l'intervallino I_{n_0} è contenuto nel cerchietto.**

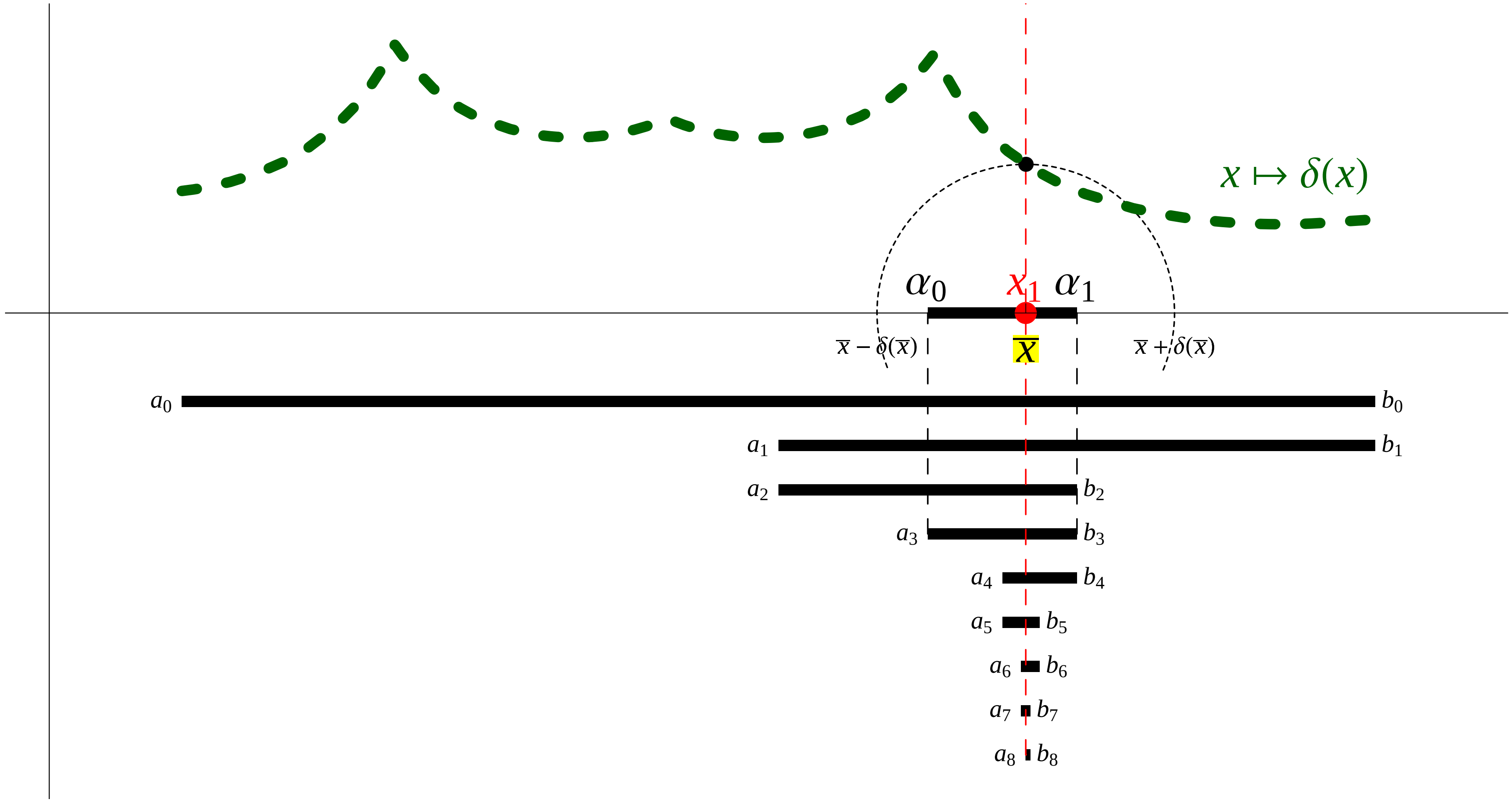


- **Quindi per un certo n_0 l'intervallino I_{n_0} è contenuto nel cerchietto.**
  - In figura $n_0 = 3$.

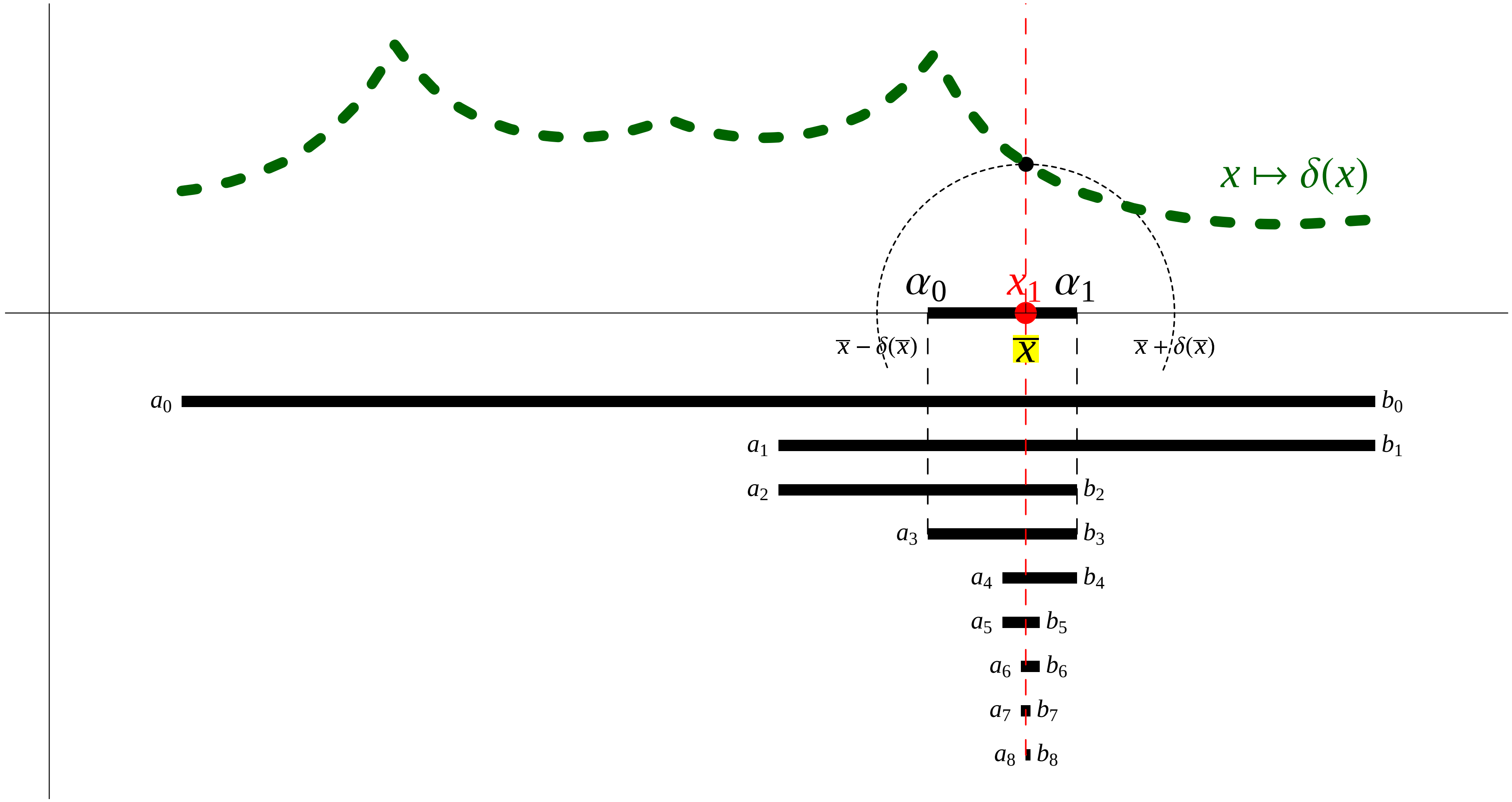
Esistenza



- **Su I_{n_0} consideriamo la seguente suddivisione Π_0:**

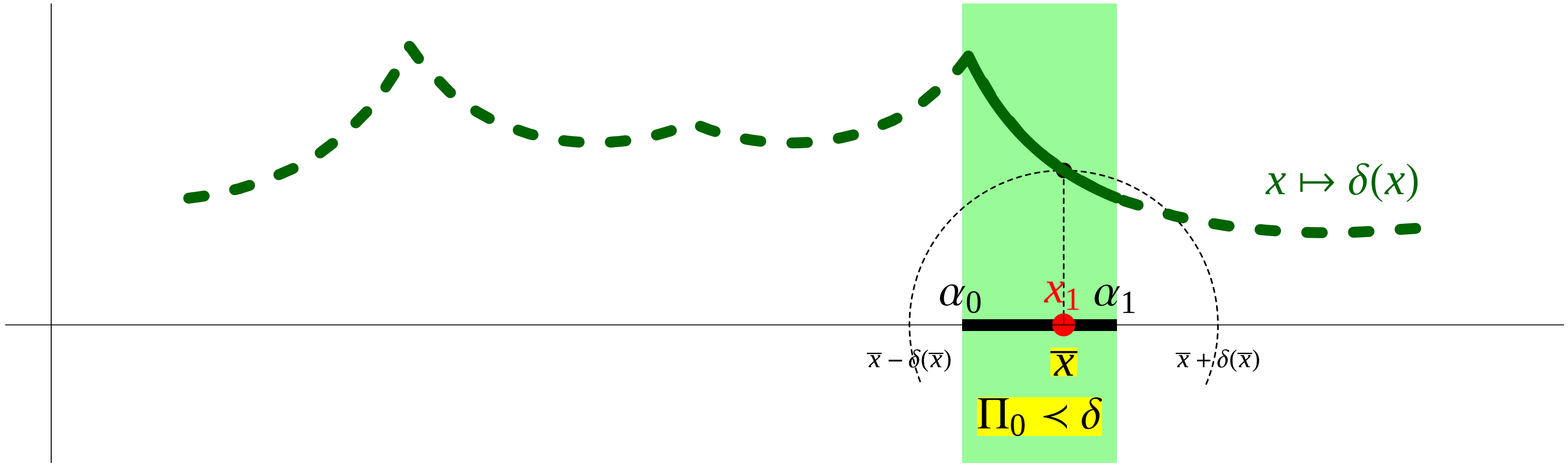


- **Su I_{n_0} consideriamo la seguente suddivisione Π_0:**
  - un solo intervallino $a_{n_0} = \alpha_0 < \alpha_1 = b_{n_0}$,

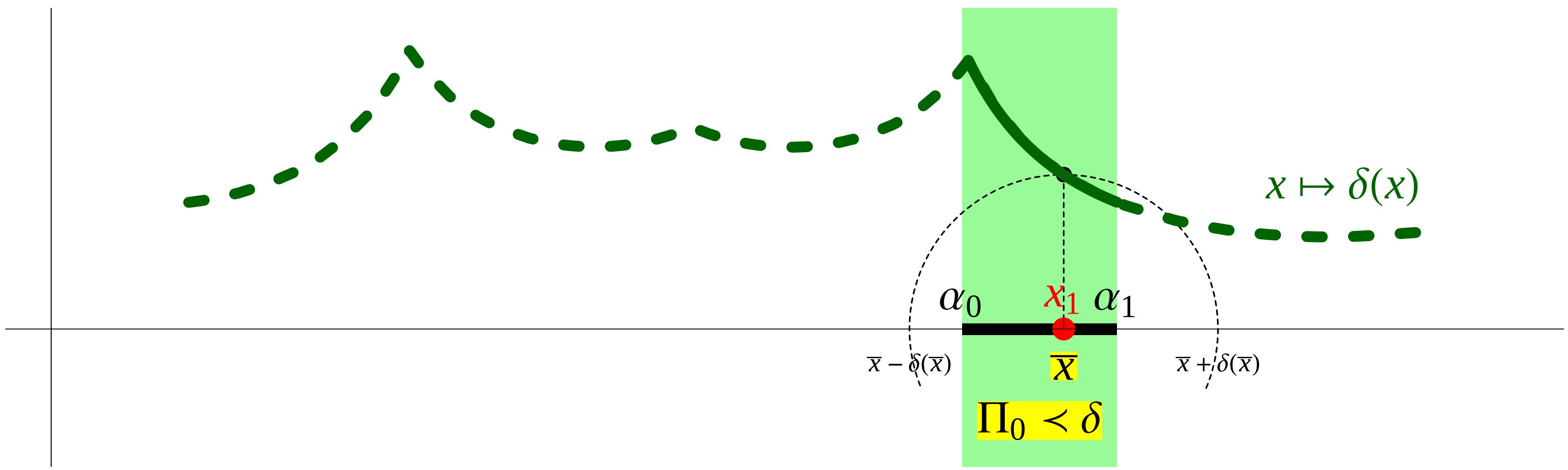


- **Su I_{n_0} consideriamo la seguente suddivisione Π_0:**
  - un solo intervallino $a_{n_0} = \alpha_0 < \alpha_1 = b_{n_0}$,
  - $\bar{x}$ come punto marcato.

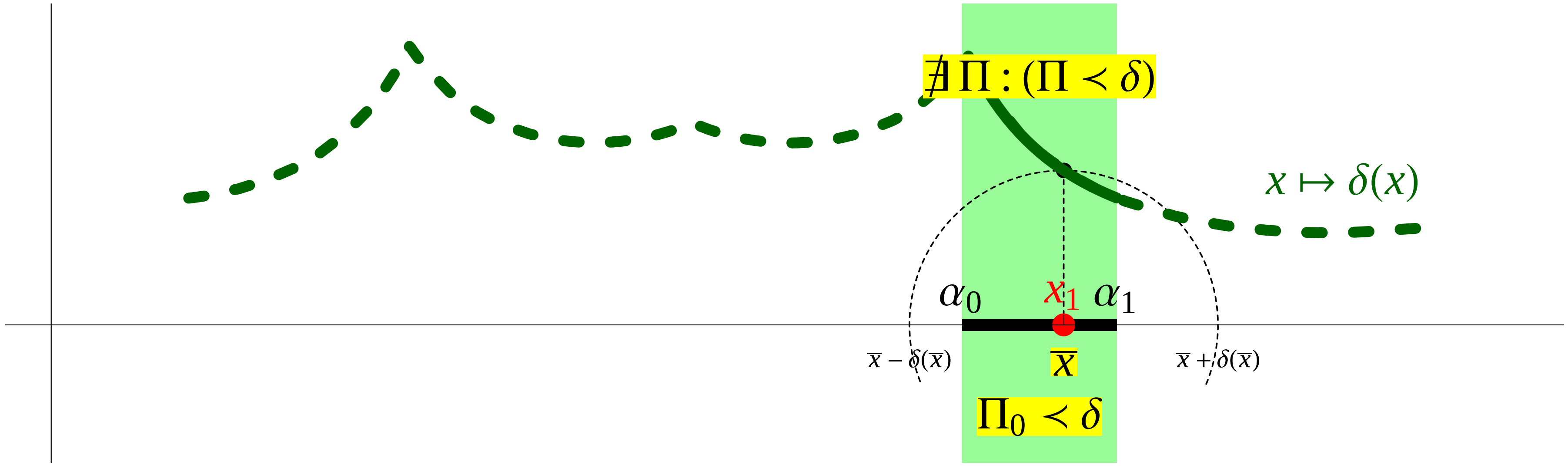
Esistenza



- Per come sono messe le cose **Π_0 è una suddivisione di I_{n_0} adattata a δ.**

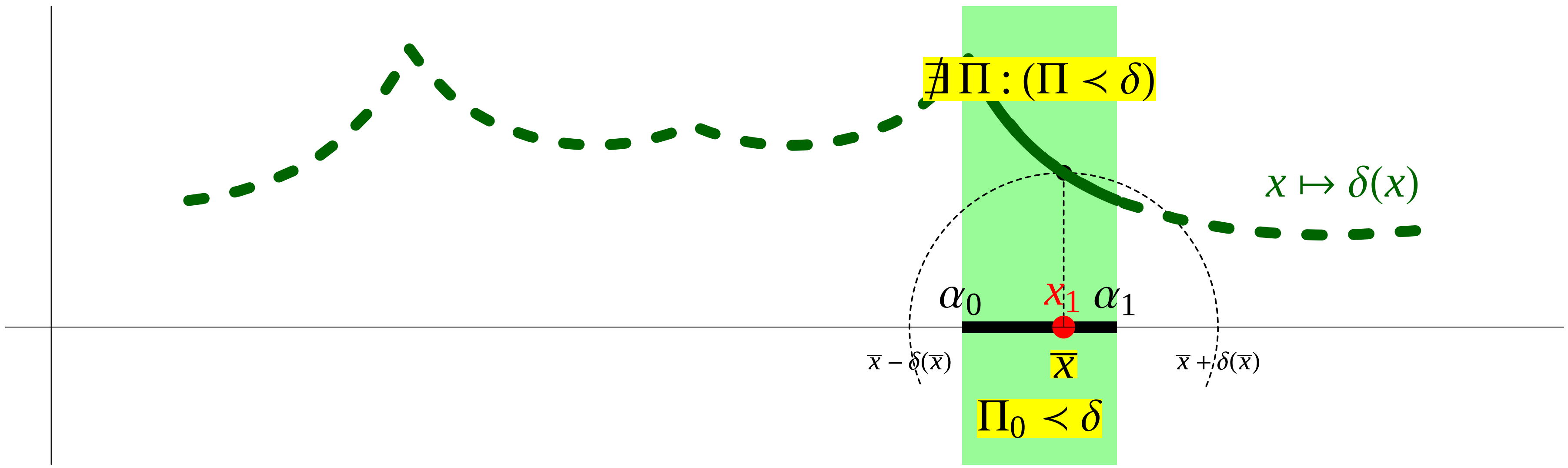


- Per come sono messe le cose Π_0 **è una suddivisione di I_{n_0} adattata a δ.**
  - Infatti l'intervallino è contenuto nel cerchietto.

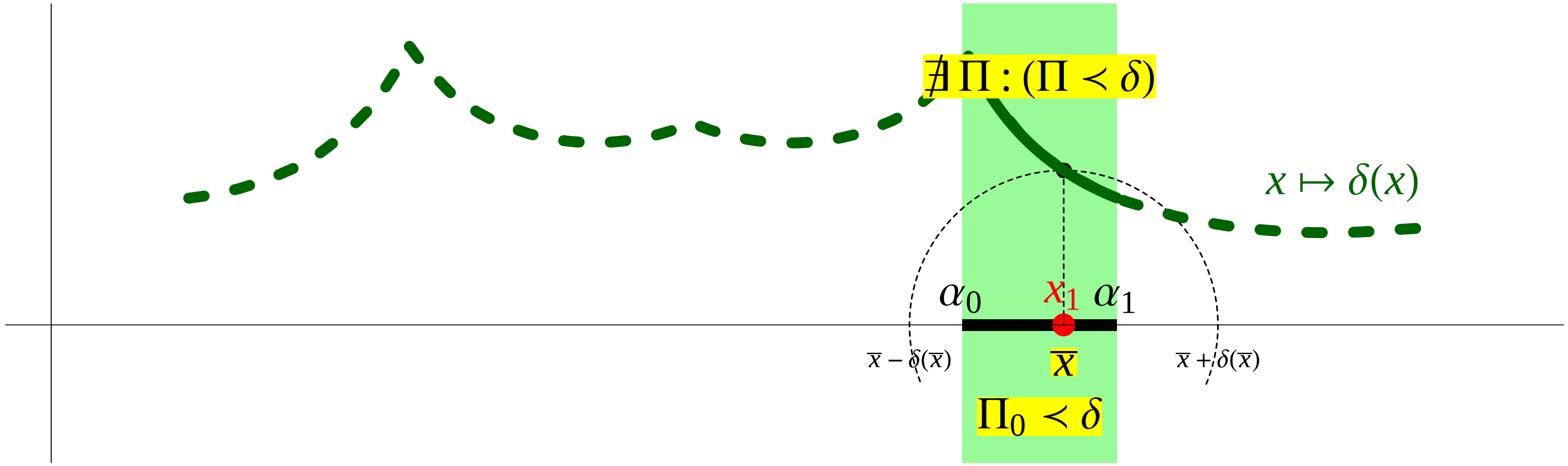


- **Per come sono messe le cose Π_0 è una suddivisione di I_{n_0} adattata a δ.**
  - Infatti l'intervallino è contenuto nel cerchietto.
- **Ma prima avevamo detto che *nessuno* degli I_n ha suddivisioni adattate a δ.**

Esistenza



- **Per come sono messe le cose Π_0 è una suddivisione di I_{n_0} adattata a δ.**
  - Infatti l'intervallino è contenuto nel cerchietto.
- **Ma prima avevamo detto che *nessuno* degli I_n ha suddivisioni adattate a δ.**
- **Quindi I_{n_0} non può avere suddivisioni adattate.**



- Per come sono messe le cose **Π_0 è una suddivisione di I_{n_0} adattata a δ.**
  - Infatti l'intervallino è contenuto nel cerchietto.
- **Ma prima avevamo detto che *nessuno* degli I_n ha suddivisioni adattate a δ.**
- **Quindi I_{n_0} non può avere suddivisioni adattate.**

■ ***Contraddizione!***

- **Tornando indietro, l'unico punto della dimostrazione che non fosse sicuro era il punto di partenza:**

Esistenza

- **Tornando indietro, l'unico punto della dimostrazione che non fosse sicuro era il punto di partenza:**
  - *non esistono* suddivisioni di $[a, b]$ adattate a δ.

Esistenza

- **Tornando indietro, l'unico punto della dimostrazione che non fosse sicuro era il punto di partenza:**
  - *non esistono* suddivisioni di $[a, b]$ adattate a δ.
- **Questa affermazione ha portato a una proposizione palesemente falsa, una contraddizione:**

Esistenza

- **Tornando indietro, l'unico punto della dimostrazione che non fosse sicuro era il punto di partenza:**
  - *non esistono* suddivisioni di $[a, b]$ adattate a δ.
- **Questa affermazione ha portato a una proposizione palesemente falsa, una contraddizione:**
  - esistono e non esistono suddivisioni di I_{n_0} adattate a δ.

Esistenza

- **Tornando indietro, l'unico punto della dimostrazione che non fosse sicuro era il punto di partenza:**
  - *non esistono* suddivisioni di $[a, b]$ adattate a δ.
- **Questa affermazione ha portato a una proposizione palesemente falsa, una contraddizione:**
  - esistono e non esistono suddivisioni di I_{n_0} adattate a δ.
- **Dobbiamo concludere che il punto di partenza era falso, cioè**

- **Tornando indietro, l'unico punto della dimostrazione che non fosse sicuro era il punto di partenza:**
  - *non esistono* suddivisioni di $[a, b]$ adattate a δ.
- **Questa affermazione ha portato a una proposizione palesemente falsa, una contraddizione:**
  - esistono e non esistono suddivisioni di I_{n_0} adattate a δ.
- **Dobbiamo concludere che il punto di partenza era falso, cioè**
  - *esistono* suddivisioni di $[a, b]$ adattate a δ

- **Tornando indietro, l'unico punto della dimostrazione che non fosse sicuro era il punto di partenza:**
  - *non esistono* suddivisioni di $[a, b]$ adattate a δ.
- **Questa affermazione ha portato a una proposizione palesemente falsa, una contraddizione:**
  - esistono e non esistono suddivisioni di I_{n_0} adattate a δ.
- **Dobbiamo concludere che il punto di partenza era falso, cioè**
  - *esistono* suddivisioni di $[a, b]$ adattate a δ

■ **Come volevasi dimostrare!**

Esistenza

- La dimostrazione è stata puramente esistenziale, non costruttiva.

Esistenza

- La dimostrazione è stata puramente esistenziale, non costruttiva.
- Finché a qualcuno non viene un'idea nuova, l'unico modo di "trovare" una suddivisione adattata

Esistenza

- La dimostrazione è stata puramente esistenziale, non costruttiva.
- Finché a qualcuno non viene un'idea nuova, l'unico modo di "trovare" una suddivisione adattata
  - (un modo che valga *per ogni* calibro δ),

Esistenza

- La dimostrazione è stata puramente esistenziale, non costruttiva.
- Finché a qualcuno non viene un'idea nuova, l'unico modo di "trovare" una suddivisione adattata
  - (un modo che valga *per ogni* calibro δ),

  sarebbe di

Esistenza

- La dimostrazione è stata puramente esistenziale, non costruttiva.
- Finché a qualcuno non viene un'idea nuova, l'unico modo di "trovare" una suddivisione adattata
  - (un modo che valga *per ogni* calibro δ),

  sarebbe di

  - **generare tutte le possibili suddivisioni di $[a, b]$ (sono infinite. . .),**

Esistenza

- La dimostrazione è stata puramente esistenziale, non costruttiva.
- Finché a qualcuno non viene un'idea nuova, l'unico modo di "trovare" una suddivisione adattata
  - (un modo che valga *per ogni* calibro δ),

  sarebbe di

  - **generare tutte le possibili suddivisioni di $[a, b]$ (sono infinite. . .),**
  - **e di verificare una a una se sono o no adattate a δ,**

Esistenza

- La dimostrazione è stata puramente esistenziale, non costruttiva.
- Finché a qualcuno non viene un'idea nuova, l'unico modo di "trovare" una suddivisione adattata
  - (un modo che valga *per ogni* calibro δ),

  sarebbe di

  - **generare tutte le possibili suddivisioni di $[a, b]$ (sono infinite. . .),**
  - **e di verificare una a una se sono o no adattate a δ,**
  - **finché non se ne trova una buona (c'è di sicuro).**

- La dimostrazione è stata puramente esistenziale, non costruttiva.
- Finché a qualcuno non viene un'idea nuova, l'unico modo di "trovare" una suddivisione adattata
  - (un modo che valga *per ogni* calibro δ),

  sarebbe di
  - **generare tutte le possibili suddivisioni di $[a, b]$ (sono infinite. . .),**
  - **e di verificare una a una se sono o no adattate a δ,**
  - **finché non se ne trova una buona (c'è di sicuro).**
- Non è un compito per comuni mortali.

Esistenza

- La dimostrazione è stata puramente esistenziale, non costruttiva.
- Finché a qualcuno non viene un'idea nuova, l'unico modo di "trovare" una suddivisione adattata
  - (un modo che valga *per ogni* calibro δ),

  sarebbe di

  - **generare tutte le possibili suddivisioni di $[a, b]$ (sono infinite. . .),**
  - **e di verificare una a una se sono o no adattate a δ,**
  - **finché non se ne trova una buona (c'è di sicuro).**
- Non è un compito per comuni mortali.
  - neanche per comuni rottamabili.

Due calibri

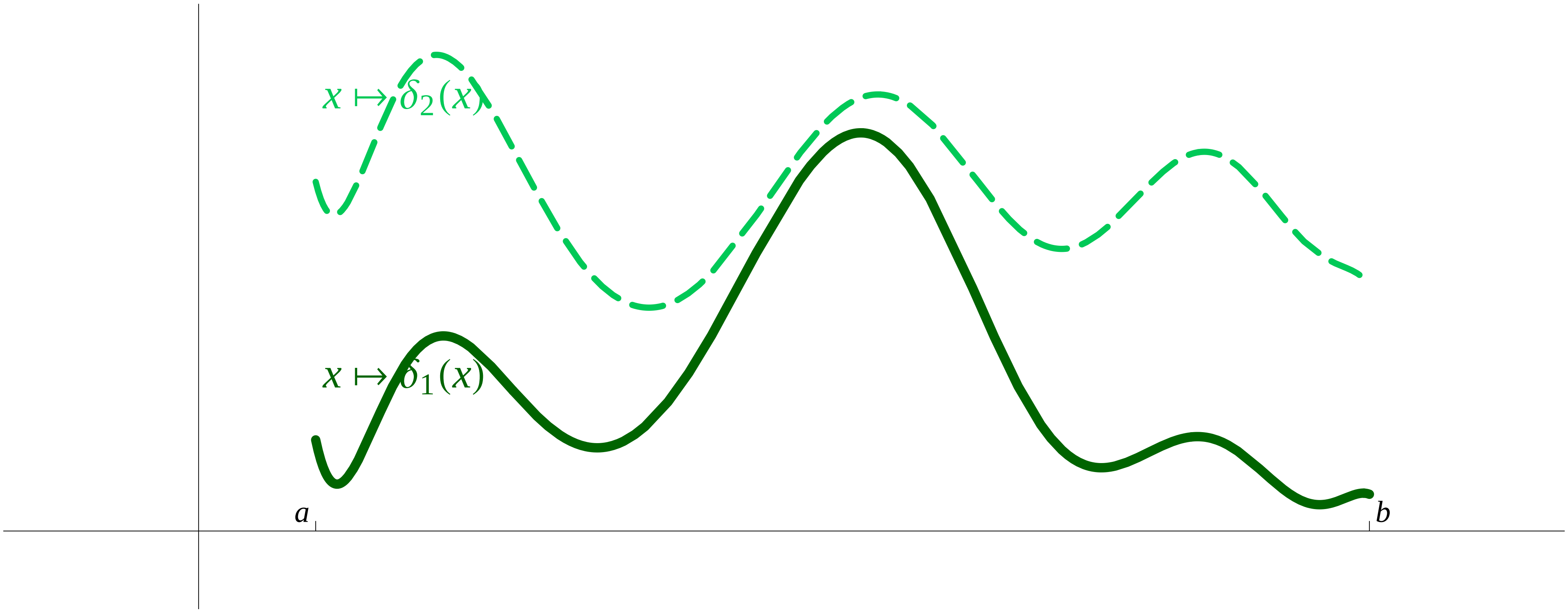
- *Il prossimo risultato di rilievo sarà l'**unicità dell'integrale**.*

Due calibri

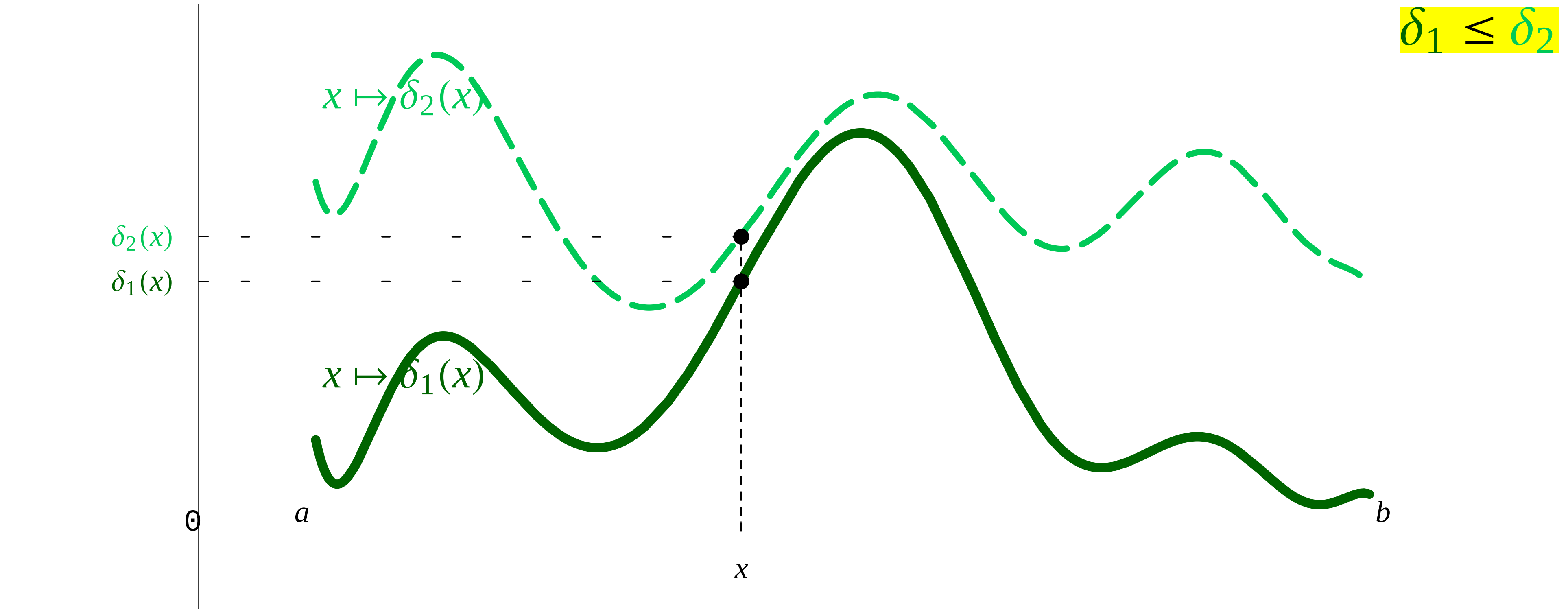
- ***Il prossimo risultato di rilievo sarà l'unicità dell'integrale.***
  - Premettiamo però un paio di semplici *osservazioni* su cosa succede quando si hanno due calibri δ_1, δ_2 allo stesso tempo.

Calibri in ordine

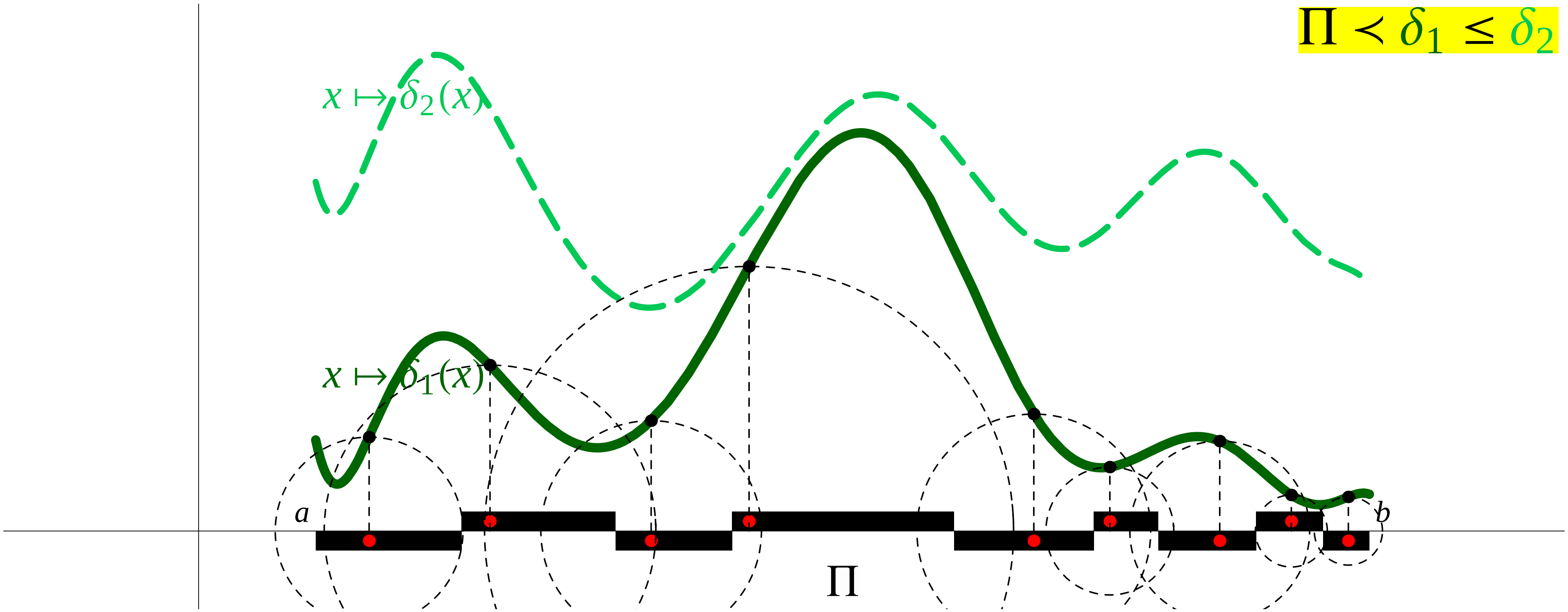
Calibri in ordine



- **Osservazione.** Sono dati due calibri δ_1, δ_2 su $[a, b]$,

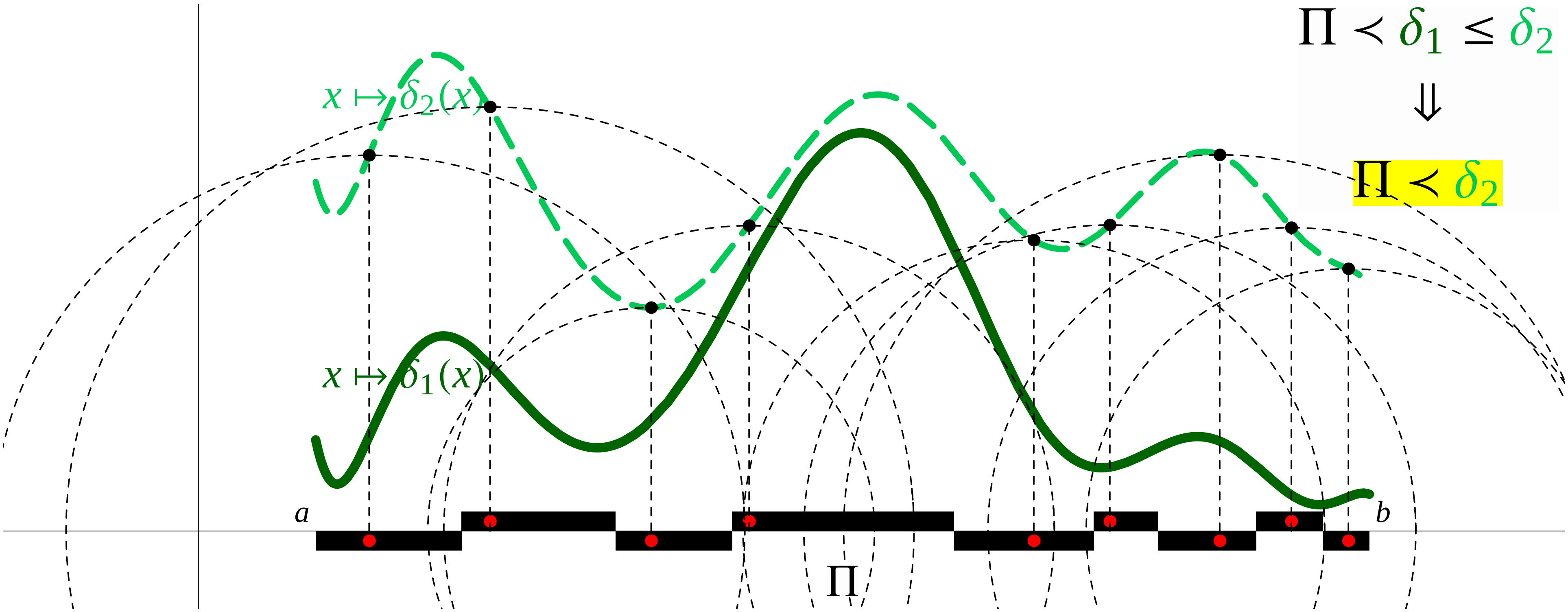


- **Osservazione.** **Sono dati due calibri** δ_1, δ_2 **su** $[a, b]$**,**
  - il primo minore o uguale al secondo: $\delta_1(x) \leq \delta_2(x)$ $\forall x$,



- **Osservazione.** **Sono dati due calibri δ_1, δ_2 su $[a, b]$,**
  - il primo minore o uguale al secondo: $\delta_1(x) \leq \delta_2(x)$ $\forall x$,

e una suddivisione Π adattata al calibro minore.

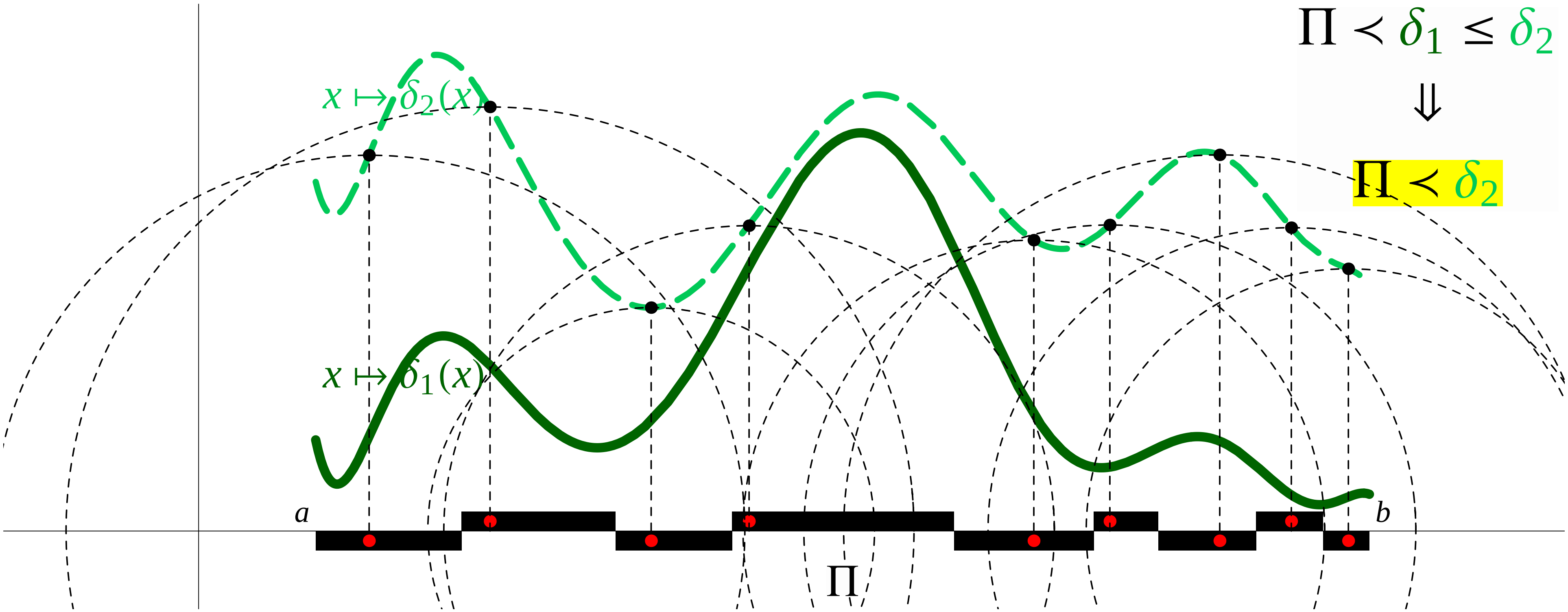


- **Osservazione.** **Sono dati due calibri δ_1, δ_2 su $[a, b]$,**
  - il primo minore o uguale al secondo: $\delta_1(x) \leq \delta_2(x)\ \forall x$,

e una suddivisione Π adattata al calibro minore.

- ***Allora*** **Π è adattata anche al calibro maggiore.**

Calibri in ordine

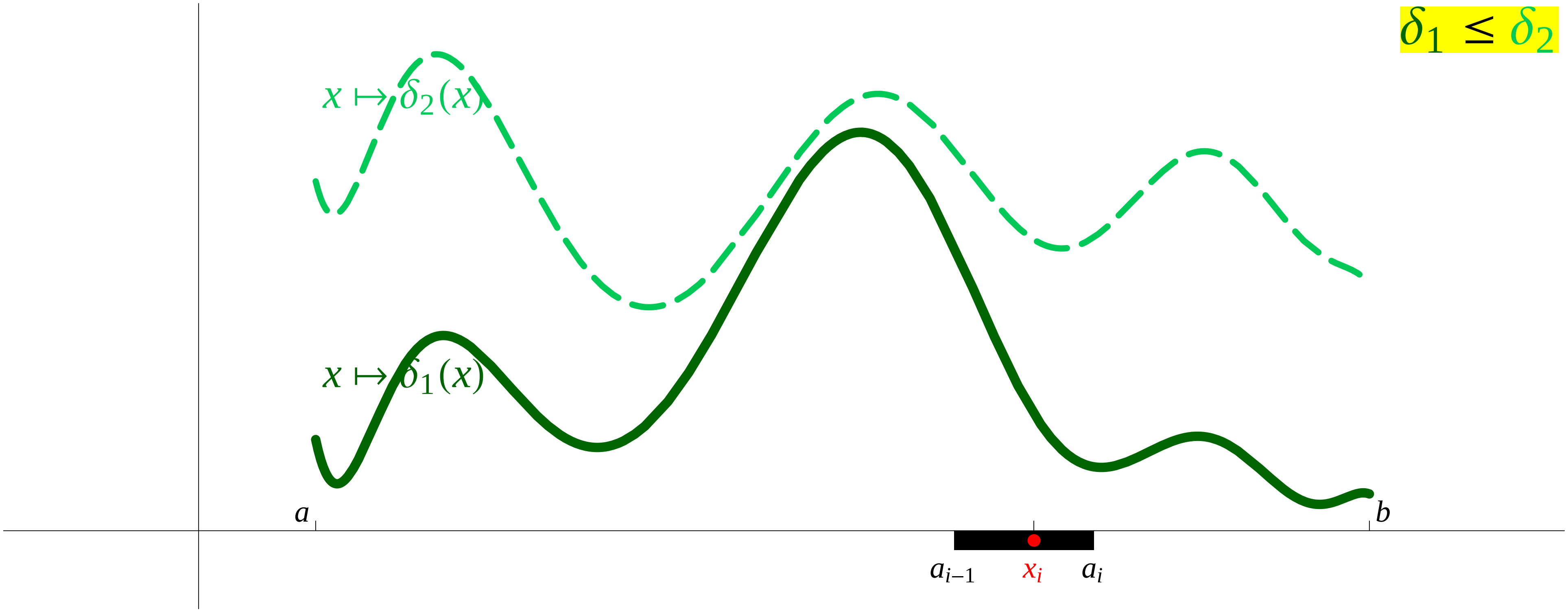


- **Osservazione.** **Sono dati due calibri δ_1, δ_2 su $[a, b]$,**
  - il primo minore o uguale al secondo: $\delta_1(x) \le \delta_2(x)\ \forall x$,

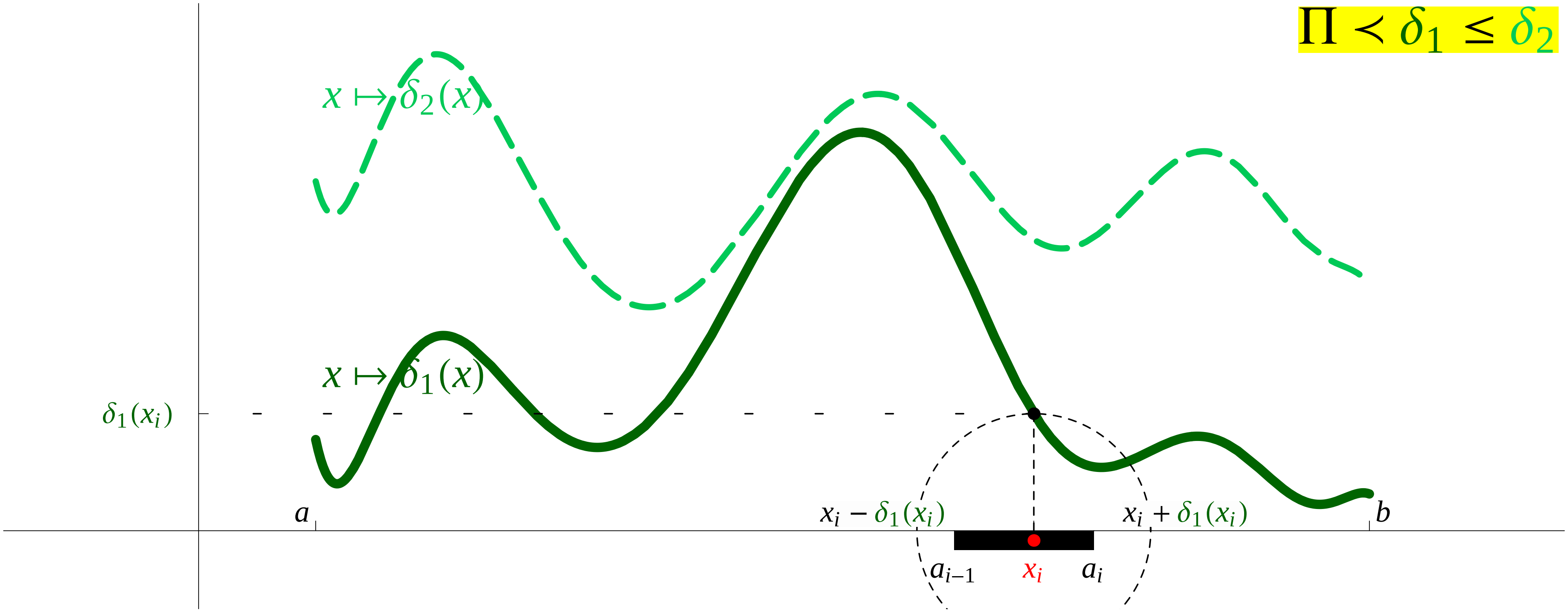
  e una suddivisione Π adattata al calibro *minore*.

- ***Allora*** **Π è adattata anche al calibro *maggiore*.**

Sinteticamente: $\Pi \prec \delta_1 \le \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \Pi \prec \delta_2$.

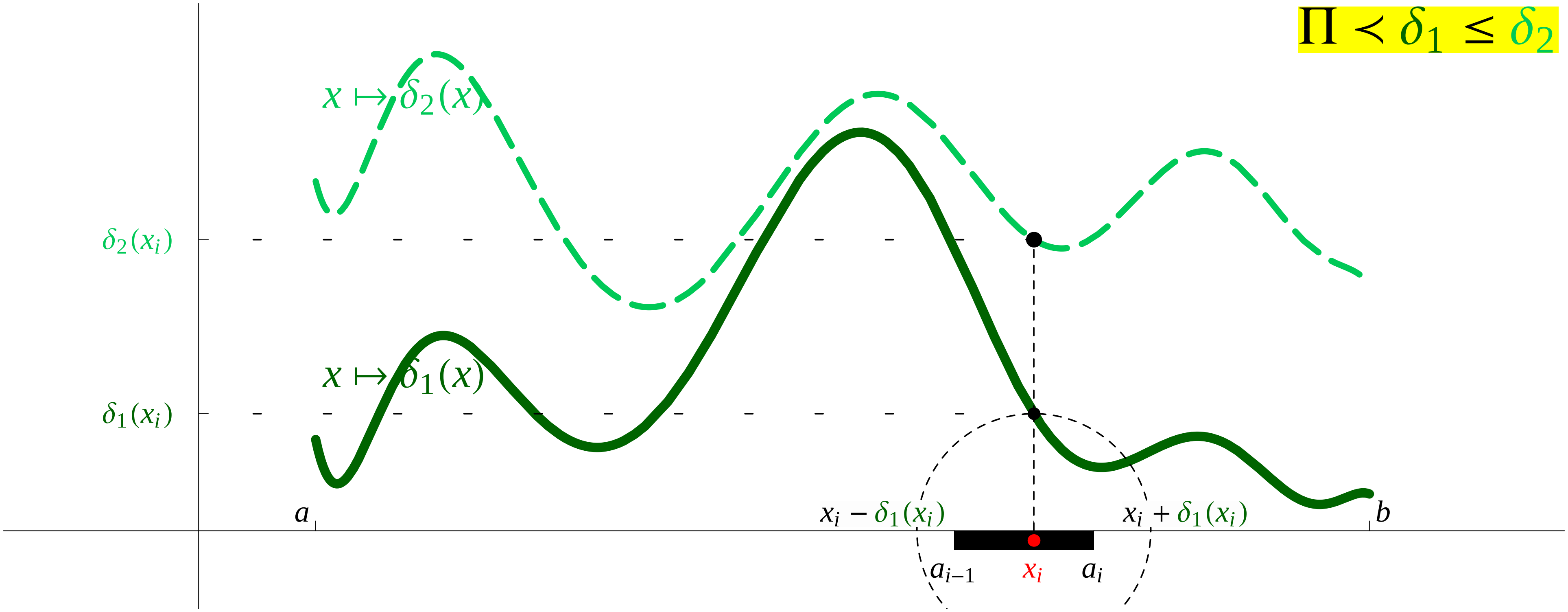


- **Dimostrazione.** Consideriamo $[a_{i-1}, a_i]$ e x_i.

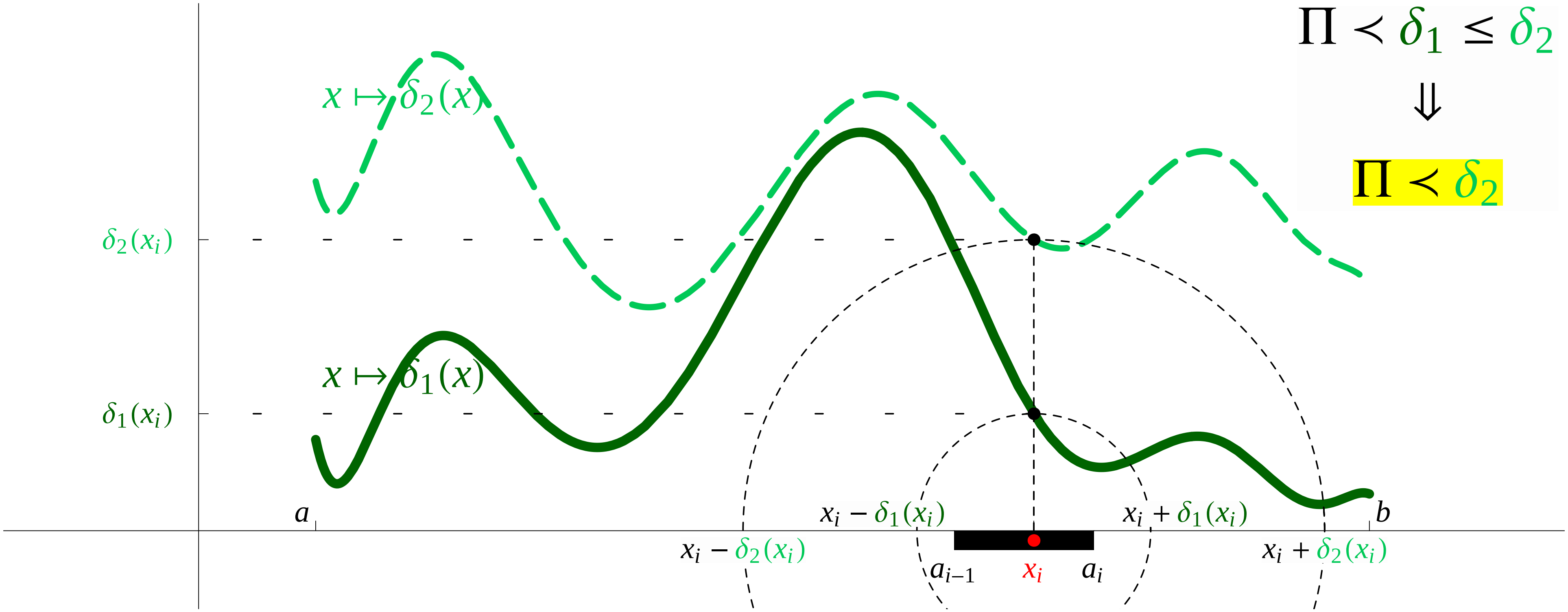


- **Dimostrazione.** **Consideriamo** $[a_{i-1}, a_i]$ **e** x_i **.**
  - Dall'ipotesi $\Pi \prec \delta_1$ segue che $[a_{i-1}, a_i]$ è dentro il cerchietto di centro $(x_i, 0)$ e raggio $\delta_1(x_i)$.

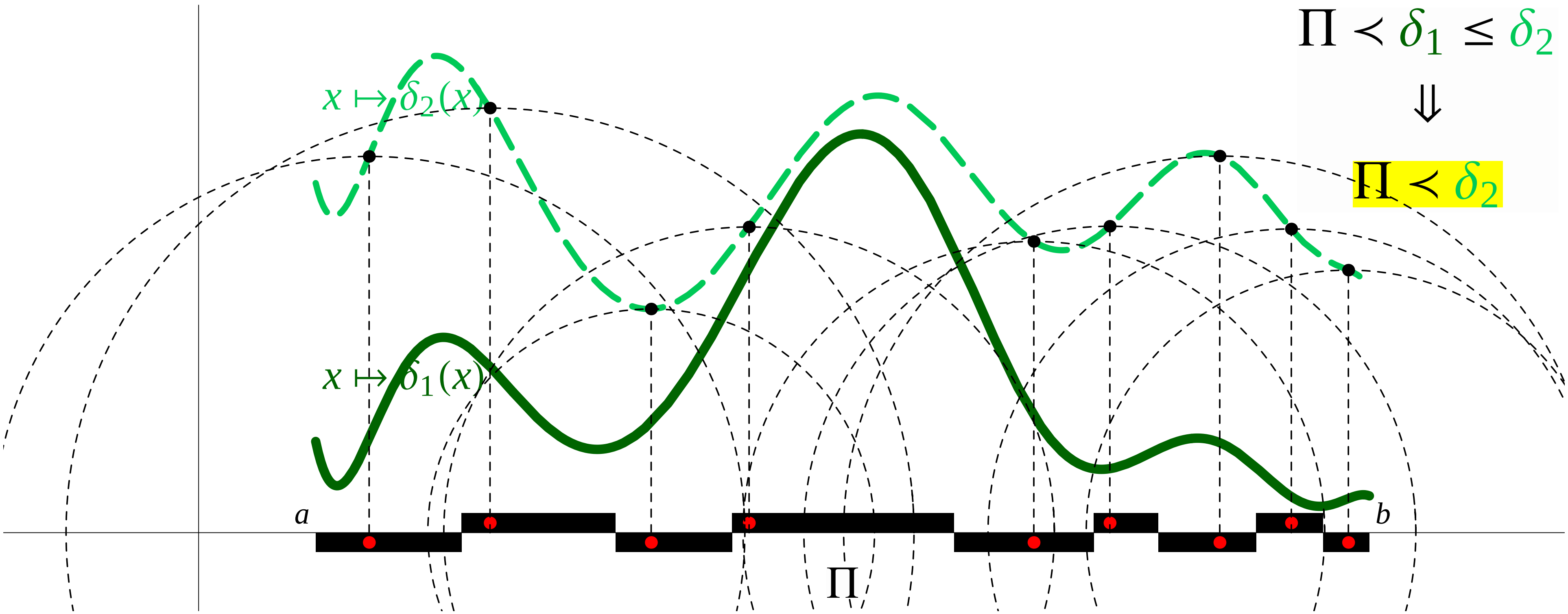
$\Pi \prec \delta_1 \leq \delta_2$



- **Dimostrazione.** **Consideriamo** $[a_{i-1}, a_i]$ **e** x_i.
  - Dall'ipotesi $\Pi \prec \delta_1$ segue che $[a_{i-1}, a_i]$ è dentro il cerchietto di centro $(x_i, 0)$ e raggio $\delta_1(x_i)$.
  - Per l'ipotesi che $\delta_1 \leq \delta_2$ abbiamo anche che $\delta_1(x_i) \leq \delta_2(x_i)$.

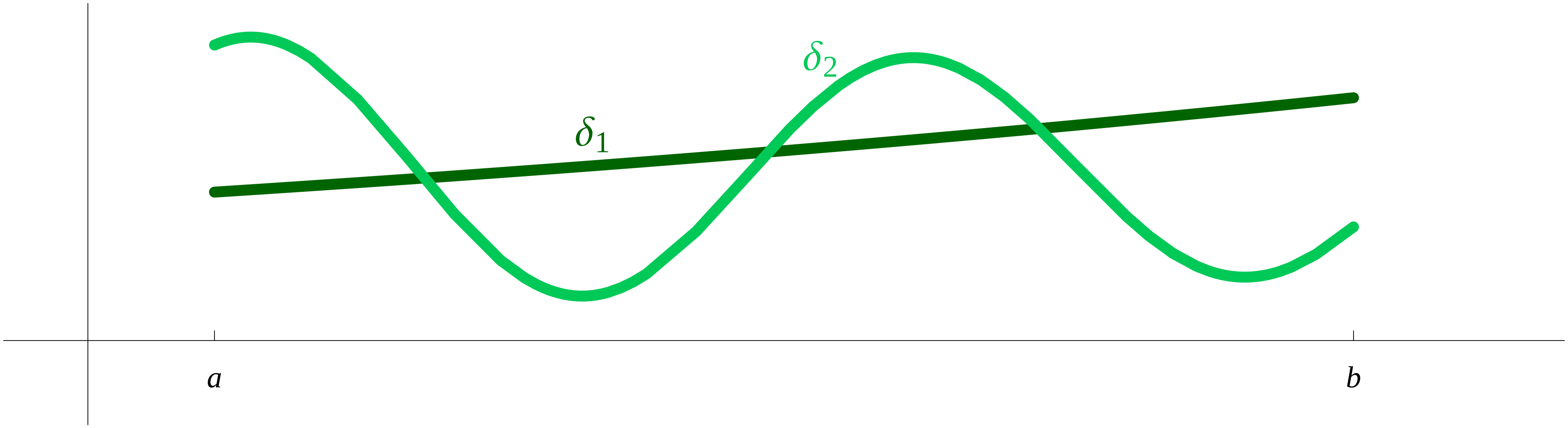


- **Dimostrazione.** **Consideriamo** $[a_{i-1}, a_i]$ **e** x_i **.**
  - Dall'ipotesi $\Pi \prec \delta_1$ segue che $[a_{i-1}, a_i]$ è dentro il cerchietto di centro $(x_i, 0)$ e raggio $\delta_1(x_i)$.
  - Per l'ipotesi che $\delta_1 \leq \delta_2$ abbiamo anche che $\delta_1(x_i) \leq \delta_2(x_i)$.
  - Quindi $[a_{i-1}, a_i]$ è pure contenuto nel cerchietto di raggio $\delta_2(x_i)$.

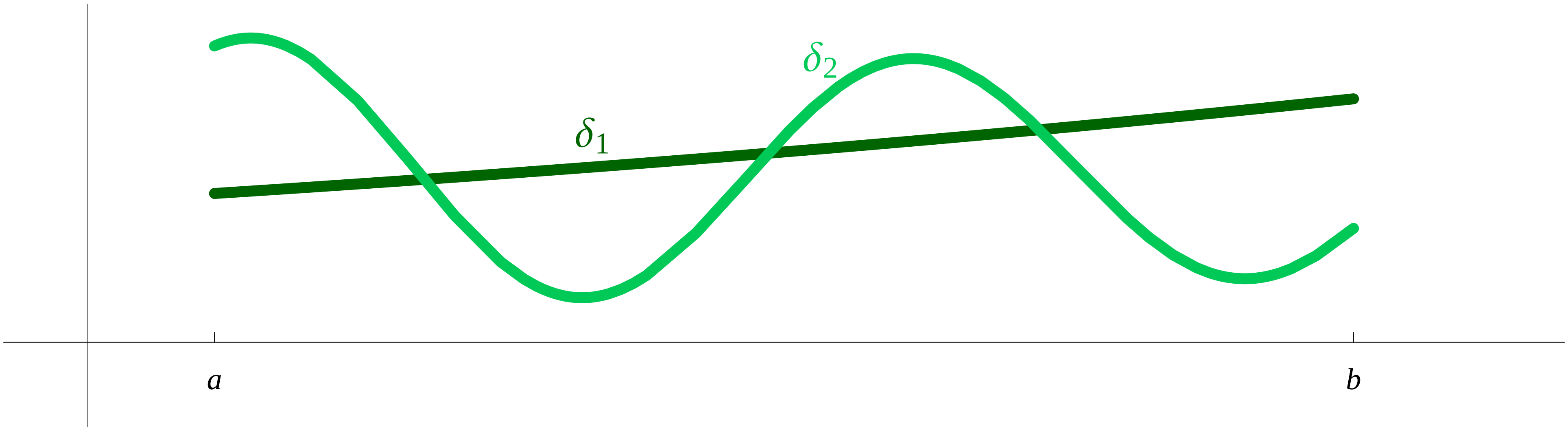


- **Dimostrazione.** **Consideriamo** $[a_{i-1}, a_i]$ **e** x_i **.**
  - Dall'ipotesi $\Pi \prec \delta_1$ segue che $[a_{i-1}, a_i]$ è dentro il cerchietto di centro $(x_i, 0)$ e raggio $\delta_1(x_i)$.
  - Per l'ipotesi che $\delta_1 \le \delta_2$ abbiamo anche che $\delta_1(x_i) \le \delta_2(x_i)$.
  - Quindi $[a_{i-1}, a_i]$ è pure contenuto nel cerchietto di raggio $\delta_2(x_i)$.
- **Valendo questo** $\forall i$**, deduciamo che** $\Pi \prec \delta_2$**, c.v.d.**

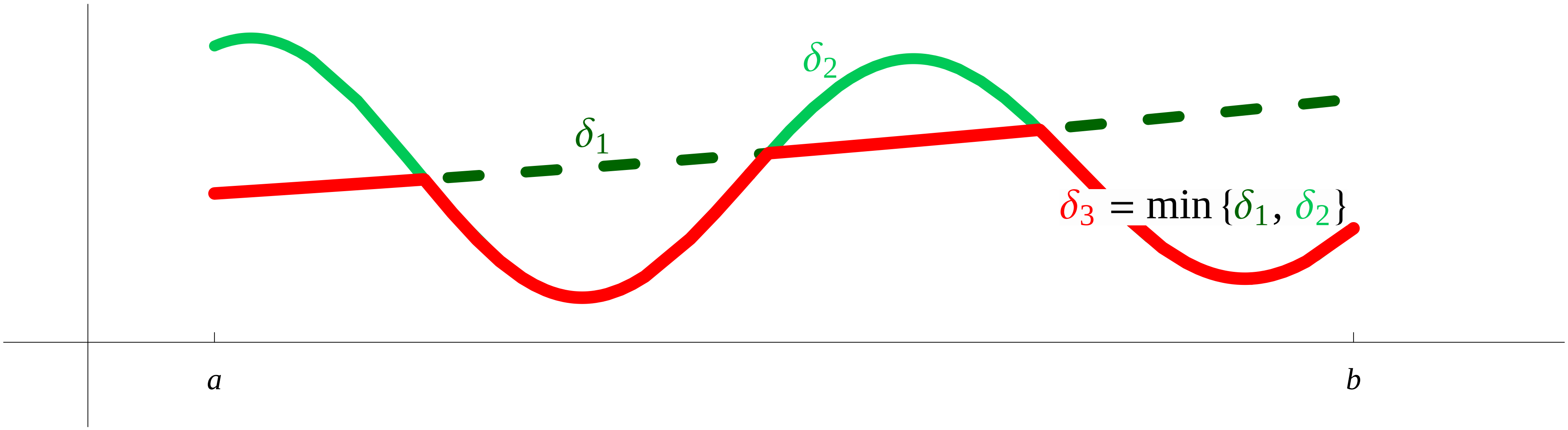
Due calibri qualsiasi



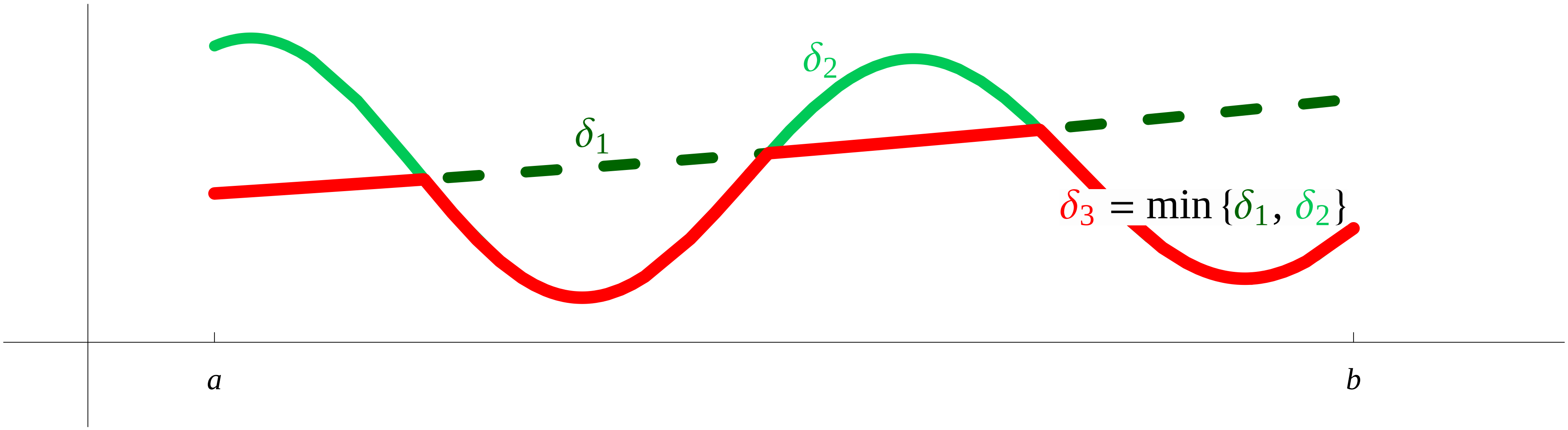
- **Observazione.** Dati due calibri δ_1, δ_2 su $[a, b]$,



- **Osservazione.** **Dati due calibri δ_1, δ_2 su $[a, b]$,**
  - nessuno dei due necessariamente più grande dell'altro.

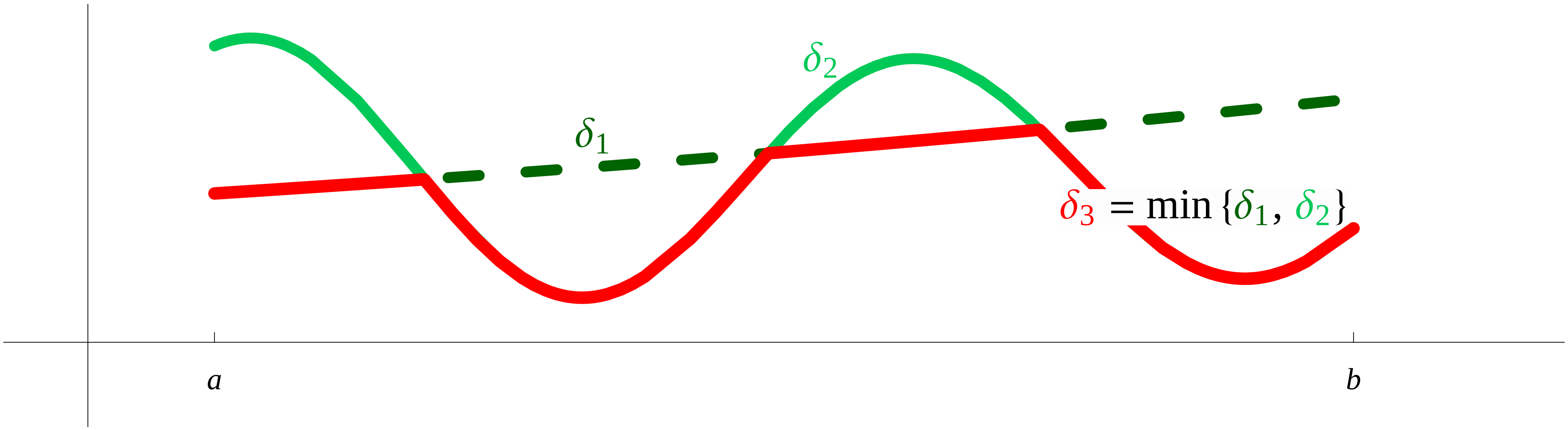


- **Osservazione.** **Siano dati due calibri δ_1, δ_2 su $[a, b]$,**
  - nessuno dei due necessariamente più grande dell'altro.
  - Consideriamo $\delta_3(x) := \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$.



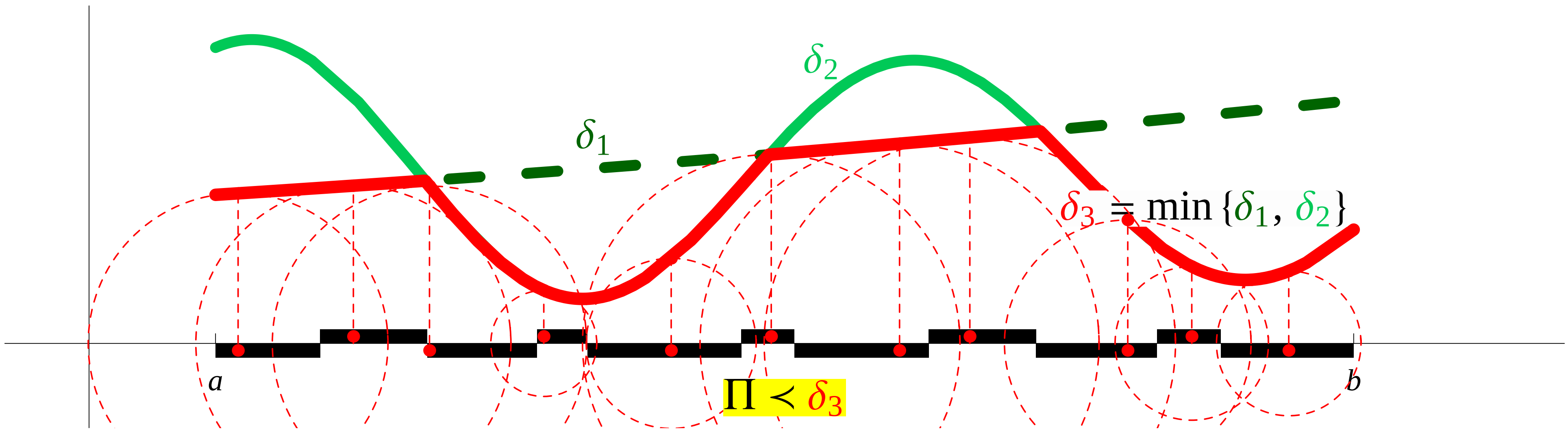
- **Osservazione.** **Dati due calibri** δ_1, δ_2 **su** $[a, b]$**,**
  - nessuno dei due necessariamente più grande dell'altro.
  - Consideriamo $\delta_3(x) := \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$.
  - $\delta_3 \le \delta_1$ e $\delta_3 \le \delta_2$ allo stesso tempo.

Due calibri qualsiasi

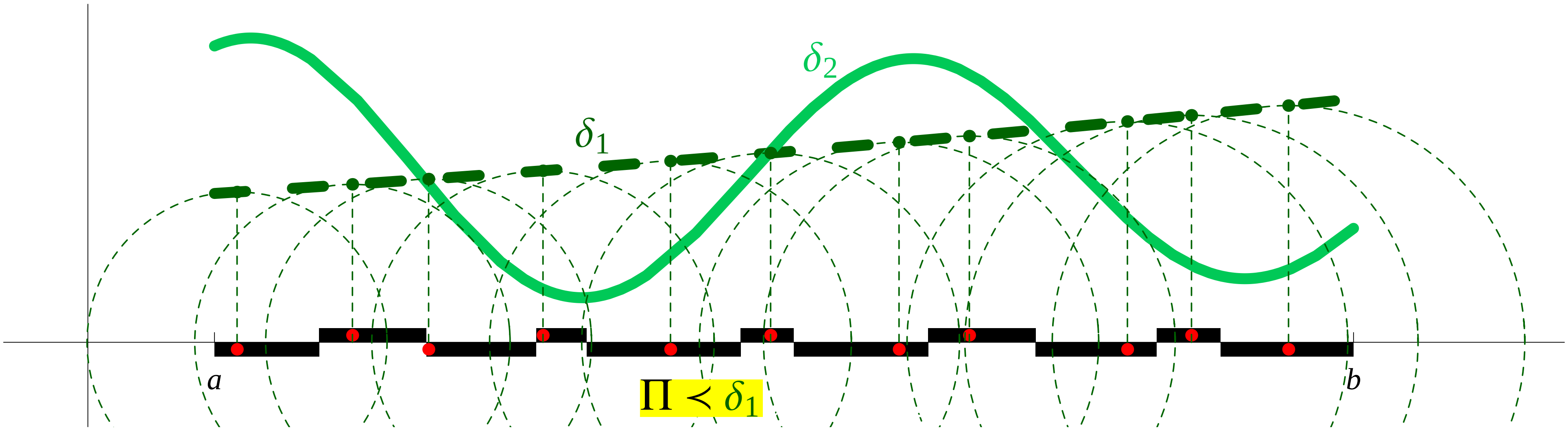


- **Osservazione. Dati due calibri δ_1, δ_2 su $[a, b]$,**
  - nessuno dei due necessariamente più grande dell'altro.
  - Consideriamo $\delta_3(x) := \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$.
  - $\delta_3 \leq \delta_1$ e $\delta_3 \leq \delta_2$ allo stesso tempo.
  - Questo δ_3 è pure un calibro, perché è sempre > 0;

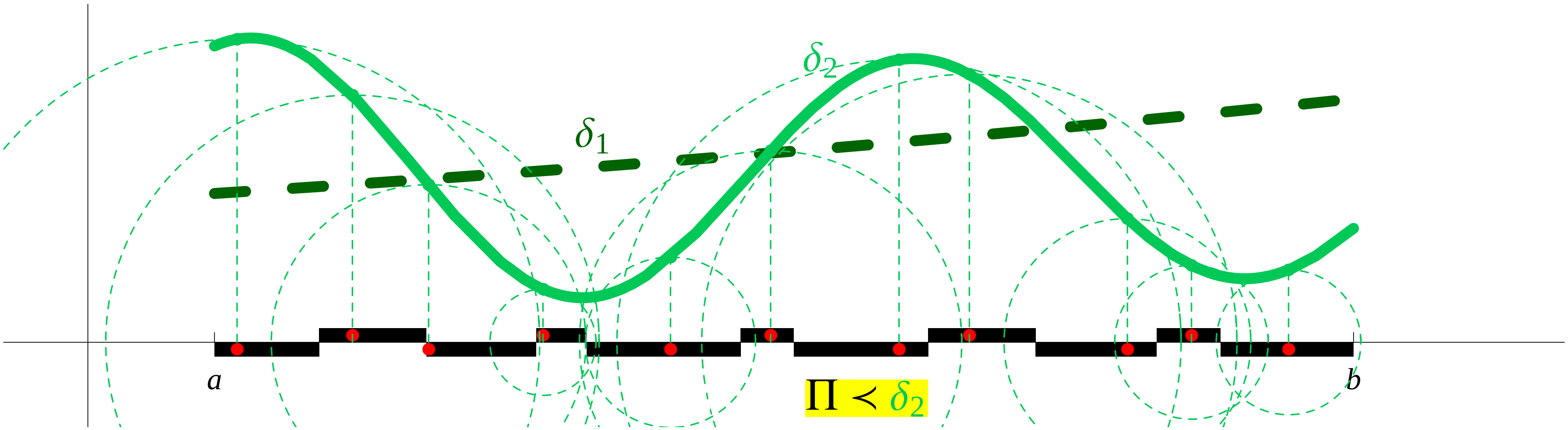
Due calibri qualsiasi



- **Osservazione.** **Dati due calibri δ_1, δ_2 su $[a, b]$,**
  - nessuno dei due necessariamente più grande dell'altro.
  - Consideriamo $\delta_3(x) := \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$.
  - $\delta_3 \leq \delta_1$ e $\delta_3 \leq \delta_2$ allo stesso tempo.
  - Questo δ_3 è pure un calibro, perché è sempre > 0;
  - quindi sappiamo che esiste una Π adattata a δ_3.

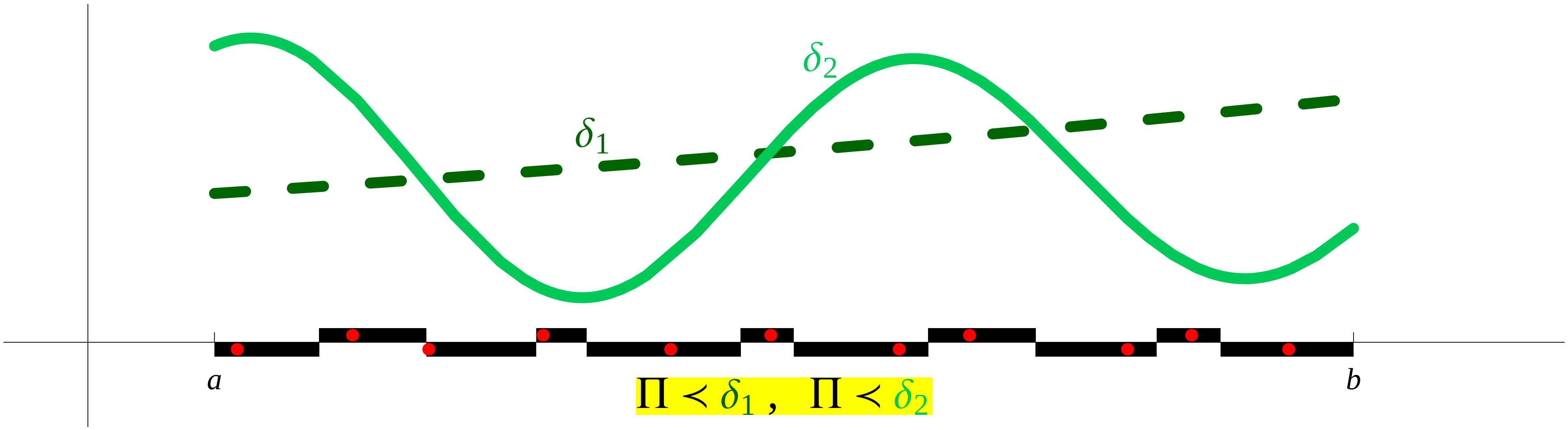


- **Osservazione.** **Dati due calibri δ_1, δ_2 su $[a, b]$,**
  - nessuno dei due necessariamente più grande dell'altro.
  - Consideriamo $\delta_3(x) := \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$.
  - $\delta_3 \le \delta_1$ e $\delta_3 \le \delta_2$ allo stesso tempo.
  - Questo δ_3 è pure un calibro, perché è sempre > 0;
  - quindi sappiamo che esiste una Π adattata a δ_3.
  - Da $\Pi \prec \delta_3 \le \delta_1$ segue che $\Pi \prec \delta_1$;



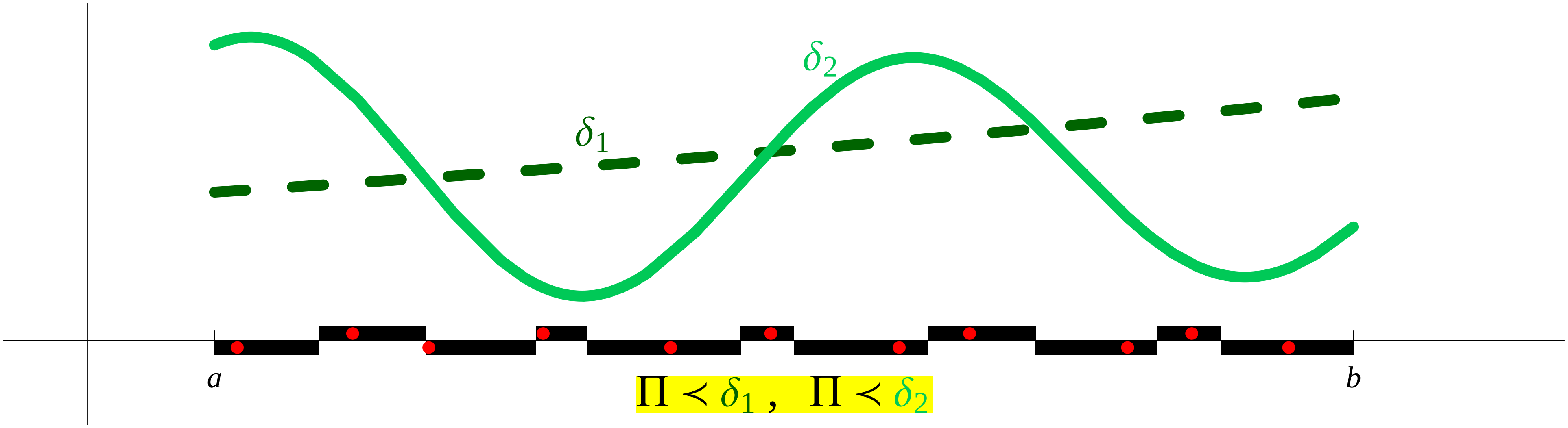
- **Osservazione. Dati due calibri δ_1, δ_2 su $[a, b]$,**
  - nessuno dei due necessariamente più grande dell'altro.
  - Consideriamo $\delta_3(x) := \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$.
  - $\delta_3 \leq \delta_1$ e $\delta_3 \leq \delta_2$ allo stesso tempo.
  - Questo δ_3 è pure un calibro, perché è sempre > 0;
  - quindi sappiamo che esiste una Π adattata a δ_3.
  - Da $\Pi \prec \delta_3 \leq \delta_1$ segue che $\Pi \prec \delta_1$;
  - Da $\Pi \prec \delta_3 \leq \delta_2$ segue che $\Pi \prec \delta_2$;

Due calibri qualsiasi



- **Insomma:** Dati due calibri, esiste sempre una suddivisione Π adattata ai due calibri contemporaneamente.

Due calibri qualsiasi



- **Insomma**: Dati due calibri, esiste sempre una suddivisione Π adattata ai due calibri contemporaneamente.
- Sinteticamente $\forall \delta_1, \delta_2 \quad \exists \Pi$ tale che $\left(\Pi \prec \delta_1 \text{ e } \Pi \prec \delta_2\right)$.

Unicità dell'integrale

- ***Proposizione.*** *Unicità dell'integrale:*

- ***Proposizione.*** ***Unicità dell'integrale:***
  - data una $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e due numeri $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$ tali che

- ***Proposizione.*** ***Unicità dell'integrale:***
  - data una $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e due numeri $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$ tali che
    - f **è integrabile con integrale** I_1

- ***Proposizione.*** ***Unicità dell'integrale:***
  - data una $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e due numeri $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$ tali che
    - f **è integrabile con integrale** I_1
    - f **è integrabile anche con integrale** I_2,

- ***Proposizione.*** ***Unicità dell'integrale:***
  - data una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e due numeri $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$ tali che
    - **f è integrabile con integrale I_1**
    - **f è integrabile anche con integrale I_2,**
  - allora $I_1 = I_2$.

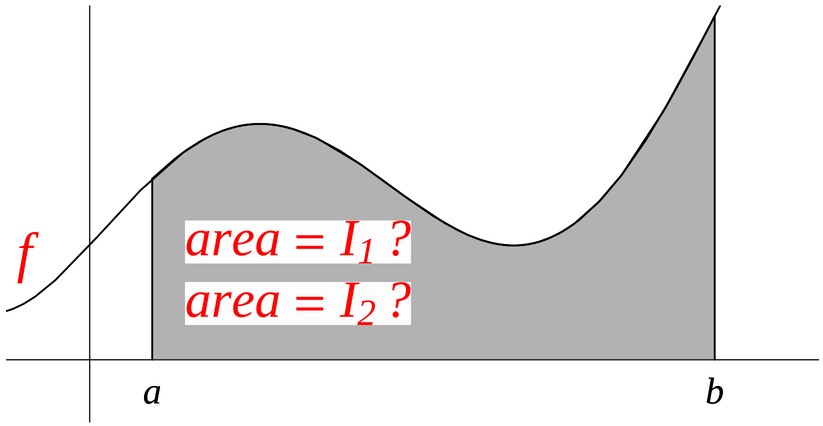
- ***Proposizione.*** ***Unicità dell'integrale:***
  - data una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e due numeri $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$ tali che
    - **f è integrabile con integrale I_1**
    - **f è integrabile anche con integrale I_2,**
  - allora $I_1 = I_2$.
- ***Possiamo parlare quindi dell'integrale di f, invece che di un integrale di f,***

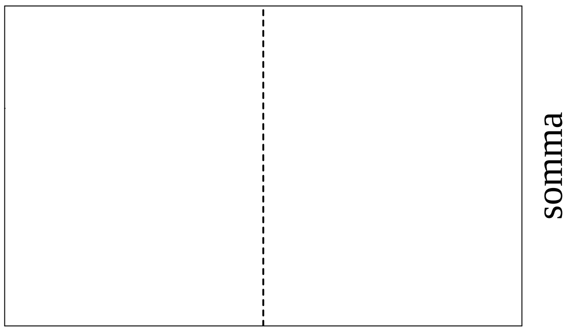
Unicità dell'integrale

- ***Proposizione.*** ***Unicità dell'integrale:***
  - data una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e due numeri $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$ tali che
    - f **è integrabile con integrale** I_1
    - f **è integrabile anche con integrale** I_2,
  - allora $I_1 = I_2$.
- ***Possiamo parlare quindi dell'integrale di*** f, ***invece che di un integrale di*** f,
  - e usare il simbolo $\int_a^b f$ con un senso ben preciso.

- ***Proposizione.*** ***Unicità dell'integrale:***
  - data una $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e due numeri $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$ tali che
    - f **è integrabile con integrale** I_1
    - f **è integrabile anche con integrale** I_2,
  - allora $I_1 = I_2$.
- ***Possiamo parlare quindi dell'integrale di f, invece che di un integrale di f,***
  - e usare il simbolo $\int_a^b f$ con un senso ben preciso.
  - L'unicità dell'integrale potrebbe sembrare una pedanteria, ma la dimostrazione non è poi così ovvia.

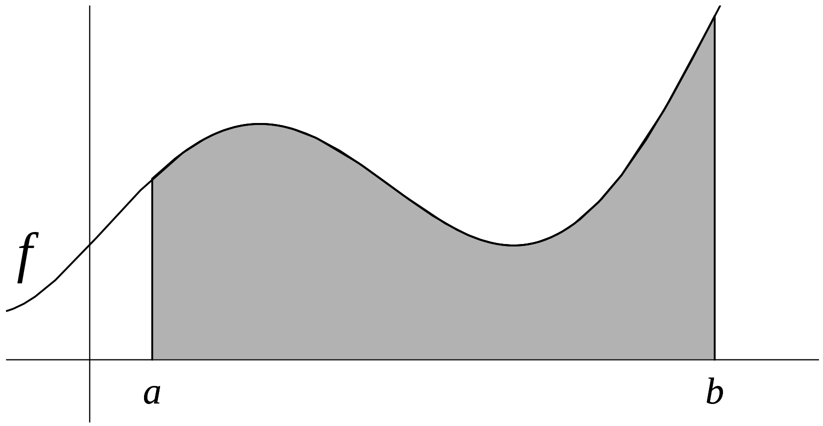
Dimostrazione

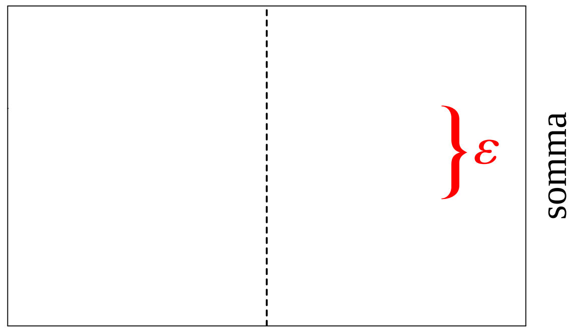




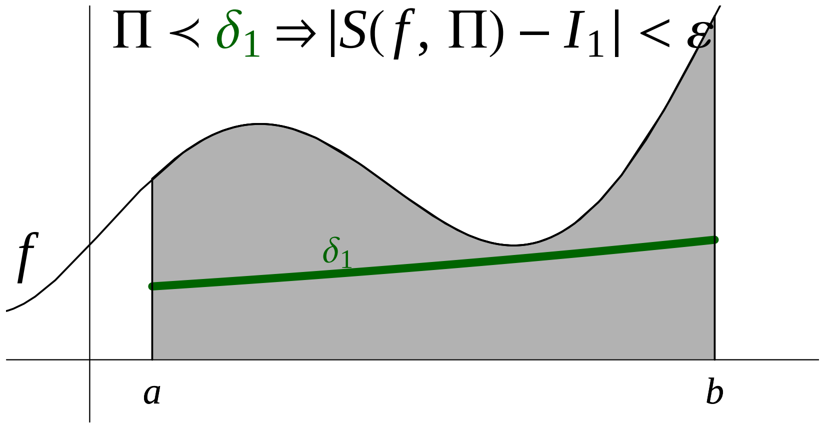
- **L'ipotesi è che f sia integrabile con integrali I_1 e I_2.**

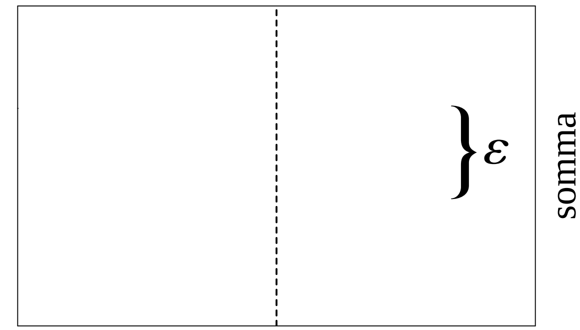
Dimostrazione





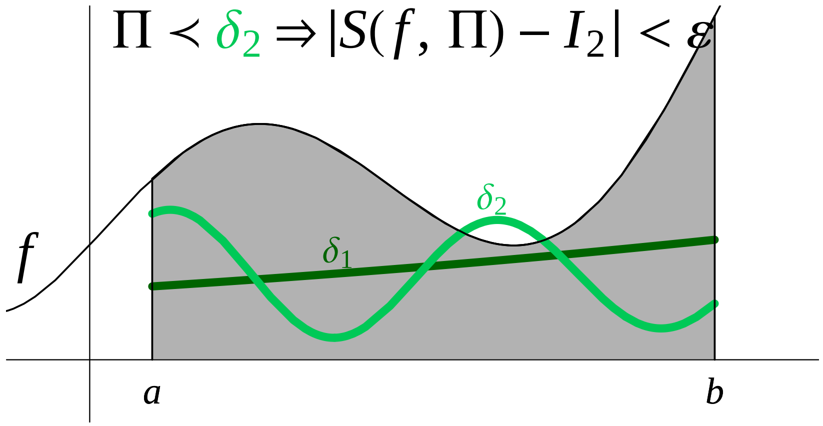
- L'ipotesi è che f sia integrabile con integrali I_1 e I_2.
- Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario.

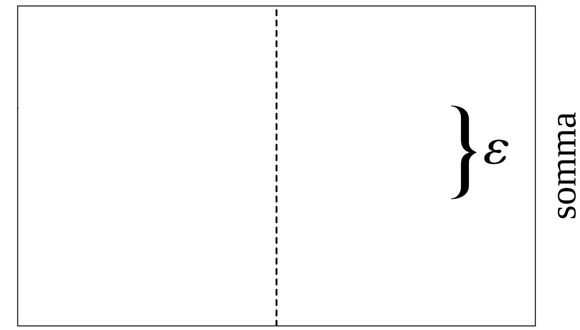




- **L'ipotesi è che f sia integrabile con integrali I_1 e I_2.**
- **Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dalla definizione**
  - $\exists \delta_1$ t.c. $\forall \Pi \qquad \Pi \prec \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left| S(f,\Pi) - I_1 \right| < \varepsilon.$

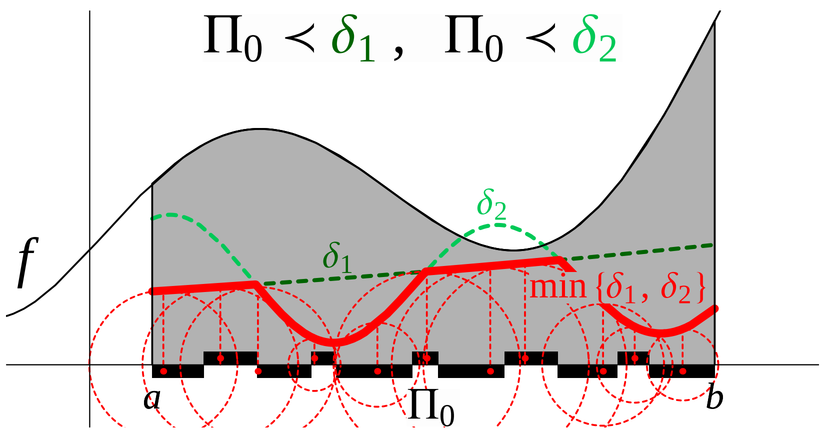
Dimostrazione

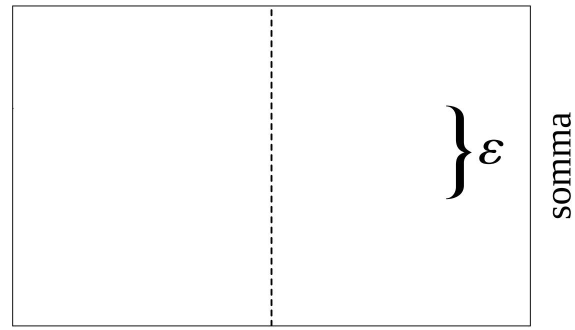




- **L'ipotesi è che f sia integrabile con integrali I_1 e I_2.**
- **Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dalla definizione**
  - $\exists\delta_1$ t.c. $\forall\Pi \qquad \Pi \prec \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left|S(f, \Pi) - I_1\right| < \varepsilon.$
  - $\exists\delta_2$ t.c. $\forall\Pi \qquad \Pi \prec \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \left|S(f, \Pi) - I_2\right| < \varepsilon.$

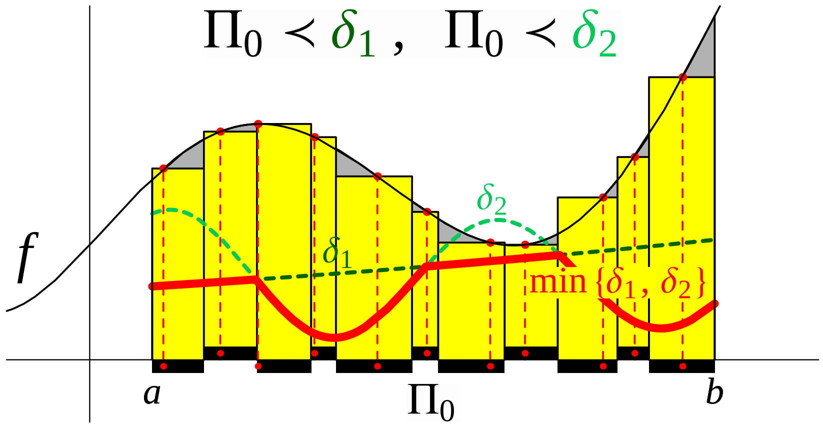
Dimostrazione

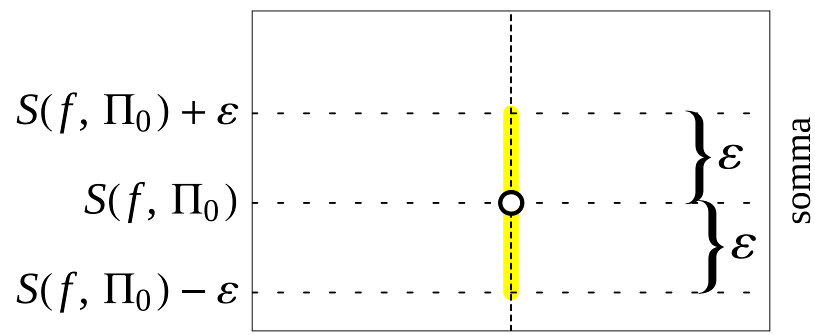




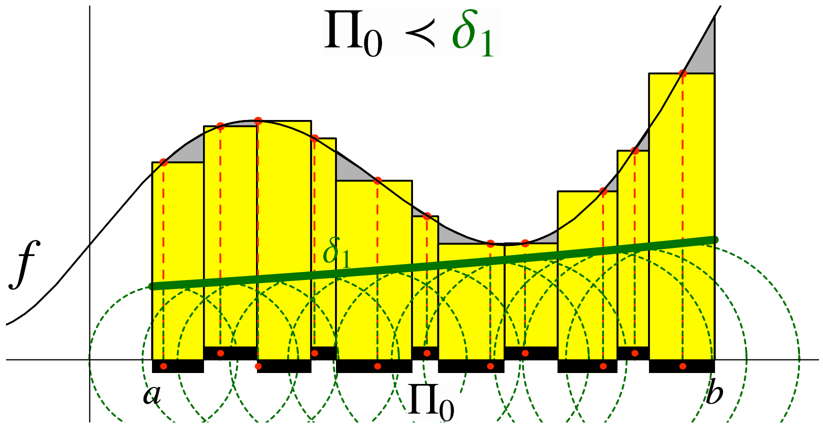
- L'ipotesi è che f sia integrabile con integrali I_1 e I_2.
- Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dalla definizione
  - $\exists \delta_1$ t.c. $\forall \Pi \quad \Pi \prec \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left|S(f,\Pi) - I_1\right| < \varepsilon.$
  - $\exists \delta_2$ t.c. $\forall \Pi \quad \Pi \prec \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \left|S(f,\Pi) - I_2\right| < \varepsilon.$
- Esiste una suddivisione Π_0 adattata sia a δ_1 che a δ_2.

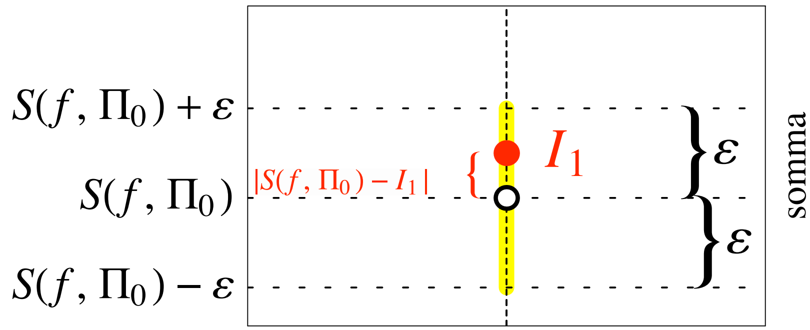
Dimostrazione



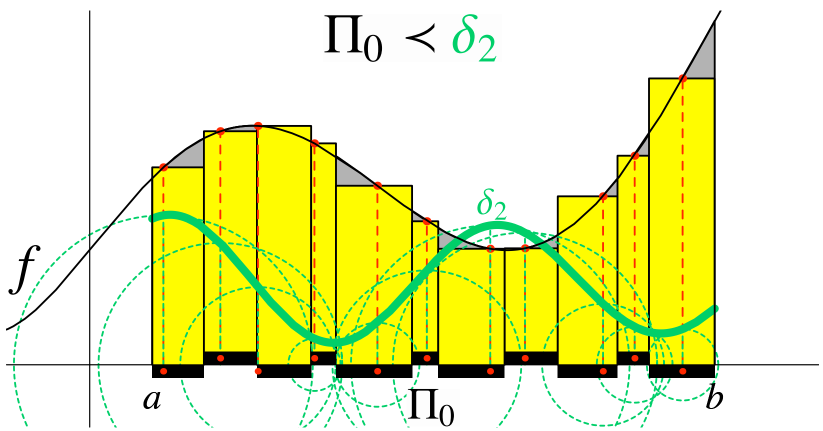


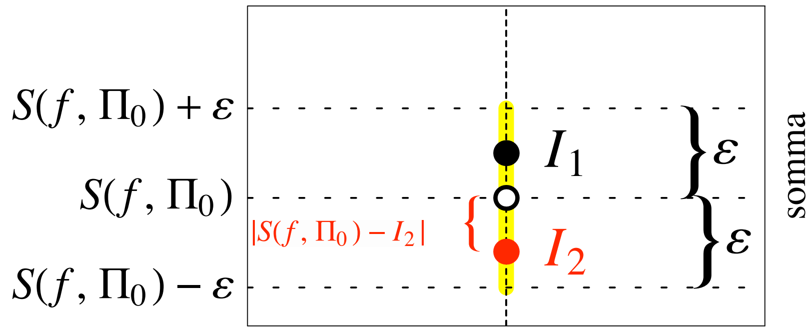
- **L'ipotesi è che f sia integrabile con integrali I_1 e I_2.**
- **Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dalla definizione**
  - $\exists \delta_1$ t.c. $\forall \Pi \qquad \Pi \prec \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left| S(f, \Pi) - I_1 \right| < \varepsilon.$
  - $\exists \delta_2$ t.c. $\forall \Pi \qquad \Pi \prec \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \left| S(f, \Pi) - I_2 \right| < \varepsilon.$
- **Esiste una suddivisione Π_0 adattata sia a δ_1 che a δ_2.**
- **Consideriamo la somma di Riemann $S(f, \Pi_0)$.**



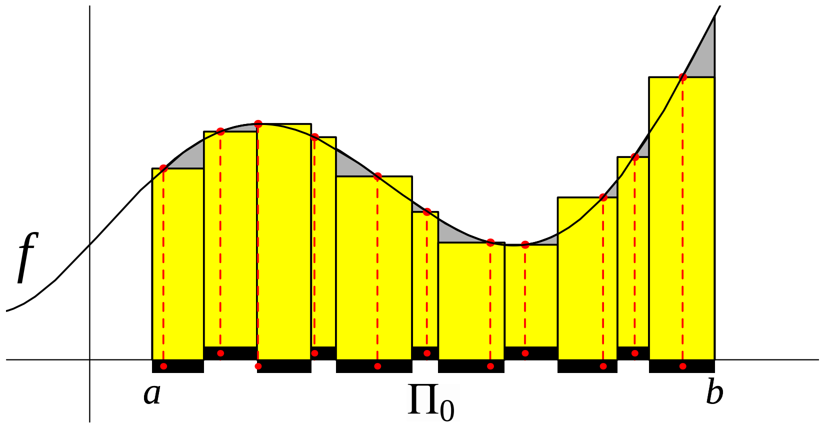


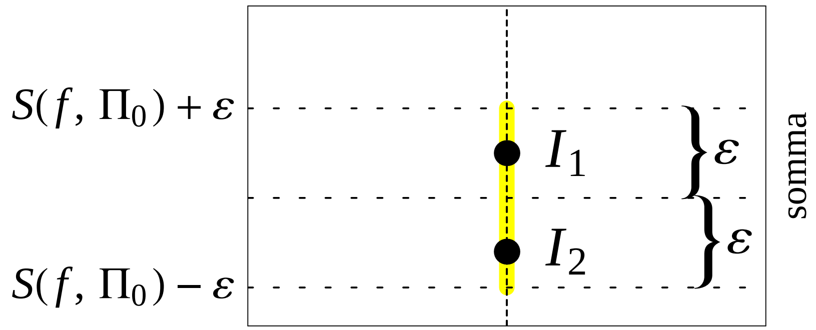
- **L'ipotesi è che f sia integrabile con integrali I_1 e I_2.**
- **Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dalla definizione**
  - $\exists\delta_1$ t.c. $\forall\Pi \qquad \Pi \prec \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left|S(f,\Pi) - I_1\right| < \varepsilon.$
  - $\exists\delta_2$ t.c. $\forall\Pi \qquad \Pi \prec \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \left|S(f,\Pi) - I_2\right| < \varepsilon.$
- **Esiste una suddivisione Π_0 adattata sia a δ_1 che a δ_2.**
- **Consideriamo la somma di Riemann $S(f,\Pi_0)$.**
  - Poiché $\Pi_0 \prec \delta_1$ abbiamo che $\left|S(f,\Pi_0) - I_1\right| < \varepsilon$;



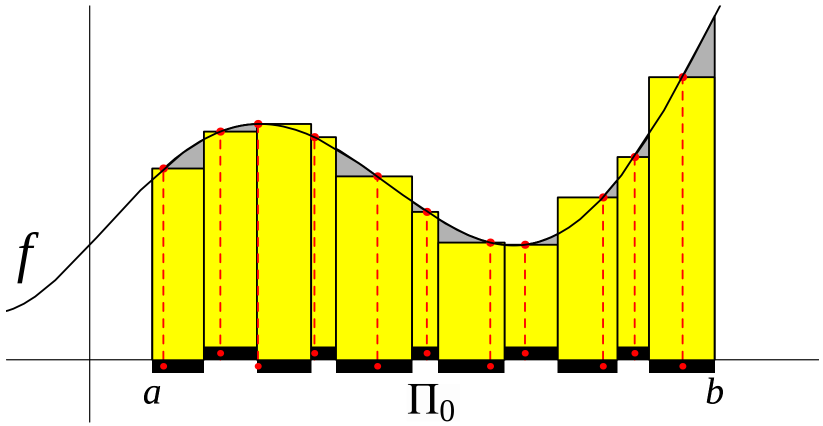


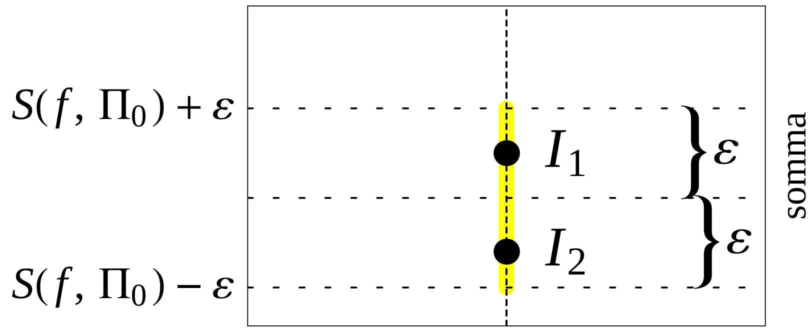
- **L'ipotesi è che f sia integrabile con integrali I_1 e I_2.**
- **Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dalla definizione**
  - $\exists\delta_1$ t.c. $\forall\Pi \quad \Pi \prec \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left|S(f,\Pi) - I_1\right| < \varepsilon.$
  - $\exists\delta_2$ t.c. $\forall\Pi \quad \Pi \prec \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \left|S(f,\Pi) - I_2\right| < \varepsilon.$
- **Esiste una suddivisione Π_0 adattata sia a δ_1 che a δ_2.**
- **Consideriamo la somma di Riemann $S(f,\Pi_0)$.**
  - Poiché $\Pi_0 \prec \delta_1$ abbiamo che $\left|S(f,\Pi_0) - I_1\right| < \varepsilon$;
  - Poiché $\Pi_0 \prec \delta_2$ abbiamo che $\left|S(f,\Pi_0) - I_2\right| < \varepsilon$;



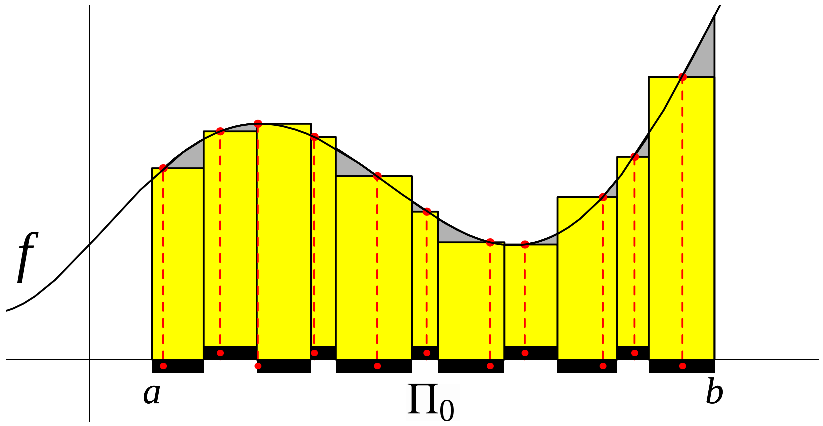


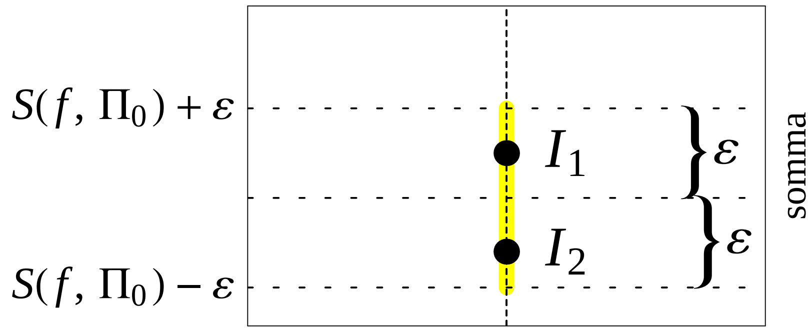
- **Pertanto entrambi I_1 e I_2 sono compresi**



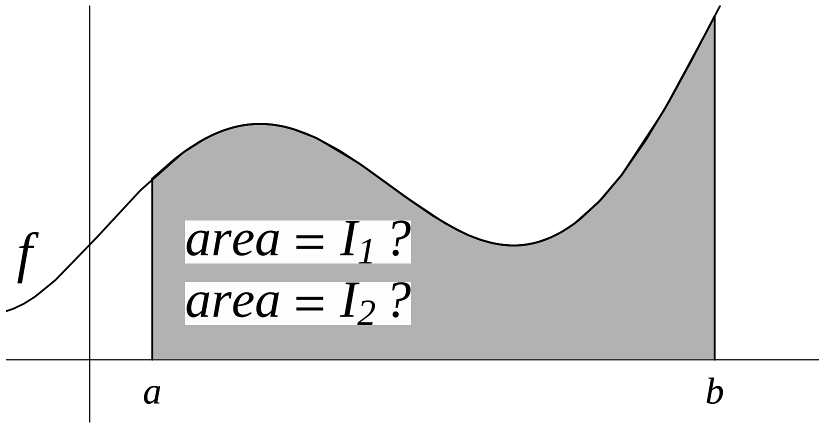


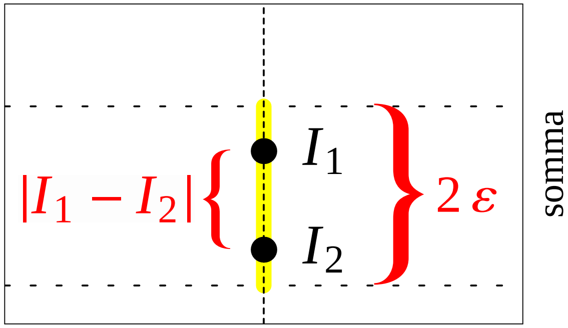
- **Pertanto entrambi I_1 e I_2 sono compresi**
  - fra $S(f,\Pi_0)-\varepsilon$





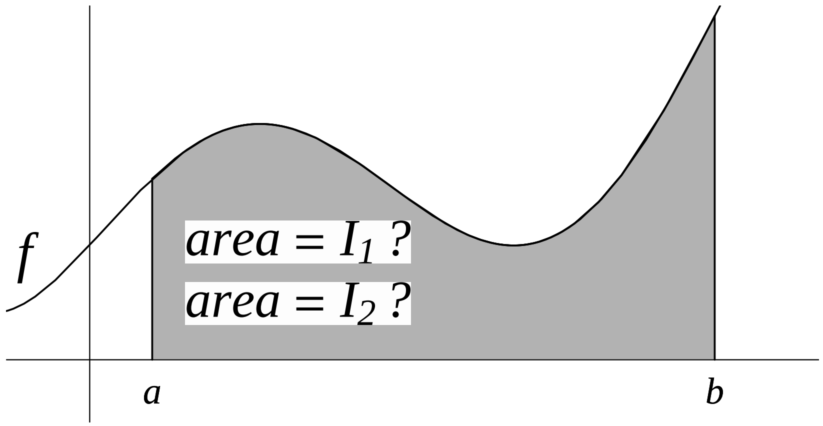
- **Pertanto entrambi I_1 e I_2 sono compresi**
  - fra $S(f, \Pi_0) - \varepsilon$
  - e $S(f, \Pi_0) + \varepsilon$,

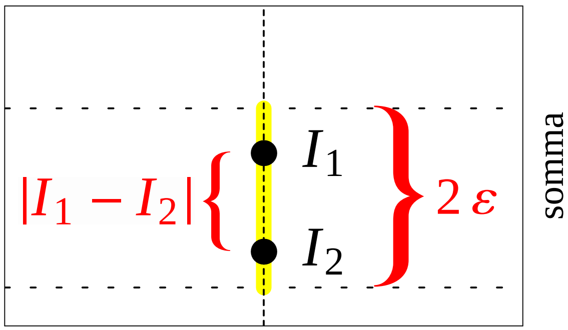




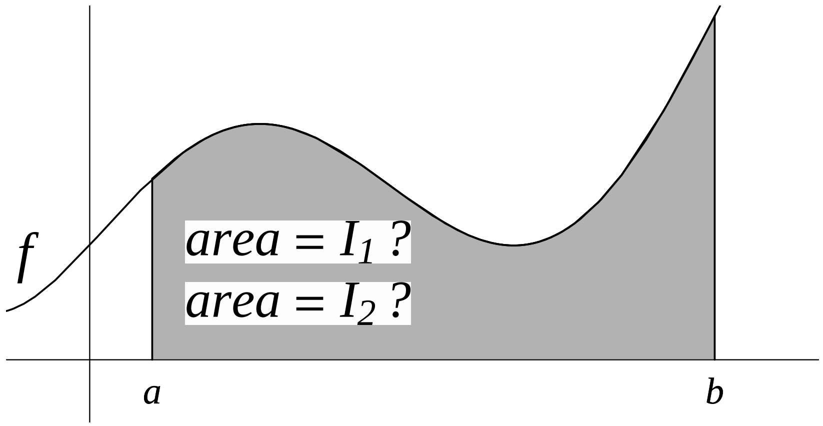
- **Pertanto entrambi I_1 e I_2 sono compresi**
  - fra $S(f, \Pi_0) - \varepsilon$
  - e $S(f, \Pi_0) + \varepsilon$,
- **e quindi la distanza fra I_1 e I_2 non supera la distanza fra $S(f, \Pi_0) - \varepsilon$ e $S(f, \Pi_0) + \varepsilon$,**

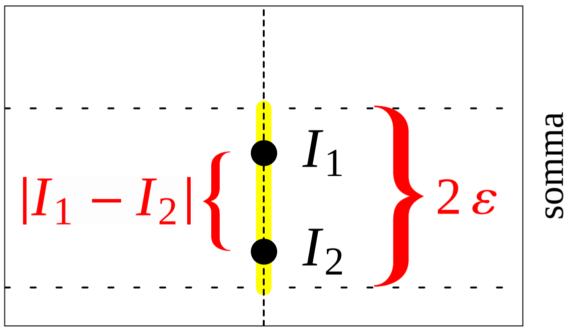
Dimostrazione





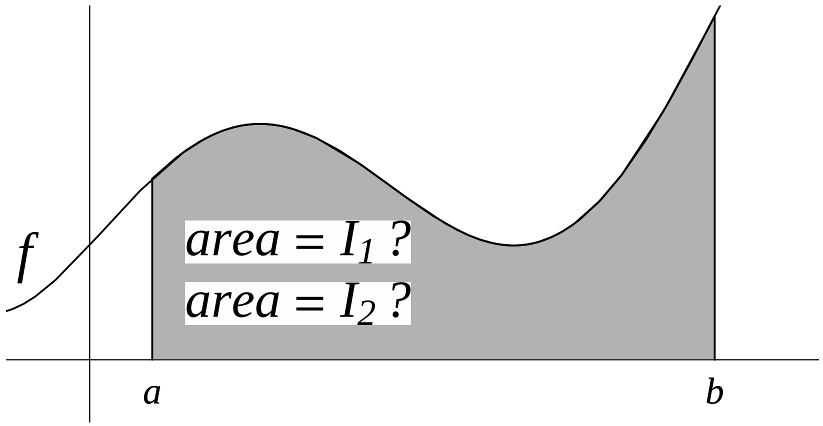
- **Pertanto entrambi I_1 e I_2 sono compresi**
  - fra $S(f, \Pi_0) - \varepsilon$
  - e $S(f, \Pi_0) + \varepsilon$,
- **e quindi la distanza fra I_1 e I_2 non supera la distanza fra $S(f, \Pi_0) - \varepsilon$ e $S(f, \Pi_0) + \varepsilon$,**
  - che è 2ε.

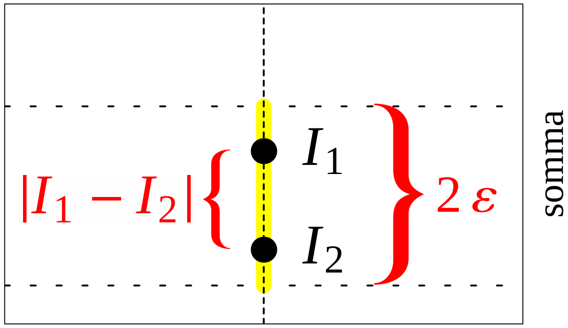




- **Riassumendo, comunque fissiamo $\varepsilon > 0$, si ha che**

$$|I_1 - I_2| \leq 2\varepsilon.$$



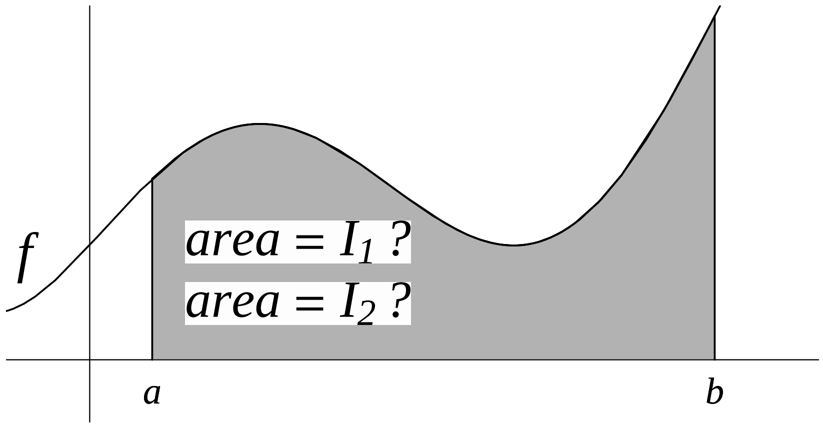


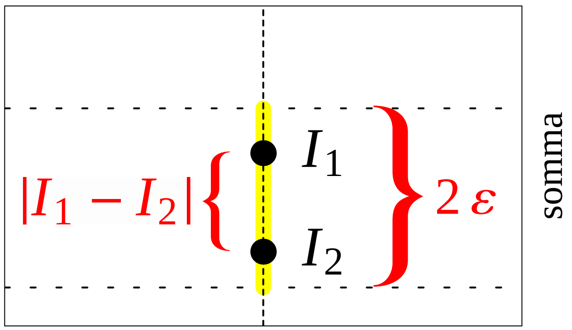
- **Riassumendo, comunque fissiamo $\varepsilon > 0$, si ha che**

$$|I_1 - I_2| \leq 2\varepsilon.$$

- **Quindi il numero $|I_1 - I_2|$**

Dimostrazione

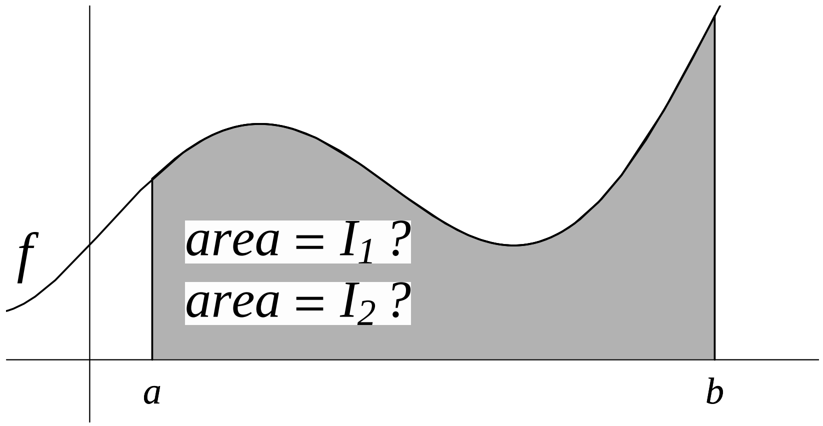


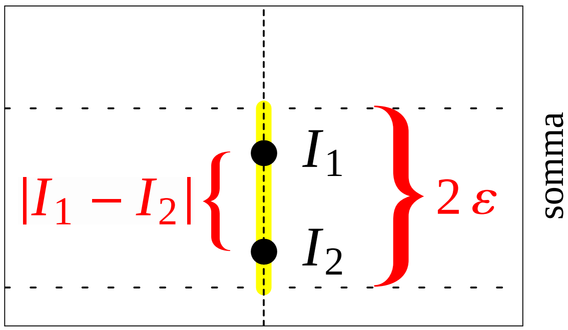


- **Riassumendo, comunque fissiamo $\varepsilon > 0$, si ha che**

$$\boxed{|I_1 - I_2| \leq 2\varepsilon.}$$

- **Quindi il numero $|I_1 - I_2|$**
  - è ≥ 0 perché è un valore assoluto,

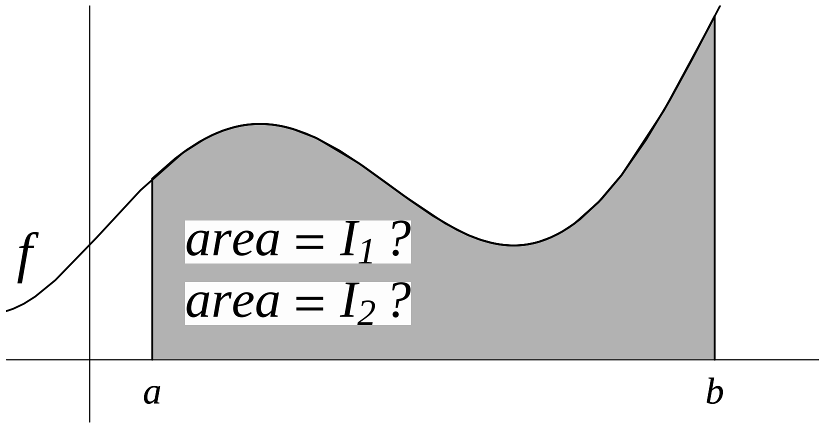


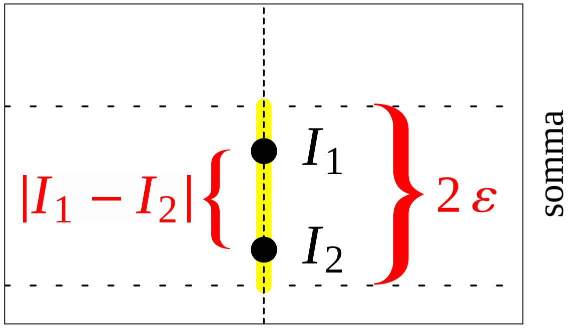


- **Riassumendo, comunque fissiamo $\varepsilon > 0$, si ha che**

$$|I_1 - I_2| \leq 2\varepsilon.$$

- **Quindi il numero $|I_1 - I_2|$**
    - è ≥ 0 perché è un valore assoluto,
    - ed è minore di qualunque numero positivo.



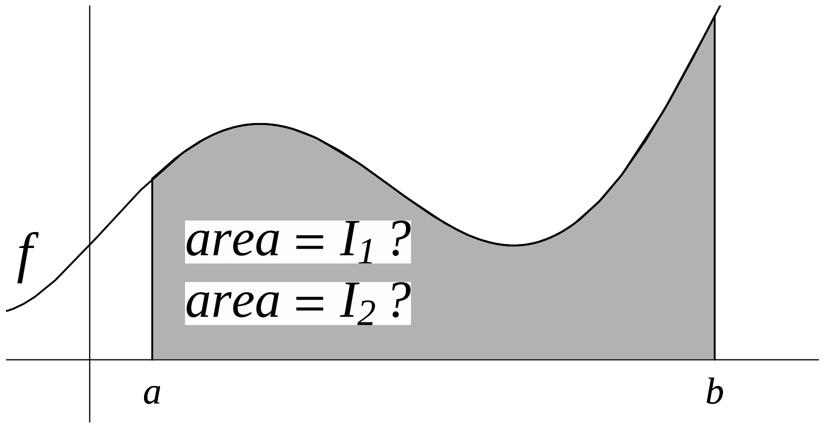


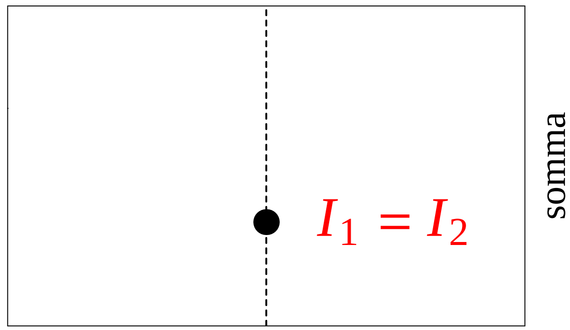
- **Riassumendo, comunque fissiamo $\varepsilon > 0$, si ha che**

$$\boxed{|I_1 - I_2| \leq 2\varepsilon.}$$

- **Quindi il numero $|I_1 - I_2|$**
  - è ≥ 0 perché è un valore assoluto,
  - ed è minore di qualunque numero positivo.

- **L'unica possibilità è che $|I_1 - I_2|$ sia zero,**

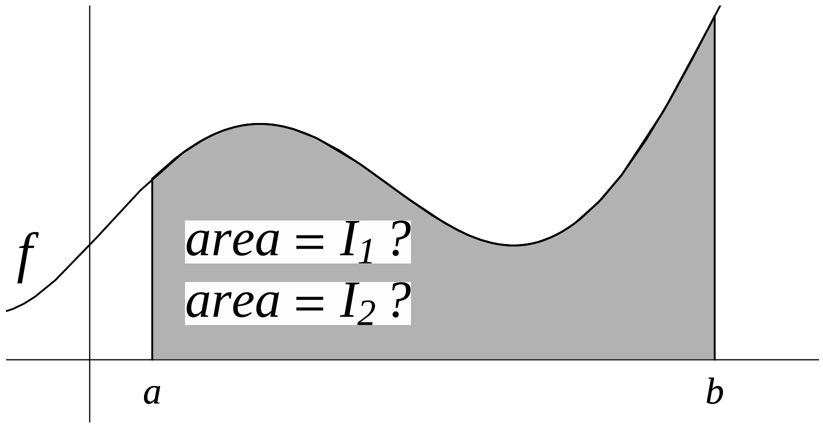


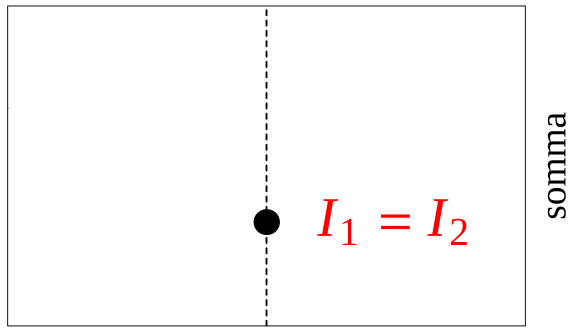


- **Riassumendo, comunque fissiamo $\varepsilon > 0$, si ha che**

$$|I_1 - I_2| \leq 2\varepsilon.$$

- **Quindi il numero $|I_1 - I_2|$**
  - è ≥ 0 perché è un valore assoluto,
  - ed è minore di qualunque numero positivo.
- **L'unica possibilità è che $|I_1 - I_2|$ sia zero,**
- **cioè $I_1 = I_2$**





- **Riassumendo, comunque fissiamo $\varepsilon > 0$, si ha che**

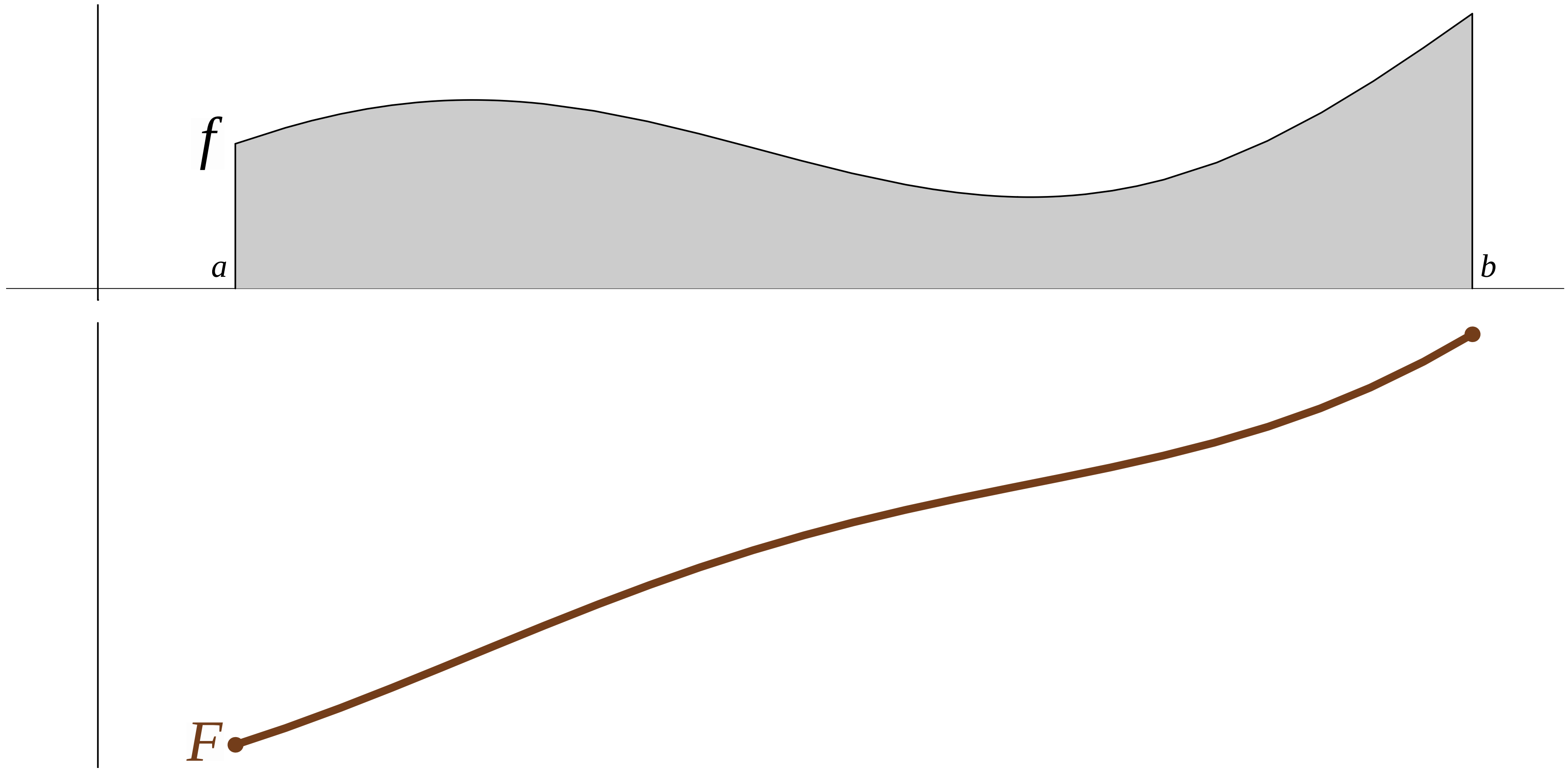
$$|I_1 - I_2| \leq 2\varepsilon.$$

- **Quindi il numero $|I_1 - I_2|$**
  - è ≥ 0 perché è un valore assoluto,
  - ed è minore di qualunque numero positivo.
- **L'unica possibilità è che $|I_1 - I_2|$ sia zero,**
- **cioè $I_1 = I_2$, come volevasi dimostrare!**

Cap. 9

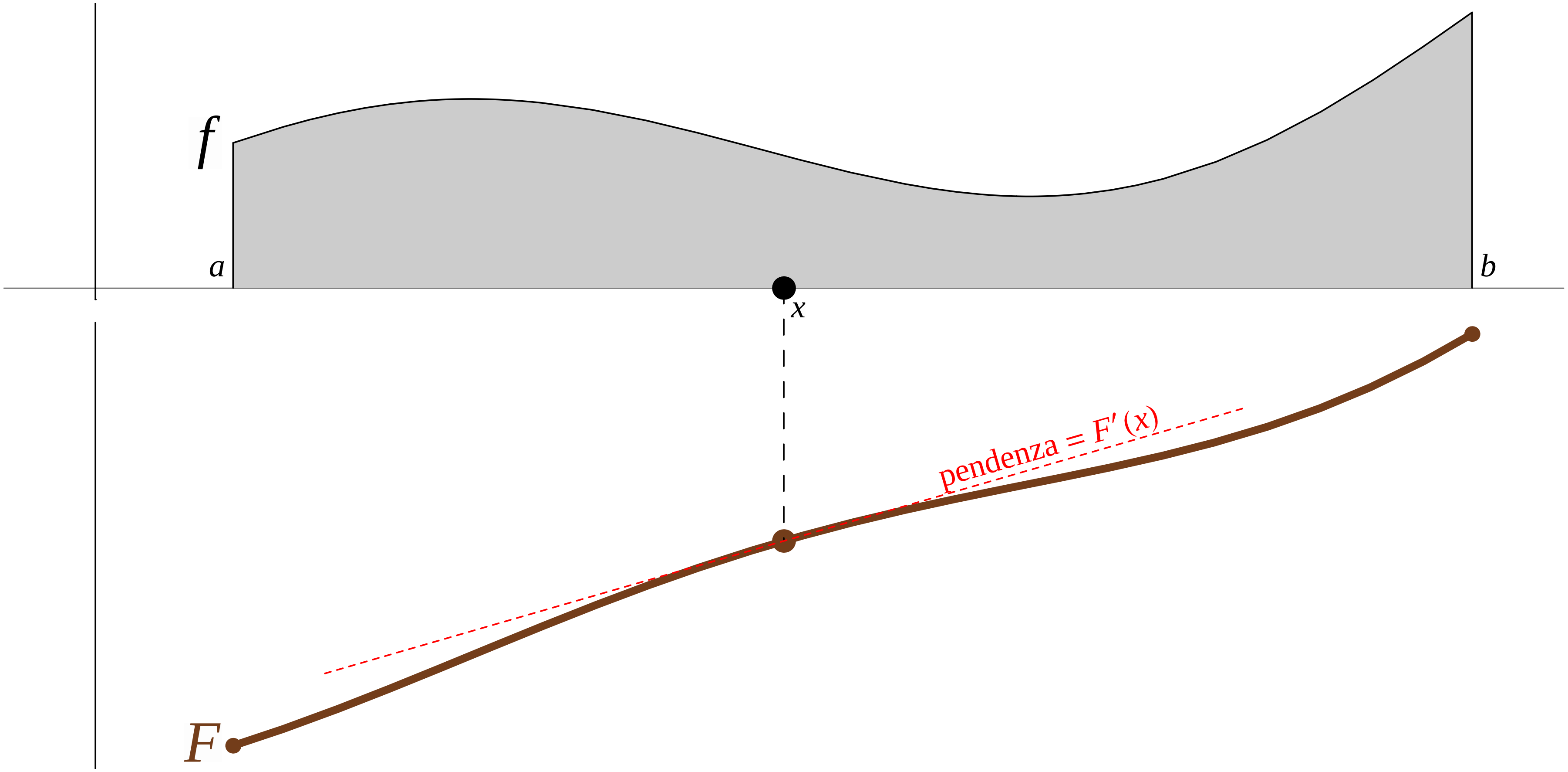
Il Teorema Fondamentale

Enunciato



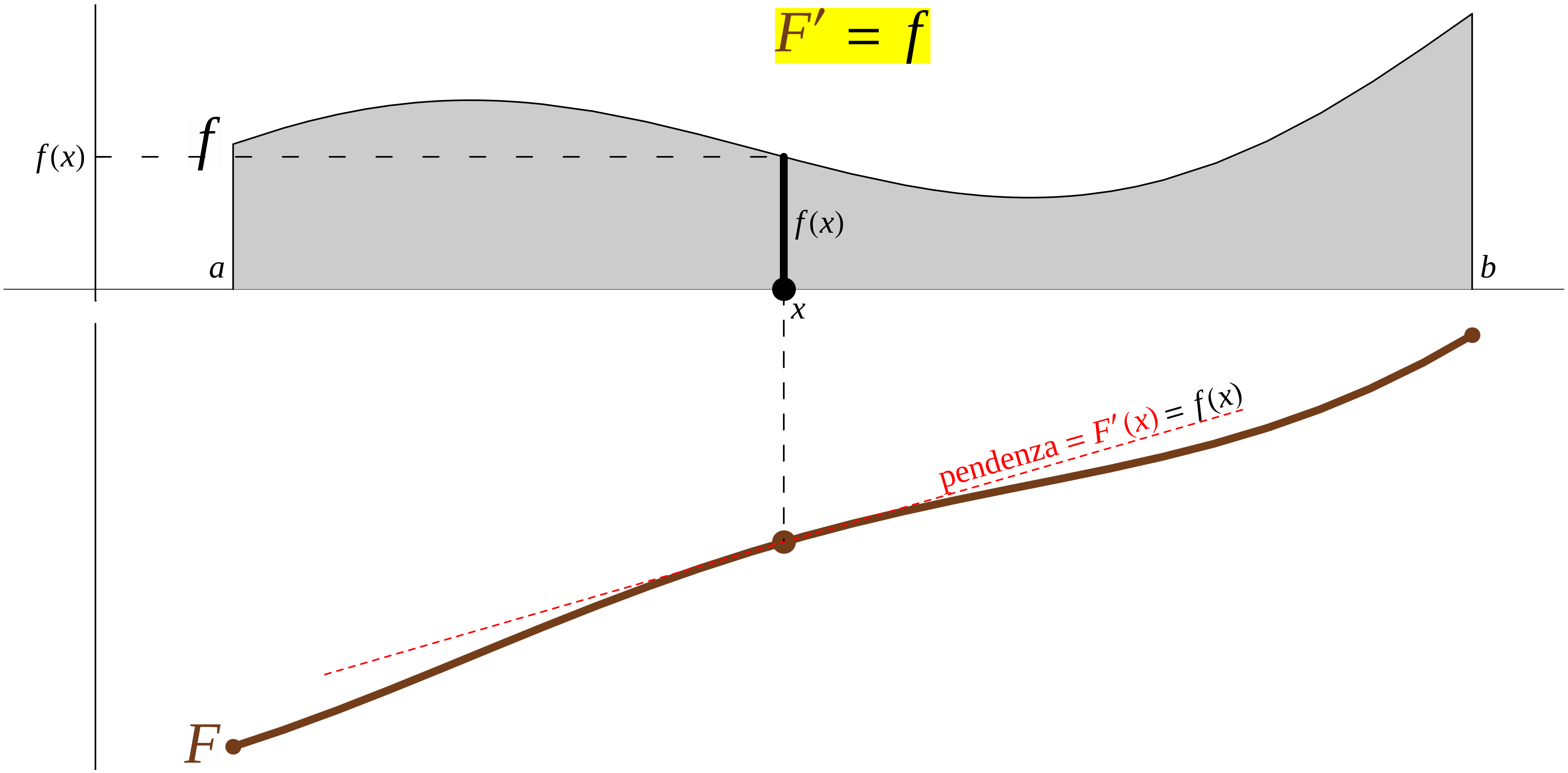
□ Teorema. Siano $f, F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni, tali che

Enunciato



□ Teorema. Siano $f, F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni, tali che

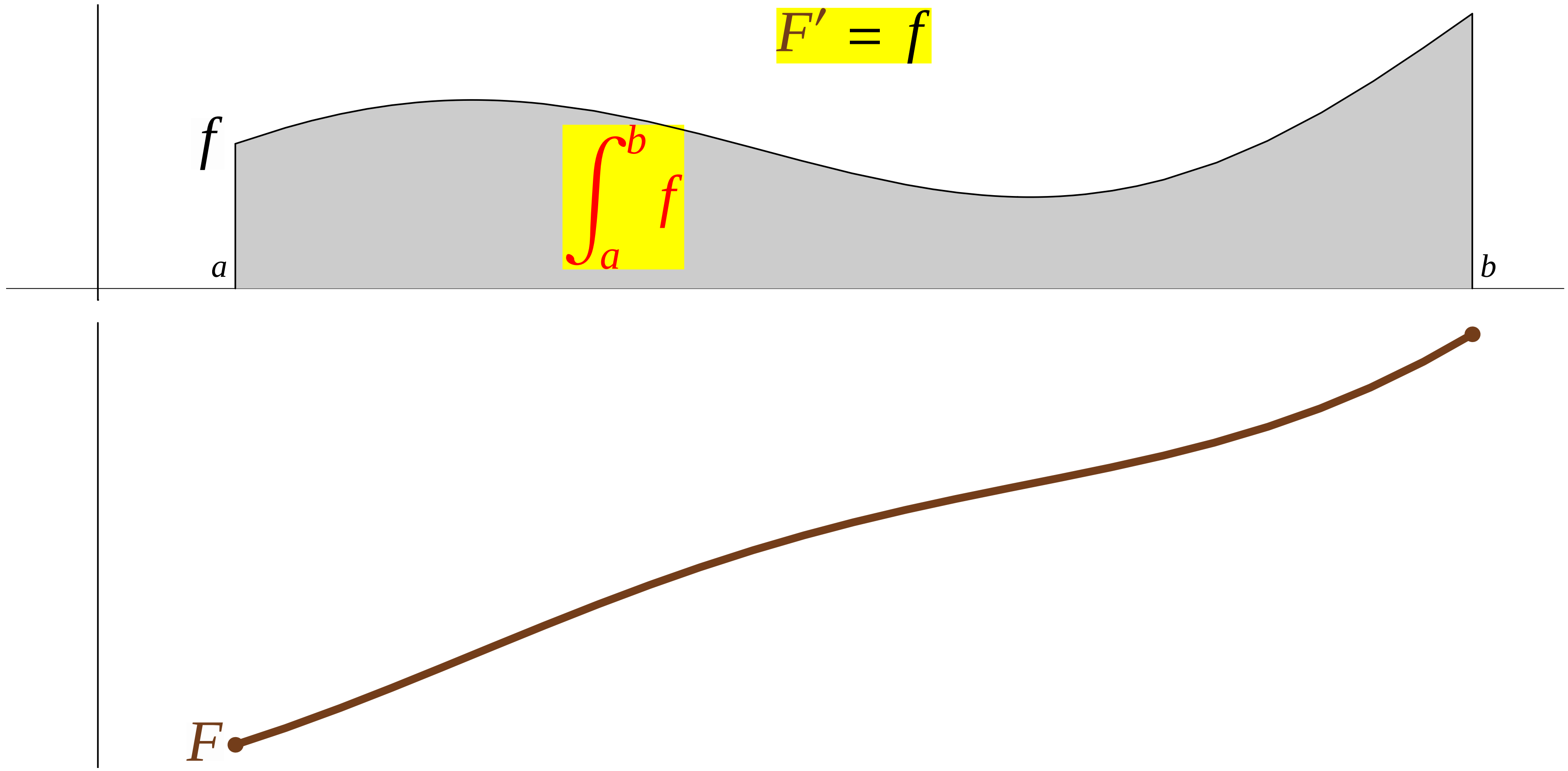
- **F è derivabile in ogni punto $x \in [a, b]$,**



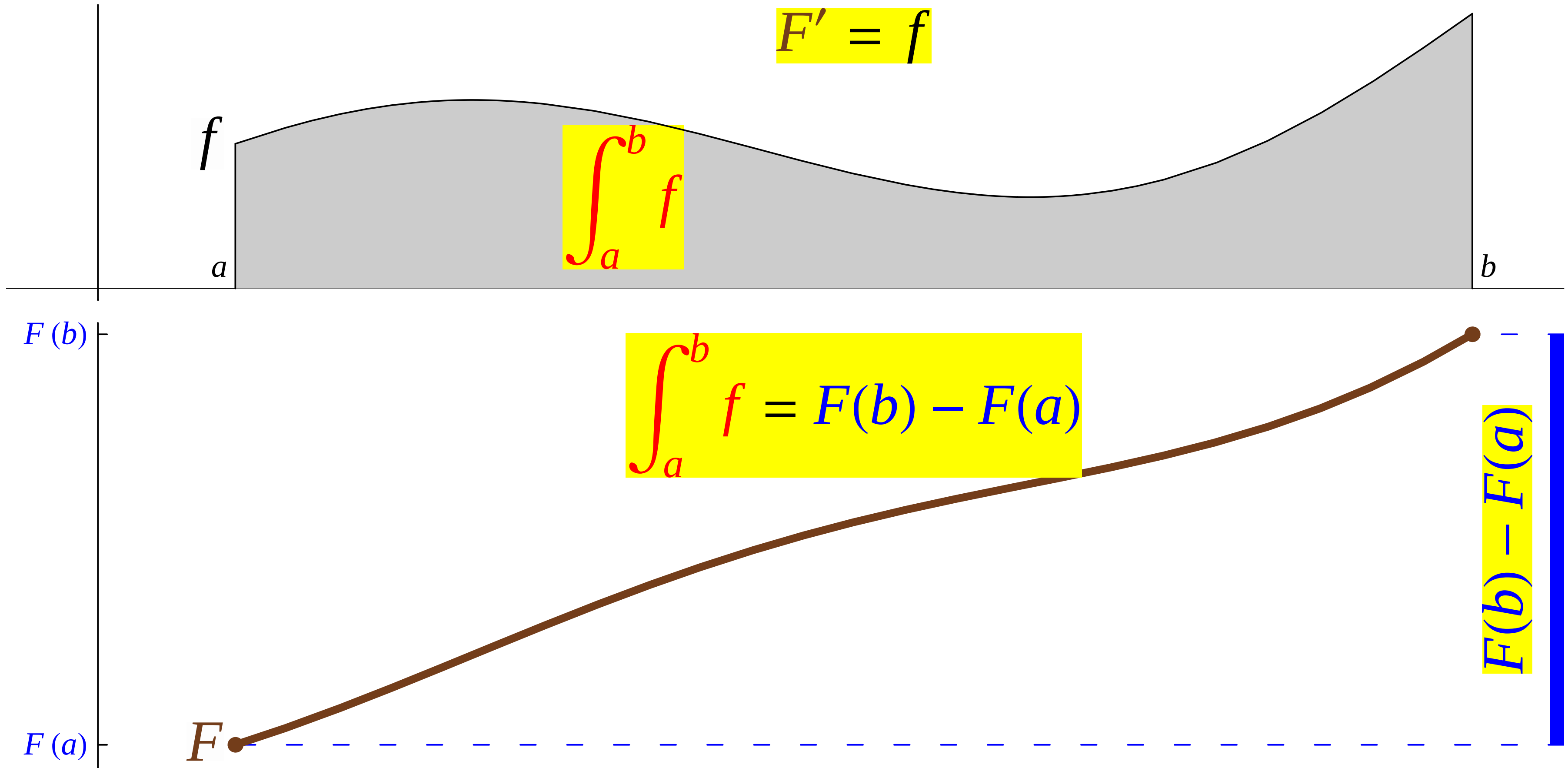
□ Teorema. Siano $f, F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni, tali che

- F **è derivabile in ogni punto** $x \in [a, b]$**,**
- $F'(x) = f(x)$ **per ogni** $x \in [a, b]$**.**

Enunciato



- **Teorema.** Siano $f, F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni, tali che
  - F **è derivabile in ogni punto** $x \in [a, b]$**,**
  - $F'(x) = f(x)$ **per ogni** $x \in [a, b]$**.**
- Allora f è integrabile su $[a, b]$



□ Teorema. Siano $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni, tali che

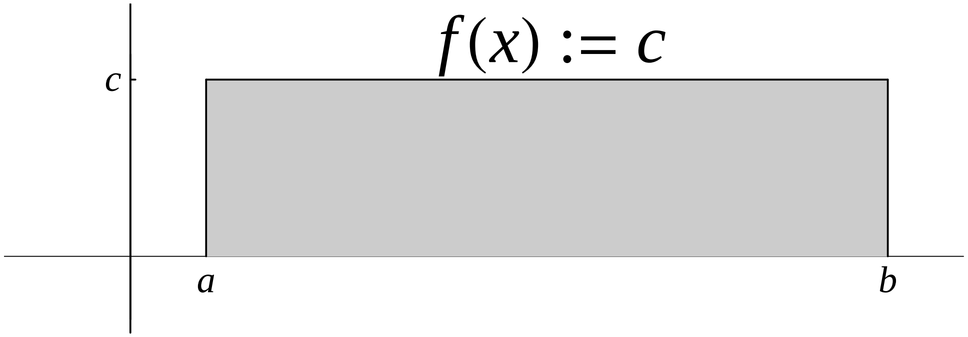
- F **è derivabile in ogni punto** $x \in [a, b]$**,**
- $F'(x) = f(x)$ **per ogni** $x \in [a, b]$**.**

■ Allora f è integrabile su $[a, b]$ e $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Esempi banali

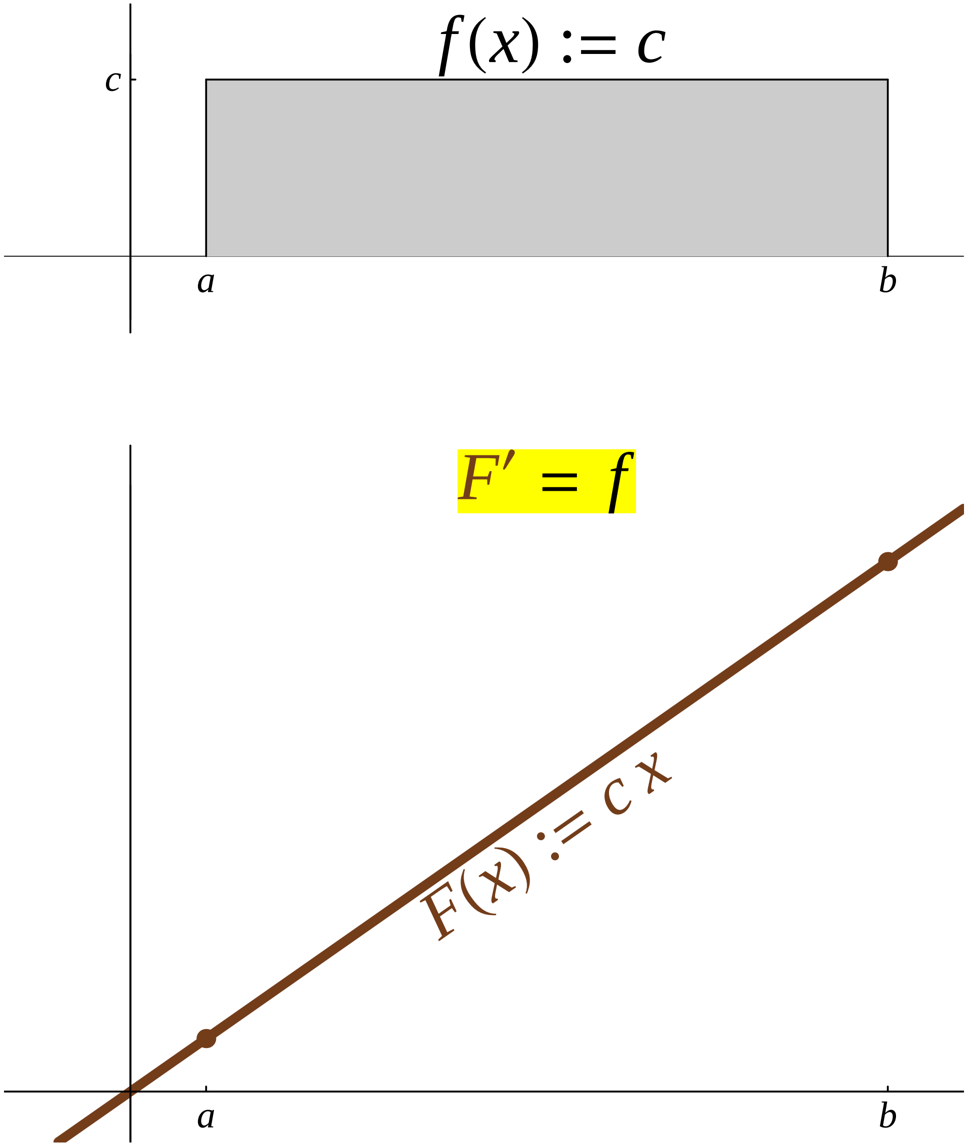
Esempi banali

- Prendiamo la funzione **costante** $f(x) := c$ sull'intervallo $[a, b]$.



- **Prendiamo la funzione costante** $f(x) := c$ **sull'intervallo** $[a, b]$.
  - È presto trovata una F la cui derivata è f:

$$F(x) := cx\,.$$



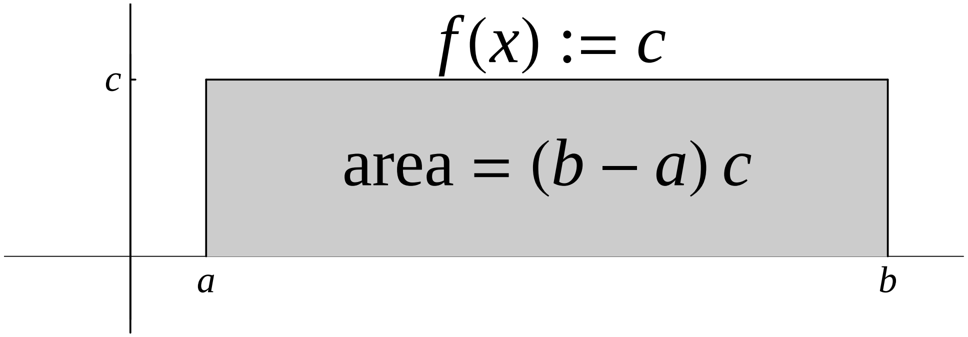
- **Prendiamo la funzione** **costante** $f(x) := c$ **sull'intervallo** $[a, b]$**.**
  - È presto trovata una F la cui derivata è f:

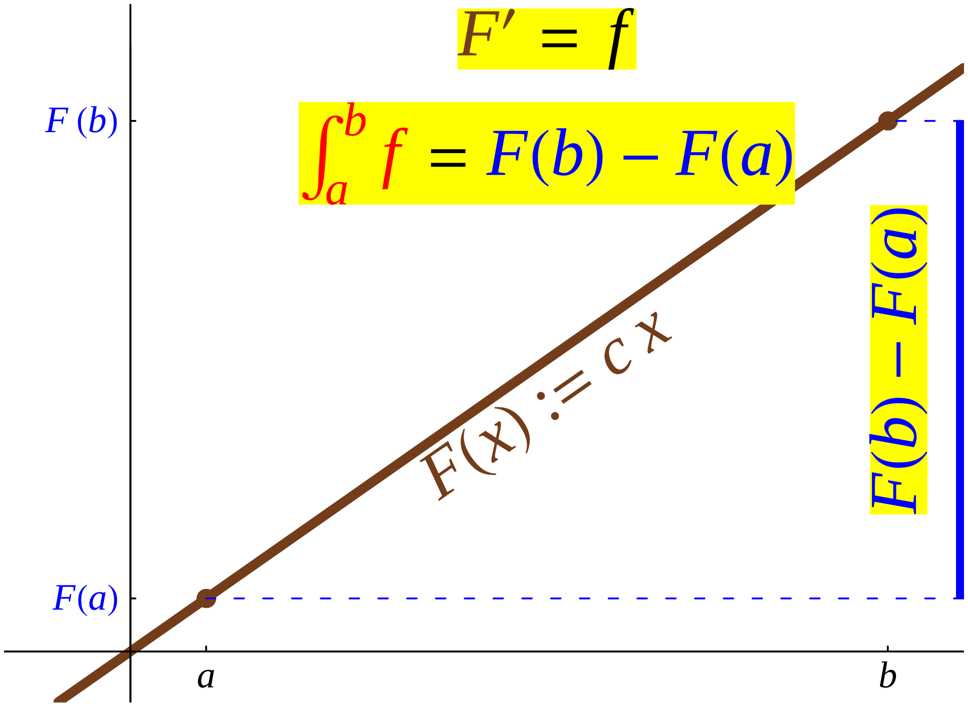
$$F(x) := cx \,.$$

- **Quindi** f **è integrabile su** $[a, b]$ **e**

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =$$

$$= cb - ca = (b-a)c\,.$$





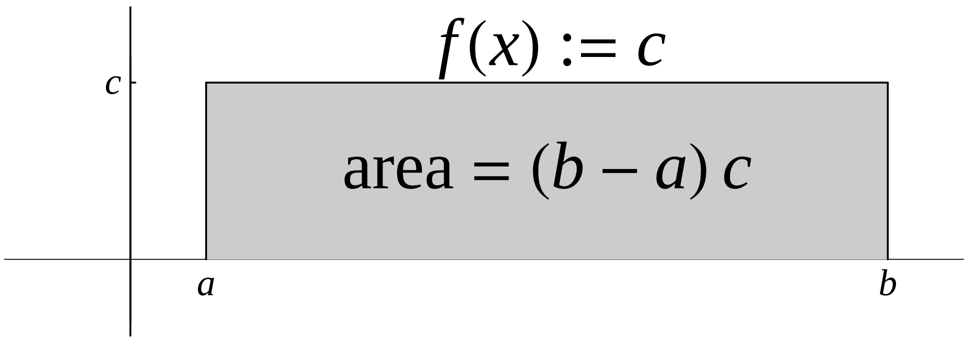
- **Prendiamo la funzione** **costante** $f(x) := c$ **sull'intervallo** $[a, b]$**.**
  - È presto trovata una F la cui derivata è f:

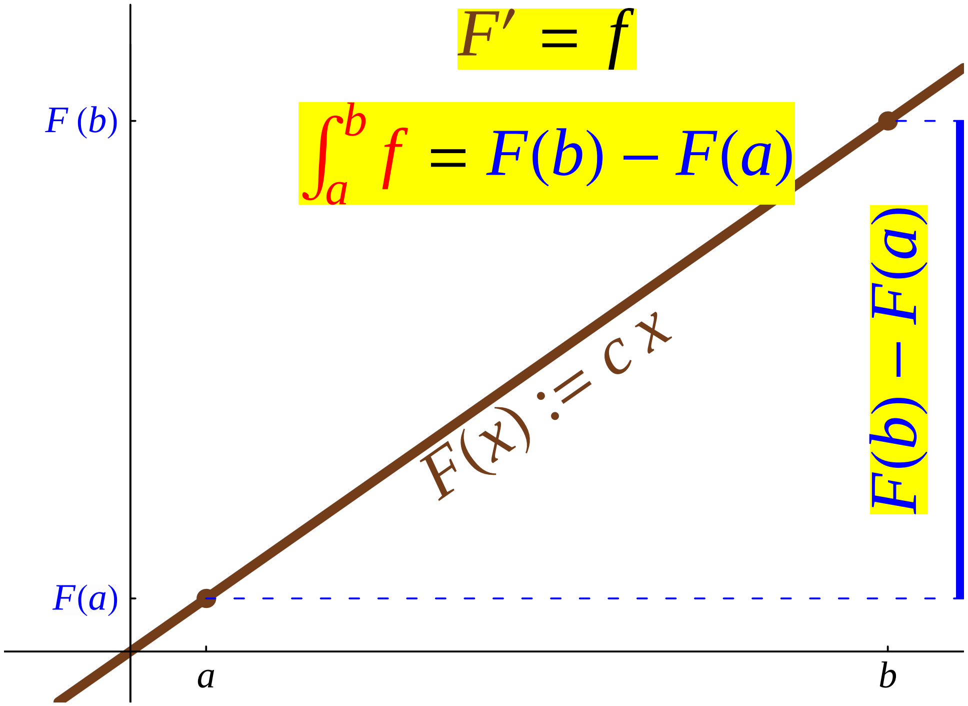
$$F(x) := cx\,.$$

- **Quindi** f **è integrabile su** $[a, b]$ **e**

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =$$

$$= cb - ca = (b - a)c\,.$$

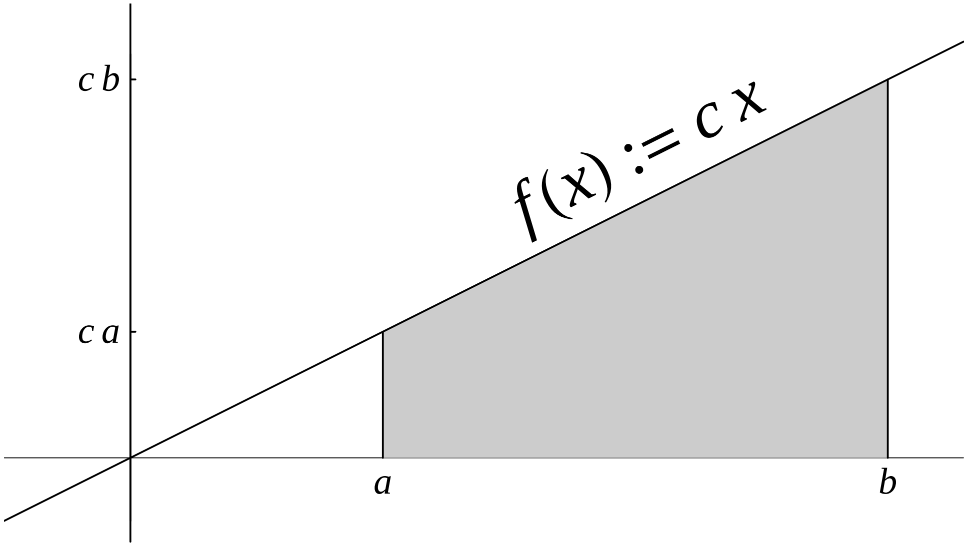




- Ritroviamo la vecchia formula dell'area del rettangolo base × altezza.

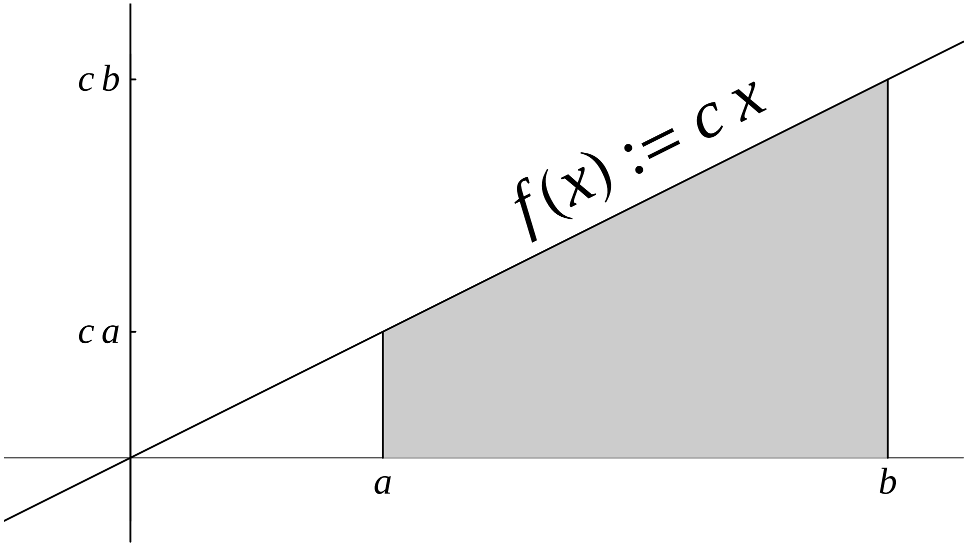
Esempi banali

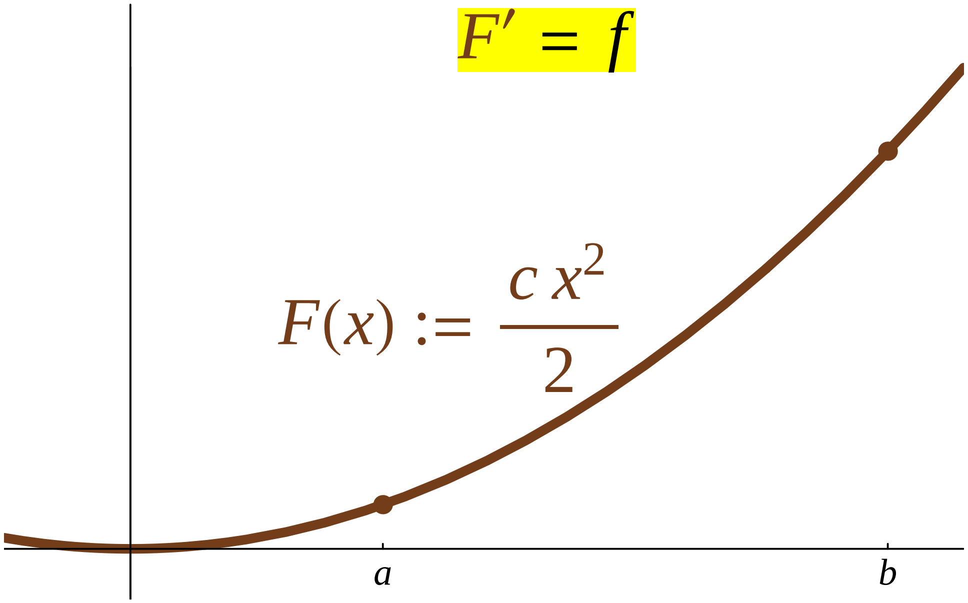
- Prendiamo la funzione **lineare** $f(x) := cx$ sull'intervallo $[a, b]$.



- **Prendiamo la funzione** **lineare** $f(x) := cx$ **sull'intervallo** $[a, b]$**.**
  - È presto trovata una F la cui derivata è f:

$$F(x) := \frac{cx^2}{2}\,.$$





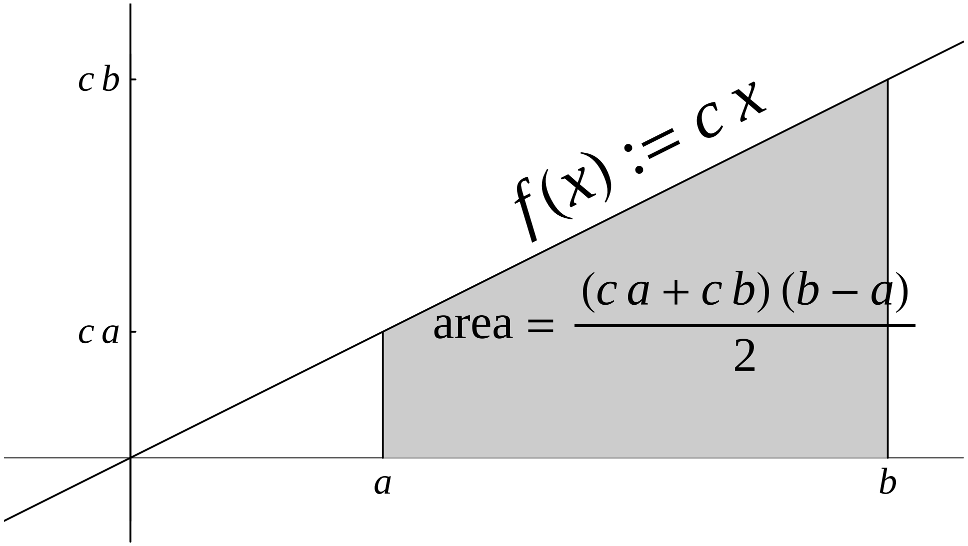
- **Prendiamo la funzione lineare $f(x) := cx$ sull'intervallo $[a, b]$.**
  - È presto trovata una F la cui derivata è f:

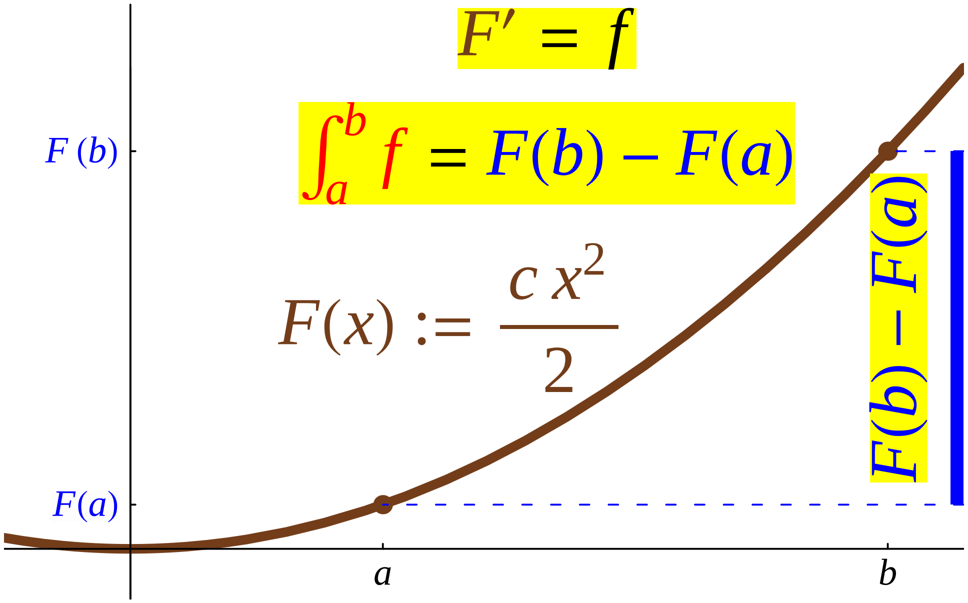
$$F(x) := \frac{cx^2}{2}.$$

- **Quindi f è integrabile e**

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =$$

$$= \frac{cb^2}{2} - \frac{ca^2}{2} = \frac{(ca+cb)(b-a)}{2}.$$

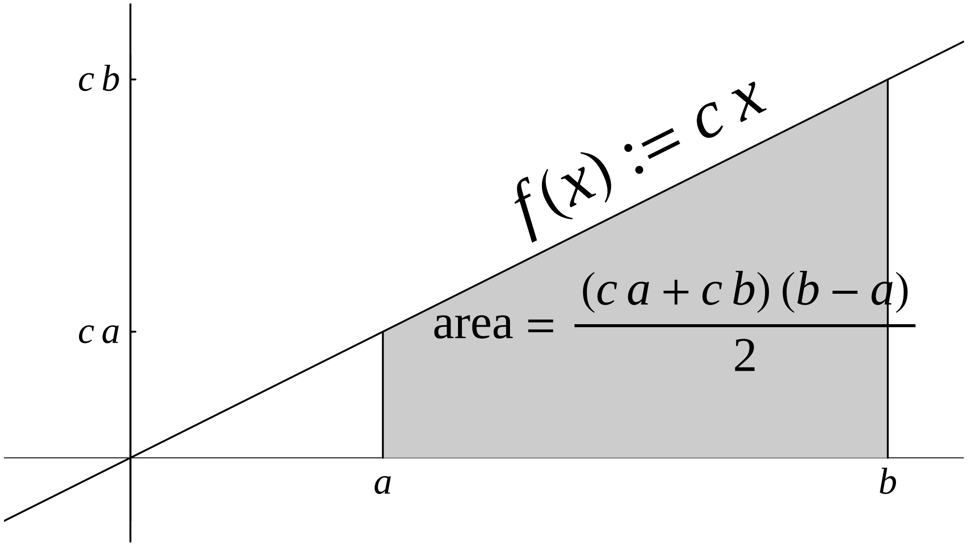




Esempi banali

- **Prendiamo la funzione lineare $f(x) := cx$ sull'intervallo $[a, b]$.**
  - È presto trovata una F la cui derivata è f:

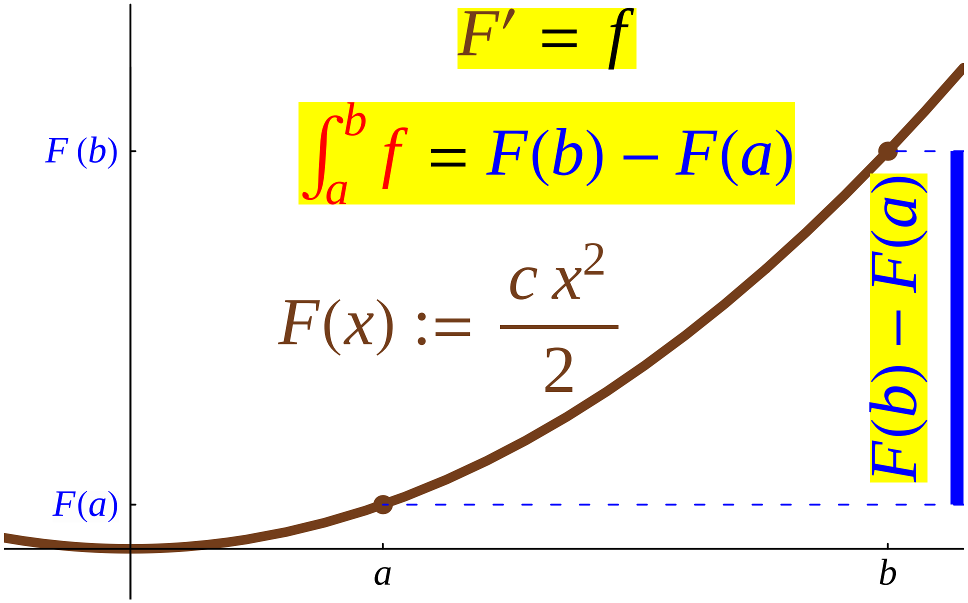
$$F(x) := \frac{cx^2}{2}.$$



- **Quindi f è integrabile e**

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =$$

$$= \frac{cb^2}{2} - \frac{ca^2}{2} = \frac{(ca+cb)(b-a)}{2}.$$

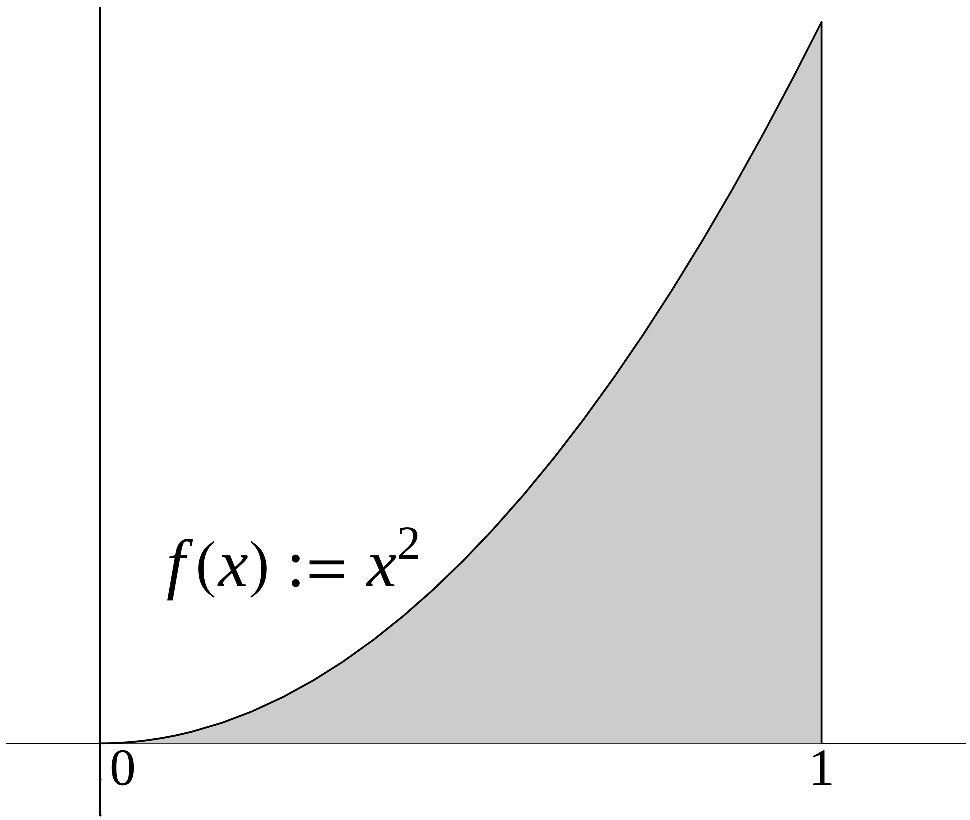


  - Ritroviamo la formula dell'area del trapezio (somma basi) $\times$ altezza/2.

Esempi non banali

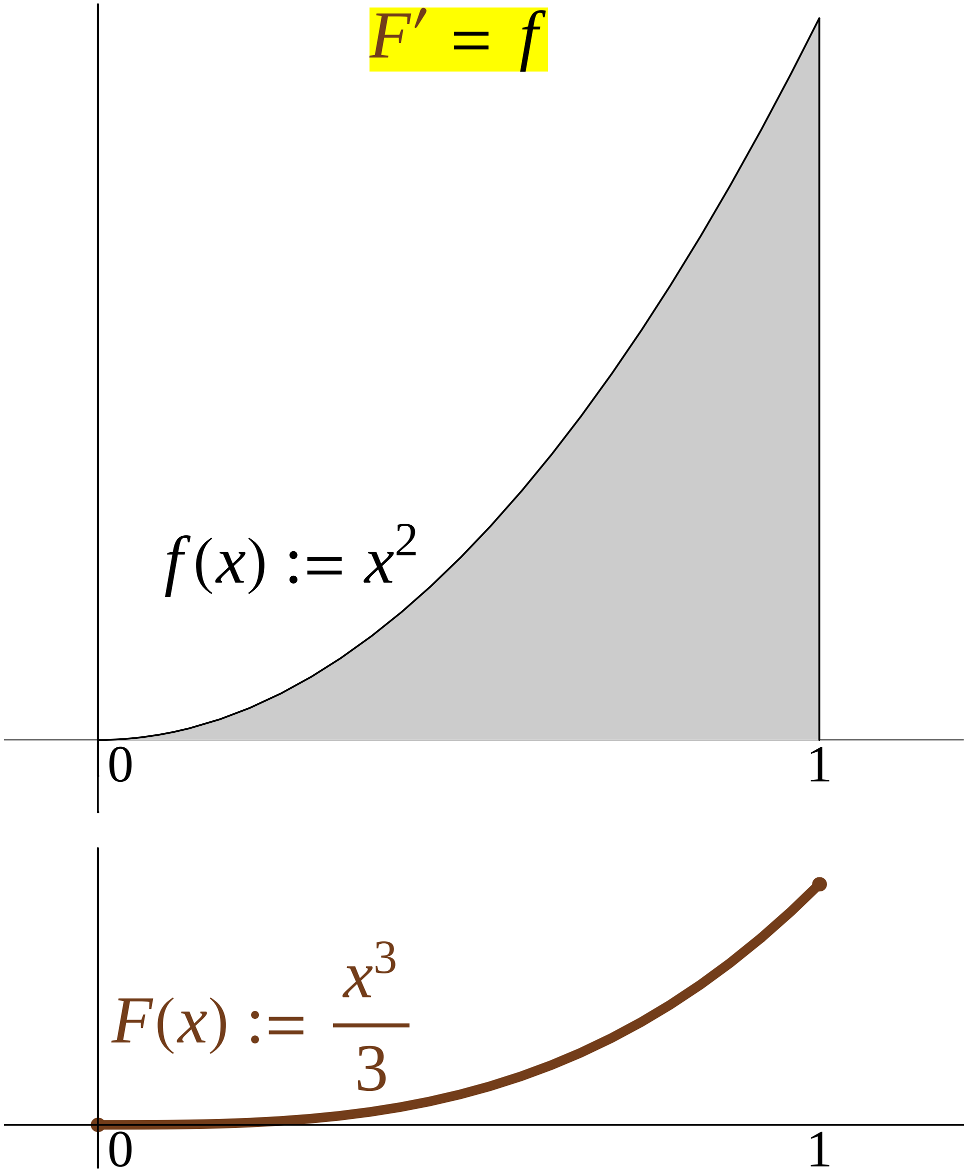
Esempi non banali

- Prendiamo la funzione $f(x) := x^2$ sull'intervallo $[0, 1]$.



- **Prendiamo la funzione $f(x) := x^2$ sull'intervallo $[0,1]$.**
  - È presto trovata una F la cui derivata è f:

$$F(x) := \frac{x^3}{3}.$$

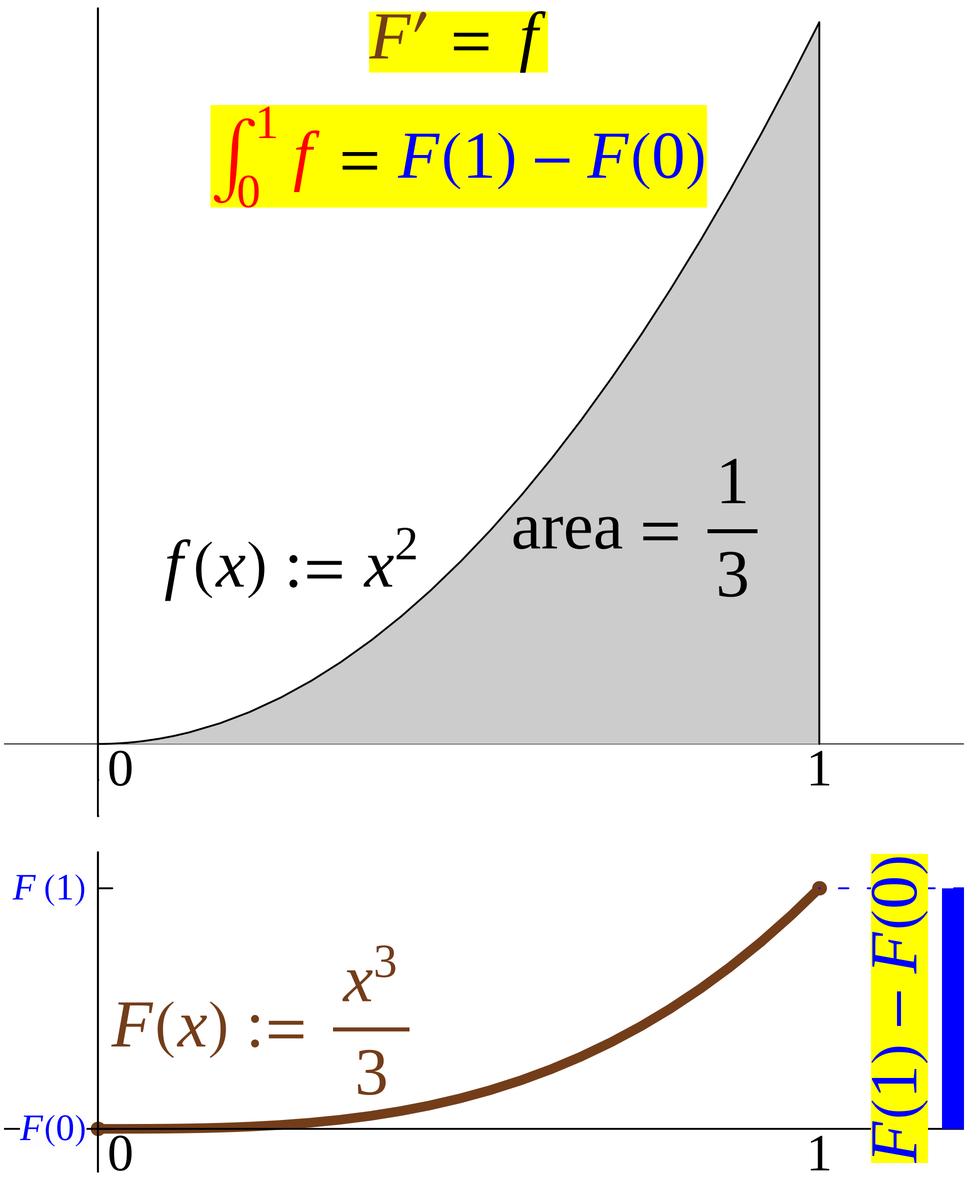


- **Prendiamo la funzione $f(x) := x^2$ sull'intervallo $[0,1]$.**
  - È presto trovata una F la cui derivata è f:

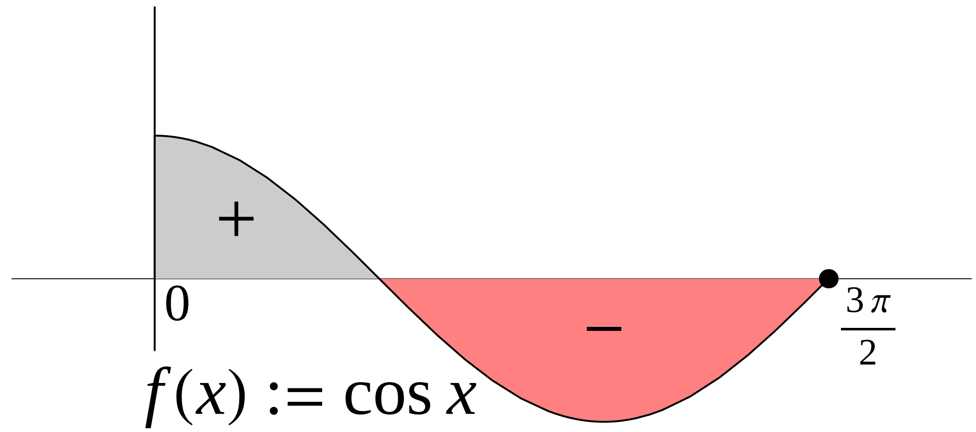
$$F(x) := \frac{x^3}{3}\,.$$

- **Quindi f è integrabile su $[0,1]$ e**

$$\int_0^1 f = F(1) - F(0) = $$
$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

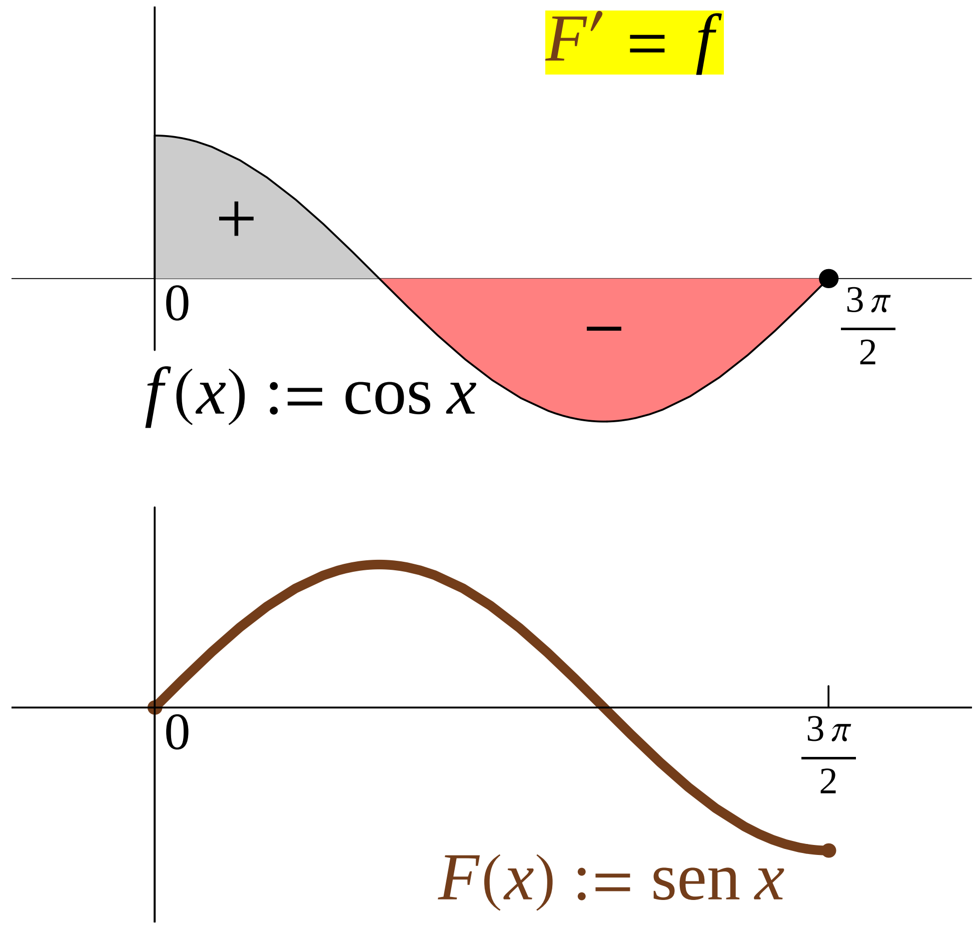


- **Prendiamo la funzione** $f(x) := \cos x$ **sull'intervallo** $[0, 3\pi/2]$**.**



- **Prendiamo la funzione $f(x) := \cos x$ sull'intervallo $[0, 3\pi/2]$.**
  - È presto trovata una F la cui derivata è f:

$$F(x) := \operatorname{sen} x\,.$$

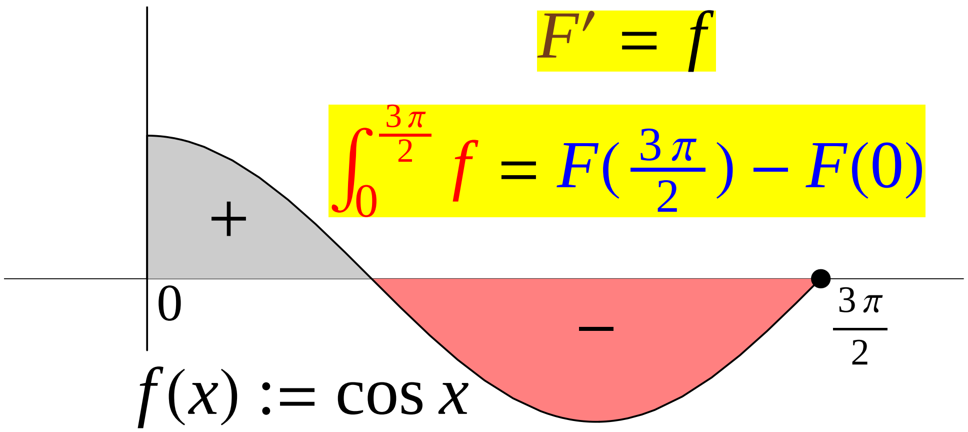


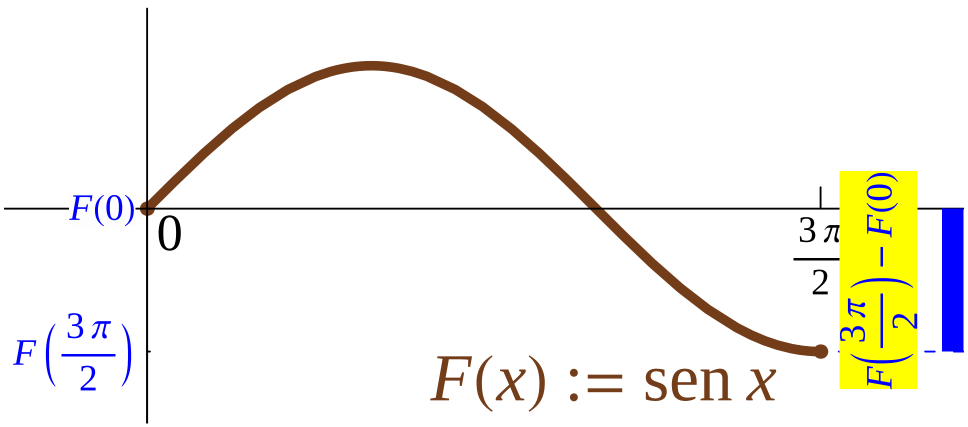
- **Prendiamo la funzione $f(x) := \cos x$ sull'intervallo $[0, 3\pi/2]$.**
  - È presto trovata una F la cui derivata è f:

$$F(x) := \operatorname{sen} x\,.$$

- **Quindi f è integrabile su $[0, 3\pi/2]$ e**

$$\int_0^{3\pi/2} f = F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F(0) = $$
$$= \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 =$$
$$= (-1) - 0 = -1\,.$$





Lemma sulla derivata

- *Ci servirà un lemma sulle funzioni derivabili.*

Lemma sulla derivata

- ***Ci servirà un lemma sulle funzioni derivabili.***
  - La proprietà da dimostrare è un tantino tecnica, e il significato geometrico non è lampante.

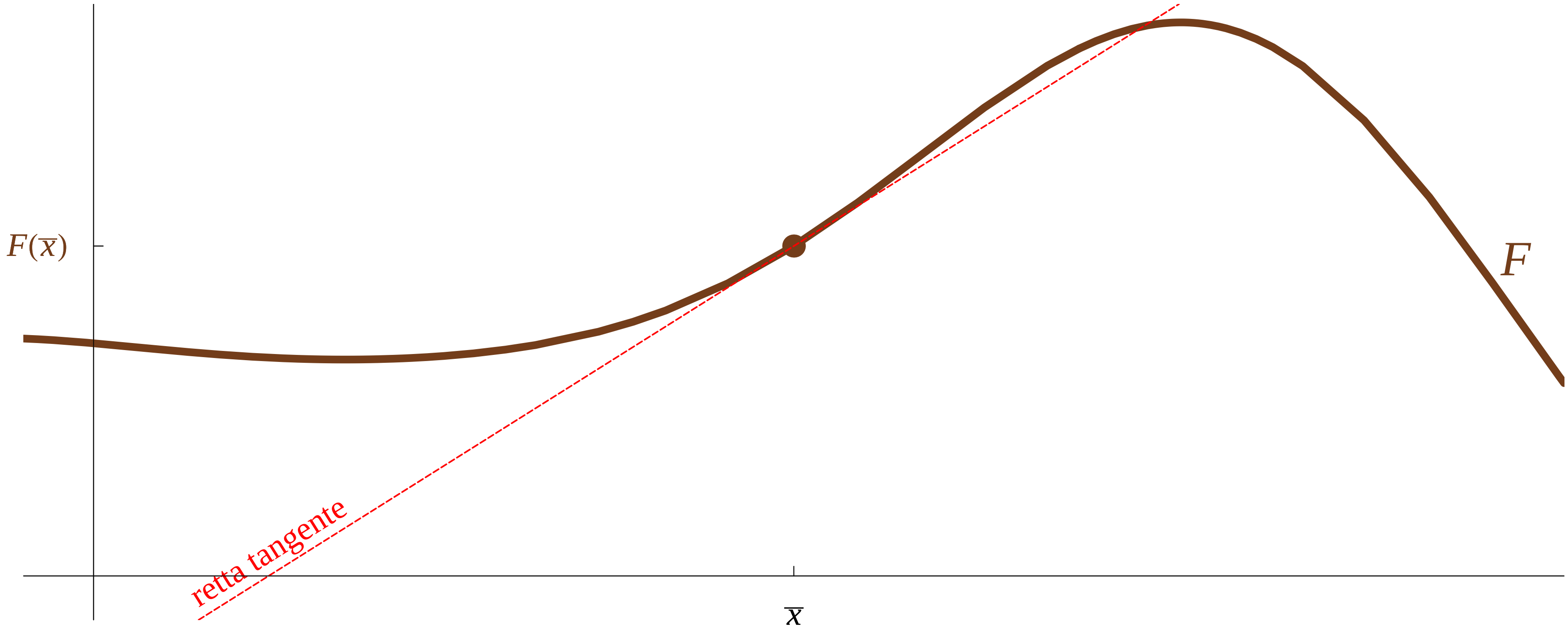
Lemma sulla derivata

- ***Ci servirà un lemma sulle funzioni derivabili.***
  - La proprietà da dimostrare è un tantino tecnica, e il significato geometrico non è lampante.
  - Un passaggio intermedio della dimostrazione si presta però facilmente a un'interpretazione grafica.

Lemma sulla derivata

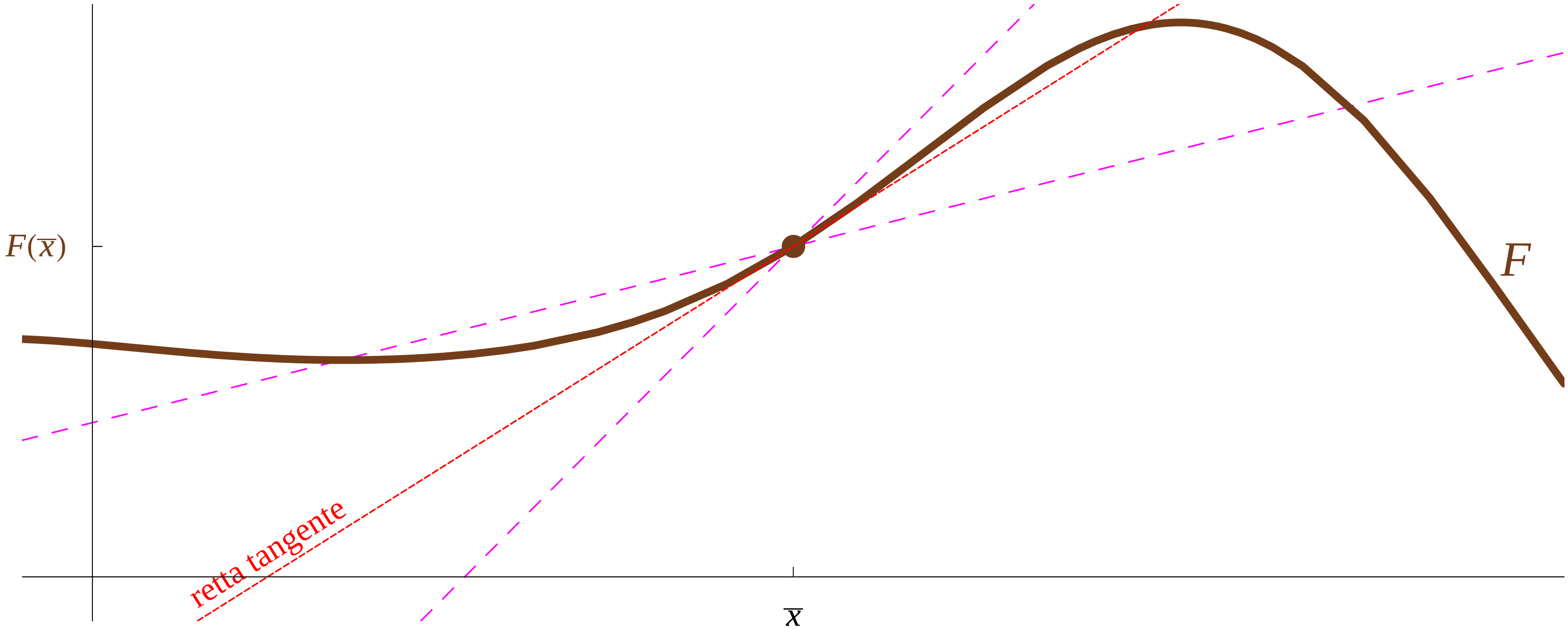
- ***Ci servirà un lemma sulle funzioni derivabili.***
  - La proprietà da dimostrare è un tantino tecnica, e il significato geometrico non è lampante.
  - Un passaggio intermedio della dimostrazione si presta però facilmente a un'interpretazione grafica.
  - Lo illustriamo in anticipo.

Lemma sulla derivata



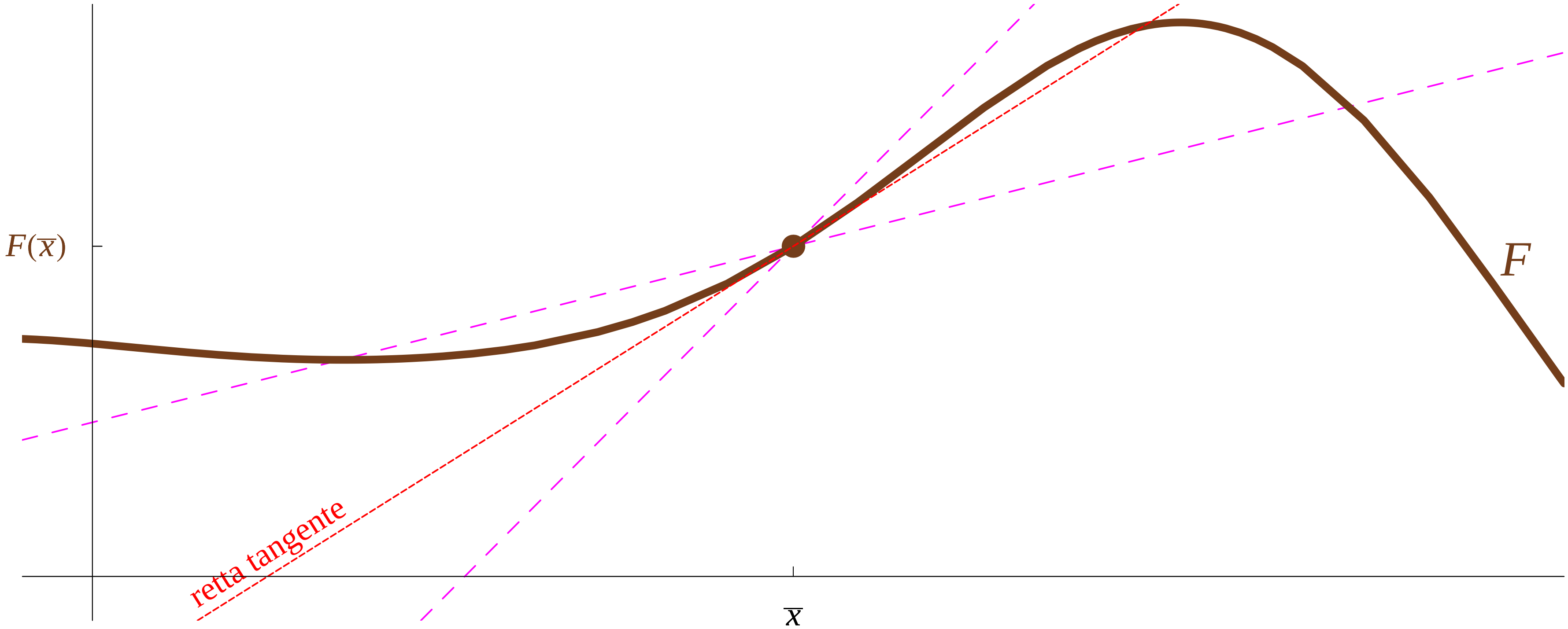
- Prendiamo una funzione F, derivabile in $\bar{x}$, e tracciamo il **grafico di** F e della **retta tangente**.

Lemma sulla derivata



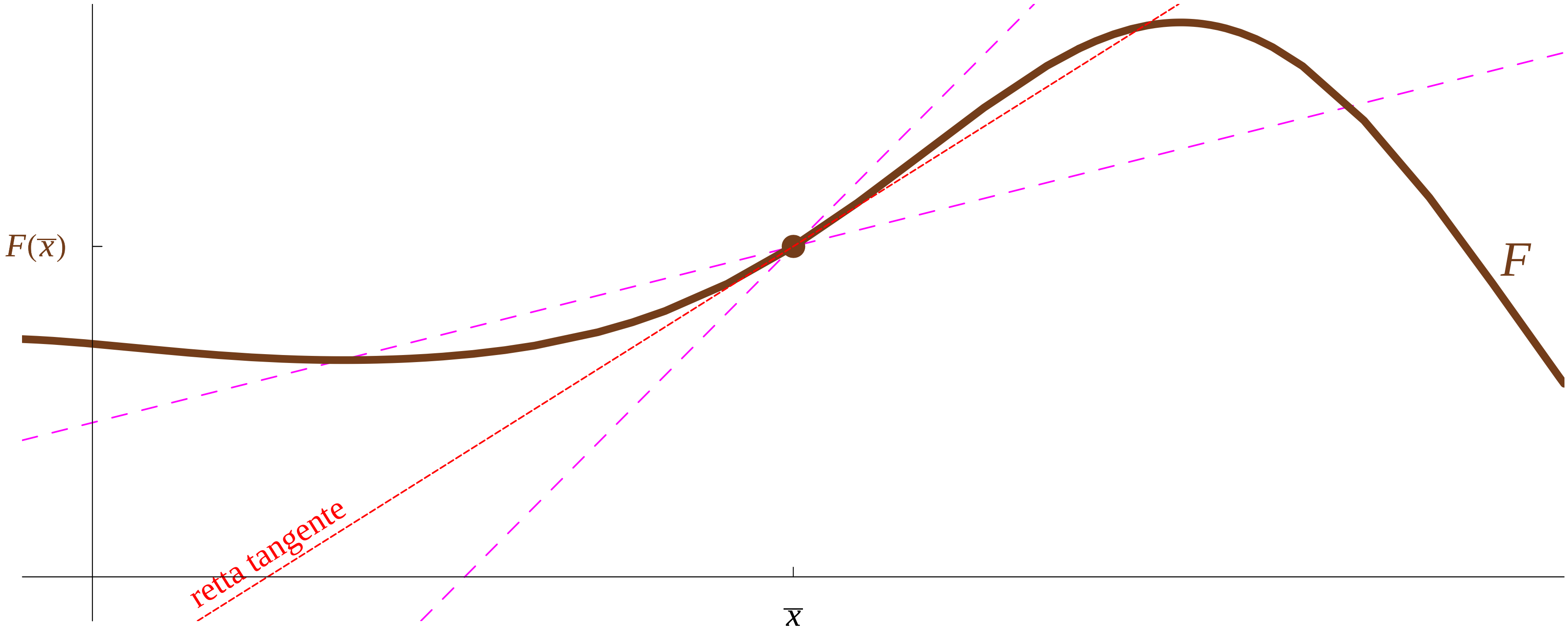
- Prendiamo una funzione F, derivabile in $\bar{x}$, e tracciamo il **grafico di** F e della **retta tangente**.
- Prendiamo **due altre rette** per $(\bar{x}, F(\bar{x}))$, di pendenza una maggiore e l'altra minore della **tangente**.

Lemma sulla derivata



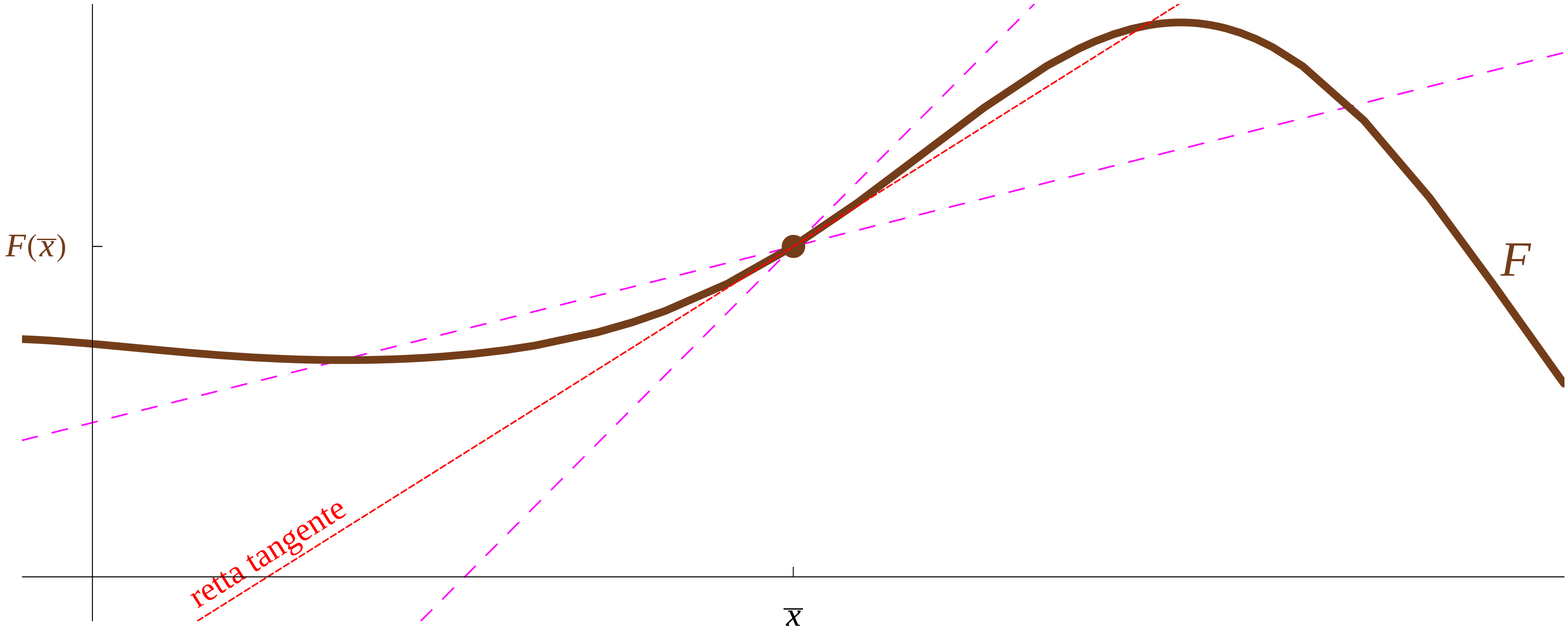
- La F è continua in $\bar{x}$

Lemma sulla derivata

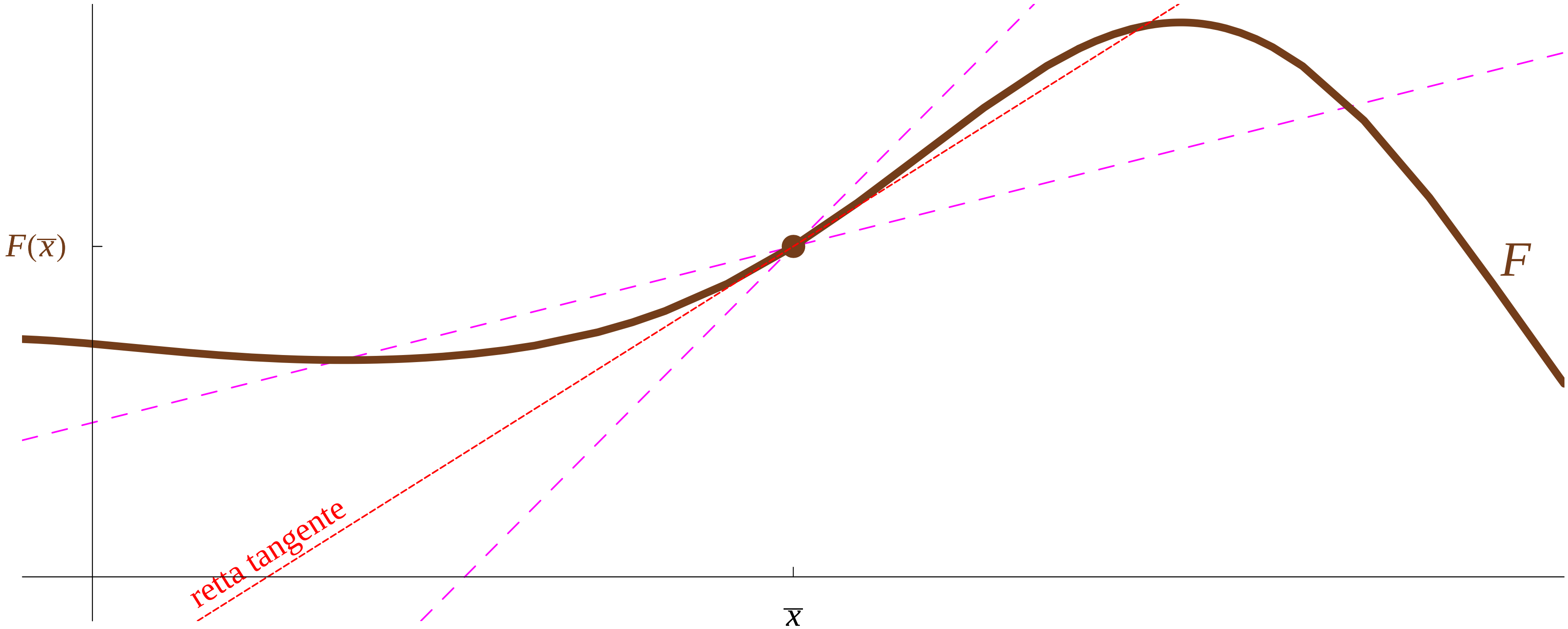


- **La F è continua in $\bar{x}$**
  - perché è derivabile in $\bar{x}$ per ipotesi.

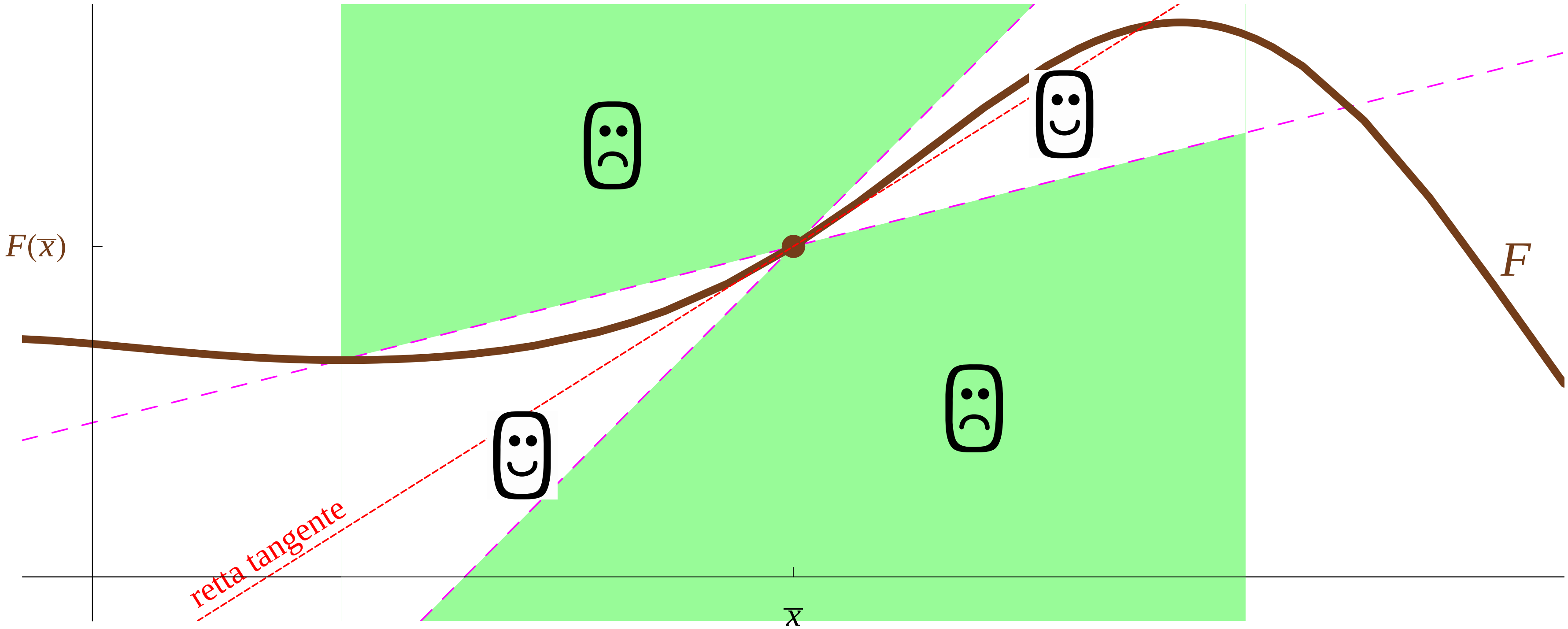
Lemma sulla derivata



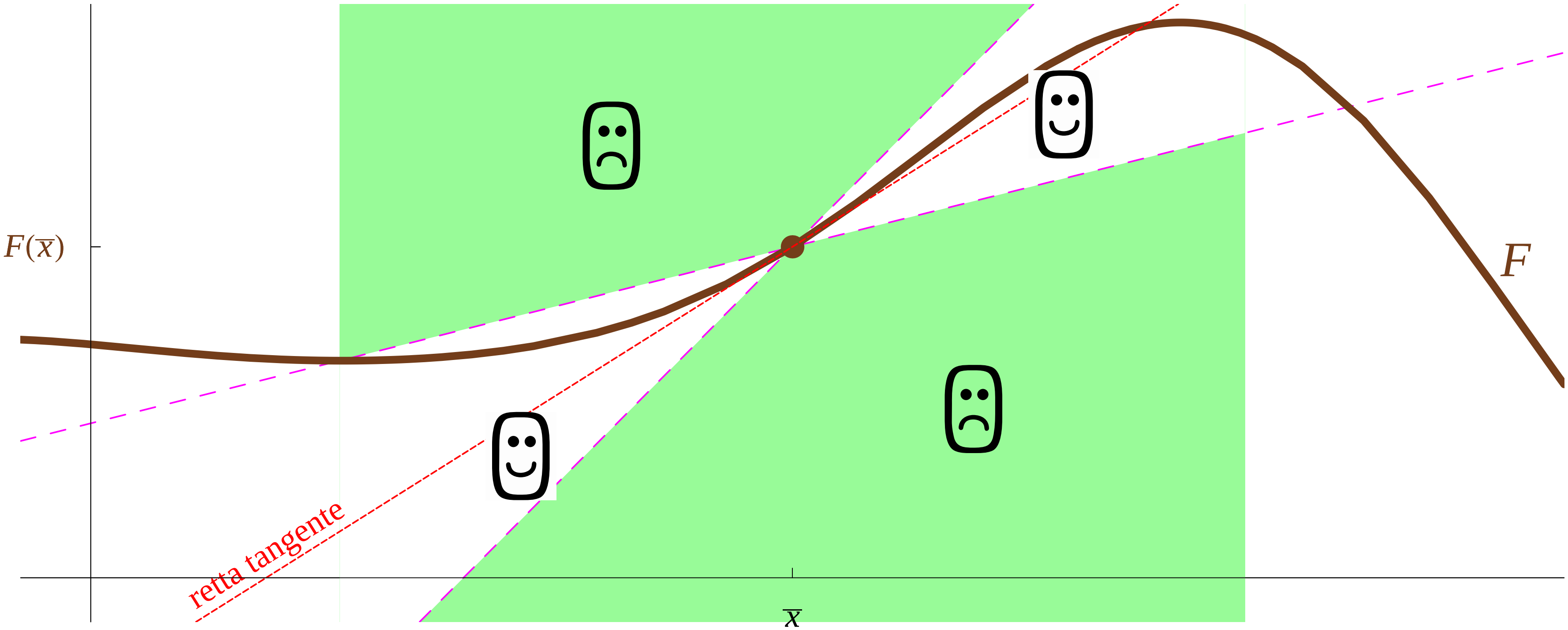
- **Quando l'ascissa x si avvicina a $\bar{x}$, il punto $(x, F(x))$ si deve avvicinare a $(\bar{x}, F(\bar{x}))$.**



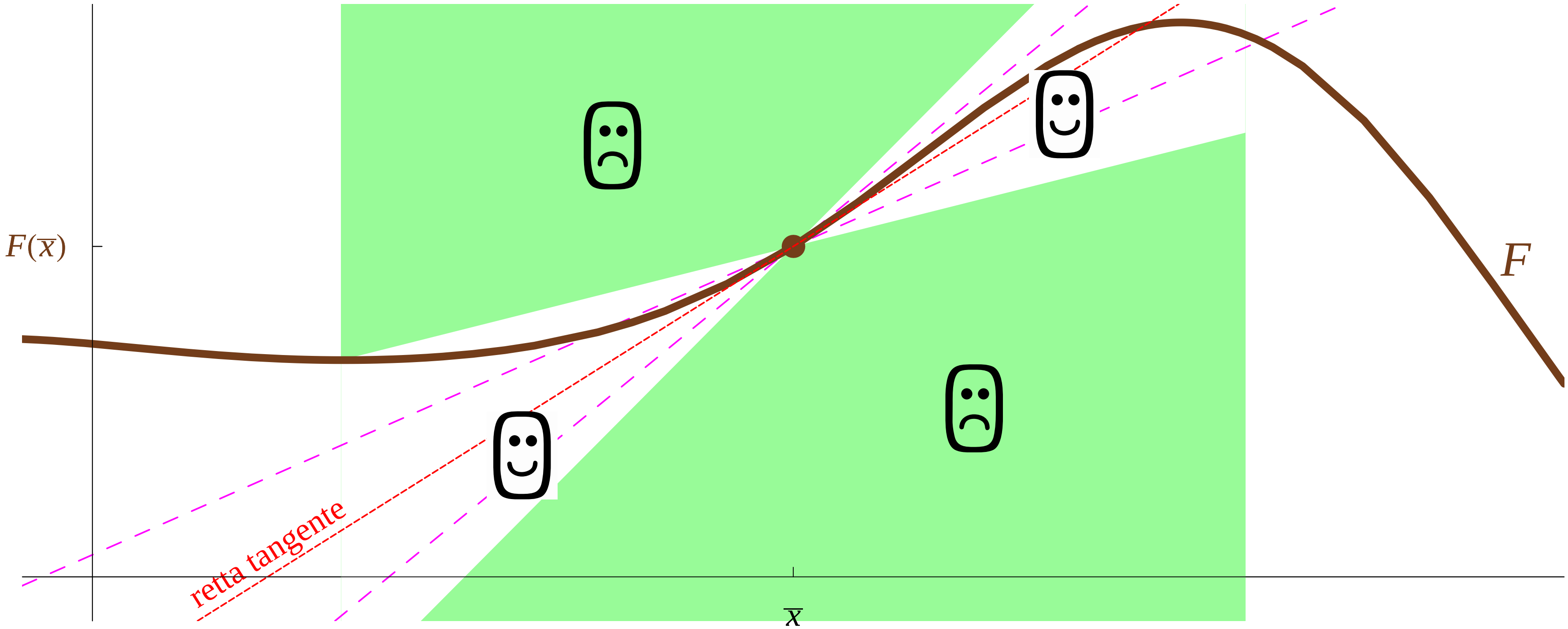
- Quando l'ascissa x si avvicina a $\bar{x}$, il punto $(x, F(x))$ si deve avvicinare a $(\bar{x}, F(\bar{x}))$.
- si avvicina, ma non in modo qualunque:



- Quando l'ascissa x si avvicina a $\bar{x}$, il punto $(x, F(x))$ si deve avvicinare a $(\bar{x}, F(\bar{x}))$.
- si avvicina, ma non in modo qualunque:
- deve entrare (e rimanere) fra **le due rette**,

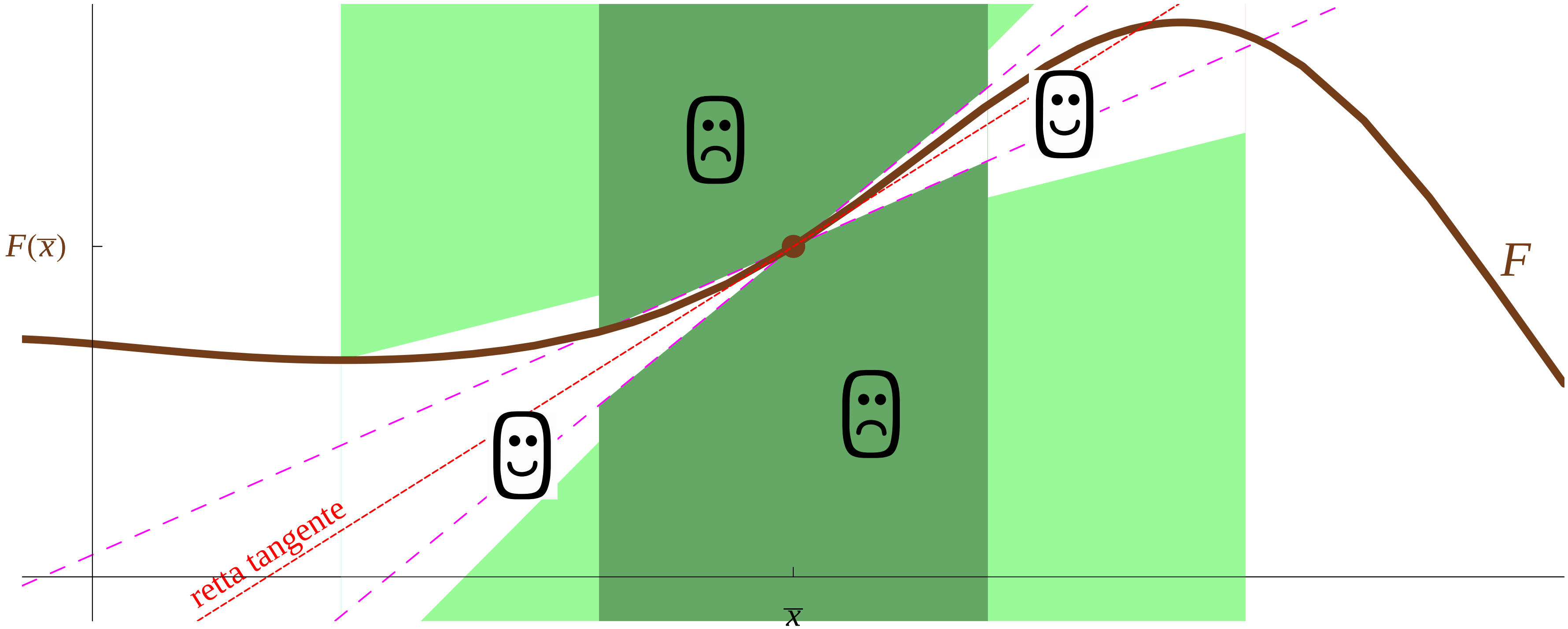


- Quando l'ascissa x si avvicina a $\bar{x}$, il punto $(x, F(x))$ si deve avvicinare a $(\bar{x}, F(\bar{x}))$.
- si avvicina, ma non in modo qualunque:
- deve entrare (e rimanere) fra **le due rette**,
  - in una zona "a imbuto" (verde è la terra vietata).

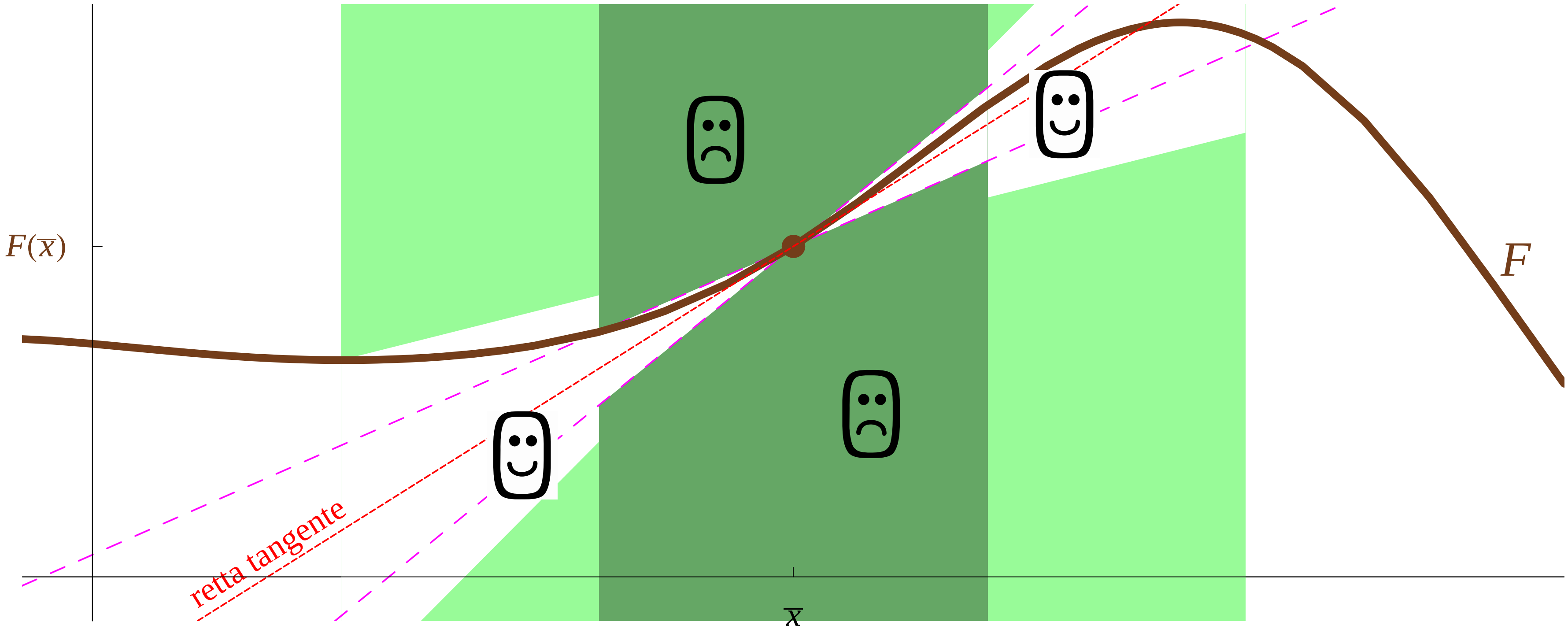


- Anche se stringiamo *di più* le due rette attorno alla tangente,

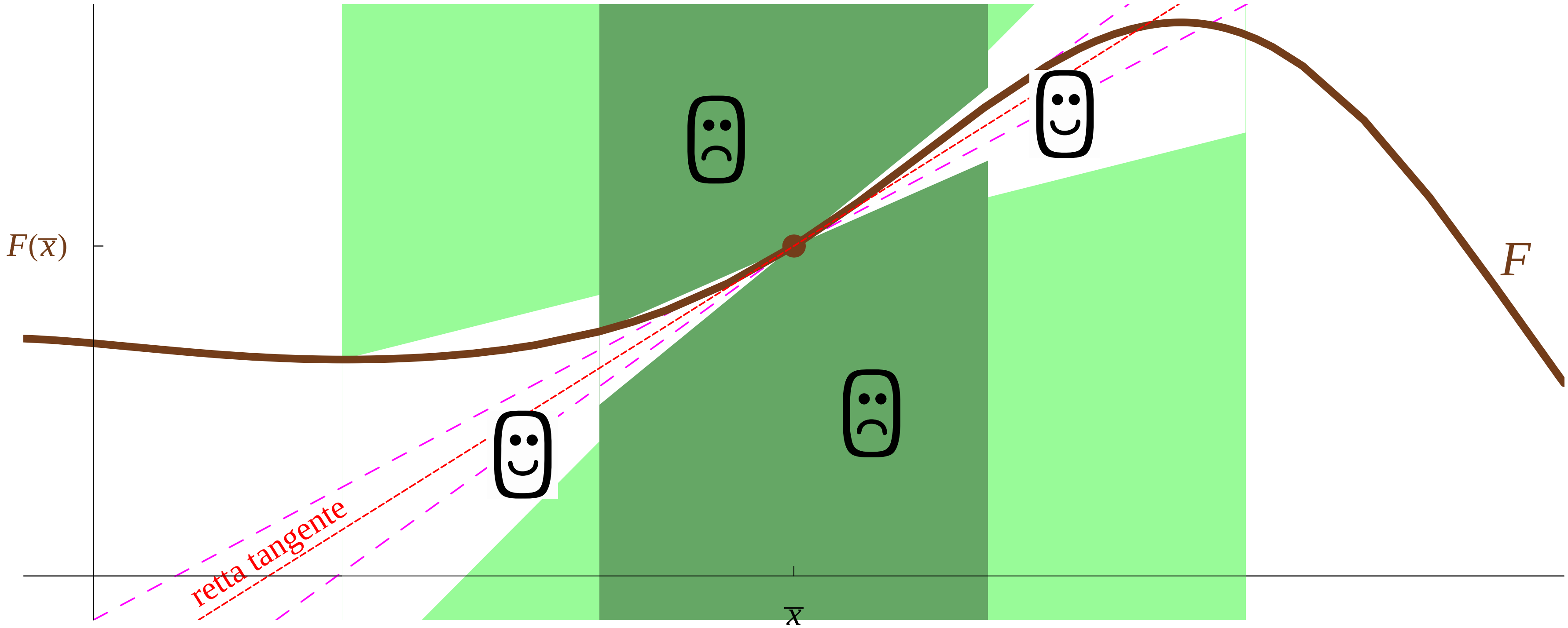
Lemma sulla derivata



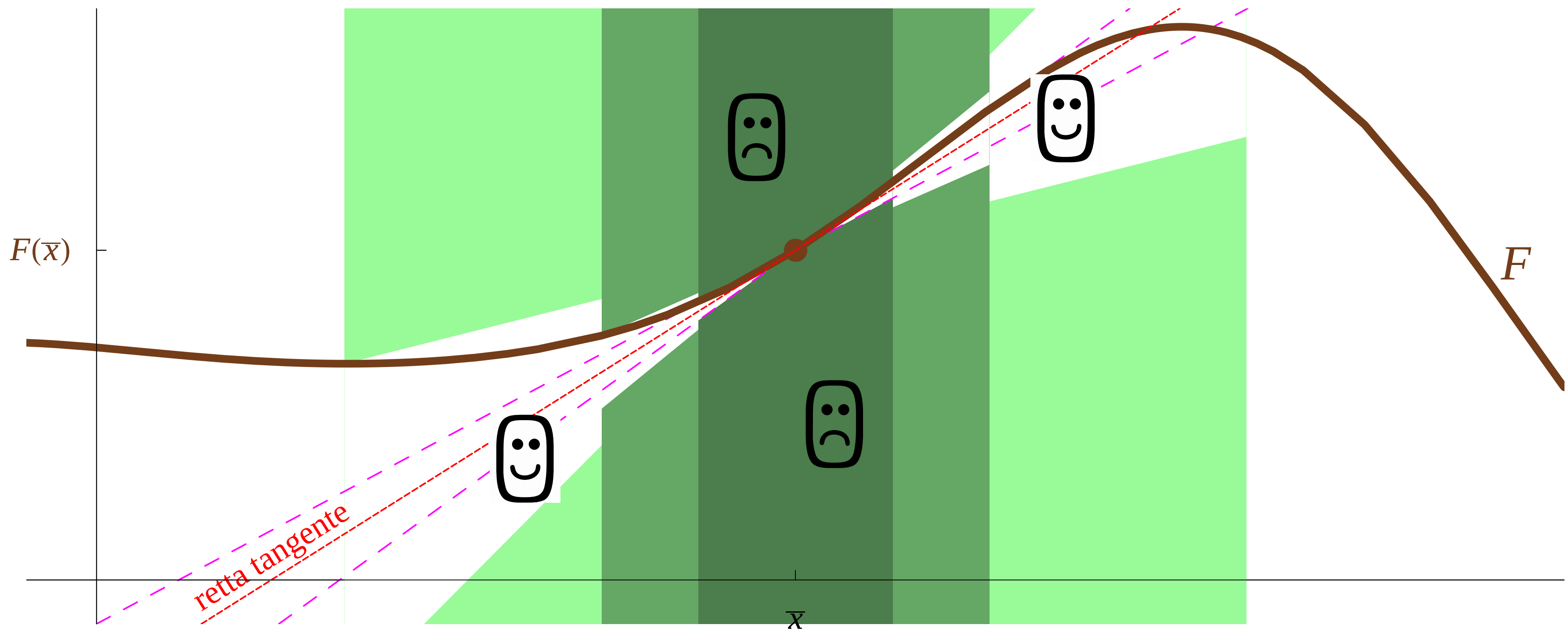
- Anche se stringiamo *di più* le due rette attorno alla tangente,
- la curva deve entrarci dentro,



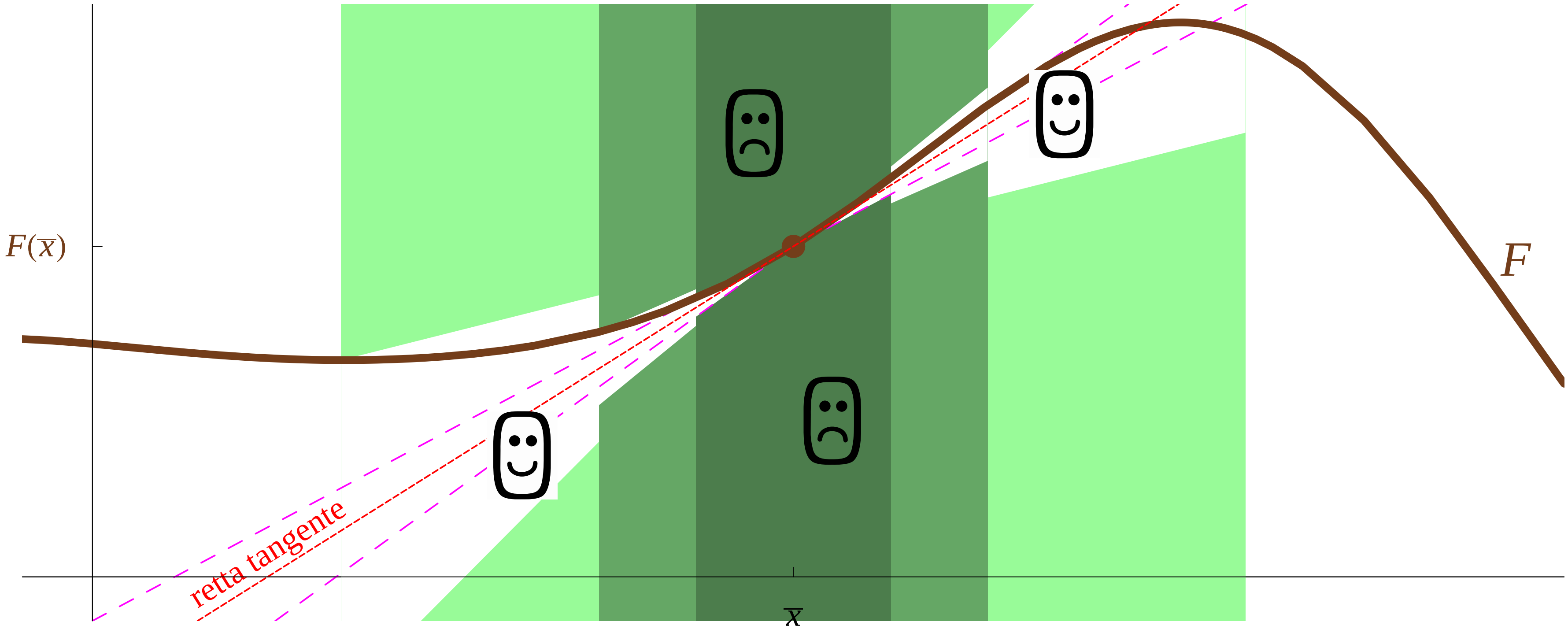
- **Anche se stringiamo** ***di più*** **le due rette attorno alla tangente,**
- **la curva deve entrarci dentro,**
  - sia pure in una zona di ascisse più ristretta.



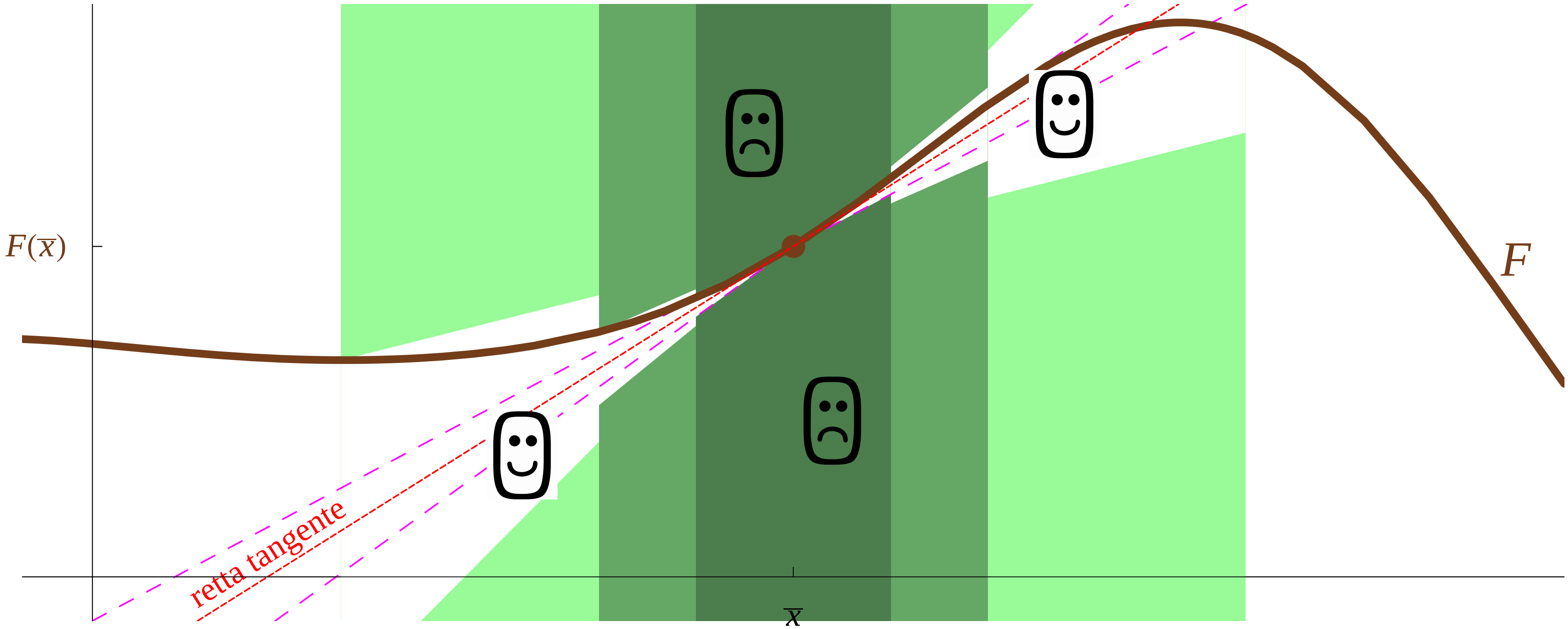
- Anche se stringiamo *ancora di più* le due rette attorno alla tangente,



- Anche se stringiamo *ancora di più* le due rette attorno alla tangente,
- la curva deve entrarci dentro,

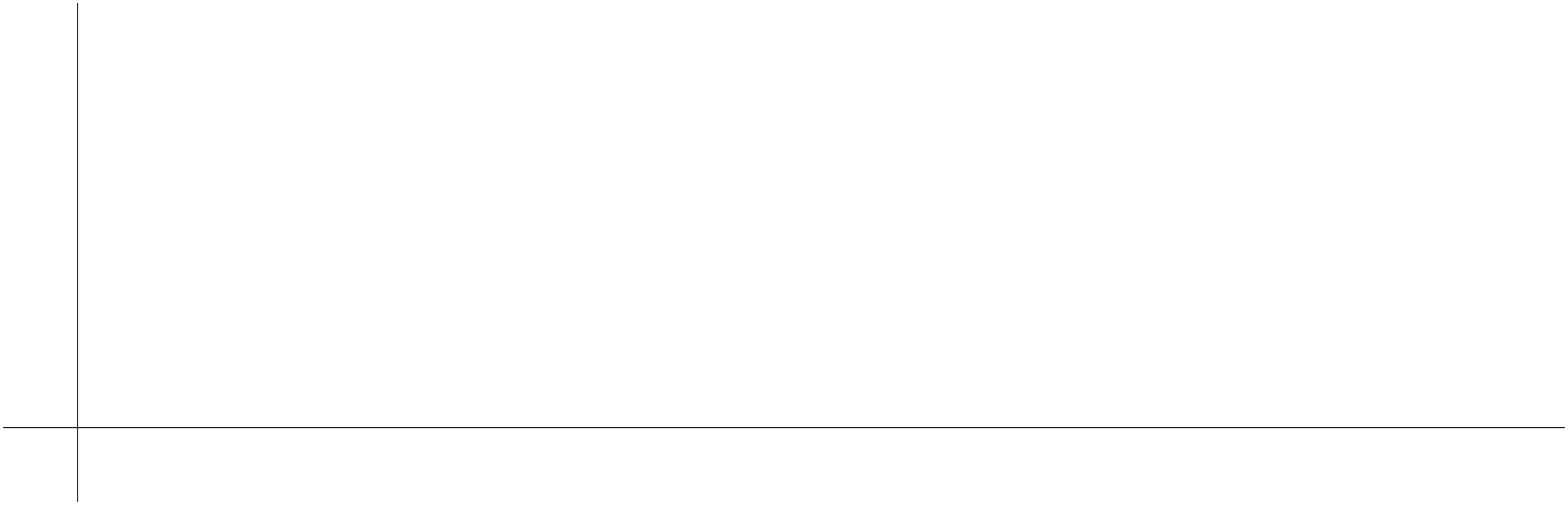


- **Anche se stringiamo *ancora di più* le due rette attorno alla tangente,**
- **la curva deve entrarci dentro,**
  - sia pure in una zona di ascisse *ancora* più ristretta.

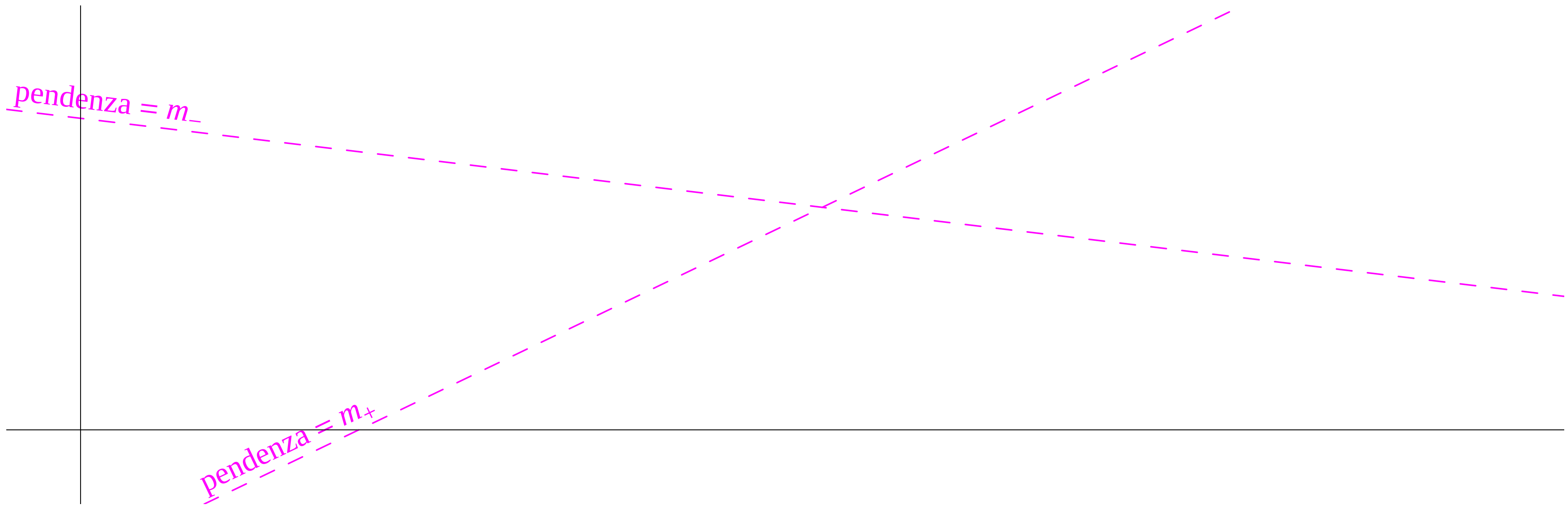


- **Anche se stringiamo *ancora di più* le due rette attorno alla tangente,**
- **la curva deve entrarci dentro,**
  - sia pure in una zona di ascisse *ancora* più ristretta.
- **e così via.**

Pendenza e posizione

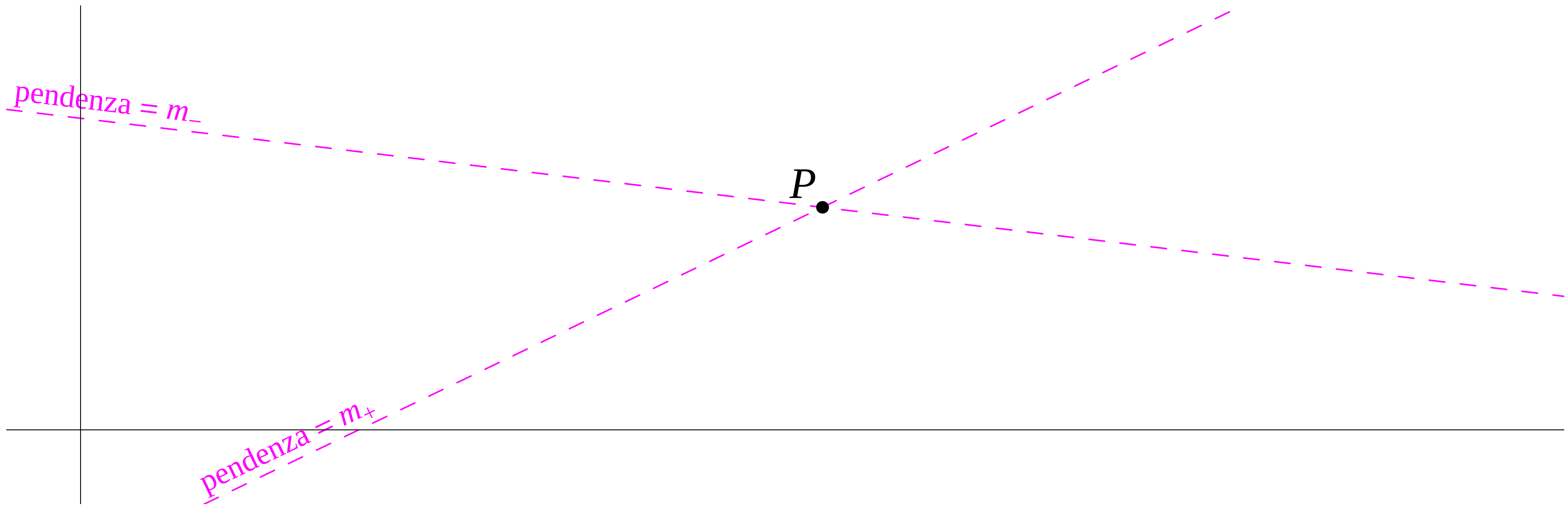


□ Osservazione. In un piano cartesiano sono date



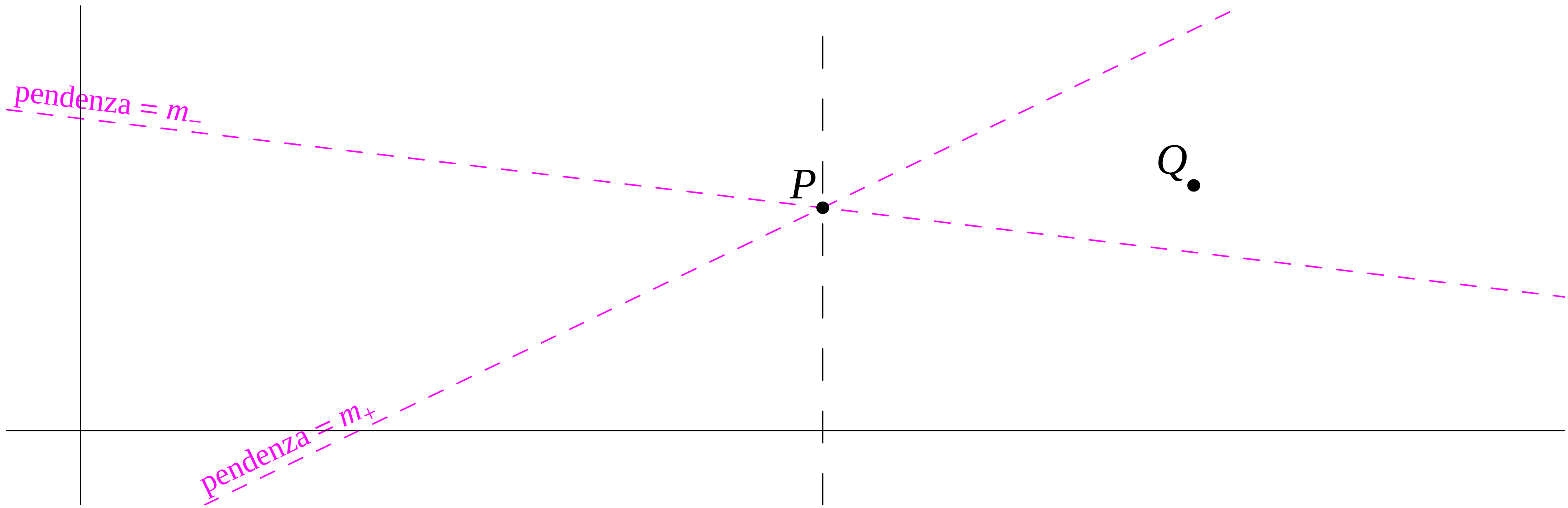
□ Osservazione. In un piano cartesiano sono date

- **due rette di pendenze $m_- < m_+$,**



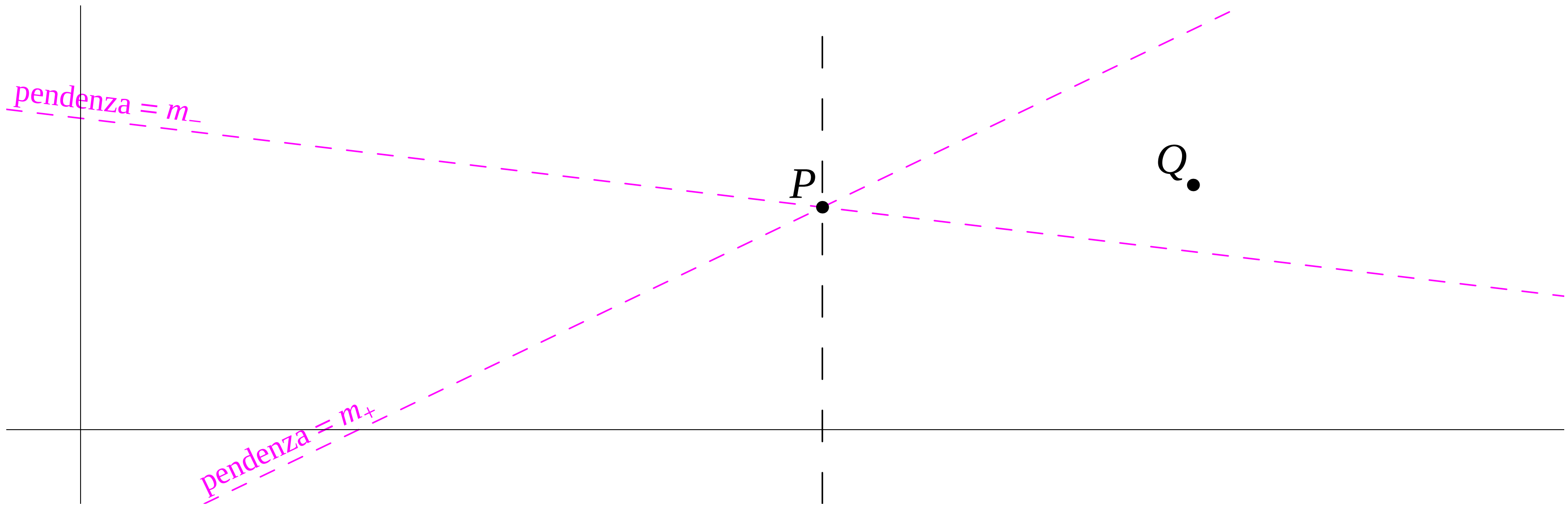
□ Observazione. In un piano cartesiano sono date

- **due rette di pendenze** $m_- < m_+$**,**
- **il loro punto d'intersezione** P**,**

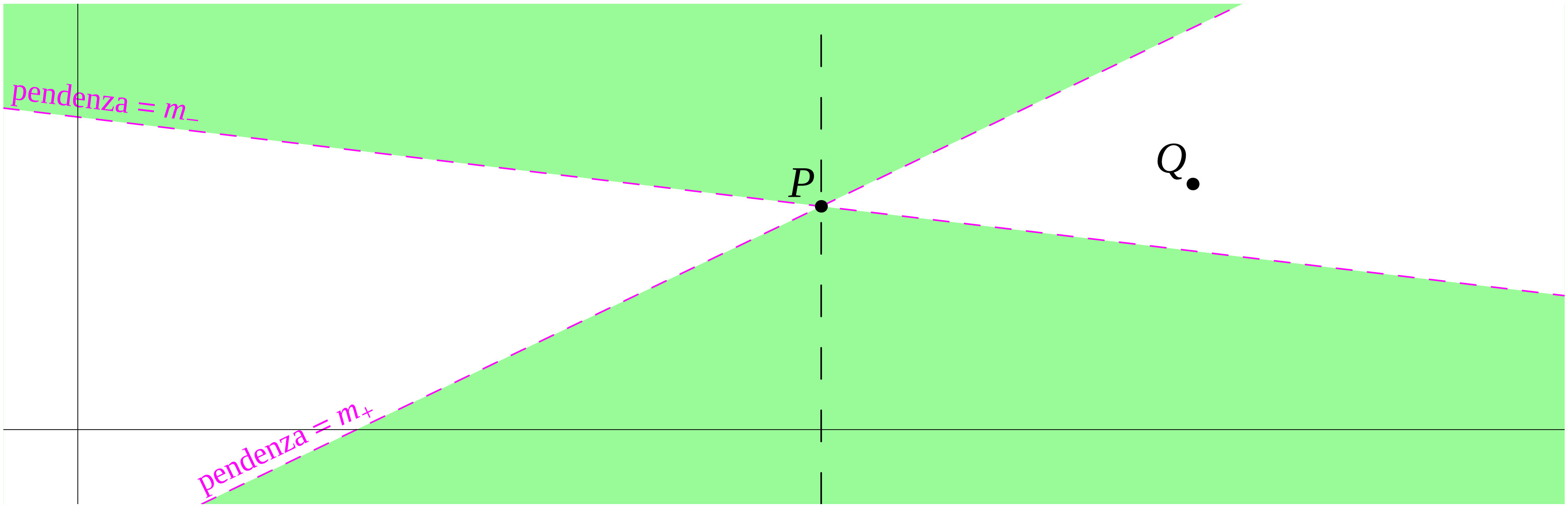


□ Osservazione. In un piano cartesiano sono date

- **due rette di pendenze $m_- < m_+$,**
- **il loro punto d'intersezione P,**
- **e un altro punto Q non sulla verticale di P.**



- Osservazione. In un piano cartesiano sono date
  - **due rette di pendenze $m_- < m_+$,**
  - **il loro punto d'intersezione P,**
  - **e un altro punto Q non sulla verticale di P.**
- Allora si equivalgono le due condizioni:

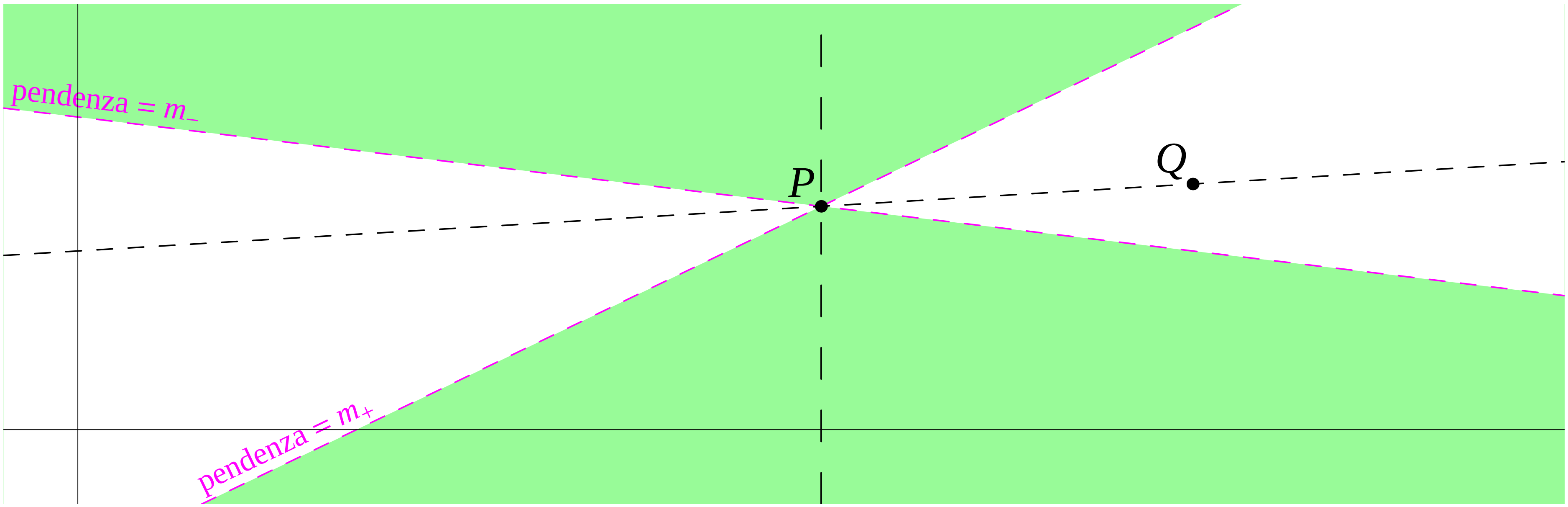


□ Osservazione. In un piano cartesiano sono date

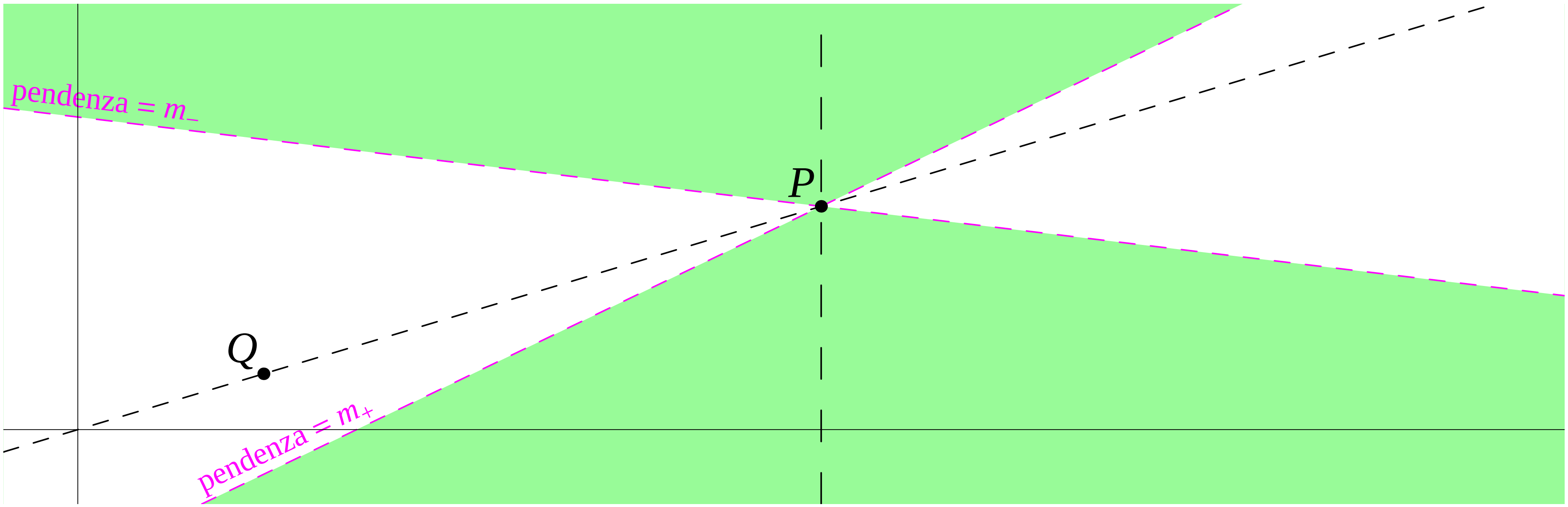
- **due rette di pendenze $m_- < m_+$,**
- **il loro punto d'intersezione P,**
- **e un altro punto Q non sulla verticale di P.**

□ Allora si equivalgono le due condizioni:

1. **Q giace fra le due rette (regione in bianco),**

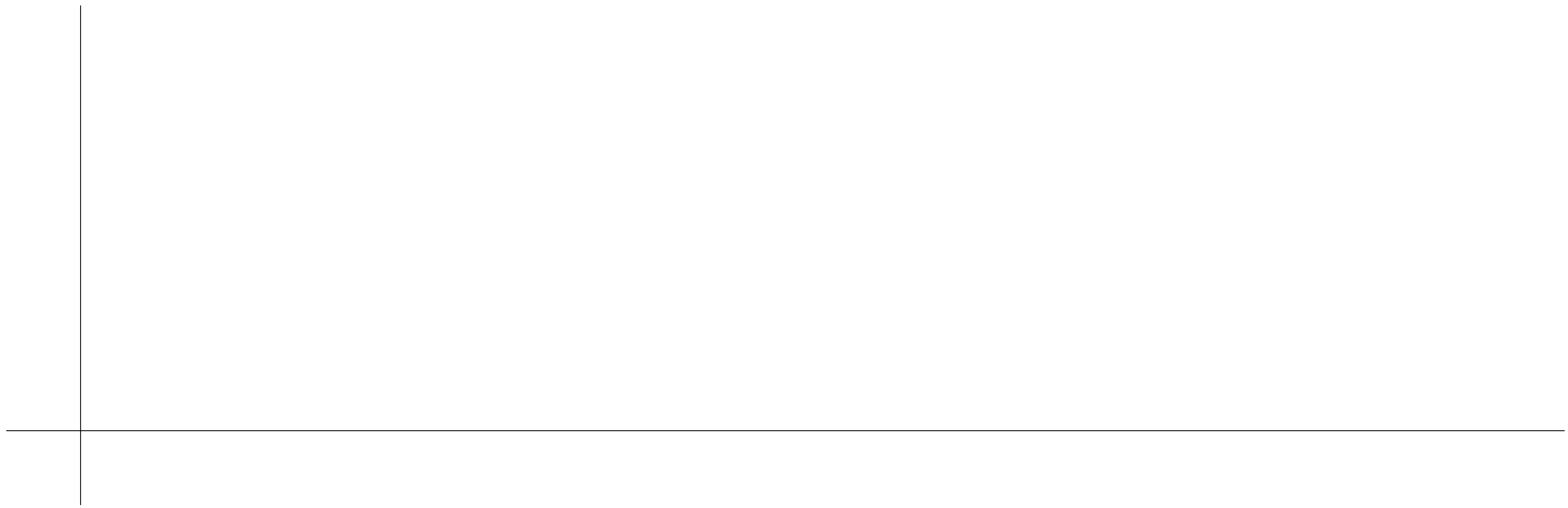


- **Osservazione.** In un piano cartesiano sono date
  - **due rette di pendenze** $m_- < m_+$,
  - **il loro punto d'intersezione** P,
  - **e un altro punto** Q **non sulla verticale di** P.
- Allora si equivalgono le due condizioni:
  1. Q **giace fra le due rette (regione in bianco),**
  2. **la pendenza di** PQ **è compresa fra** m_- **e** m_+.

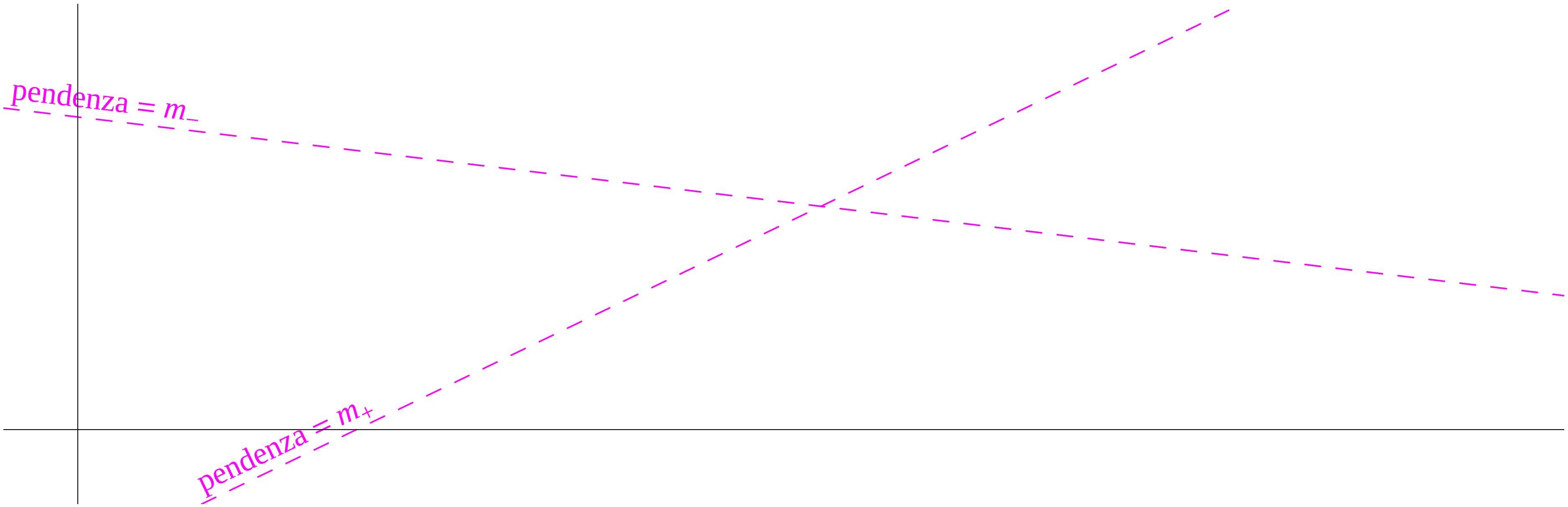


- Questo anche quando Q è a sinistra di P.

Lemma geometrico

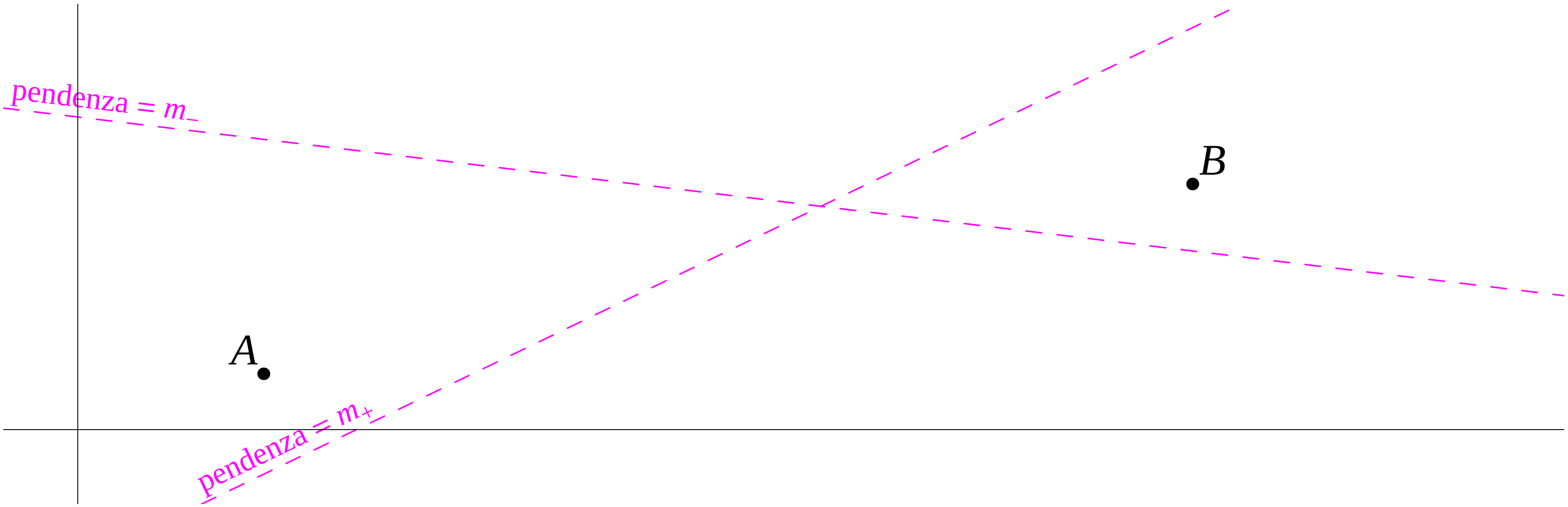


□ **Lemma.** In un piano cartesiano sono date



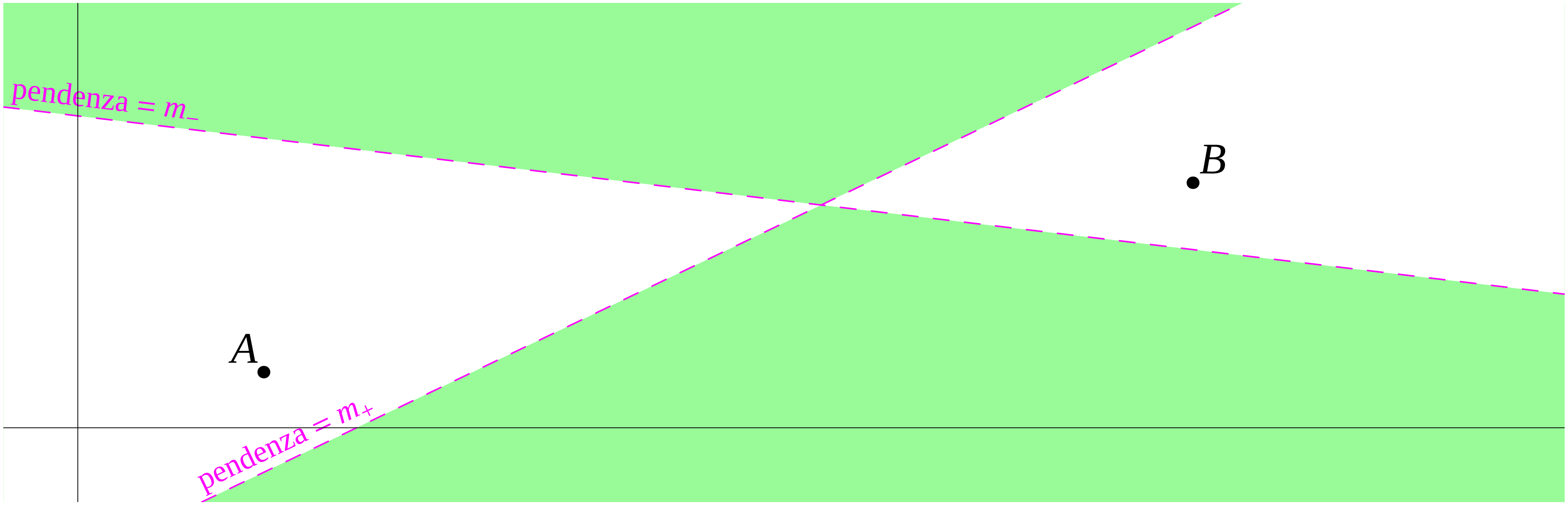
□ Lemma. In un piano cartesiano sono date

- **due rette di pendenze** $m_- < m_+$



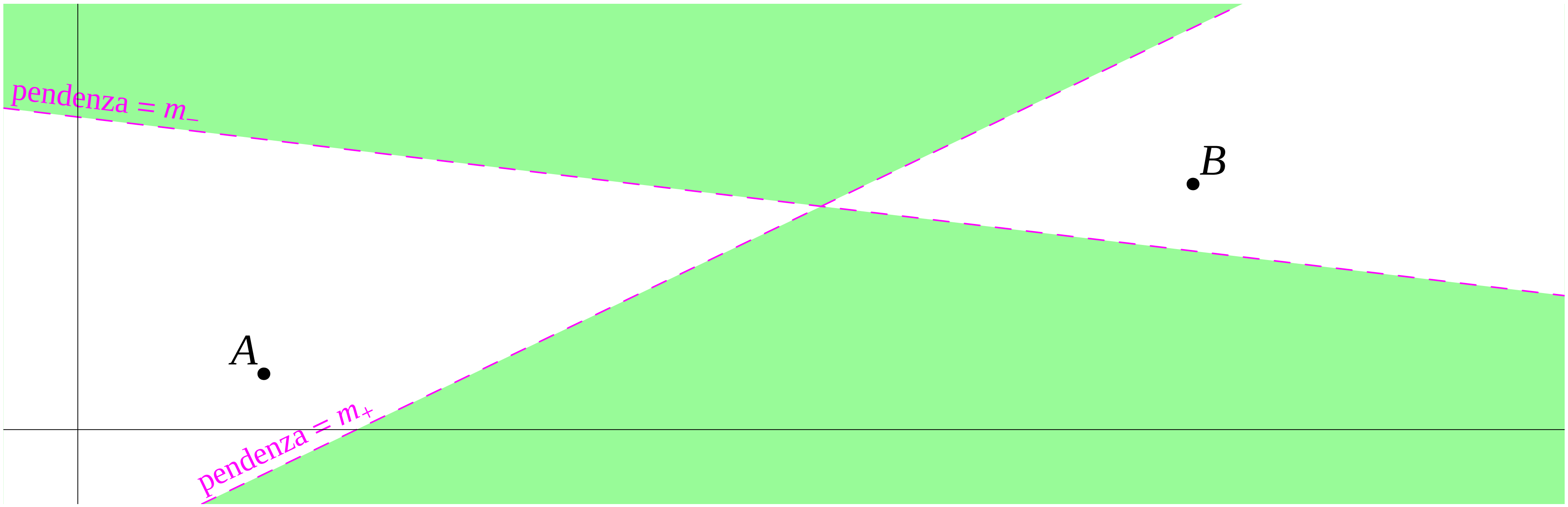
□ Lemma. In un piano cartesiano sono date

- **due rette di pendenze** $m_- < m_+$
- **e due punti distinti** A, B**.**



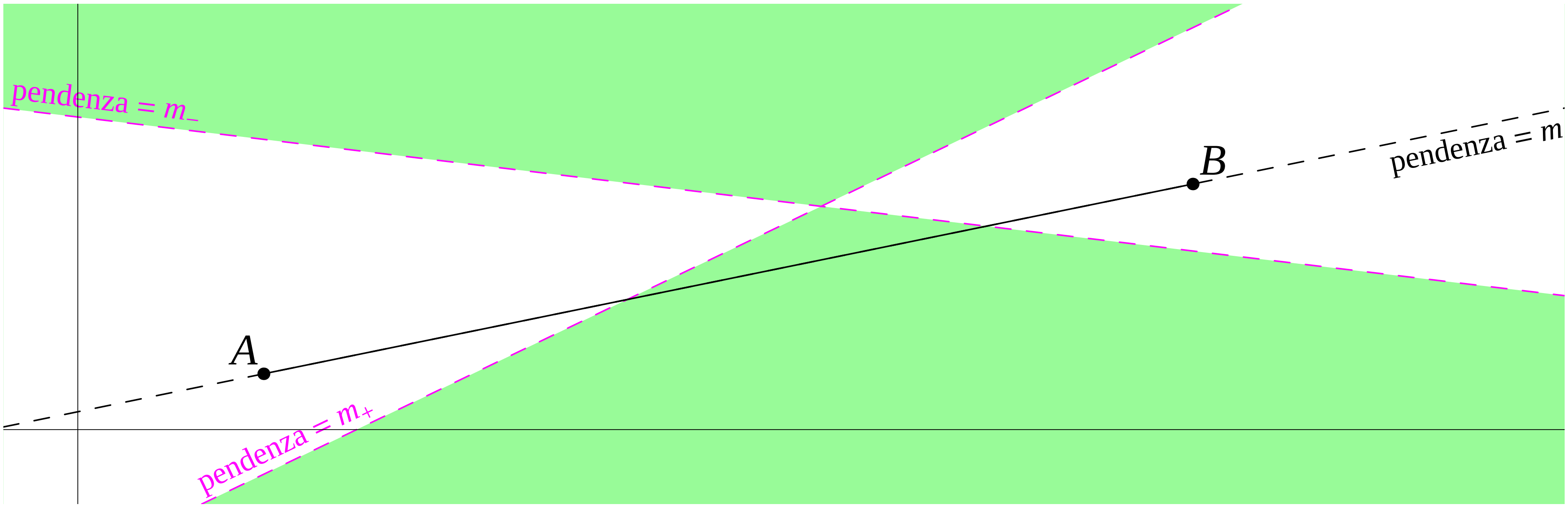
- Lemma. In un piano cartesiano sono date
  - **due rette di pendenze** $m_- < m_+$
  - **e due punti distinti** A, B
    - compresi (verticalmente) fra le rette (regione in bianco)

Lemma geometrico



- Lemma. In un piano cartesiano sono date
  - **due rette di pendenze** $m_- < m_+$
  - **e due punti distinti** A, B
    - compresi (verticalmente) fra le rette (regione in bianco)
    - uno a sinistra e uno a destra dell'intersezione.

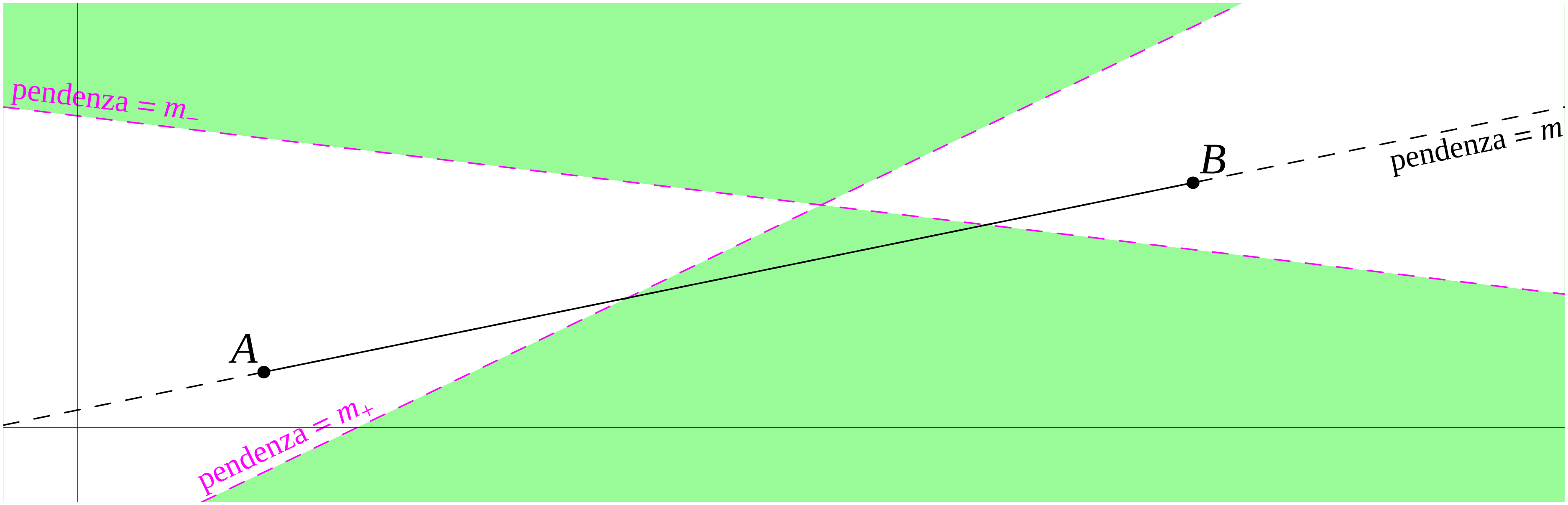
Lemma geometrico



□ Lemma. In un piano cartesiano sono date

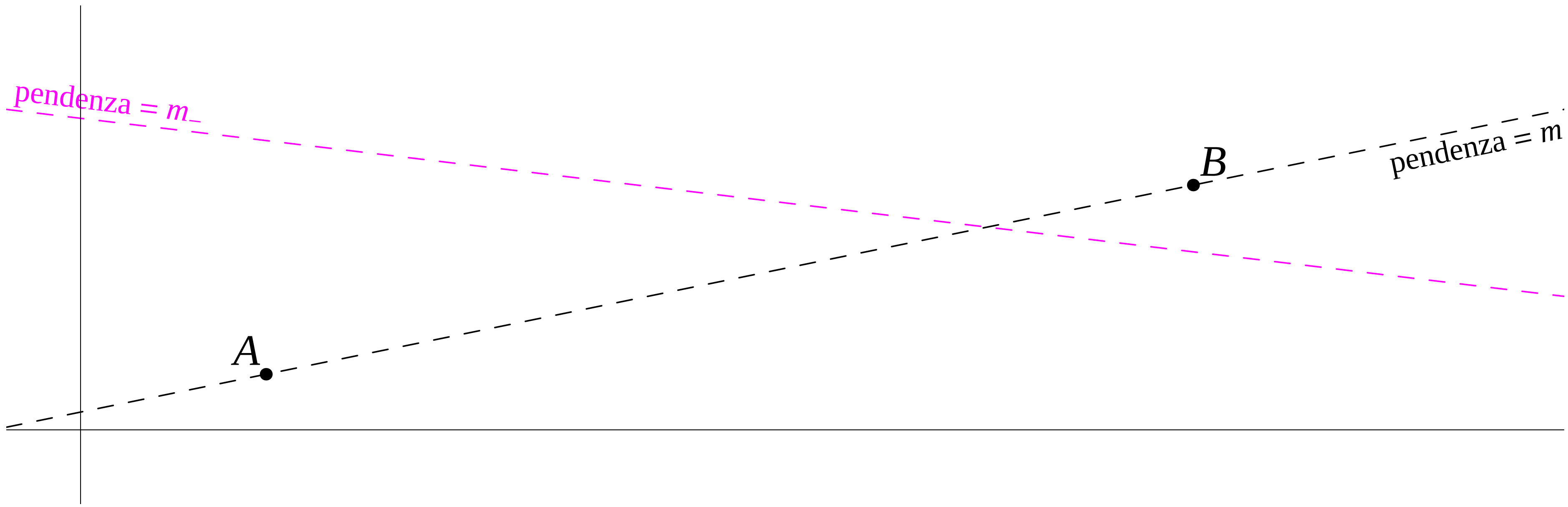
- **due rette di pendenze** $m_- < m_+$
- **e due punti distinti** A, B
  - compresi (verticalmente) fra le rette (regione in bianco)
  - uno a sinistra e uno a destra dell'intersezione.
- **Sia** m **la pendenza della retta** AB**.**

Lemma geometrico

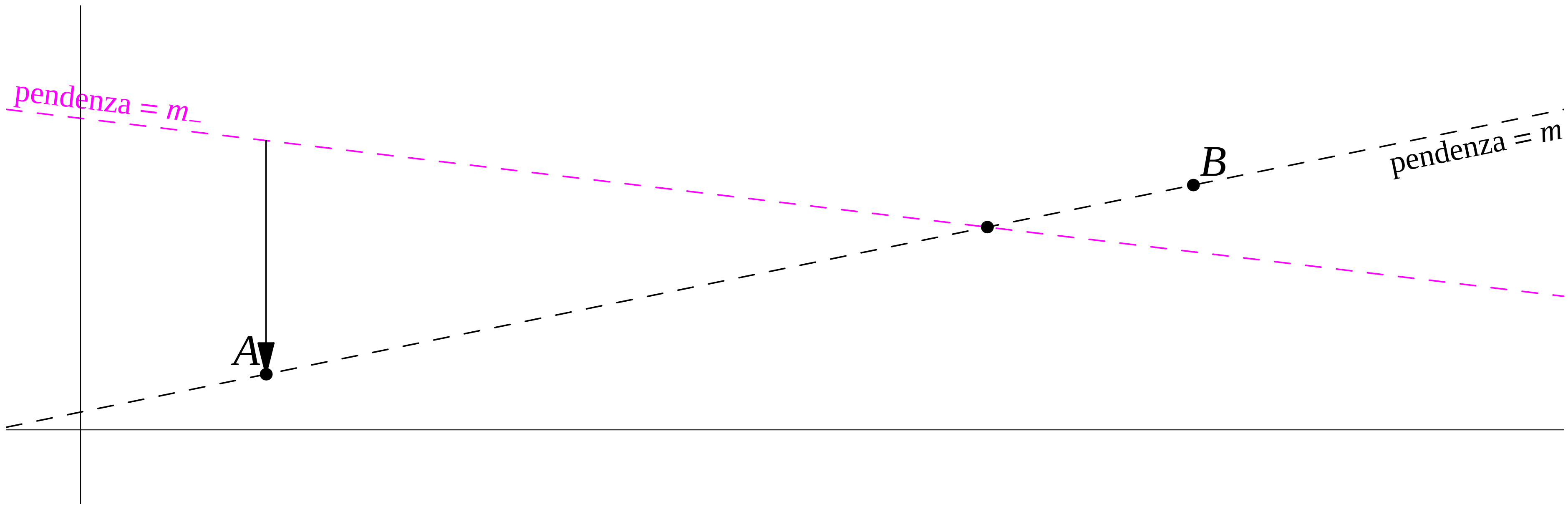


- **Lemma.** In un piano cartesiano sono date
  - **due rette di pendenze $m_- < m_+$**
  - **e due punti distinti A, B**
    - compresi (verticalmente) fra le rette (regione in bianco)
    - uno a sinistra e uno a destra dell'intersezione.
  - **Sia m la pendenza della retta AB.**

  Allora m è compresa fra m_- e m_+.

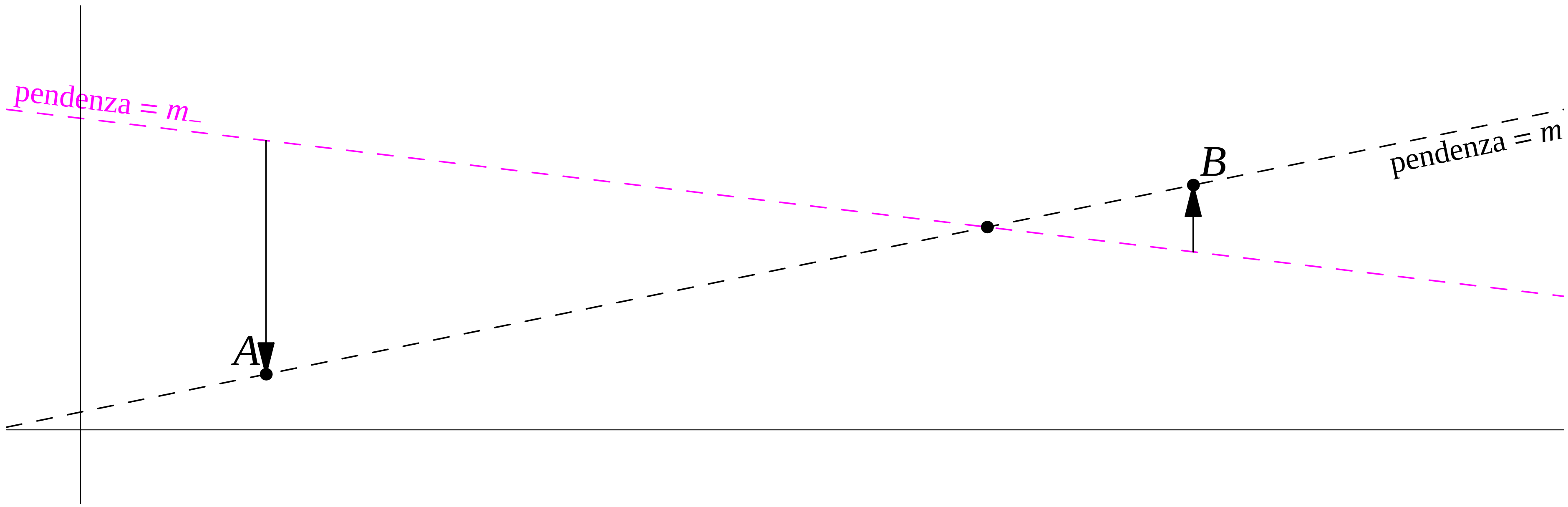


- **Dimostrazione.** Rispetto alla retta di pendenza m_-

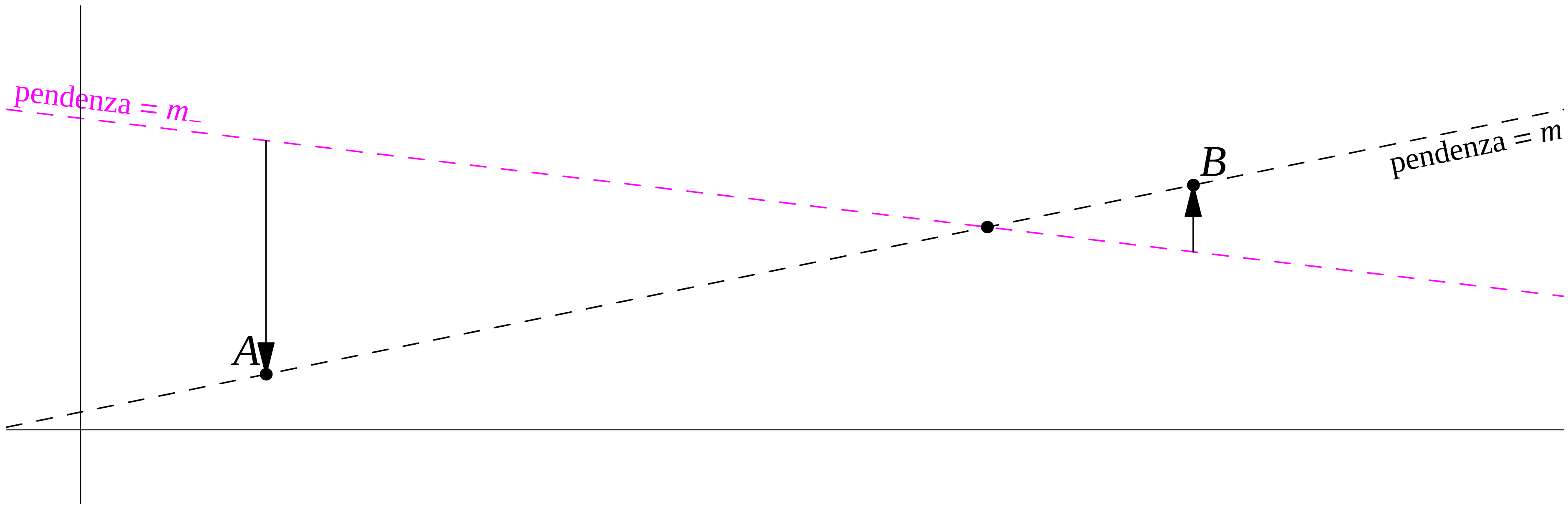


- **Dimostrazione.** **Rispetto alla retta di pendenza m_-**
  - A è sotto,

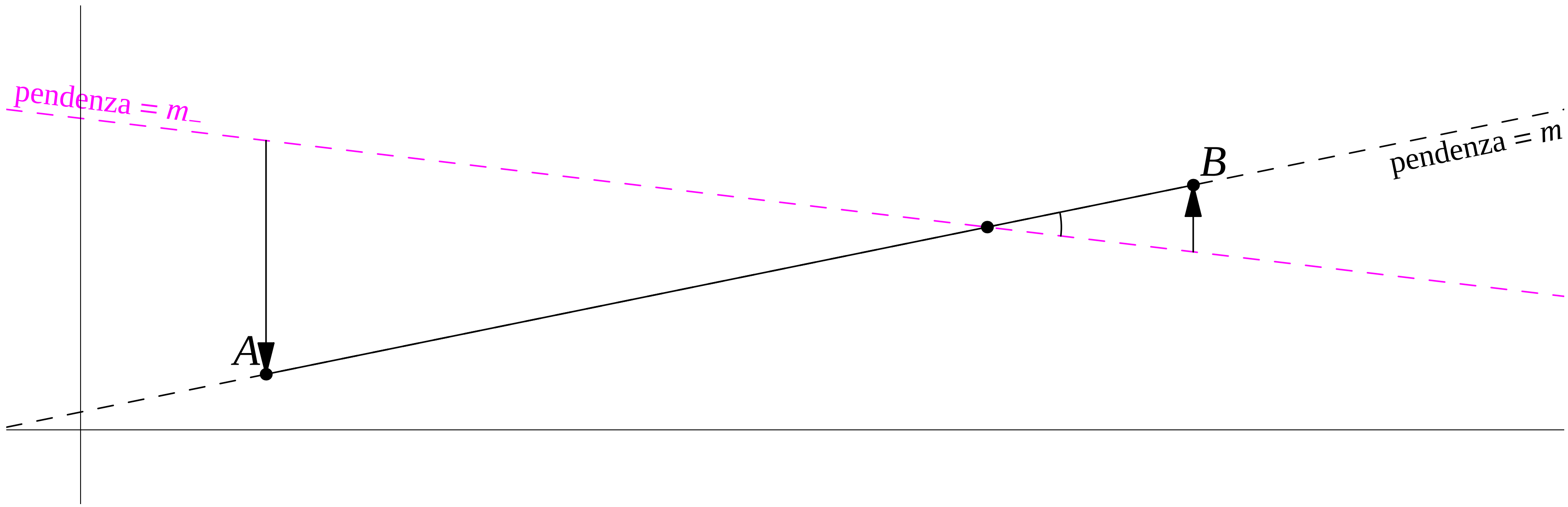
Lemma geometrico



- **Dimostrazione.** **Rispetto alla retta di pendenza m_-**
  - A è sotto,
  - B è sopra.

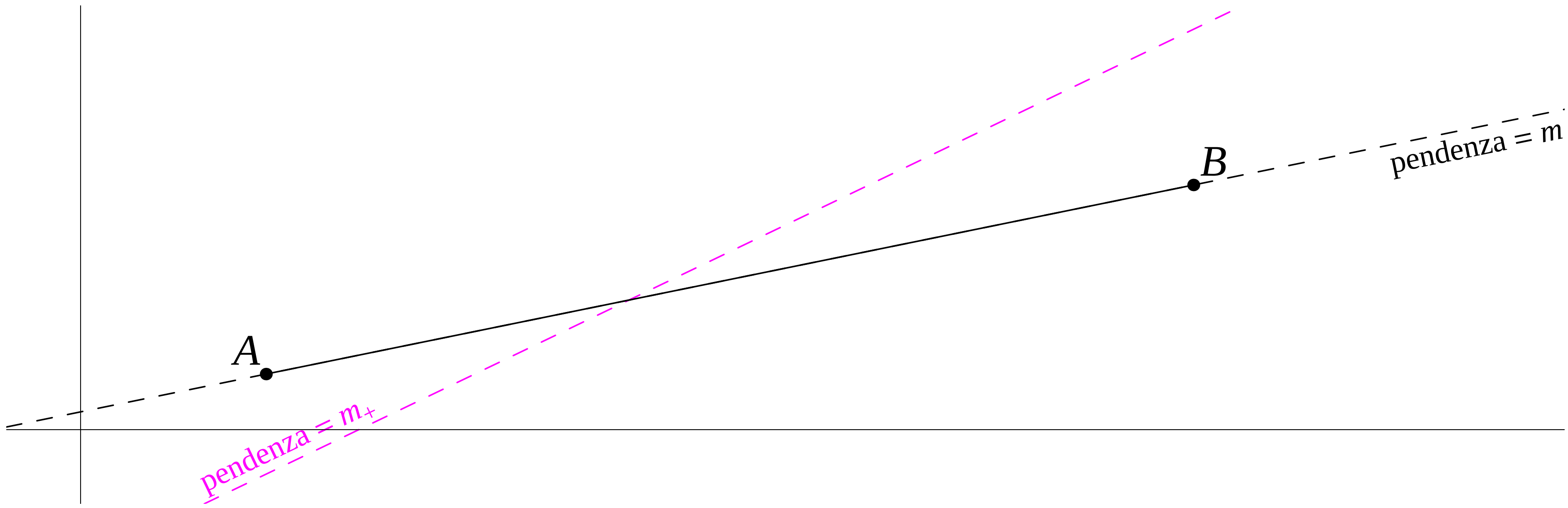


- **Dimostrazione.** **Rispetto alla retta di pendenza m_-**
  - A è sotto,
  - B è sopra.
  - A è a sinistra di B.

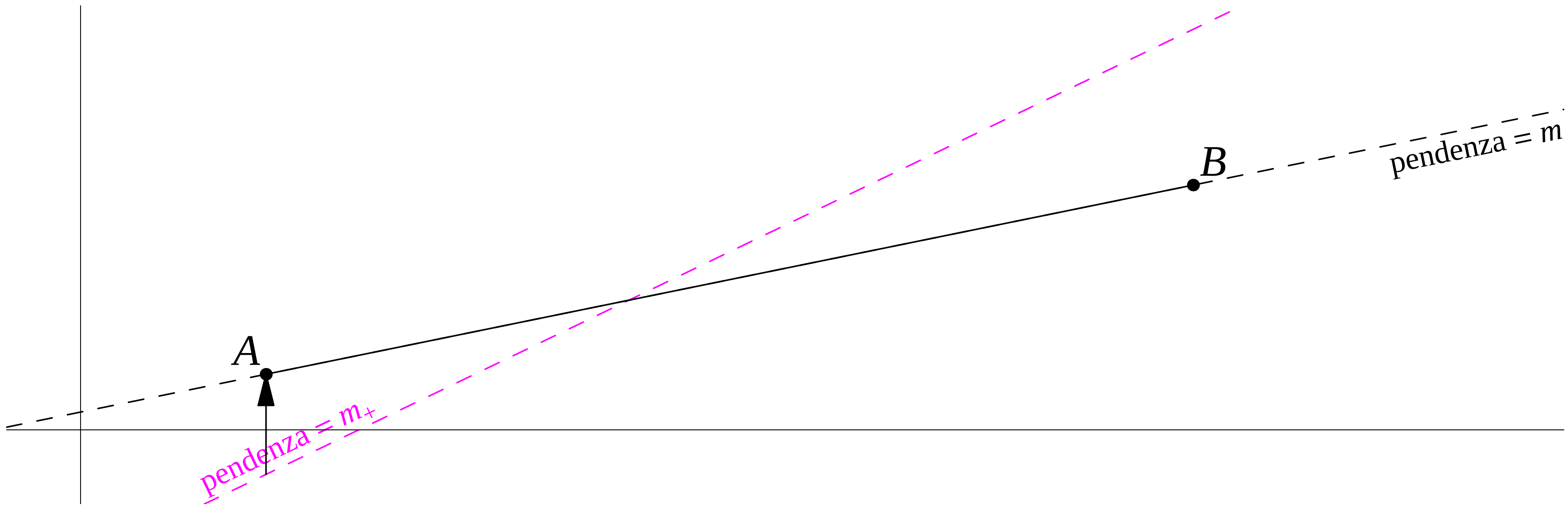


- **Dimostrazione.** **Rispetto alla retta di pendenza m_-**
  - A è sotto,
  - B è sopra.
  - A è a sinistra di B.

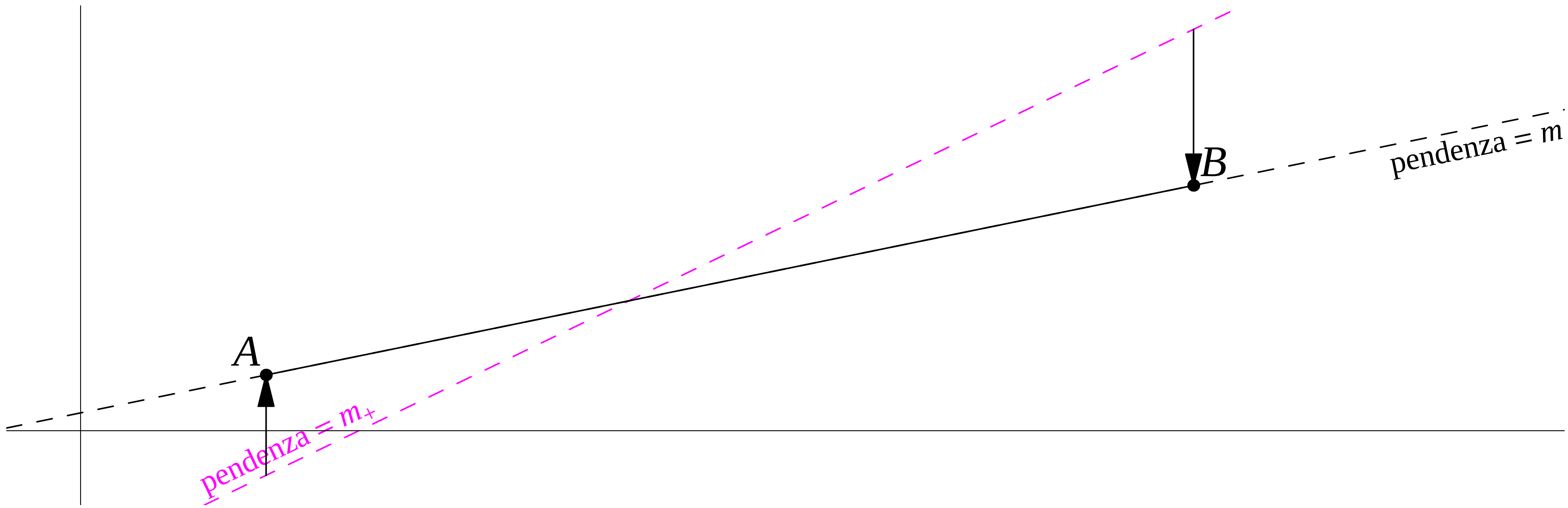
Quindi la retta AB ha pendenza $\geq m_-$.



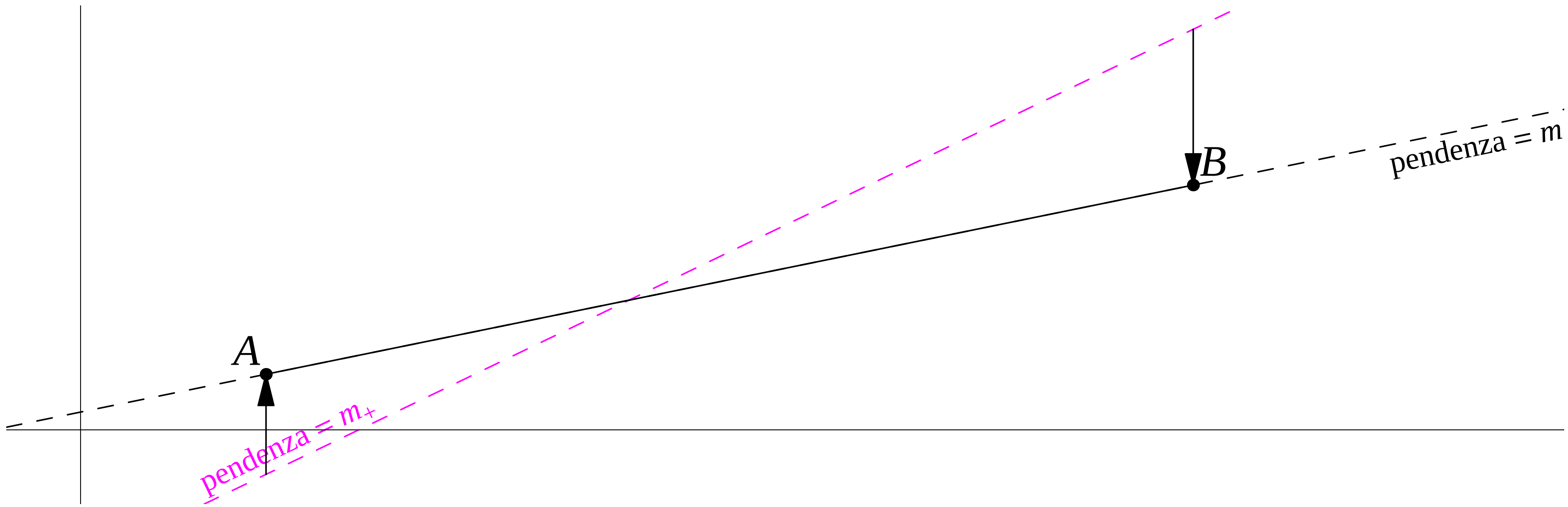
- **Rispetto alla retta di pendenza m_+**



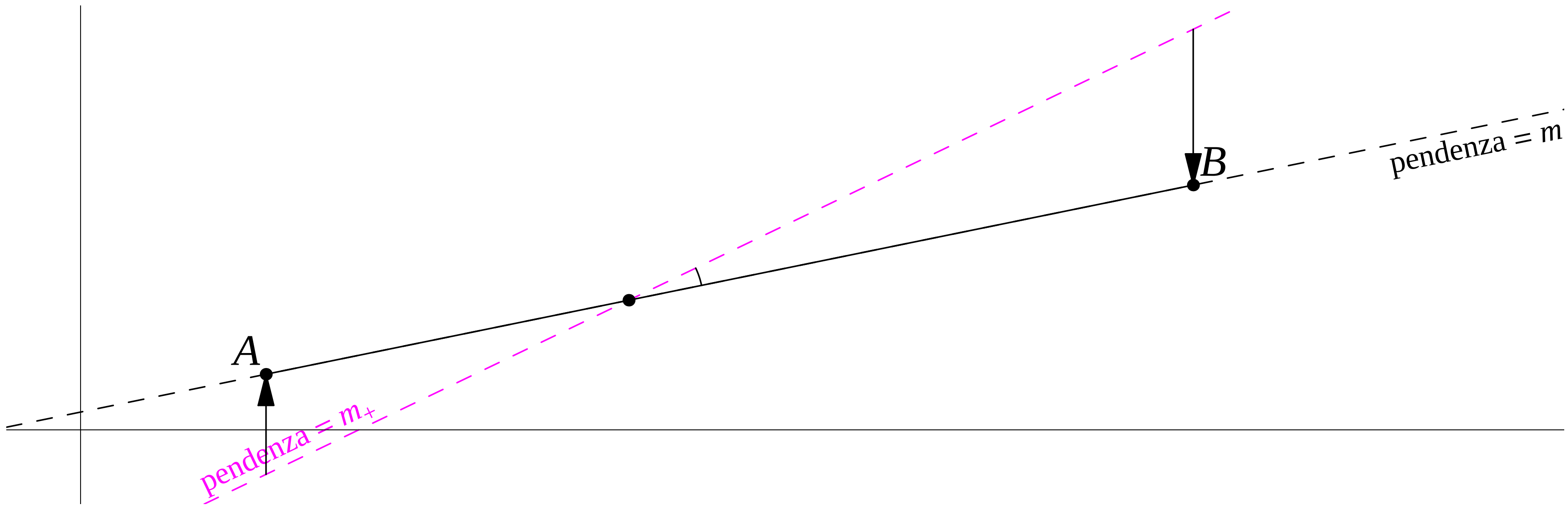
- **Rispetto alla retta di pendenza m_+**
  - A è sopra,



- **Rispetto alla retta di pendenza** m_+
  - A è sopra,
  - B è sotto.

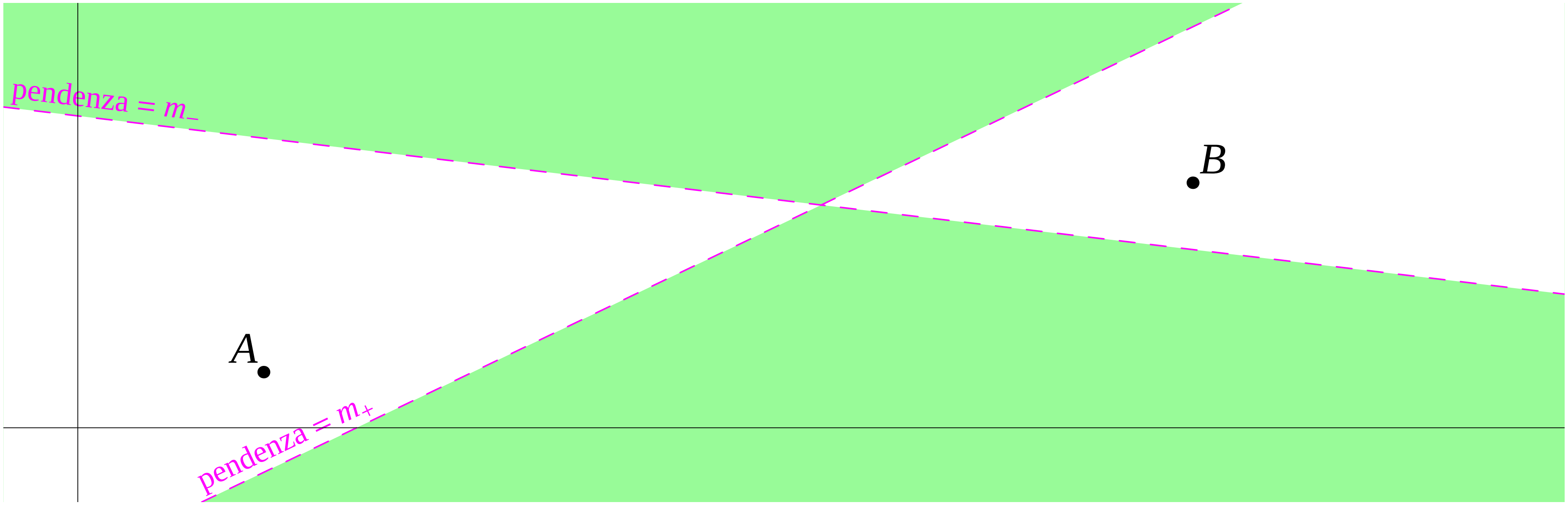


- **Rispetto alla retta di pendenza m_+**
  - A è sopra,
  - B è sotto.
  - A è a sinistra di B.

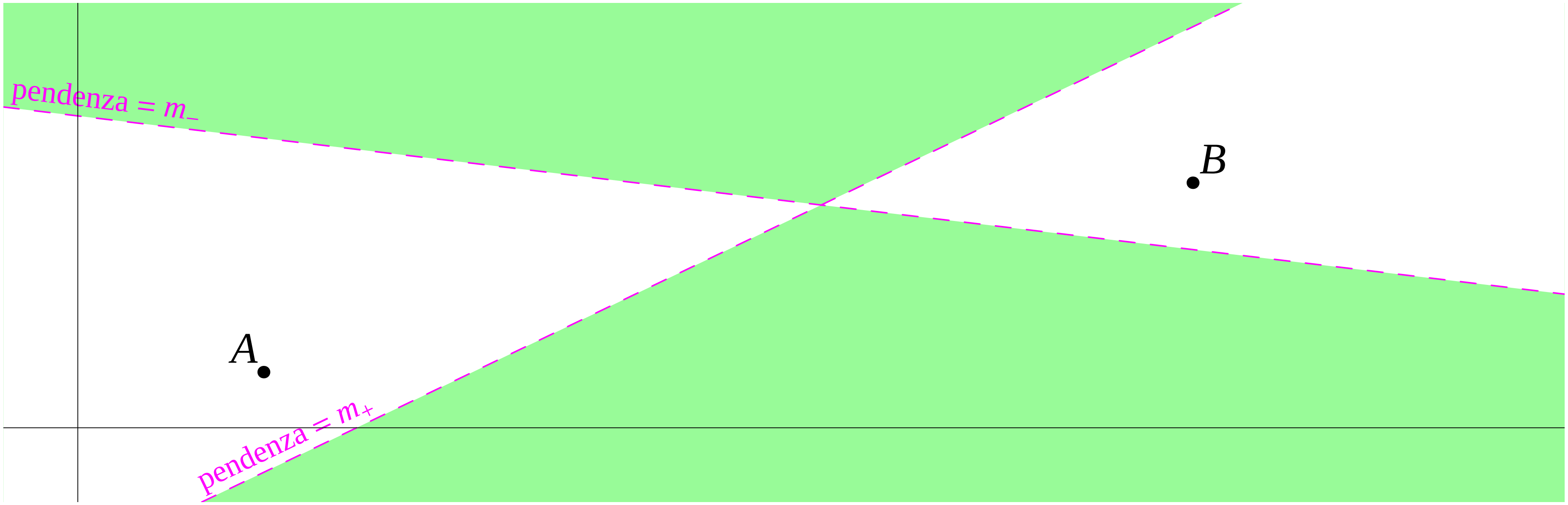


- **Rispetto alla retta di pendenza m_+**
  - A è sopra,
  - B è sotto.
  - A è a sinistra di B.

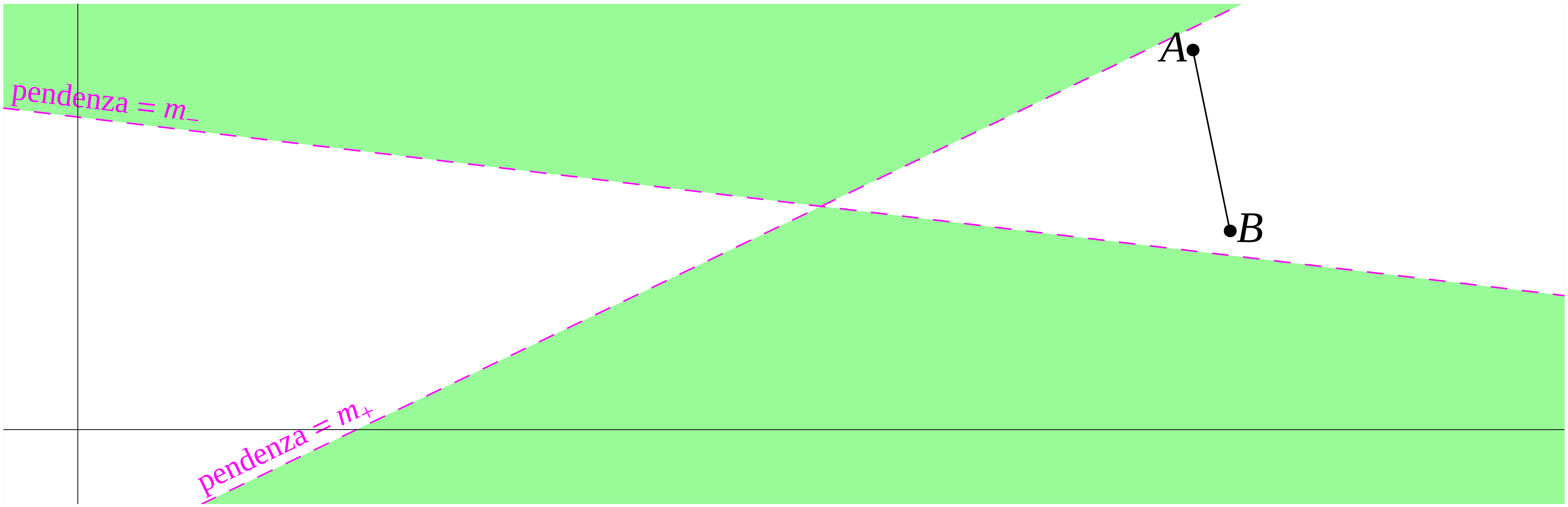
Quindi la retta AB ha pendenza $\leq m_+$.



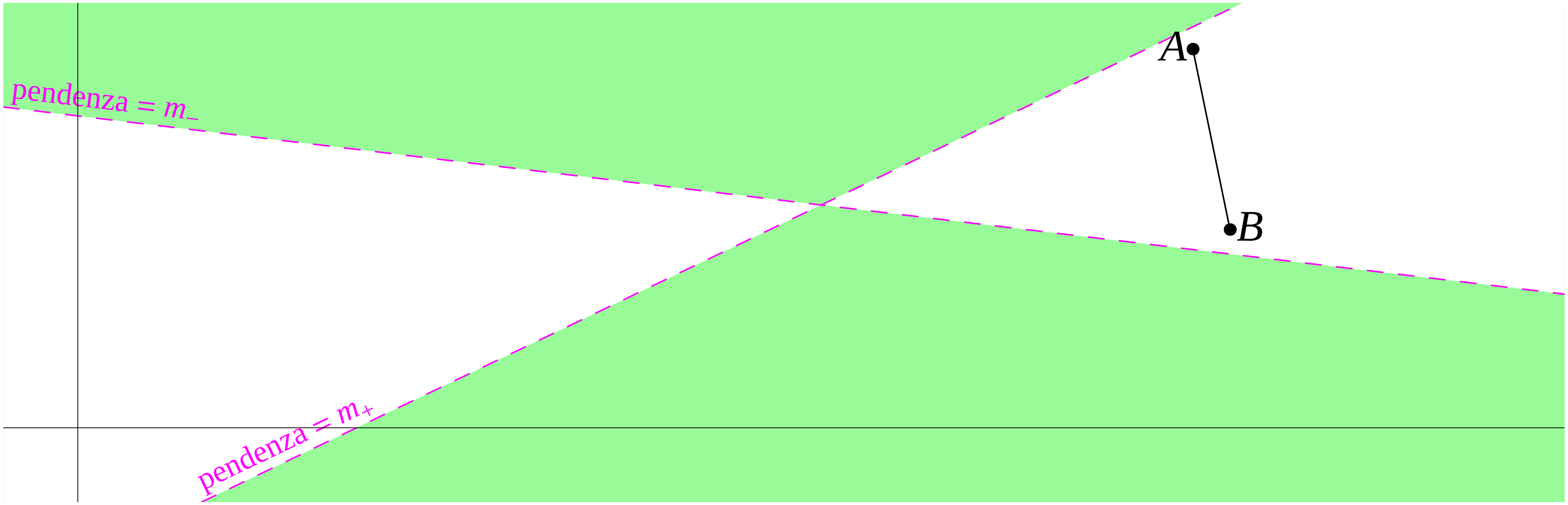
- **Curiosità:** è importante che i due punti stiano *da parti opposte* rispetto all'intersezione?



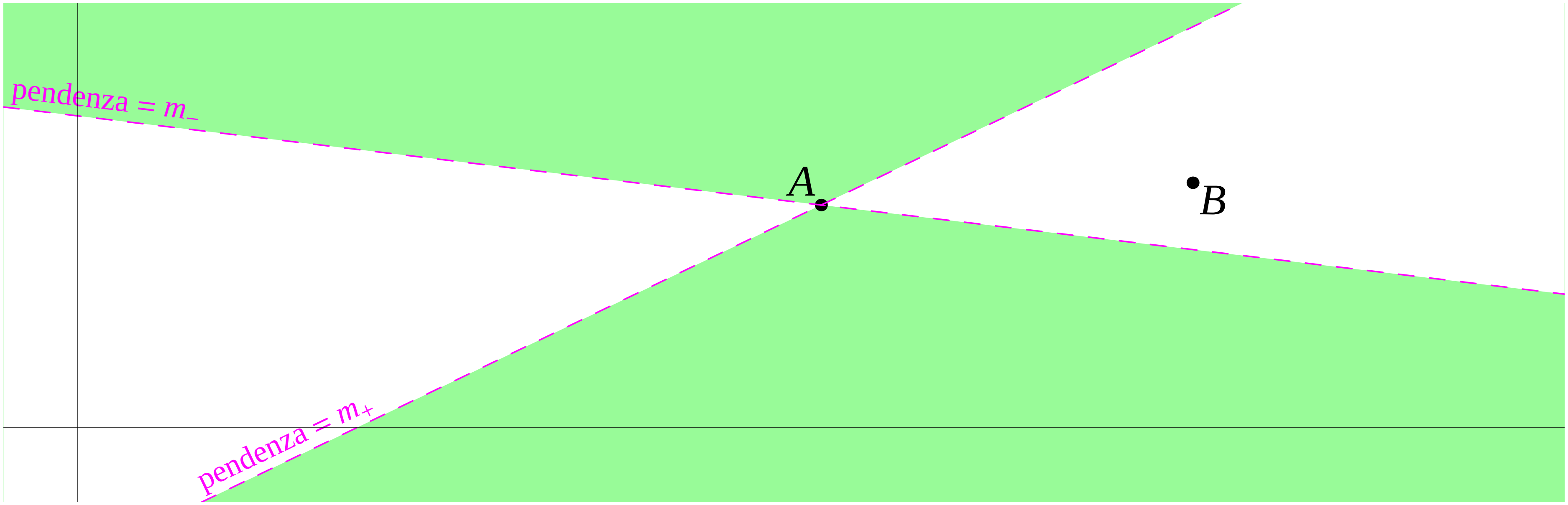
- **Curiosità:** è importante che i due punti stiano *da parti opposte* rispetto all'intersezione?
- **Sì**, è essenziale.



- **Curiosità:** **è importante che i due punti stiano *da parti opposte* rispetto all'intersezione?**
- **Sì**, **è essenziale.**
  - Infatti se A, B sono dalla stessa parte, la pendenza della retta AB può essere qualsiasi cosa.

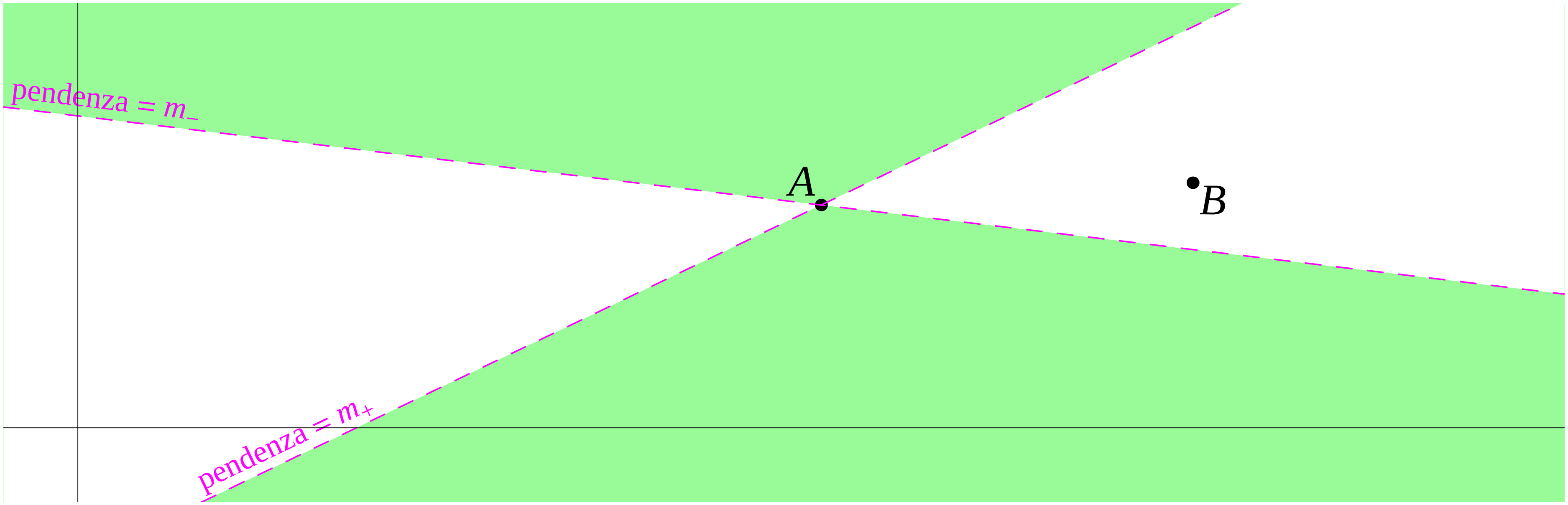


- **Curiosità:** **è importante che i due punti stiano *da parti opposte* rispetto all'intersezione?**
- **Sì**, **è essenziale.**
  - Infatti se A, B sono dalla stessa parte, la pendenza della retta AB può essere qualsiasi cosa.
  - Non è costretta fra m_- e m_+.



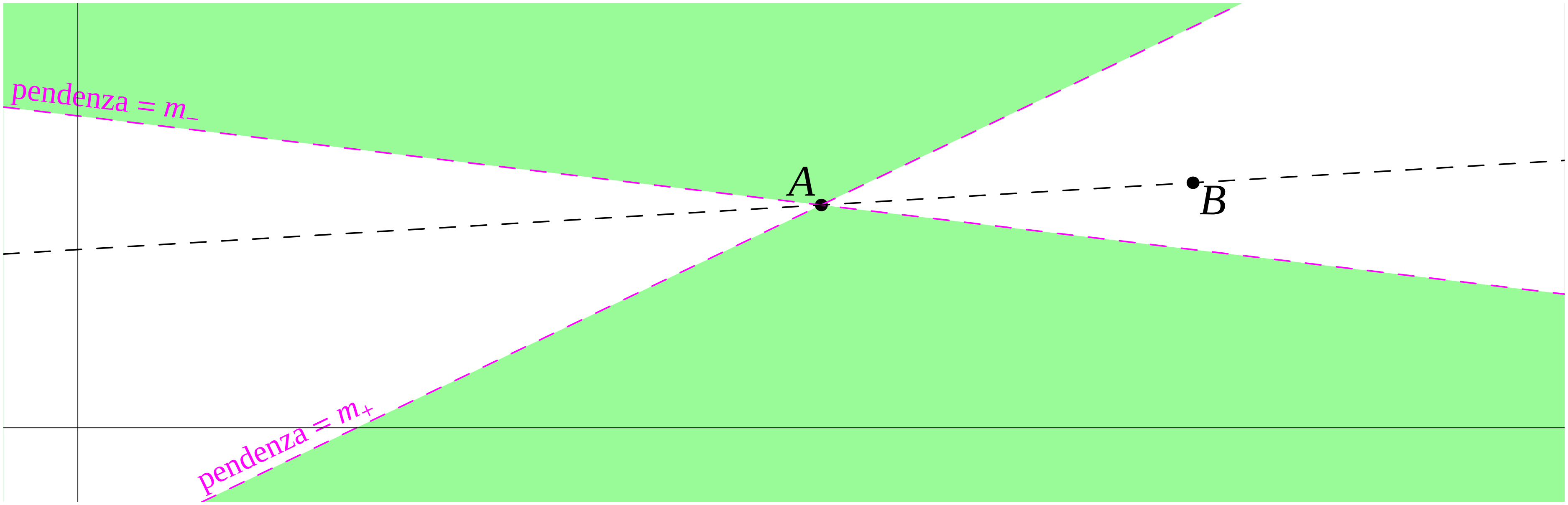
- E se **uno** dei due punti coincide con l'intersezione e l'altro sta nell'imbuto?

Lemma geometrico



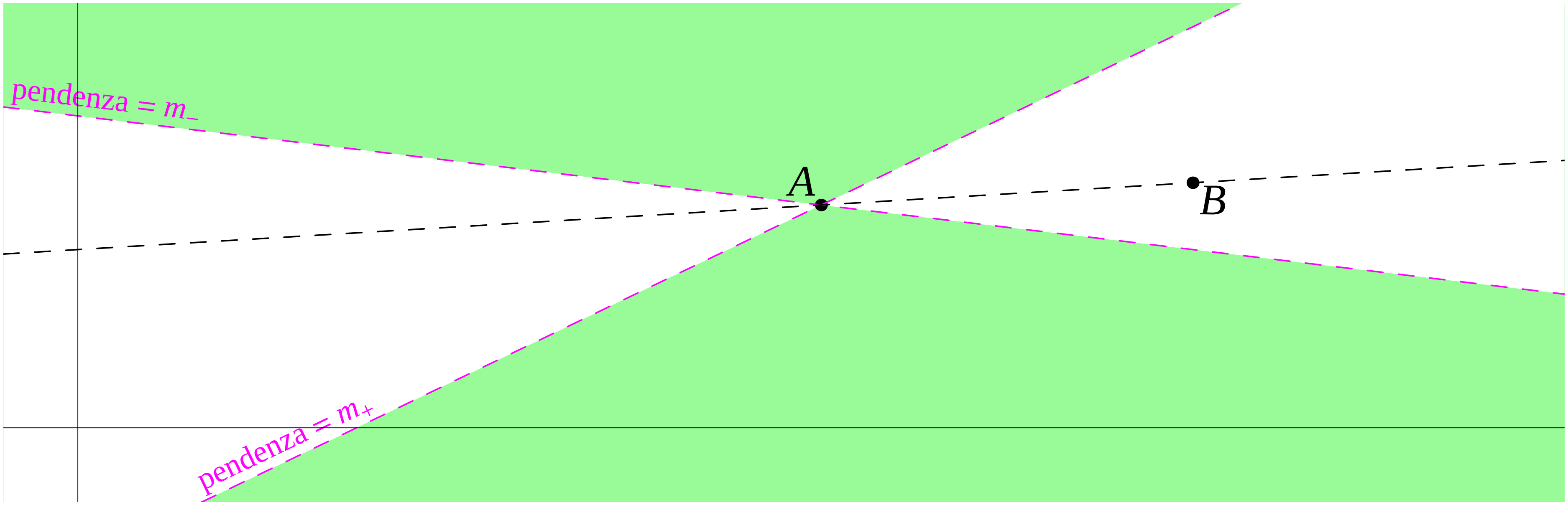
- E se **uno** dei due punti coincide con l'intersezione e l'altro sta nell'imbuto?
- Allora la tesi vale.

Lemma geometrico



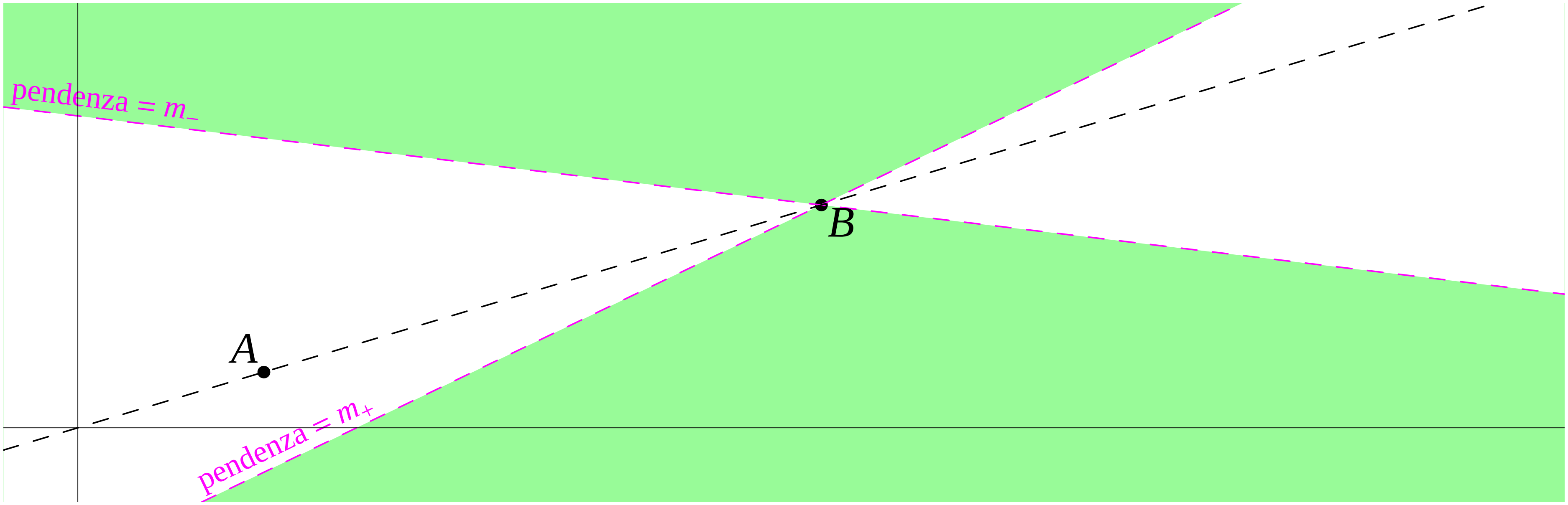
- **E se uno dei due punti coincide con l'intersezione e l'altro sta nell'imbuto?**
- **Allora la tesi vale.**
  - Cioè la pendenza di AB è compresa fra m_- e m_+.

Lemma geometrico



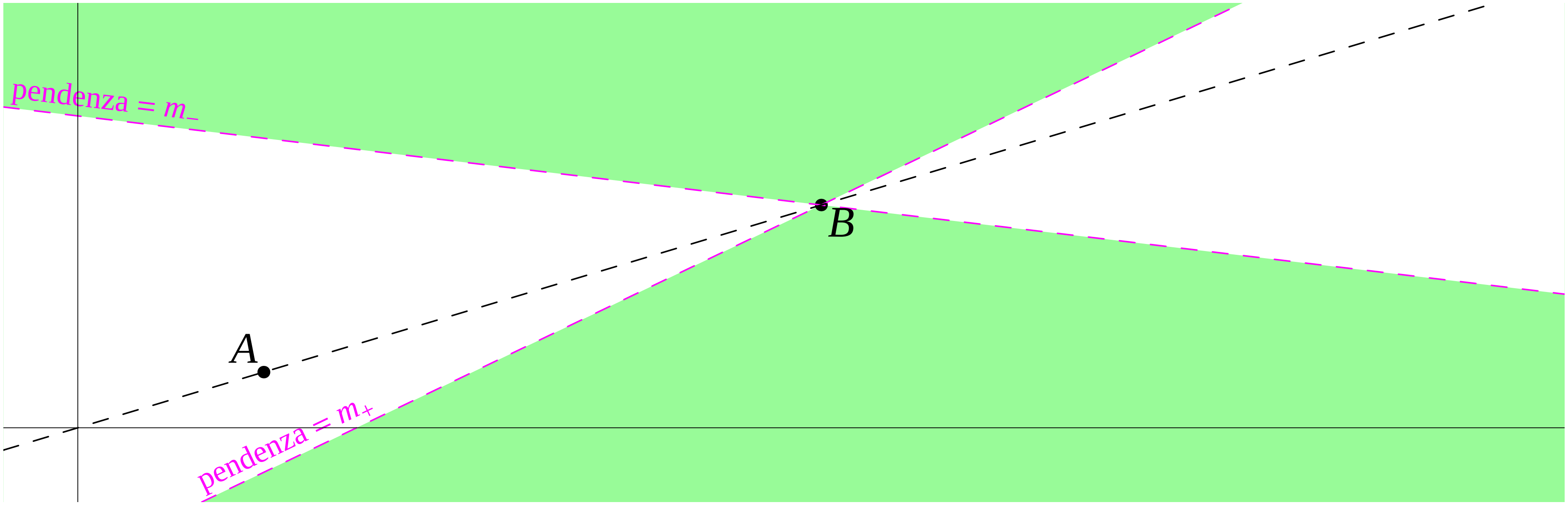
- **E se uno dei due punti coincide con l'intersezione e l'altro sta nell'imbuto?**
- **Allora la tesi vale.**
  - Cioè la pendenza di AB è compresa fra m_- e m_+.
  - Il fatto è chiaro geometricamente, sia quando A è l'intersezione,

Lemma geometrico

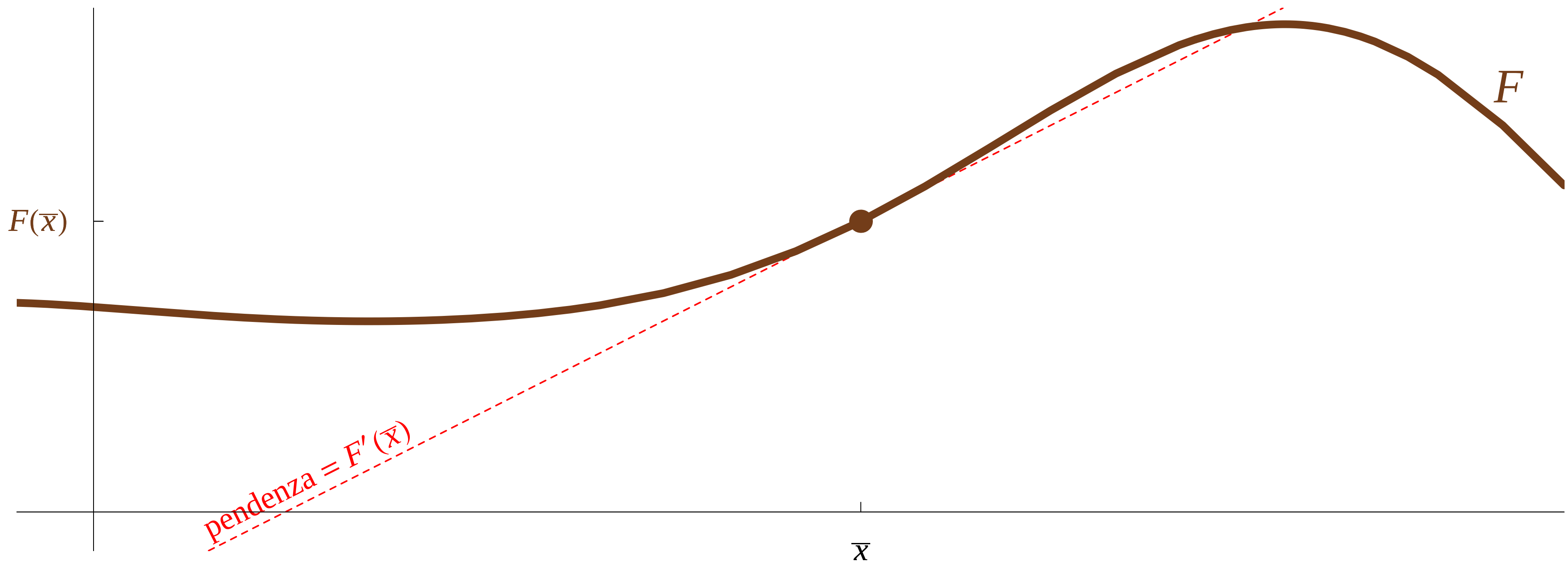


- **E se uno dei due punti coincide con l'intersezione e l'altro sta nell'imbuto?**
- **Allora la tesi vale.**
  - Cioè la pendenza di AB è compresa fra m_- e m_+.
  - Il fatto è chiaro geometricamente, sia quando A è l'intersezione,
  - sia quando B lo è.

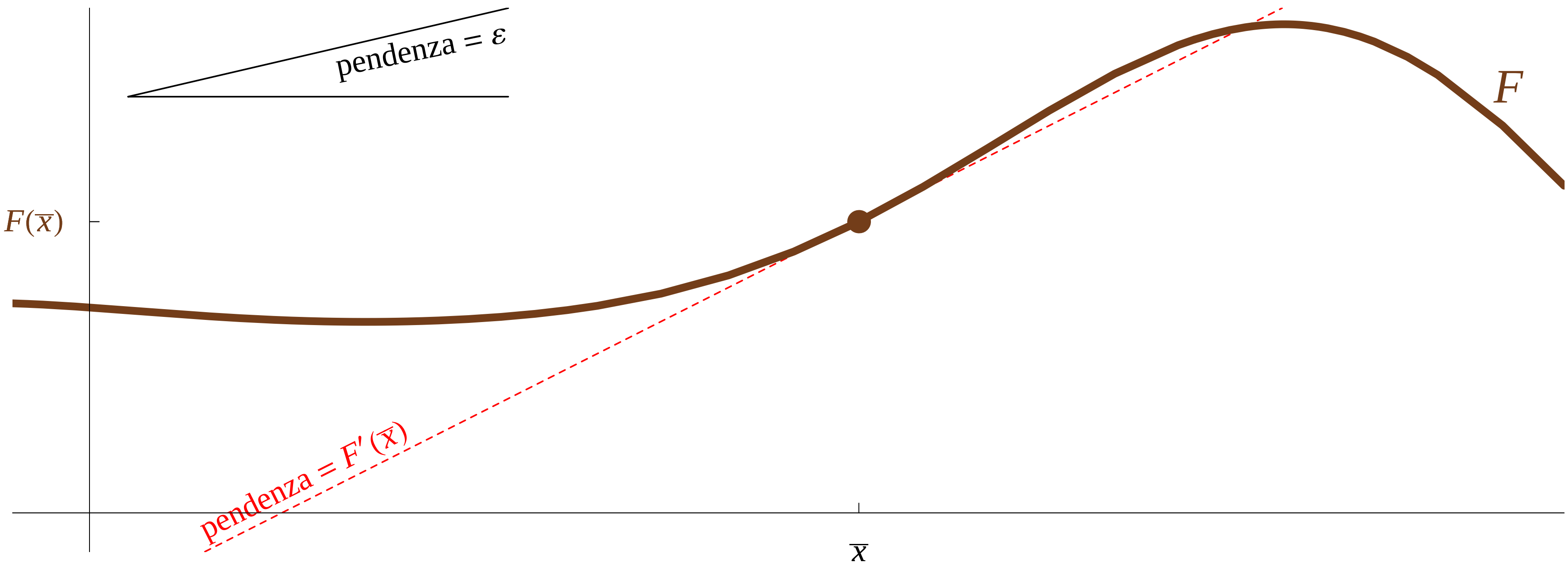
Lemma geometrico



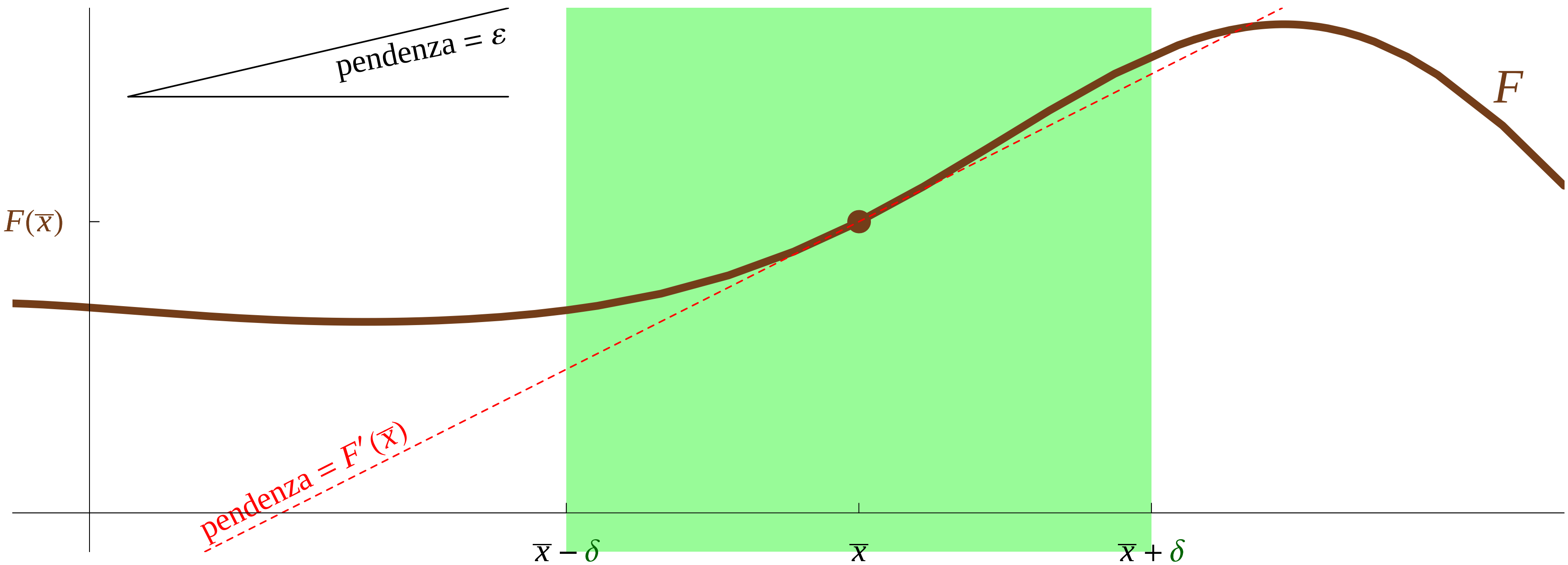
- E se **uno** dei due punti coincide con l'intersezione e l'altro sta nell'imbuto?
- Allora la tesi vale.
  - Cioè la pendenza di AB è compresa fra m_- e m_+.
  - Il fatto è chiaro geometricamente, sia quando A è l'intersezione,
  - sia quando B lo è.
- Fine dimostrazione.



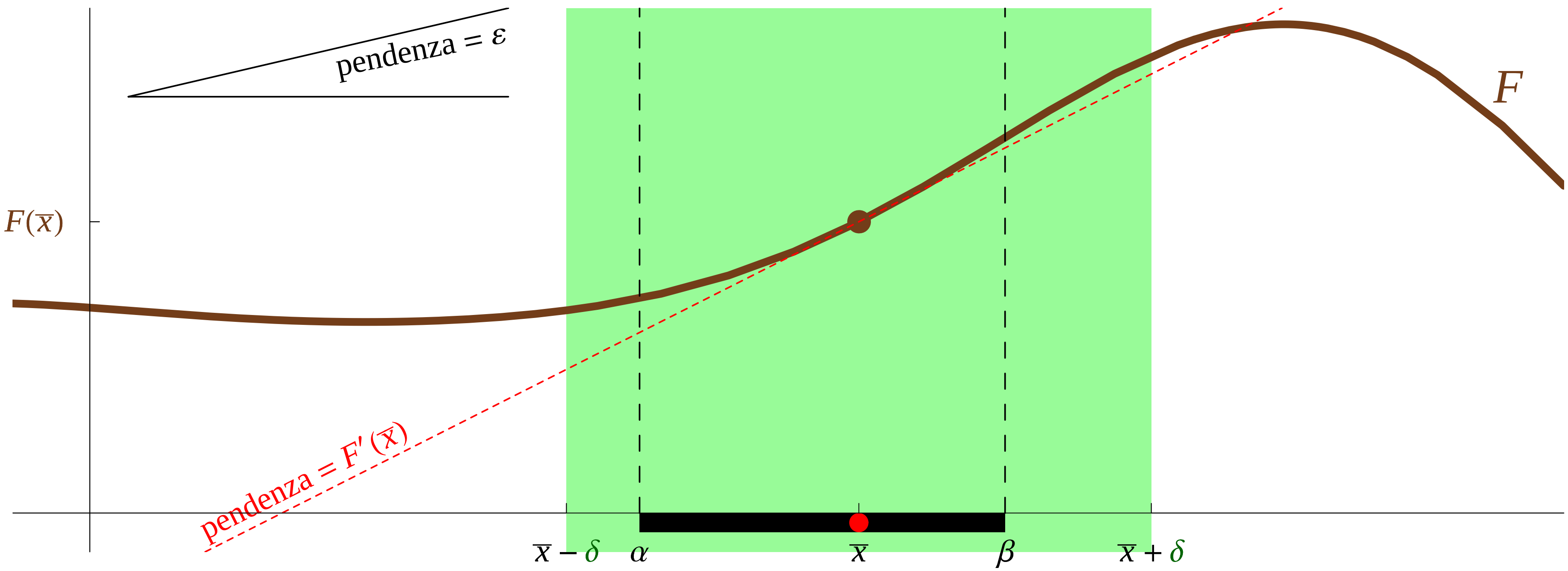
- **Lemma** Sia F una funzione derivabile in $\bar{x}$.



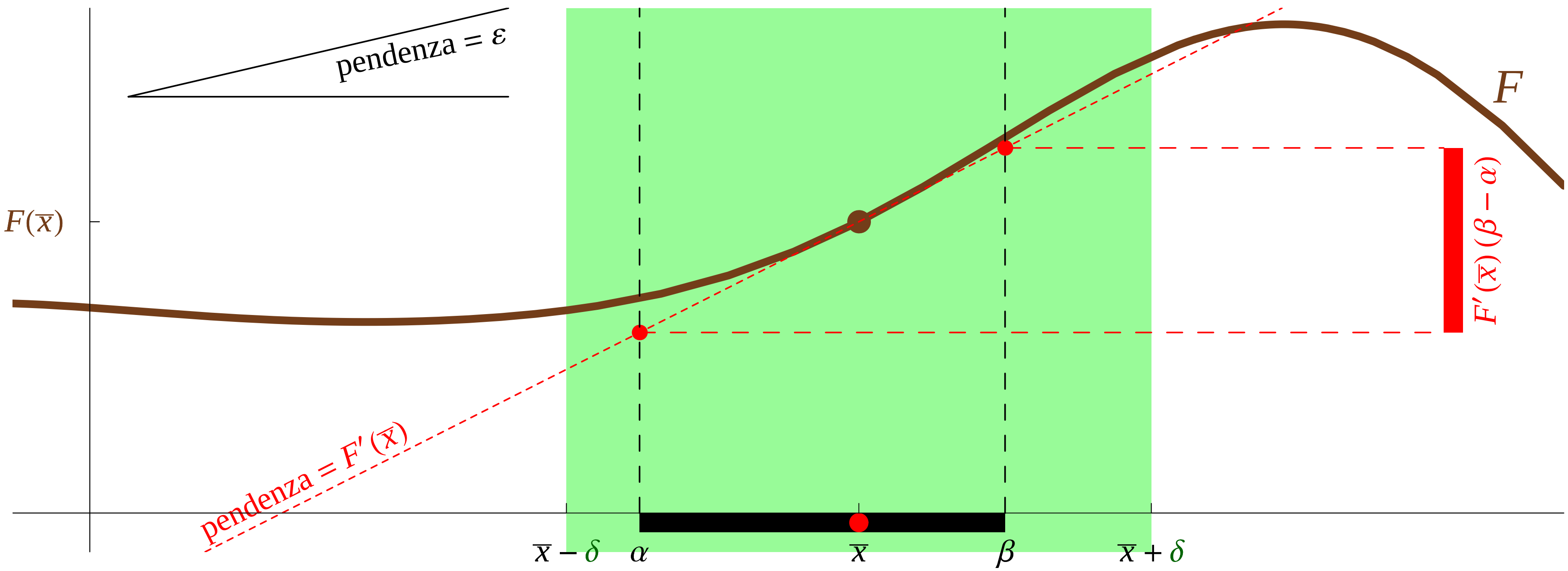
- **Lemma** Sia F una funzione derivabile in $\bar{x}$. **Allora**
  - per ogni $\varepsilon > 0$



- **Lemma** **Sia F una funzione derivabile in $\bar{x}$. Allora**
  - per ogni $\varepsilon > 0$
  - esiste $\delta > 0$



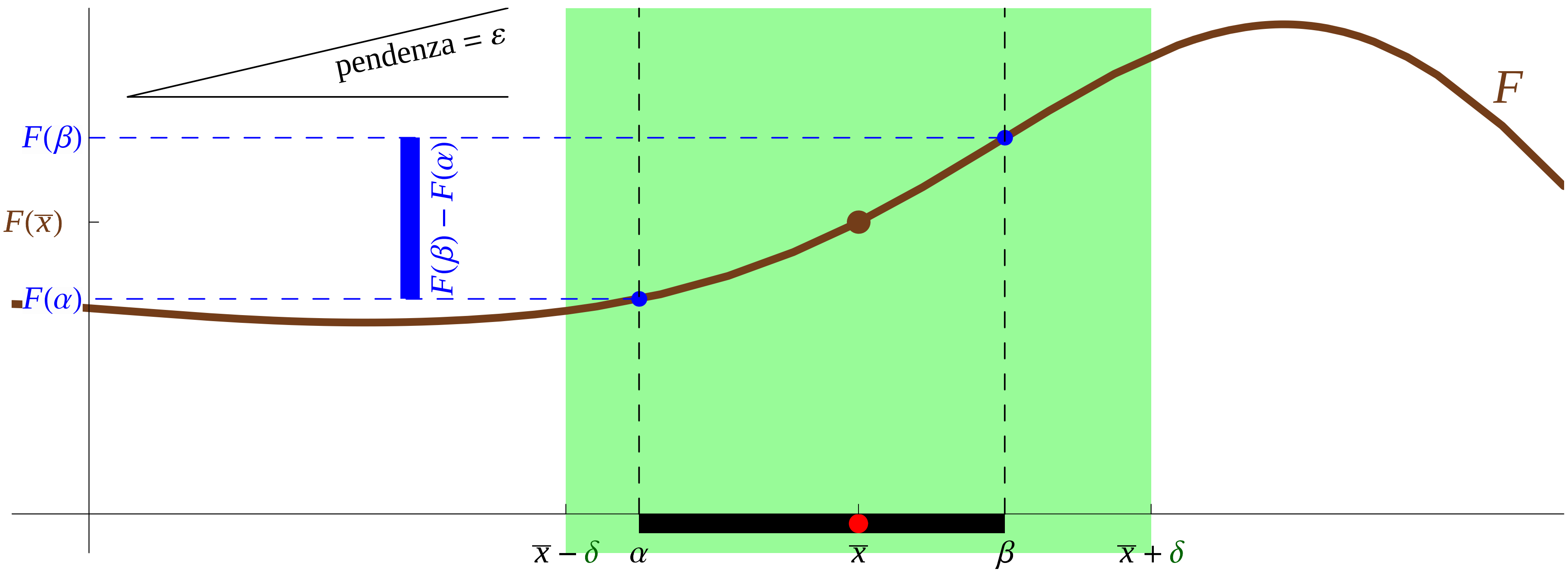
- **Lemma** **Sia F una funzione derivabile in $\bar{x}$. Allora**
  - per ogni $\varepsilon > 0$
  - esiste $\delta > 0$ tale che
  - per ogni α, β tali che $\bar{x} - \delta \leq \alpha \leq \bar{x} \leq \beta \leq \bar{x} + \delta$



- **Lemma** **Sia F una funzione derivabile in $\bar{x}$. Allora**
  - per ogni $\varepsilon > 0$
  - esiste $\delta > 0$ tale che
  - per ogni α, β tali che $\bar{x} - \delta \le \alpha \le \bar{x} \le \beta \le \bar{x} + \delta$ si ha che

$$F'(\bar{x})(\beta - \alpha)$$

□ $F'(\bar{x})(\beta - \alpha)$ = incremento lungo la tangente.

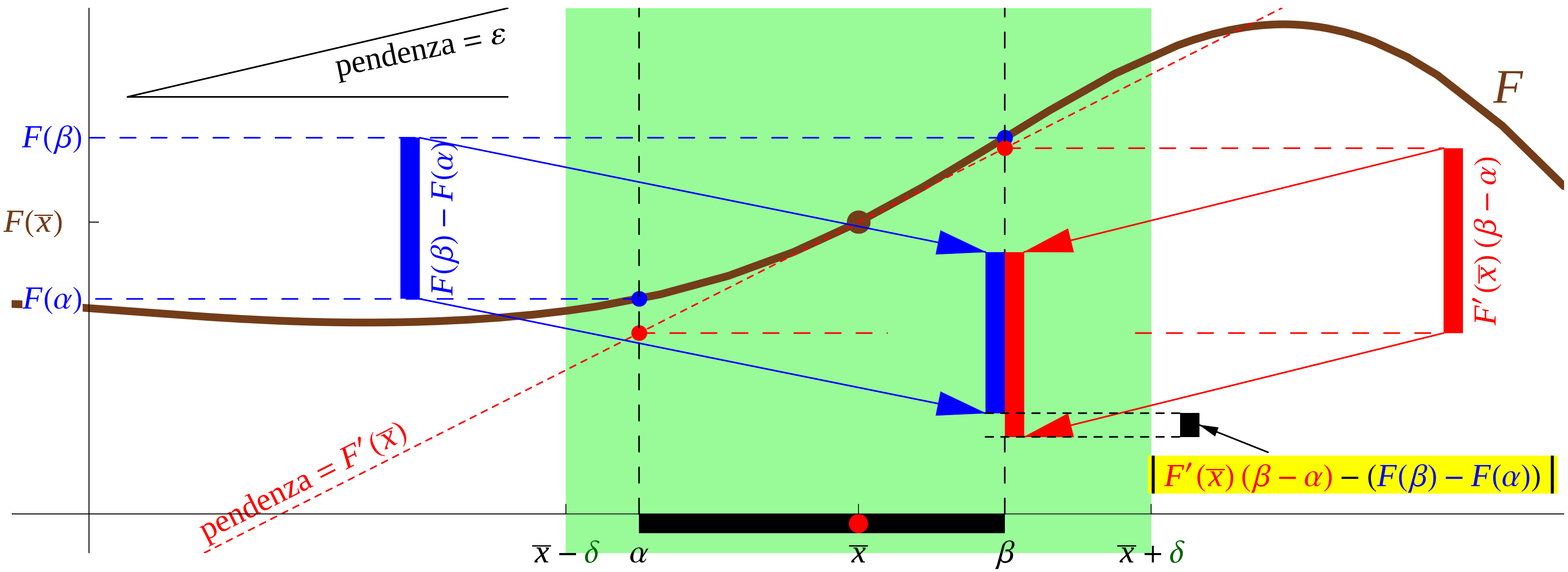


- **Lemma Sia F una funzione derivabile in $\bar{x}$. Allora**
  - per ogni $\varepsilon > 0$
  - esiste $\delta > 0$ tale che
  - per ogni α, β tali che $\bar{x} - \delta \leq \alpha \leq \bar{x} \leq \beta \leq \bar{x} + \delta$ si ha che

$$F(\beta) - F(\alpha)$$

□ $F(\beta) - F(\alpha)$ = incremento lungo la funzione.

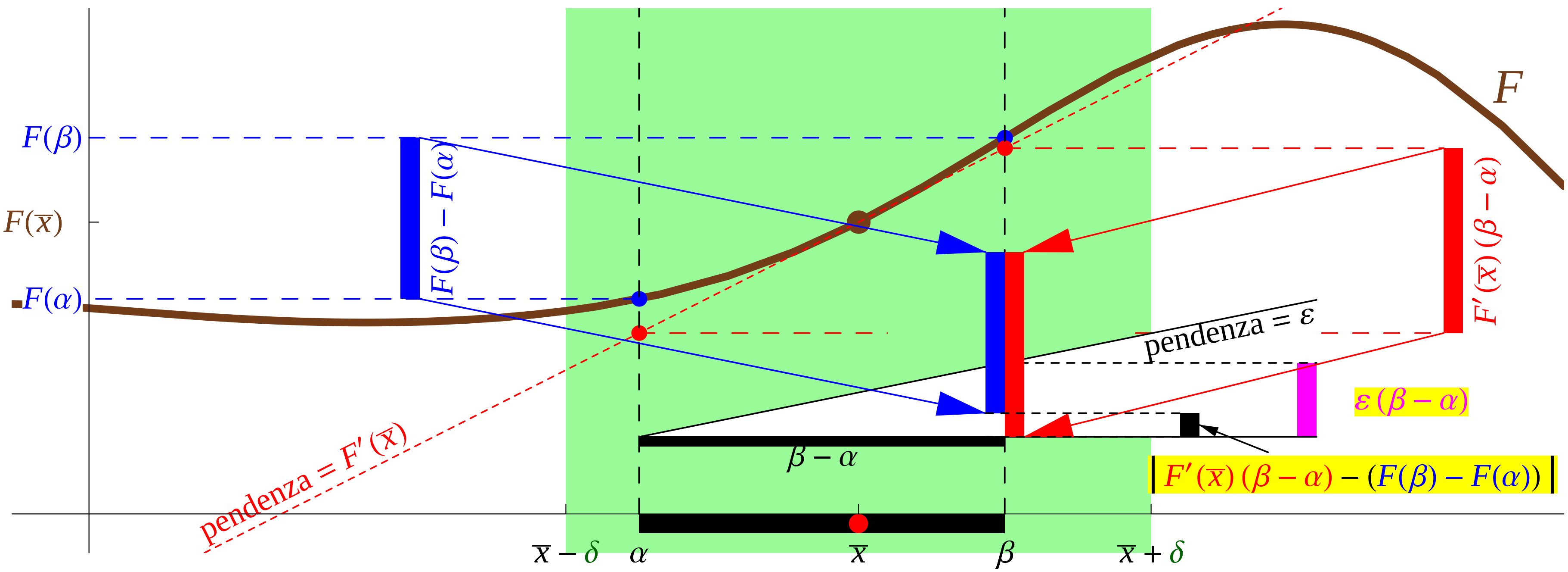
Lemma sulla derivata



- **Lemma** **Sia F una funzione derivabile in $\bar{x}$. Allora**
  - per ogni $\varepsilon > 0$
  - esiste $\delta > 0$ tale che
  - per ogni α, β tali che $\bar{x} - \delta \leq \alpha \leq \bar{x} \leq \beta \leq \bar{x} + \delta$ si ha che

$$\left| F'(\bar{x})(\beta - \alpha) - \big(F(\beta) - F(\alpha)\big) \right|$$

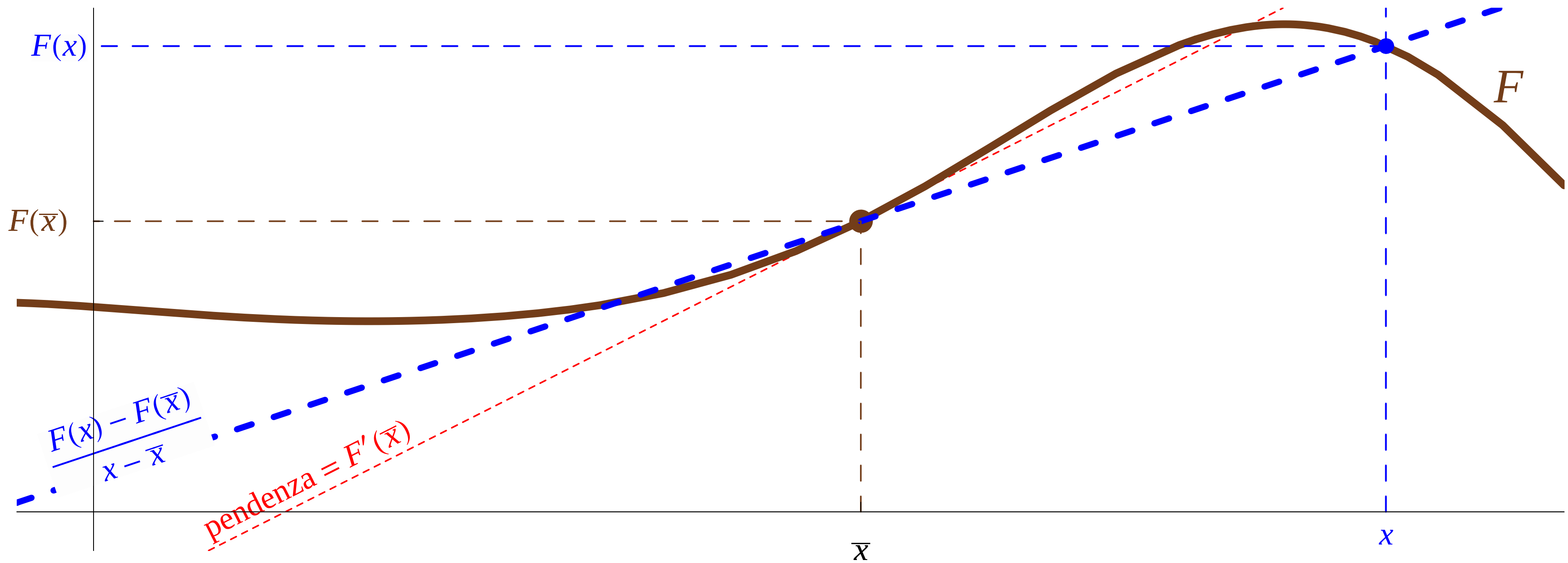
□ differenza degli incrementi lungo la tangente e lungo la funzione.



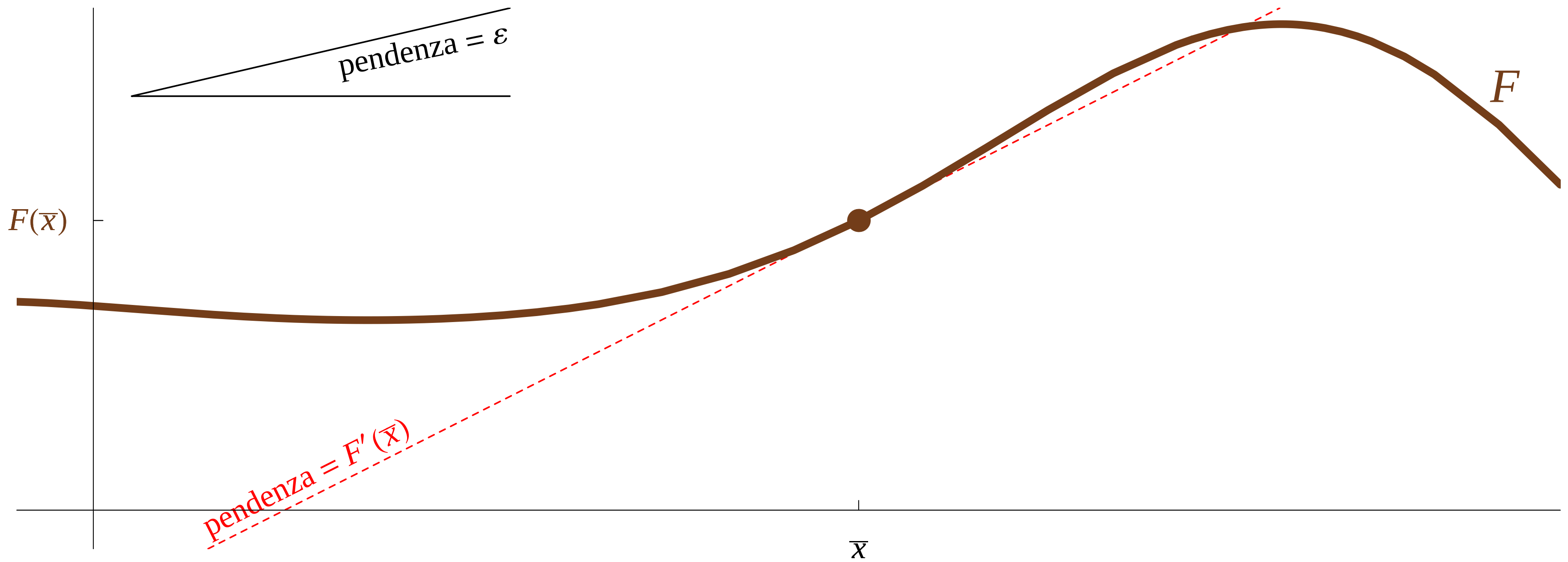
- **Lemma** Sia F una funzione derivabile in $\bar{x}$. **Allora**
  - per ogni $\varepsilon > 0$
  - esiste $\delta > 0$ tale che
  - per ogni α, β tali che $\bar{x} - \delta \leq \alpha \leq \bar{x} \leq \beta \leq \bar{x} + \delta$ si ha che

$$\left| F'(\bar{x})(\beta - \alpha) - \Big(F(\beta) - F(\alpha)\Big) \right| \leq \varepsilon(\beta - \alpha)\,.$$

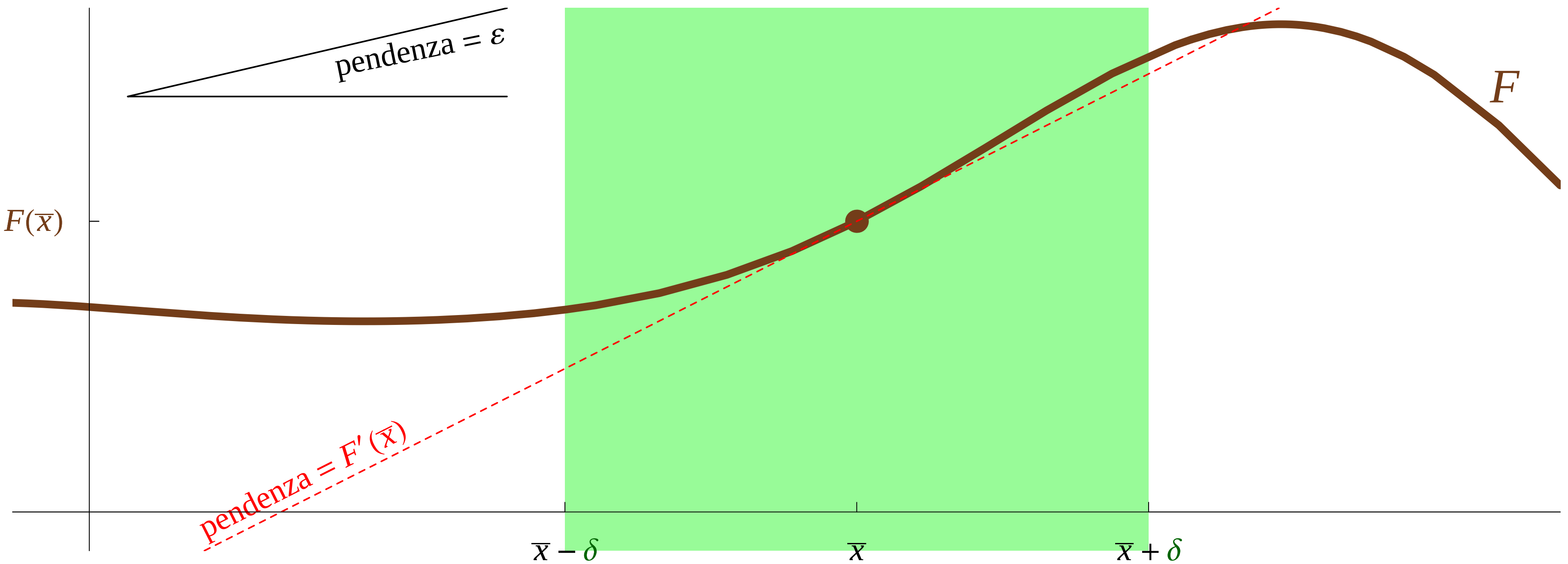
Dim. del lemma



- **Per definizione di derivata,** $\lim_{x\to\bar{x}} \frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} = F'(\bar{x})$.

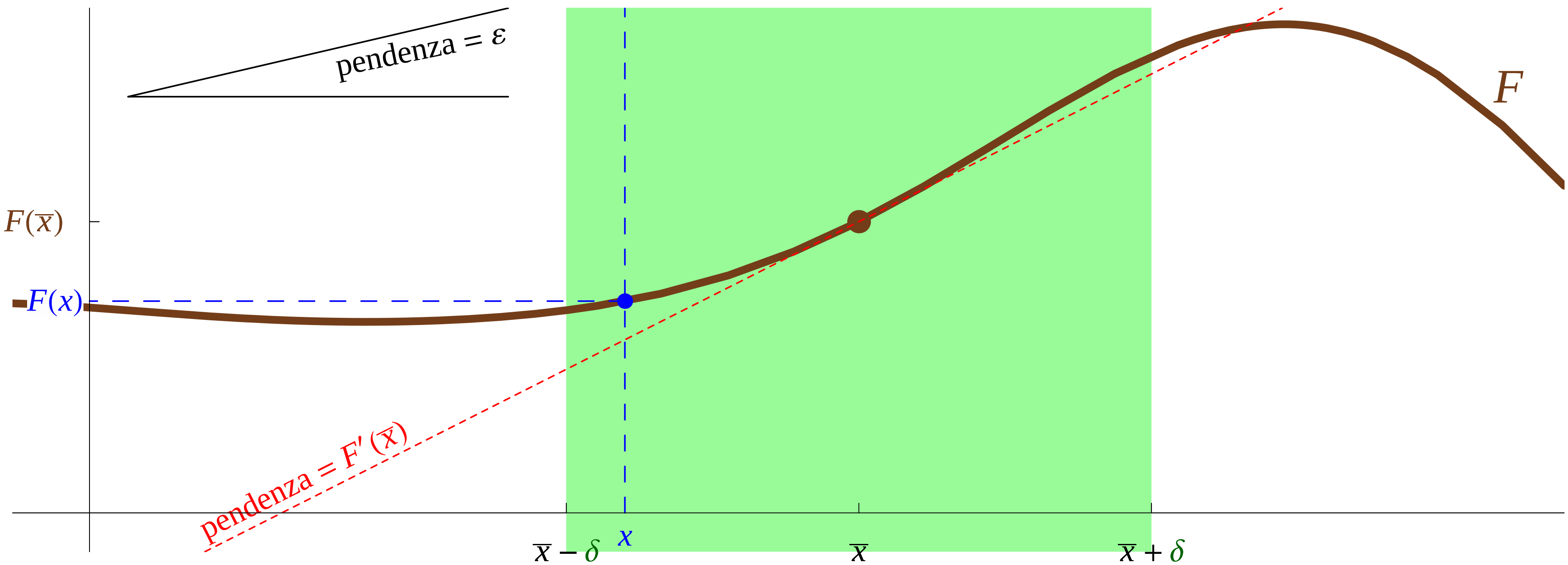


- **Per definizione di derivata,** $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = F'(\bar{x})$.
- **Fissiamo** $\varepsilon > 0$.



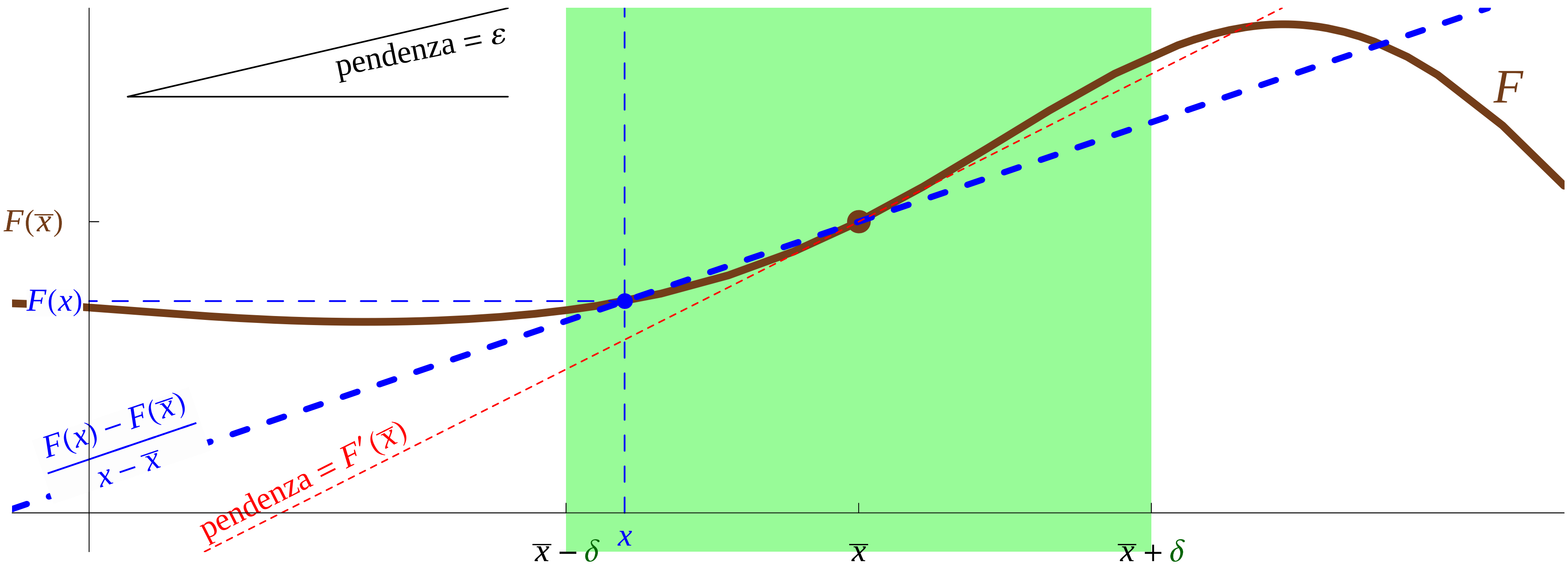
- **Per definizione di derivata,** $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \dfrac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} = F'(\bar{x})$.
- **Fissiamo** $\varepsilon > 0$.
- **Per definizione di limite, esiste** $\delta > 0$

Dim. del lemma

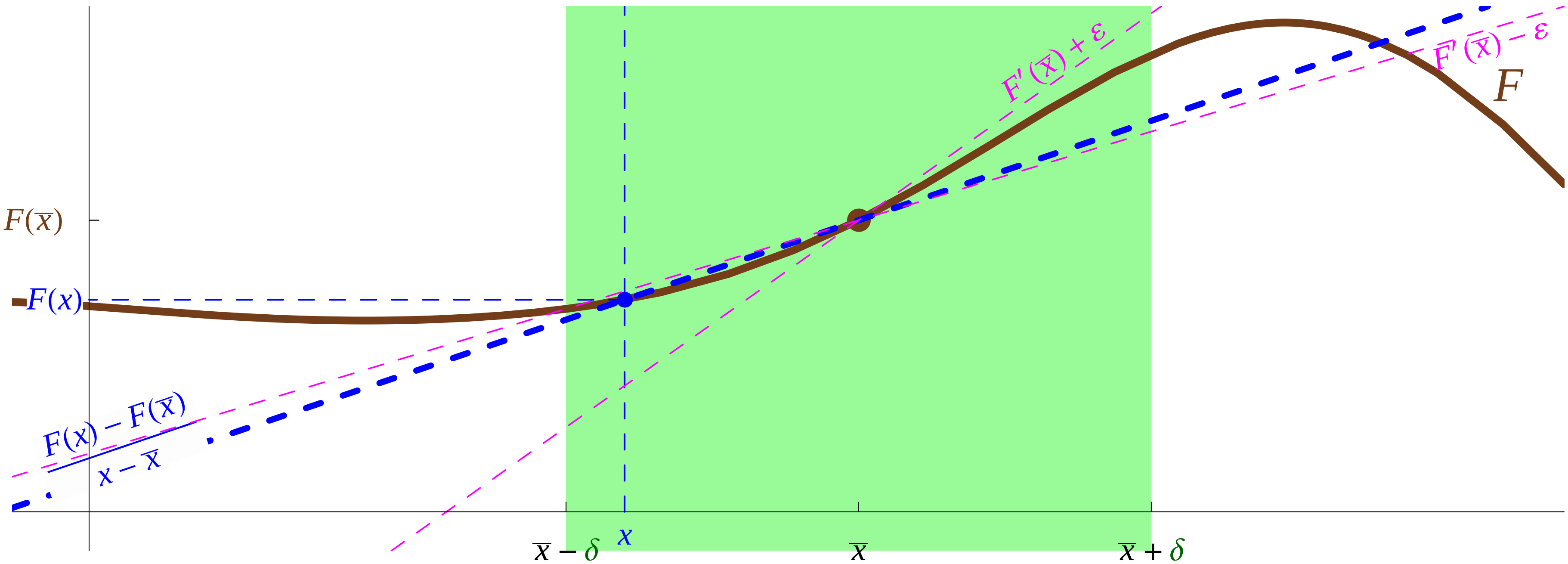


- **Per definizione di derivata,** $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = F'(\bar{x})$.
- **Fissiamo** $\varepsilon > 0$.
- **Per definizione di limite, esiste** $\delta > 0$ **tale che**
  - se $0 < |x - \bar{x}| \leq \delta$

Dim. del lemma

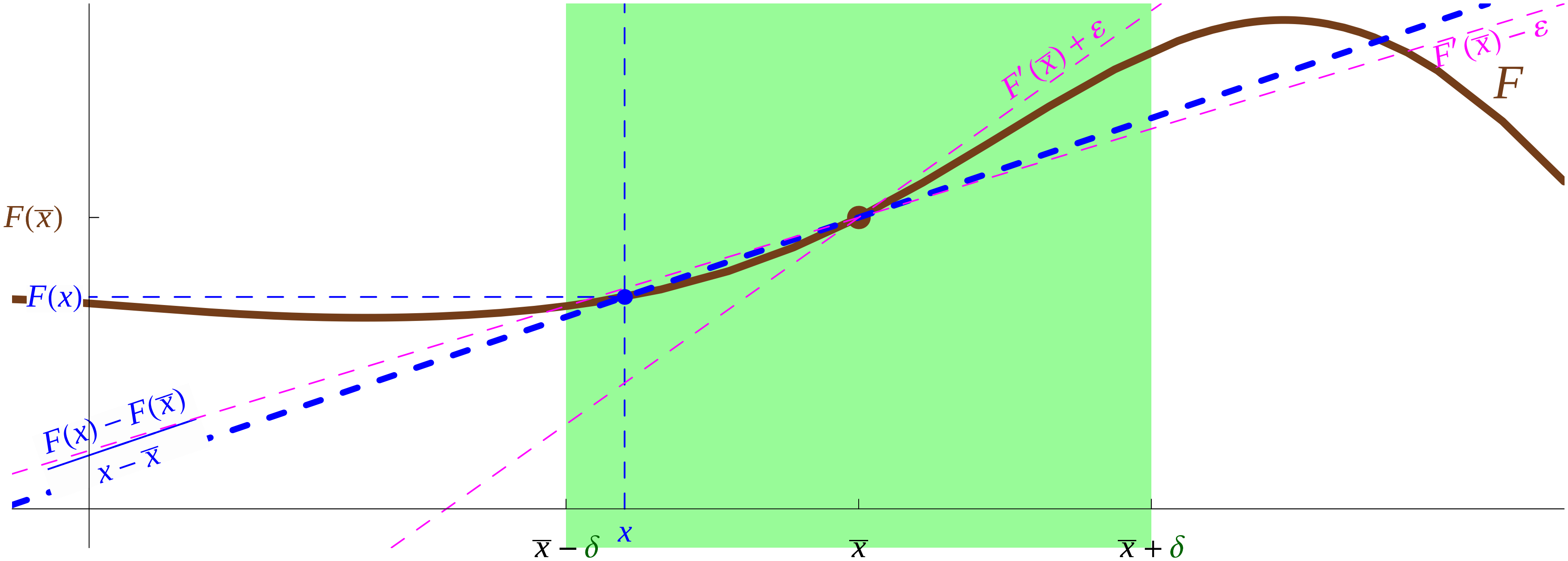


- Per definizione di derivata, $\lim_{x\to\bar{x}} \frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} = F'(\bar{x})$.
- Fissiamo $\varepsilon > 0$.
- Per definizione di limite, esiste $\delta > 0$ tale che
  - se $0 < |x-\bar{x}| \le \delta$ allora $\left|\frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} - F'(\bar{x})\right| < \varepsilon$.

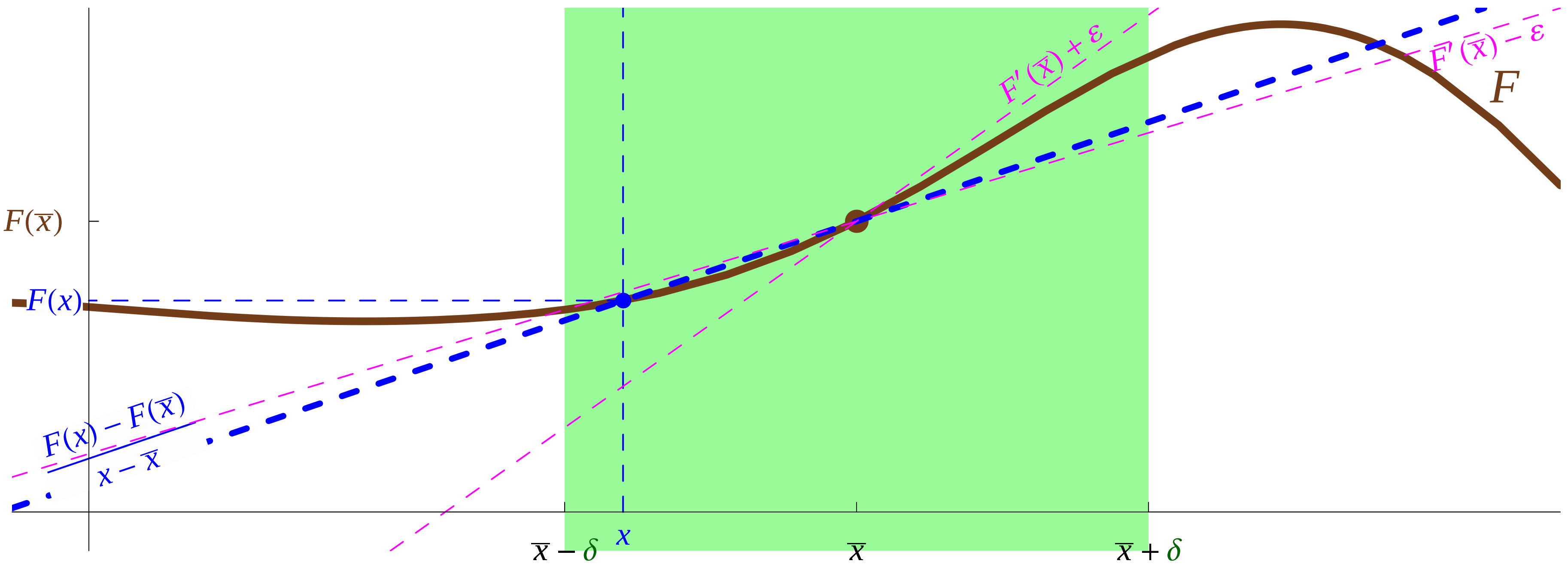


$F(\overline{x})$
$F(x)$
$F'(\overline{x}) + \varepsilon$
$F'(\overline{x}) - \varepsilon$
F
$\frac{F(x) - F(\overline{x})}{x - \overline{x}}$
$\overline{x} - \delta$
x
$\overline{x}$
$\overline{x} + \delta$

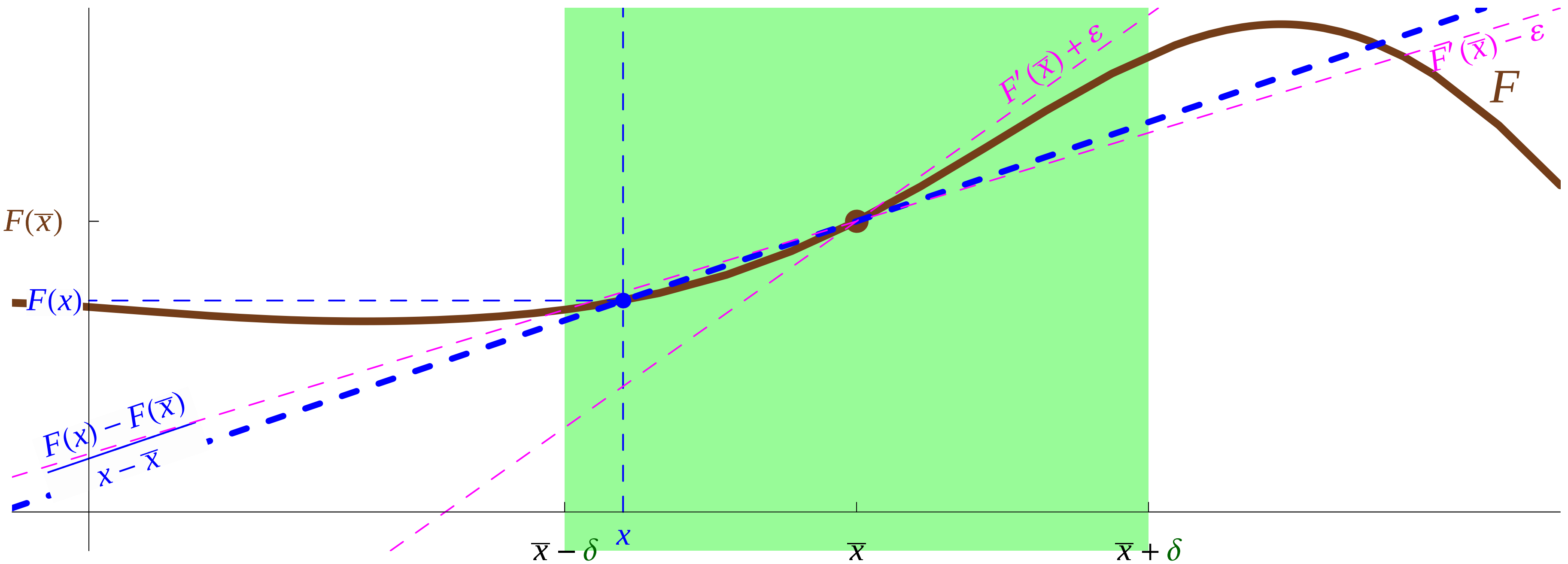
- cioè



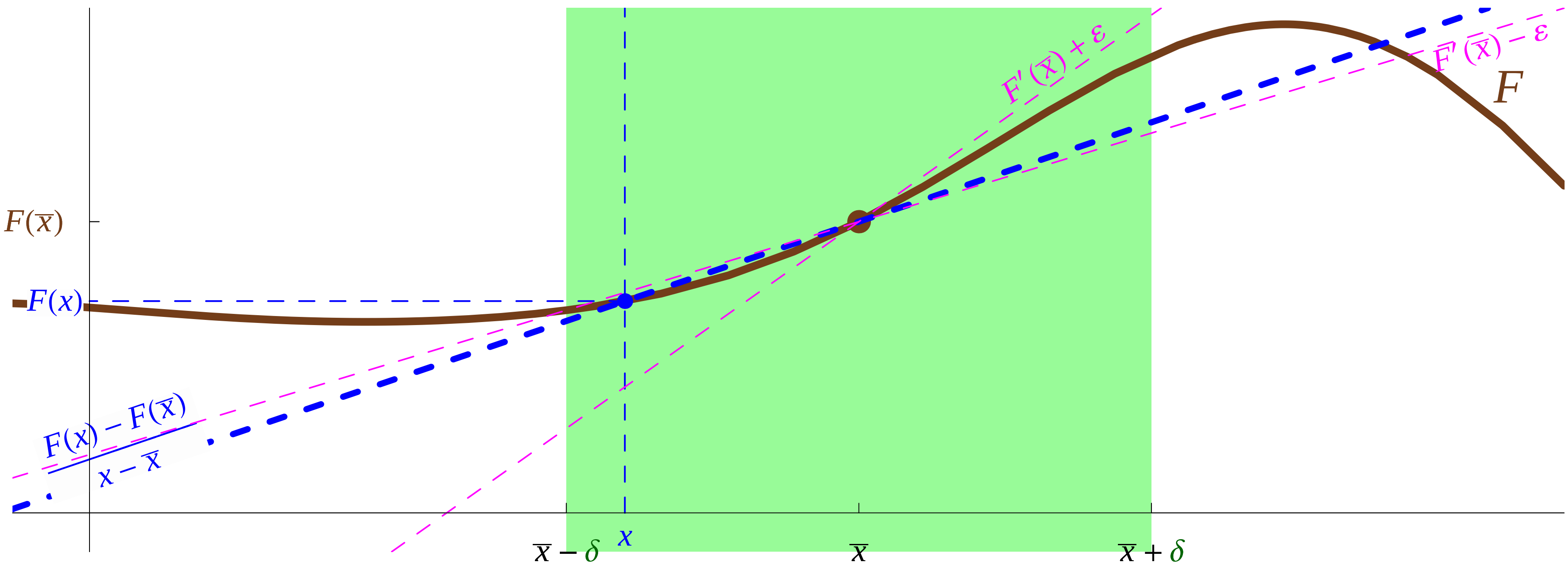
- **cioè**
  - se $0 < |x - \bar{x}| \leq \delta$ allora $F'(\bar{x}) - \varepsilon \leq \dfrac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} \leq F'(\bar{x}) + \varepsilon$.



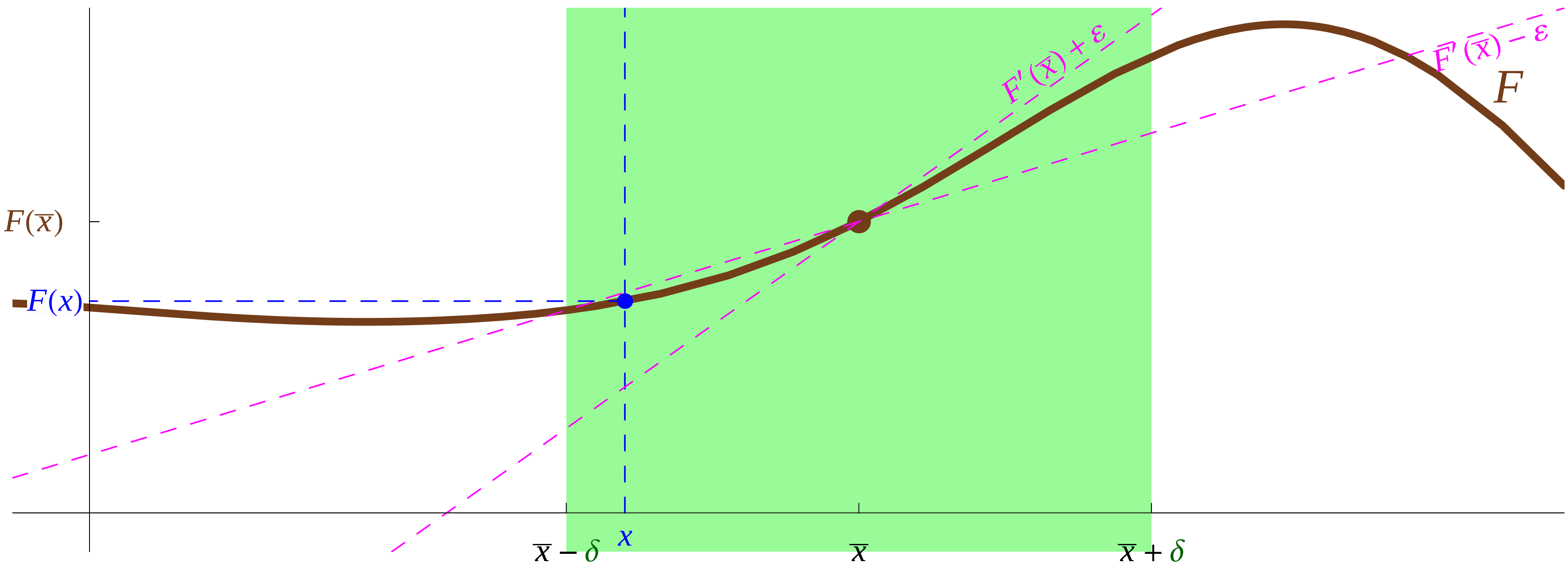
- **cioè**
  - se $0 < |x - \bar{x}| \leq \delta$ allora $F'(\bar{x}) - \varepsilon \leq \dfrac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} \leq F'(\bar{x}) + \varepsilon$.
- **cioè, ancora,**



- **cioè**
  - se $0 < |x - \bar{x}| \leq \delta$ allora $F'(\bar{x}) - \varepsilon \leq \dfrac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} \leq F'(\bar{x}) + \varepsilon$.
- **cioè, ancora,**
  - se $0 < |x - \bar{x}| \leq \delta$

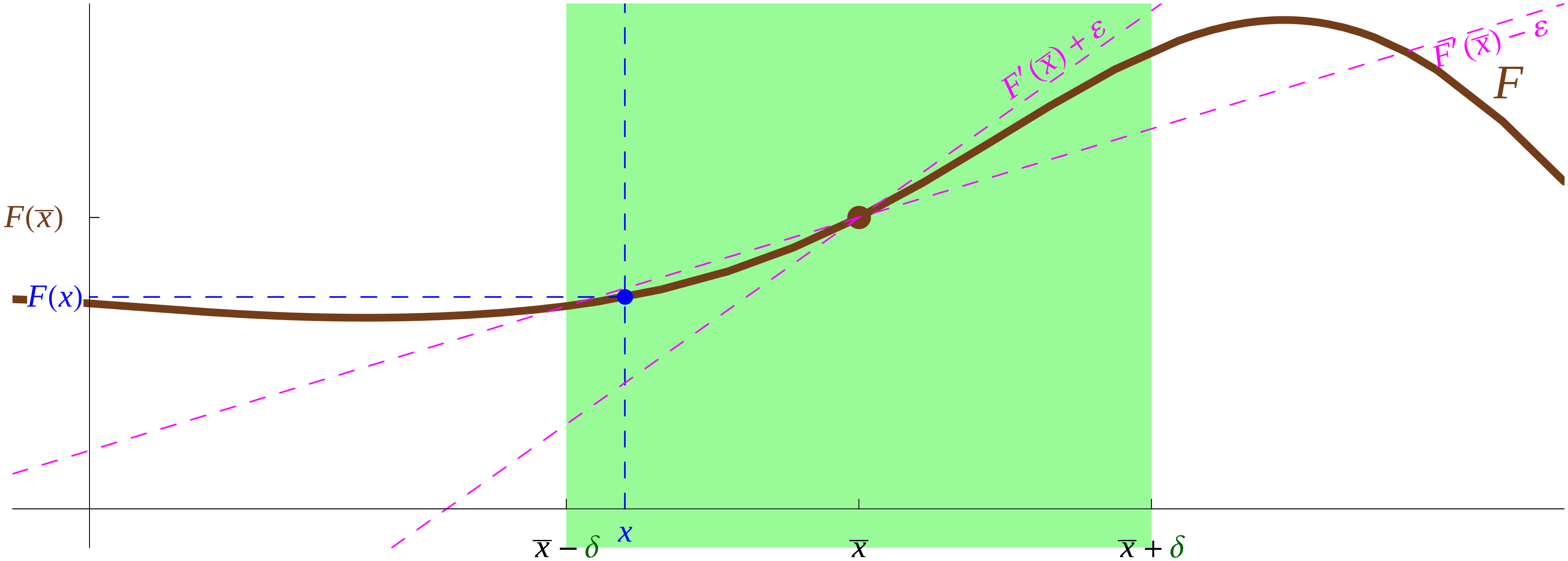


- **cioè**
  - se $0 < |x - \bar{x}| \leq \delta$ allora $F'(\bar{x}) - \varepsilon \leq \dfrac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} \leq F'(\bar{x}) + \varepsilon$.
- **cioè, ancora,**
  - se $0 < |x - \bar{x}| \leq \delta$
  - allora la retta secante che passa per $(\bar{x}, F(\bar{x}))$ e $(x, F(x))$ ha pendenza compresa fra $F'(\bar{x}) \pm \varepsilon$.



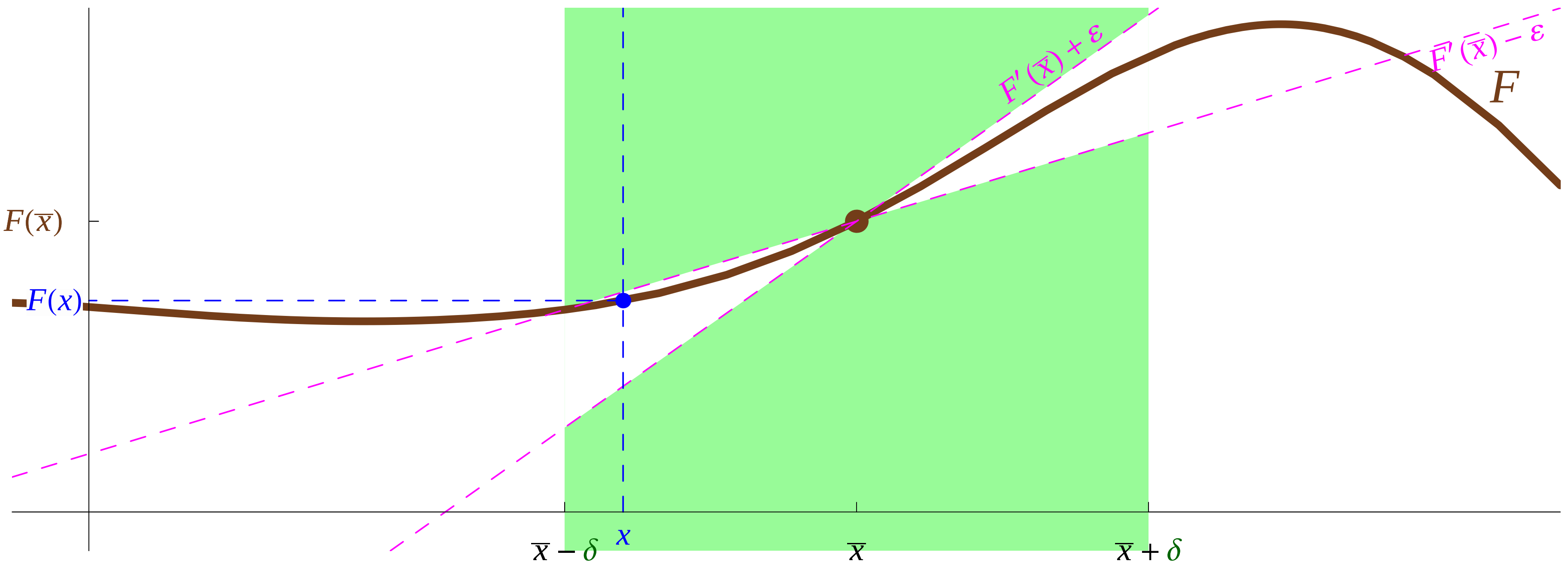
- cioè, in altre parole ancora,

Dim. del lemma

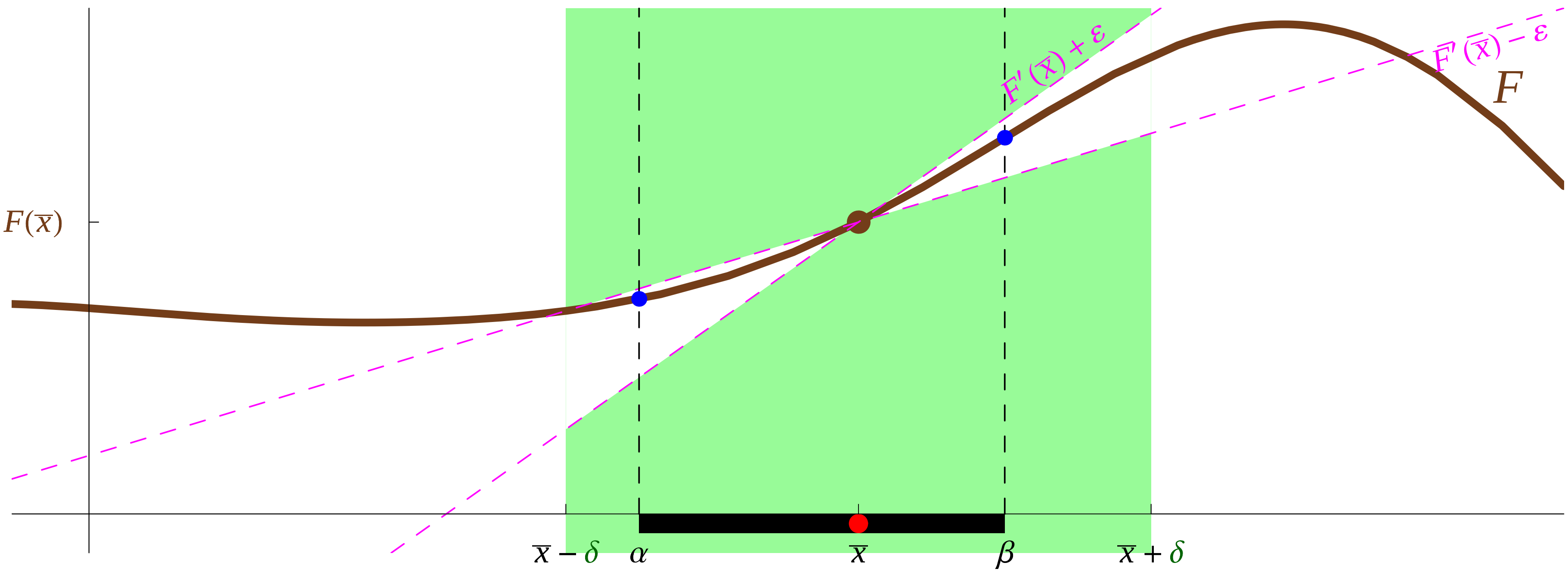


- **cioè, in altre parole ancora,**
  - se $0 < |x - \bar{x}| \leq \delta$

Dim. del lemma

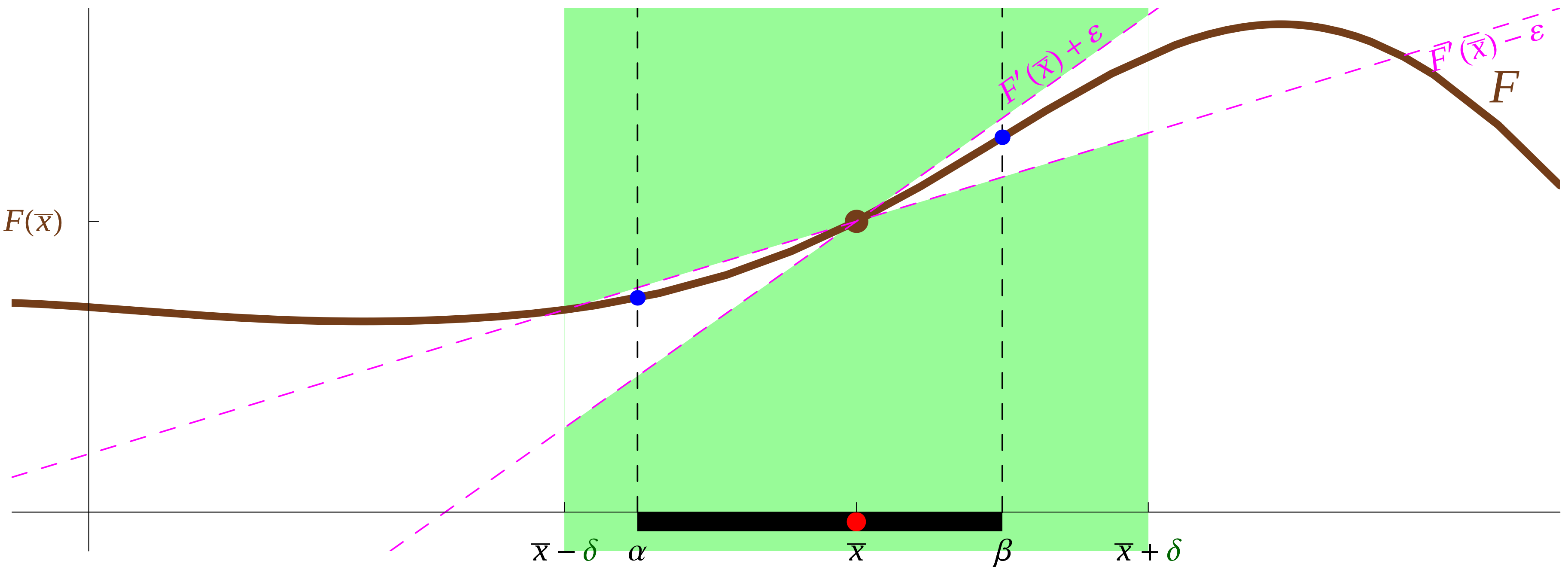


- **cioè, in altre parole ancora,**
  - se $0 < |x - \bar{x}| \leq \delta$
  - allora il punto $(x, F(x))$ è compreso nell'imbuto fra le due rette passanti per $(\bar{x}, F(\bar{x}))$ e con pendenze $F'(\bar{x}) \pm \varepsilon$.

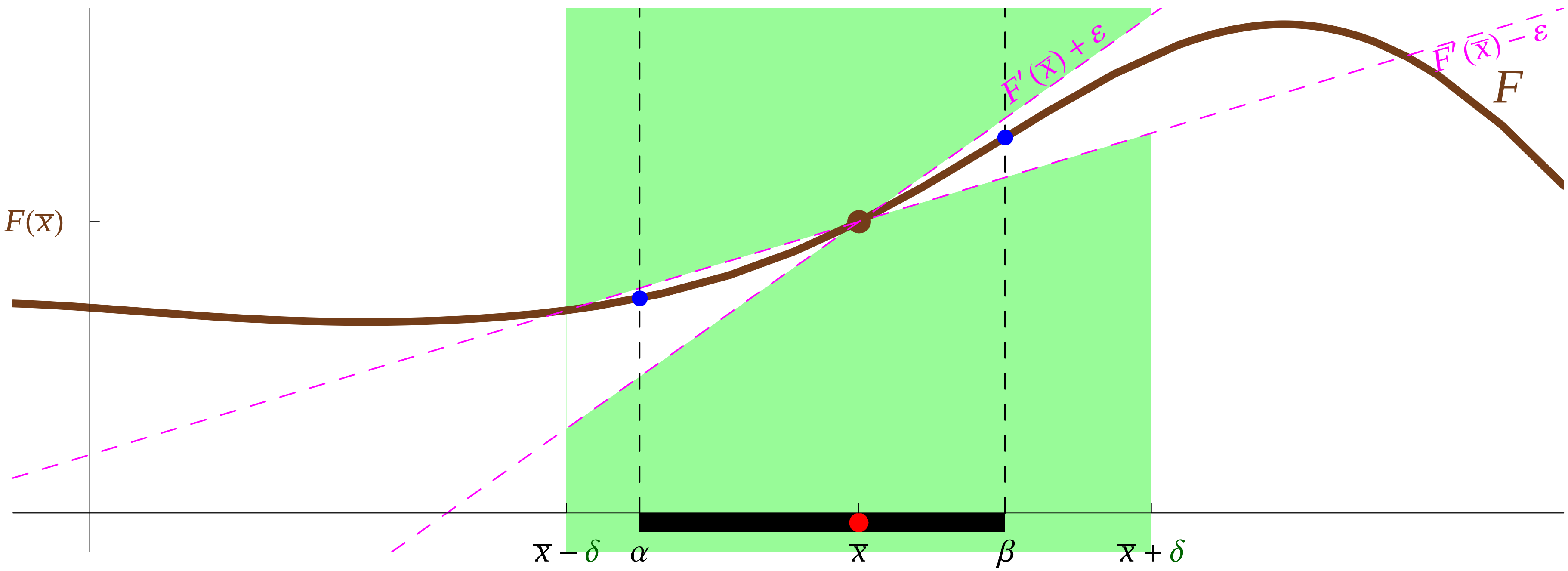


- **Prendiamo** $\alpha \neq \beta$ **tali che** $\bar{x}-\delta \leq \alpha \leq \bar{x} \leq \beta \leq \bar{x}+\delta$

Dim. del lemma

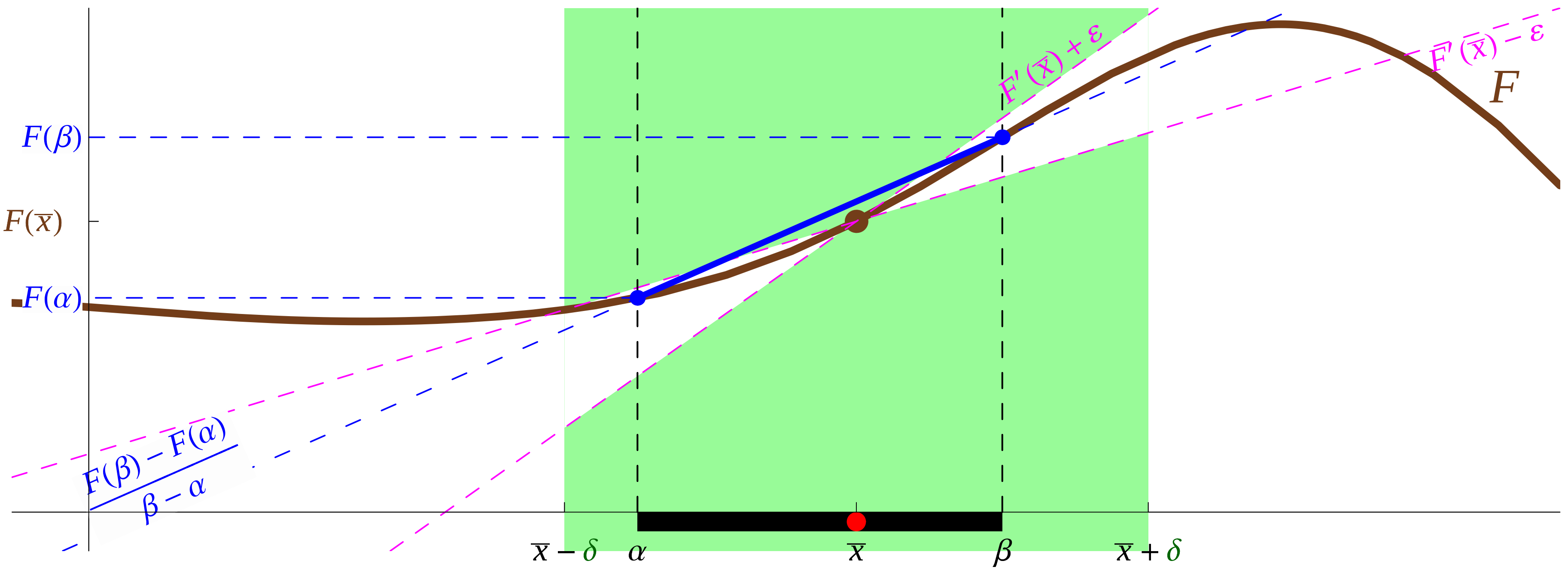


- **Prendiamo $\alpha \neq \beta$ tali che** $\bar{x}-\delta \leq \alpha \leq \bar{x} \leq \beta \leq \bar{x}+\delta$
  - I due punti $(\alpha, F(\alpha))$ e $(\beta, F(\beta))$ stanno nei due imbuti opposti.



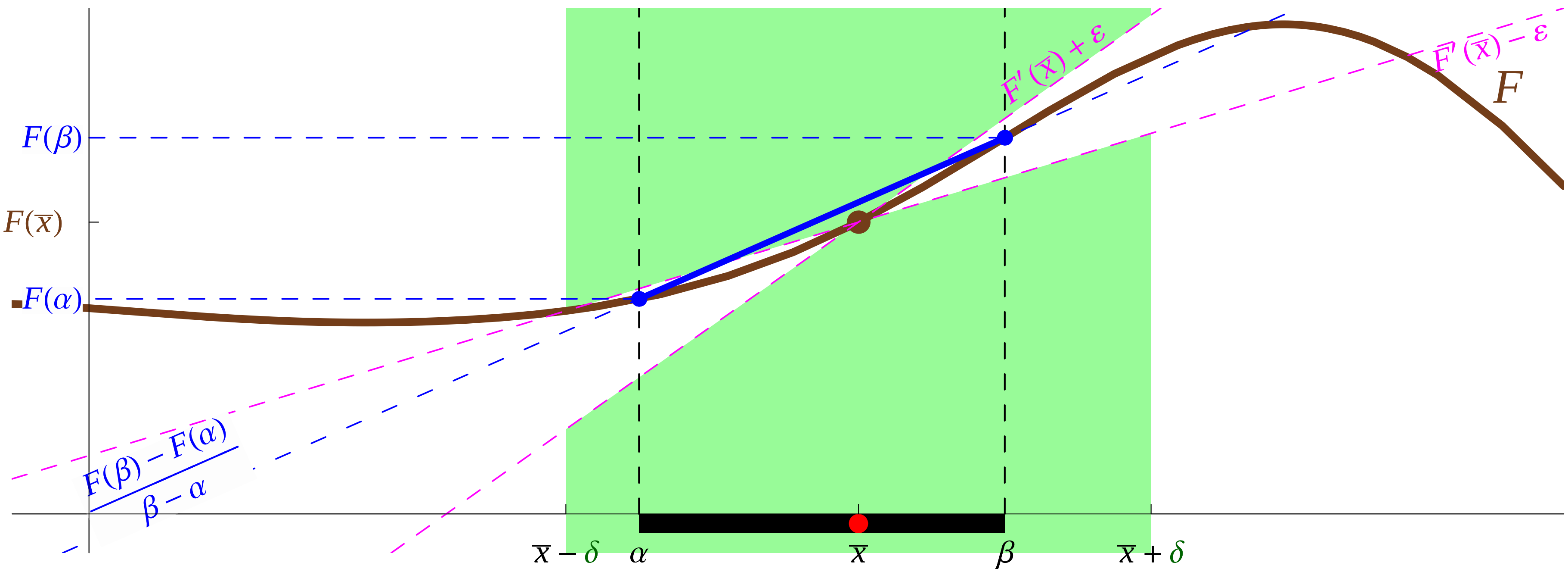
- **Prendiamo $\alpha \neq \beta$ tali che** $\bar{x}-\delta \le \alpha \le \bar{x} \le \beta \le \bar{x}+\delta$
  - I due punti $(\alpha, F(\alpha))$ e $(\beta, F(\beta))$ stanno nei due imbuti opposti.
  - (Eventualmente uno dei due coincide con l'intersezione).

Dim. del lemma



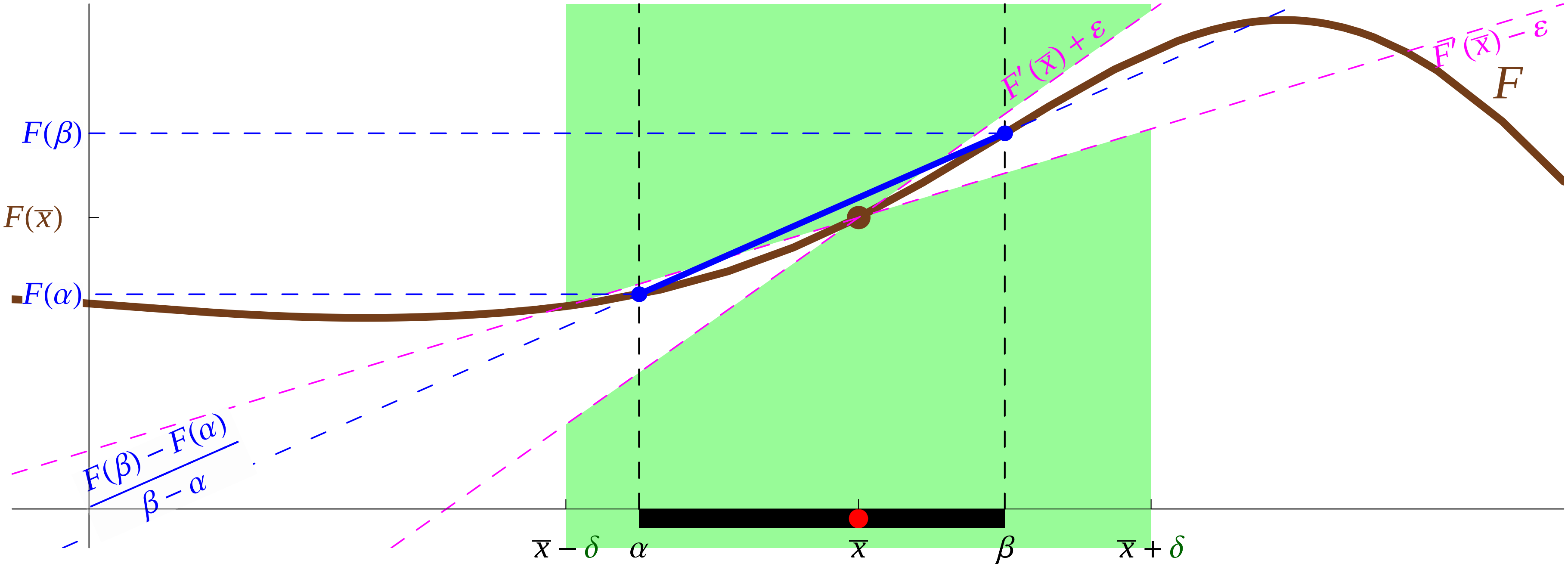
- **Prendiamo $\alpha \neq \beta$ tali che $\bar{x} - \delta \leq \alpha \leq \bar{x} \leq \beta \leq \bar{x} + \delta$**
  - I due punti $(\alpha, F(\alpha))$ e $(\beta, F(\beta))$ stanno nei due imbuti opposti.
  - (Eventualmente uno dei due coincide con l'intersezione).
- **Per il lemma geometrico la pendenza della retta per i punti $(\alpha, F(\alpha))$ e $(\beta, F(\beta))$ è compresa fra $F'(\bar{x}) \pm \varepsilon$.**

Dim. del lemma

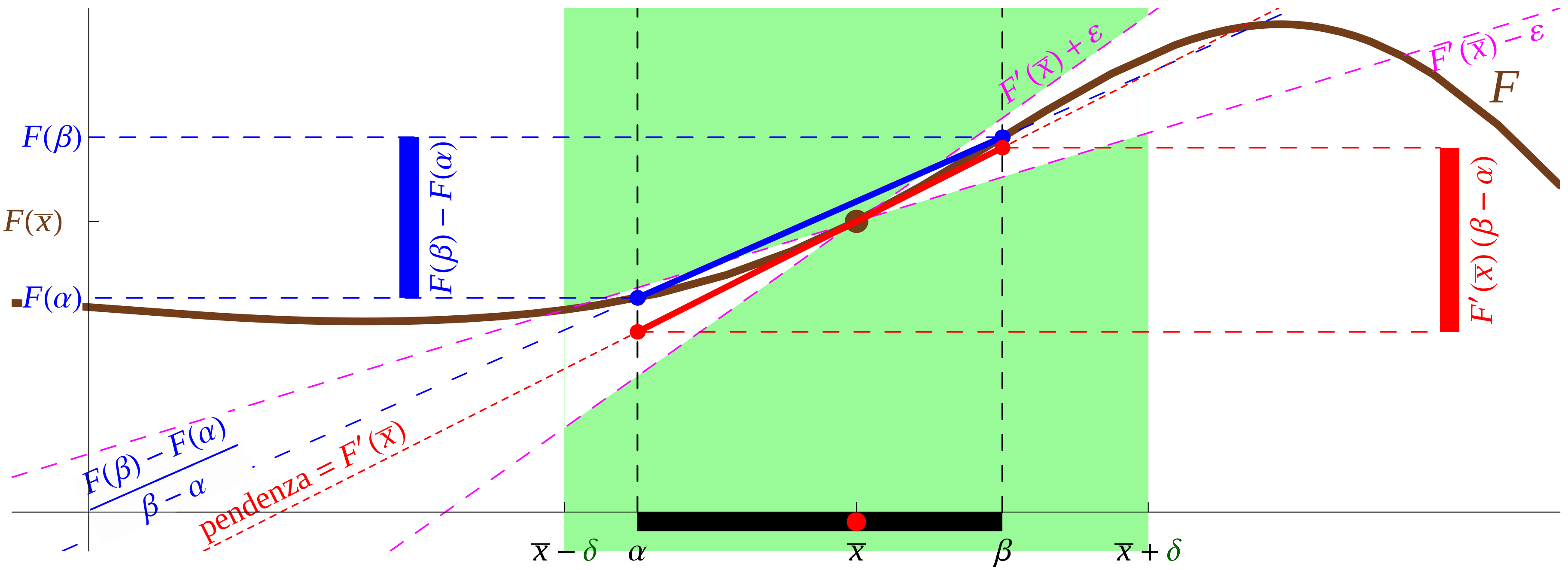


- Cioè $F'(\bar{x}) - \varepsilon \leq \dfrac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq F'(\bar{x}) + \varepsilon$,

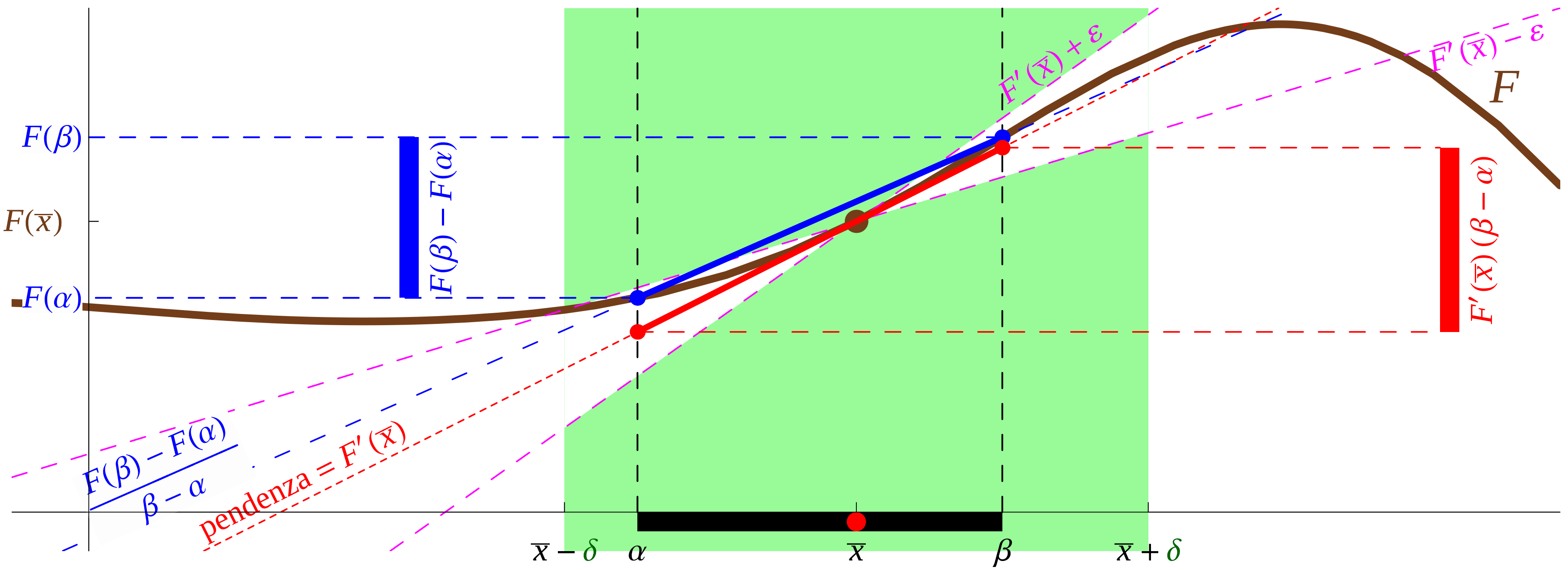
Dim. del lemma



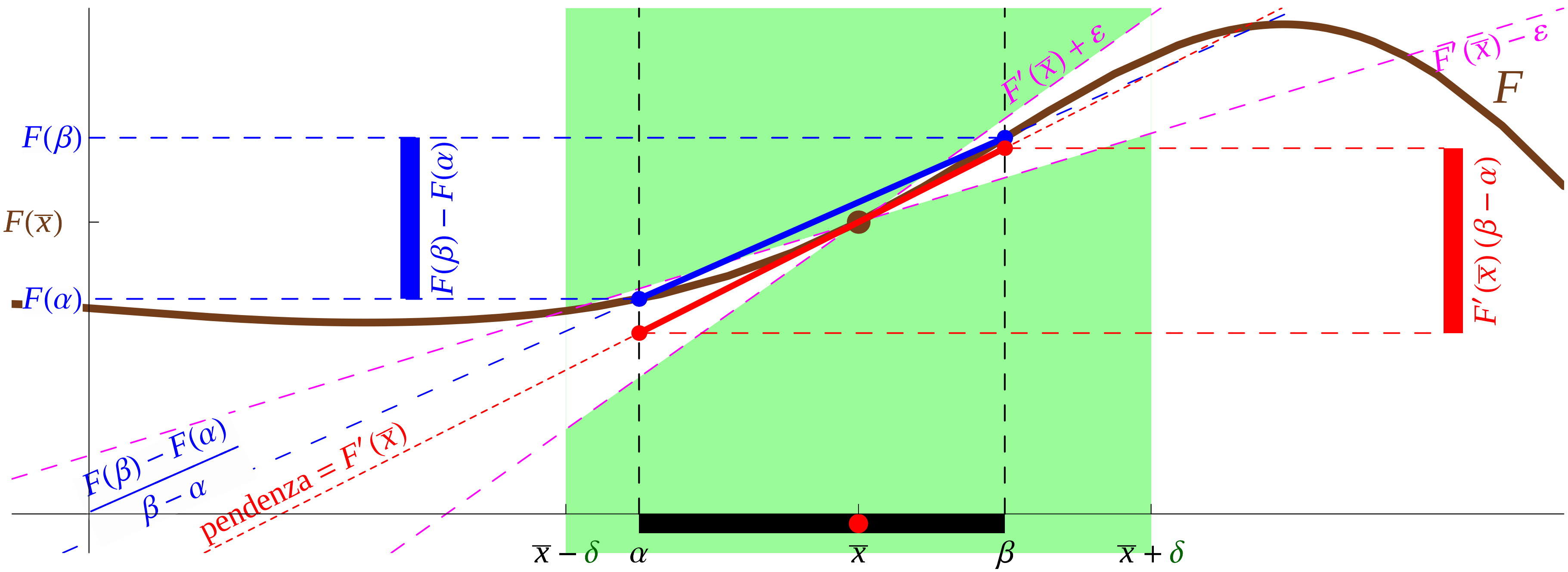
- Cioè $F'(\bar{x}) - \varepsilon \leq \dfrac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq F'(\bar{x}) + \varepsilon$,
- che equivale a $\left| \dfrac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} - F'(\bar{x}) \right| \leq \varepsilon$;



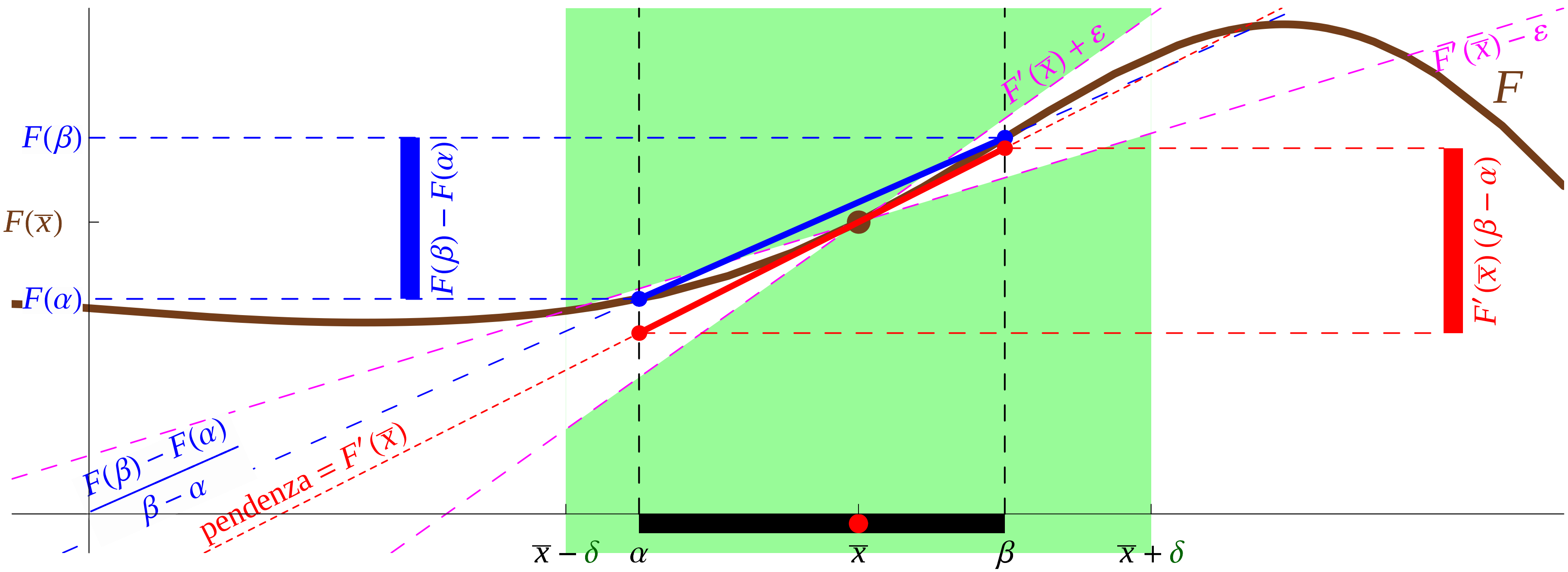
- Cioè $F'(\bar{x})-\varepsilon \leq \dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq F'(\bar{x})+\varepsilon$,
- che equivale a $\left|\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha} - F'(\bar{x})\right| \leq \varepsilon$;
- denominatore comune: $\left|\dfrac{\big(F(\beta)-F(\alpha)\big) - F'(\bar{x})(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\right| \leq \varepsilon$;



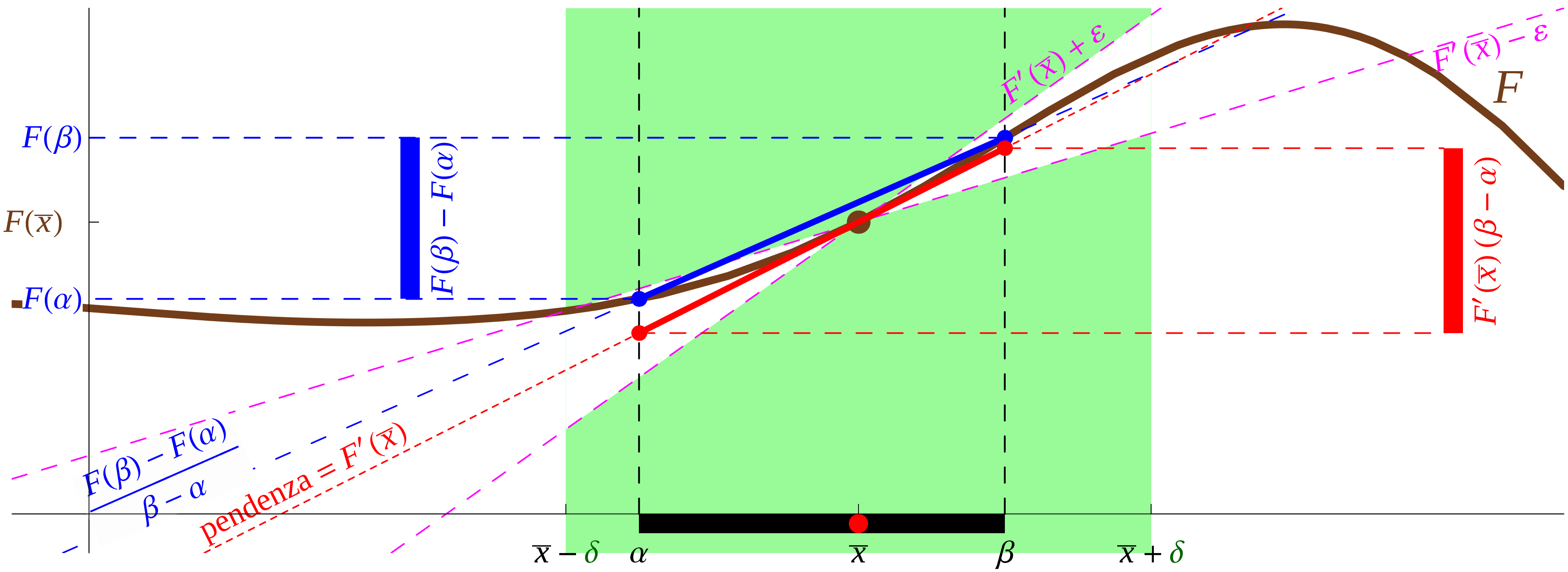
- Cioè $F'(\bar{x}) - \varepsilon \leq \dfrac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq F'(\bar{x}) + \varepsilon$,
- che equivale a $\left|\dfrac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} - F'(\bar{x})\right| \leq \varepsilon$;
- denominatore comune: $\left|\dfrac{\big(F(\beta) - F(\alpha)\big) - F'(\bar{x})(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha}\right| \leq \varepsilon$;
- Moltiplichiamo per $|\beta - \alpha|$, che è uguale a $\beta - \alpha$:



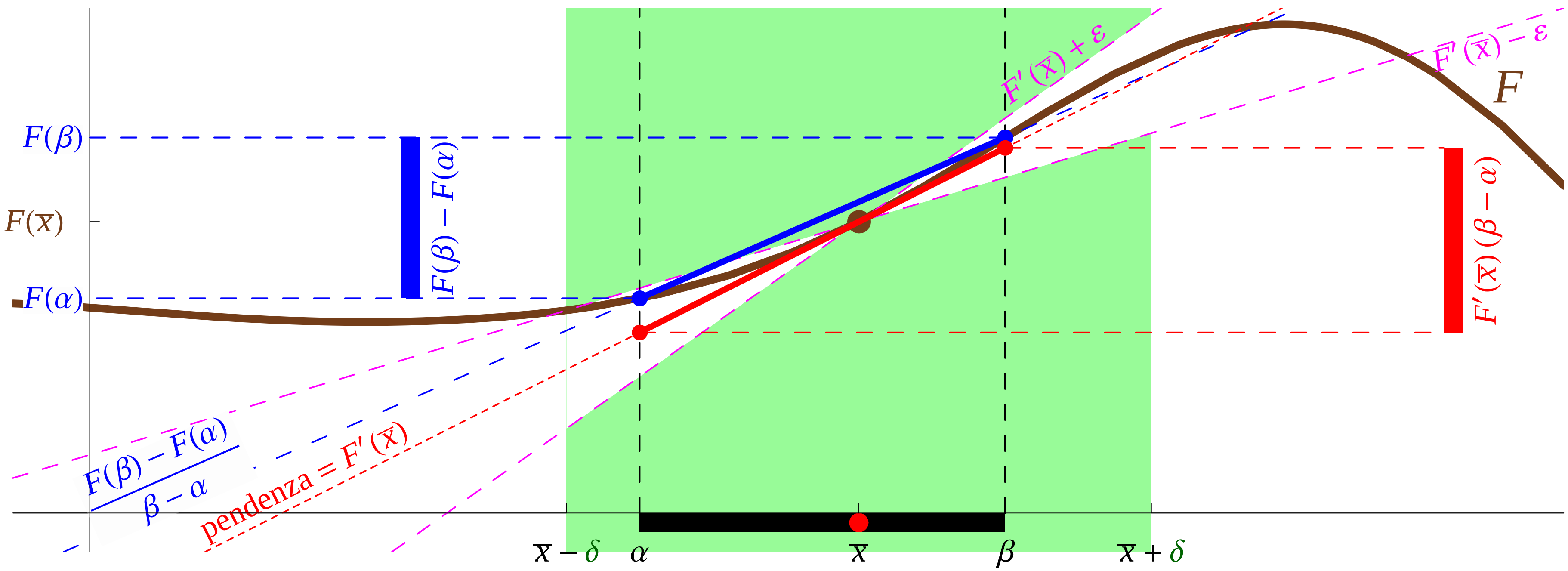
- viene $\left|\left(F(\beta) - F(\alpha)\right) - F'(\bar{x})(\beta - \alpha)\right| \leq \varepsilon(\beta - \alpha)$



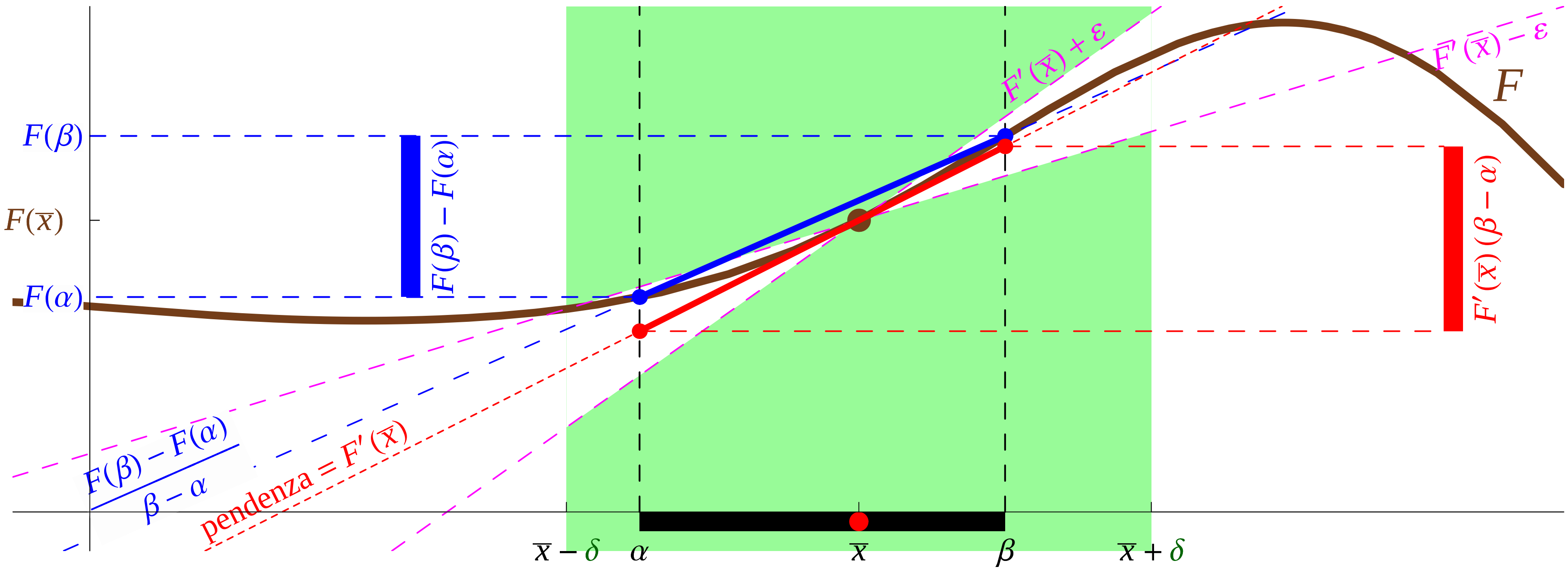
- viene $\left|\big(F(\beta)-F(\alpha)\big)-F'(\bar{x})(\beta-\alpha)\right| \leq \varepsilon(\beta-\alpha)$
- o, che è lo stesso $\boxed{\left|F'(\bar{x})(\beta-\alpha)-\big(F(\beta)-F(\alpha)\big)\right| \leq \varepsilon(\beta-\alpha)}$



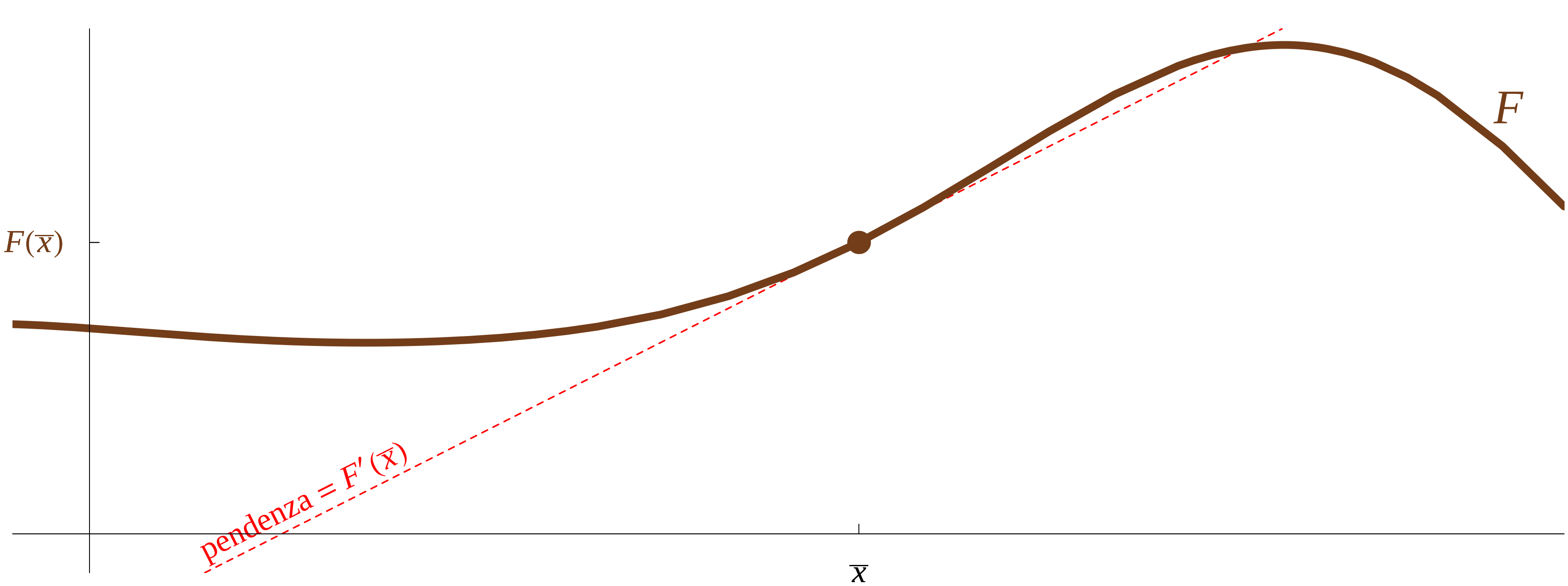
- viene $\left|\left(F(\beta)-F(\alpha)\right)-F'(\bar{x})(\beta-\alpha)\right| \leq \varepsilon(\beta-\alpha)$
- o, che è lo stesso $\left|F'(\bar{x})(\beta-\alpha)-\left(F(\beta)-F(\alpha)\right)\right| \leq \varepsilon(\beta-\alpha)$
- Questo l'abbiamo ricavato se $\alpha \neq \beta$ e $\bar{x}-\delta \leq \alpha \leq \bar{x} \leq \beta \leq \bar{x}+\delta$.



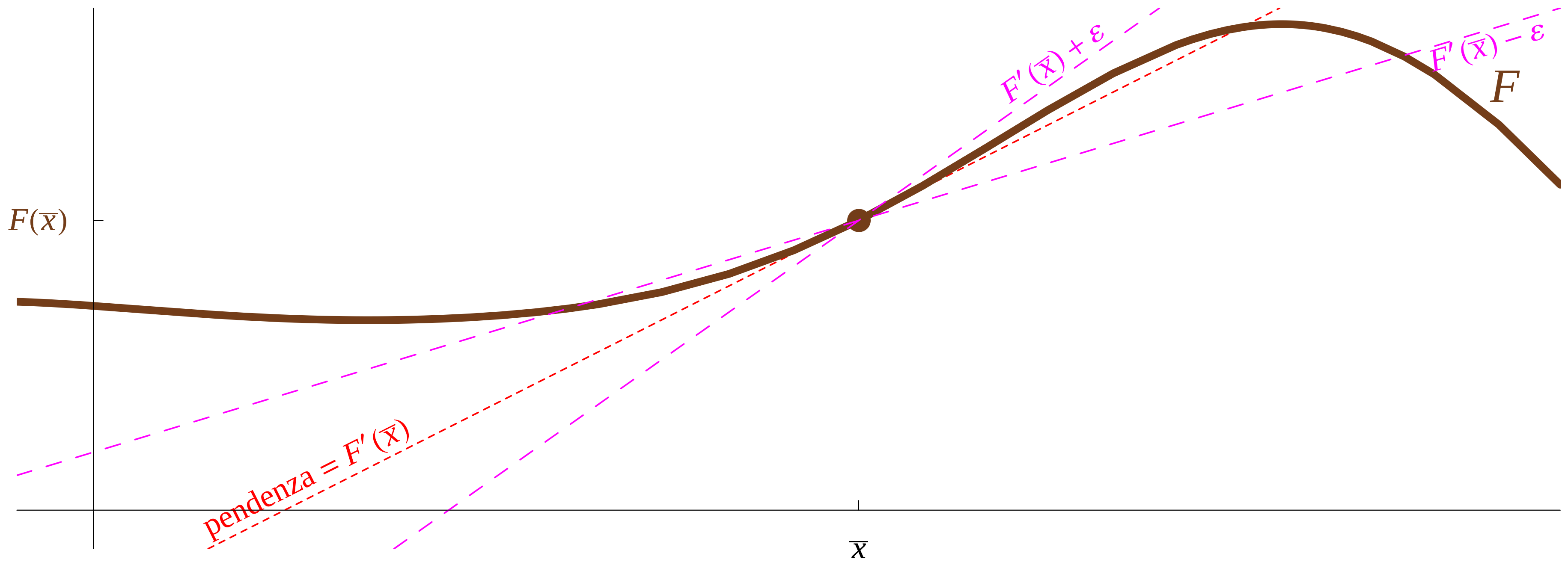
- viene $\left|\left(F(\beta) - F(\alpha)\right) - F'(\bar{x})(\beta - \alpha)\right| \le \varepsilon(\beta - \alpha)$
- o, che è lo stesso $\boxed{\left|F'(\bar{x})(\beta - \alpha) - \left(F(\beta) - F(\alpha)\right)\right| \le \varepsilon(\beta - \alpha)}$
- Questo l'abbiamo ricavato se $\alpha \neq \beta$ e $\bar{x} - \delta \le \alpha \le \bar{x} \le \beta \le \bar{x} + \delta$.
- Quando $\alpha = \beta$ la formula è ovviamente vera (è tutto zero).



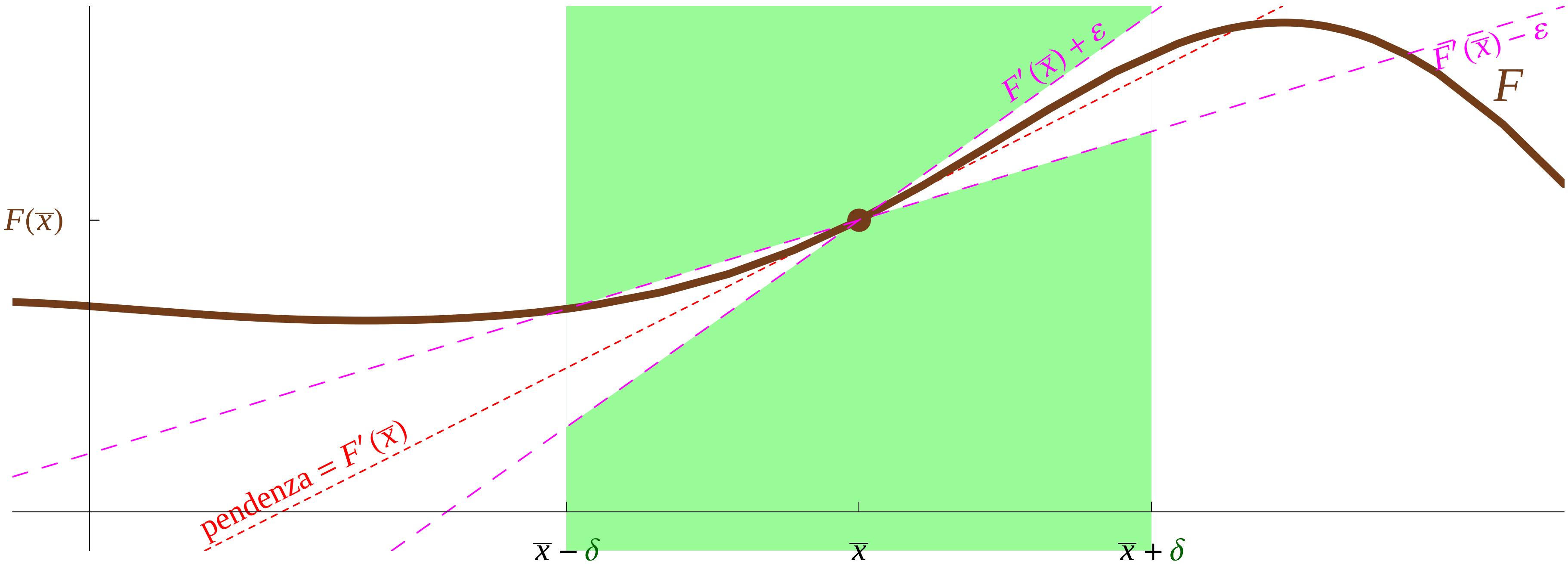
- viene $\left|\left(F(\beta)-F(\alpha)\right)-F'(\bar{x})(\beta-\alpha)\right| \leq \varepsilon(\beta-\alpha)$
- o, che è lo stesso $\left|F'(\bar{x})(\beta-\alpha)-\left(F(\beta)-F(\alpha)\right)\right| \leq \varepsilon(\beta-\alpha)$
- Questo l'abbiamo ricavato se $\alpha \neq \beta$ e $\bar{x}-\delta \leq \alpha \leq \bar{x} \leq \beta \leq \bar{x}+\delta$.
- Quando $\alpha = \beta$ la formula è ovviamente vera (è tutto zero).
- Quindi per la disuguaglianza finale non occorre l'ipotesi che $\alpha \neq \beta$.



- Riassumendo:

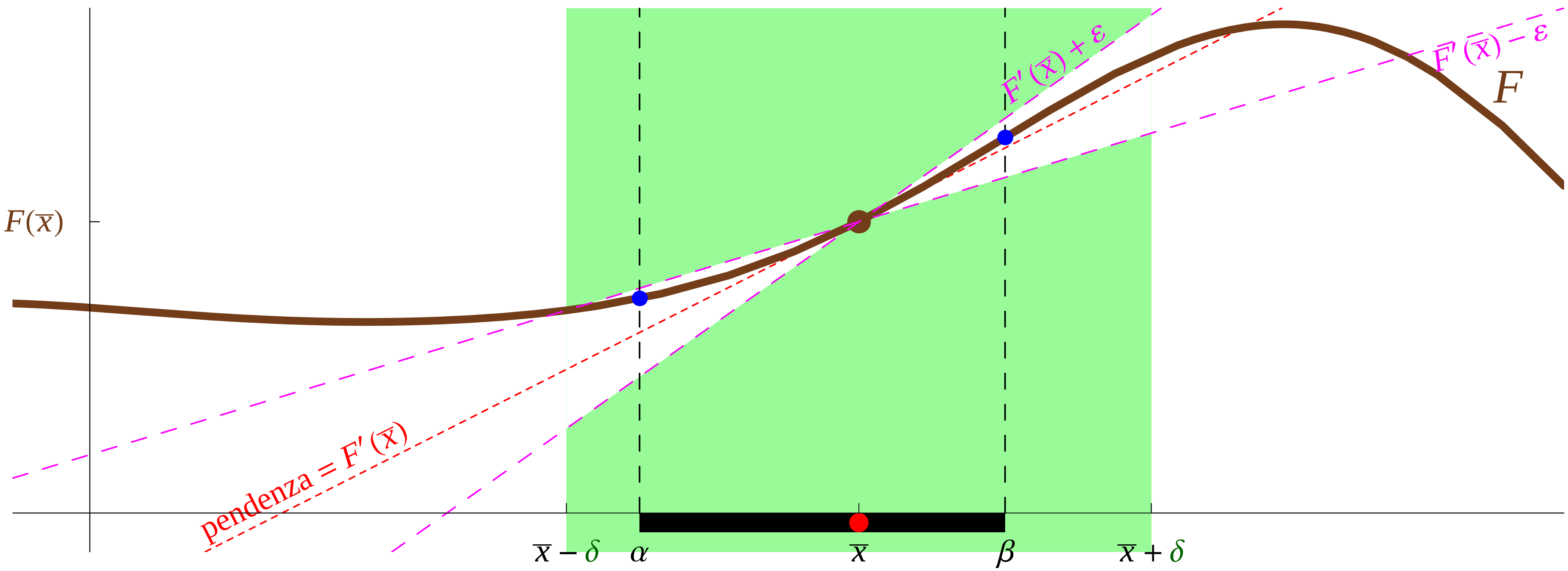


- Riassumendo:
  - **dato un qualsiasi** $\varepsilon > 0$

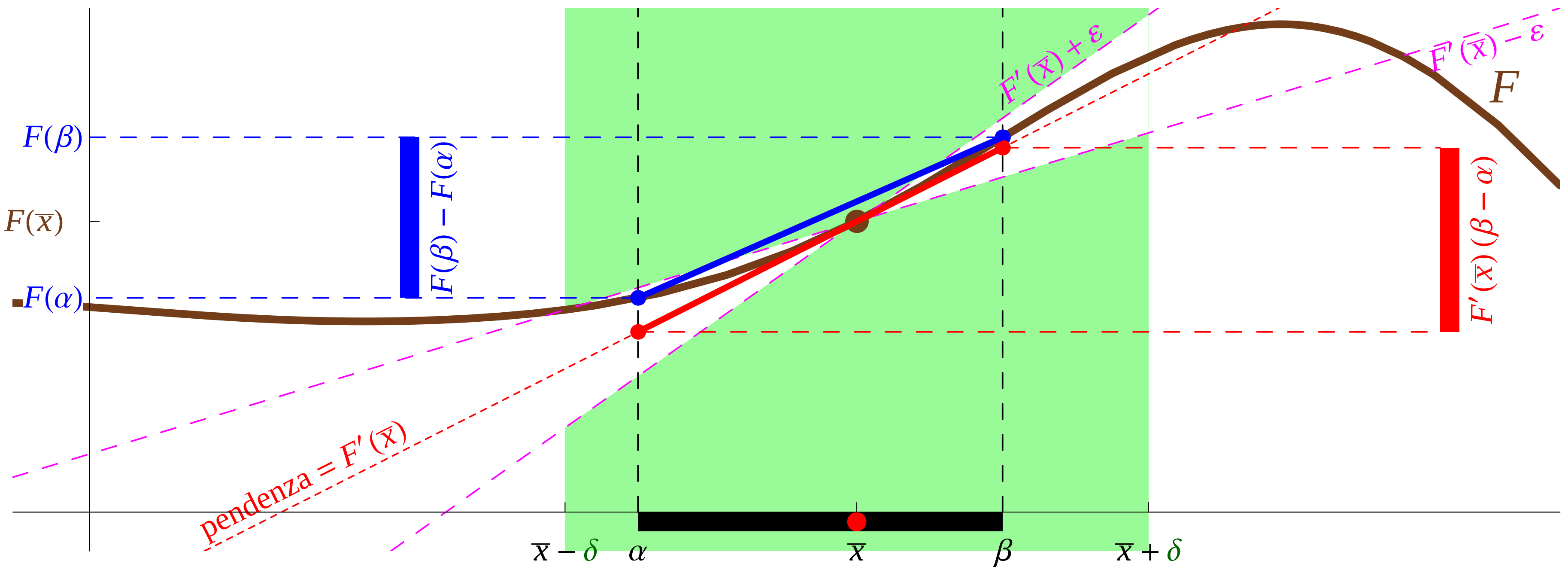


- Riassumendo:
  - **dato un qualsiasi** $\varepsilon > 0$
  - **esiste un** $\delta > 0$ **tale che**

Dim. del lemma

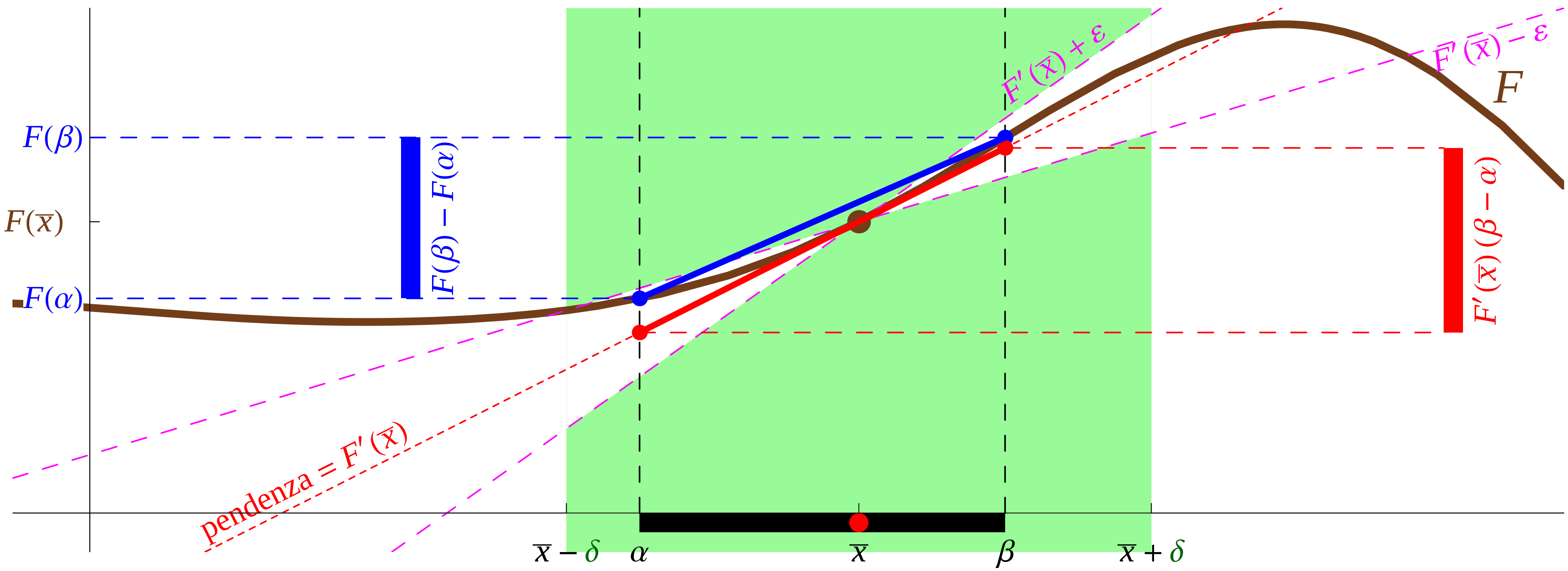


- Riassumendo:
  - **dato un qualsiasi** $\varepsilon > 0$
  - **esiste un** $\delta > 0$ **tale che**
    - se $\bar{x} - \delta \le \alpha \le \bar{x} \le \beta \le \bar{x} + \delta$



- Riassumendo:
  - **dato un qualsiasi** $\varepsilon > 0$
  - **esiste un** $\delta > 0$ **tale che**
    - se $\bar{x} - \delta \le \alpha \le \bar{x} \le \beta \le \bar{x} + \delta$
    - allora $\left| F'(\bar{x})(\beta - \alpha) - \big(F(\beta) - F(\alpha)\big) \right| \le \varepsilon(\beta - \alpha)$

Dim. del lemma



- Riassumendo:
  - **dato un qualsiasi** $\varepsilon > 0$
  - **esiste un** $\delta > 0$ **tale che**
    - se $\bar{x} - \delta \leq \alpha \leq \bar{x} \leq \beta \leq \bar{x} + \delta$
    - allora $\left| F'(\bar{x})(\beta - \alpha) - \left(F(\beta) - F(\alpha)\right) \right| \leq \varepsilon(\beta - \alpha)$
- Come volevasi dimostrare.

Somme telescopiche

- Un'altra cosa da sapere sono le somme telescopiche:

- Un'altra cosa da sapere sono le somme telescopiche:
  - **Partiamo da una *sequenza* di $n+1$ numeri**

$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n.$$

- Un'altra cosa da sapere sono le somme telescopiche:
  - **Partiamo da una *sequenza* di $n+1$ numeri**

$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n.$$

  - **Consideriamo gli n *incrementi* dai termini precedenti a quelli seguenti:**

$$b_1 - b_0, \quad b_2 - b_1, \quad b_3 - b_2, \quad \ldots, \quad b_n - b_{n-1},$$

- Un'altra cosa da sapere sono le somme telescopiche:
  - **Partiamo da una *sequenza* di $n+1$ numeri**

$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n.$$

  - **Consideriamo gli n *incrementi* dai termini precedenti a quelli seguenti:**

$$b_1 - b_0, \quad b_2 - b_1, \quad b_3 - b_2, \quad \ldots, \quad b_n - b_{n-1},$$

  - **e facciamone la *somma*:**

$$(b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1}).$$

Somme telescopiche

- Un'altra cosa da sapere sono le somme telescopiche:
  - **Partiamo da una *sequenza* di $n+1$ numeri**

$$b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n.$$

  - **Consideriamo gli n *incrementi* dai termini precedenti a quelli seguenti:**

$$b_1 - b_0, \quad b_2 - b_1, \quad b_3 - b_2, \quad \dots, \quad b_n - b_{n-1},$$

  - **e facciamone la *somma*:**

$$(b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1}).$$

  - **Ebbene: questa somma si semplifica in $b_n - b_0$.**

- Un'altra cosa da sapere sono le somme telescopiche:
  - **Partiamo da una *sequenza* di $n+1$ numeri**

$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n.$$

  - **Consideriamo gli n *incrementi* dai termini precedenti a quelli seguenti:**

$$b_1 - b_0, \quad b_2 - b_1, \quad b_3 - b_2, \quad \ldots, \quad b_n - b_{n-1},$$

  - **e facciamone la *somma*:**

$$(b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1}).$$

  - **Ebbene: questa somma si semplifica in $b_n - b_0$.**
- In*somma*: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0}$.

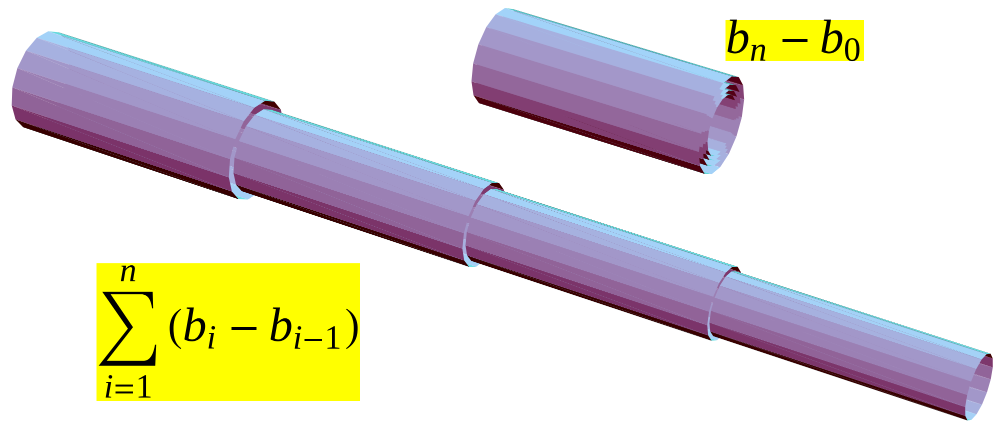
Somme telescopiche

- Perché si chiama somma "telescopica"?

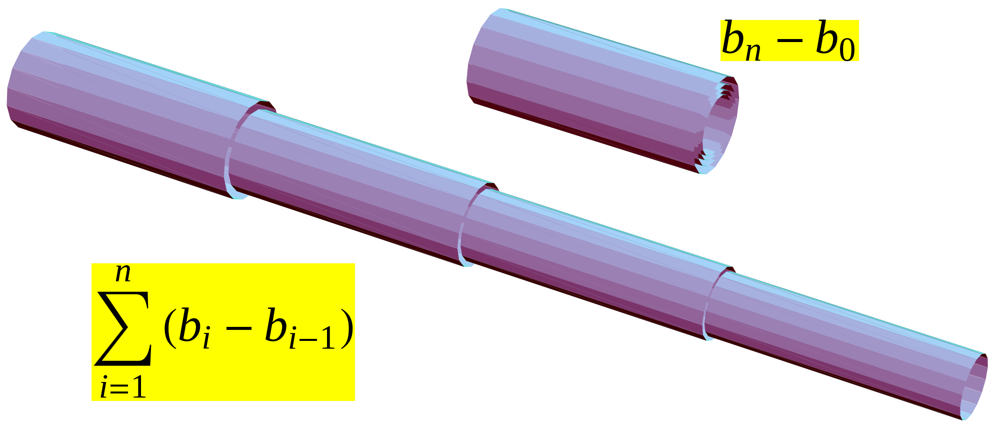
- Perché si chiama somma “telescopica”?
  - **Non sono sicuro, ma credo che sia per un’analogia con i telescopi fatti di cilindri a scomparsa:**

Somme telescopiche

- Perché si chiama somma "telescopica"?
  - **Non sono sicuro, ma credo che sia per un'analogia con i telescopi fatti di cilindri a scomparsa:**

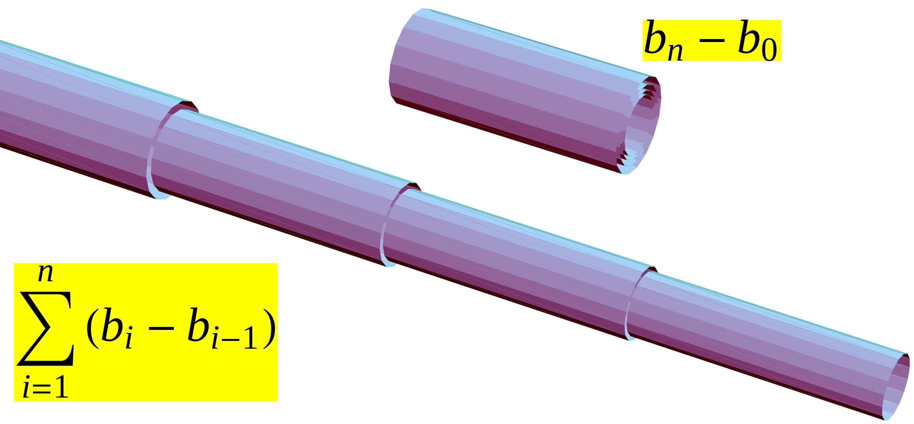


- Perché si chiama somma "telescopica"?
  - **Non sono sicuro, ma credo che sia per un'analogia con i telescopi fatti di cilindri a scomparsa:**



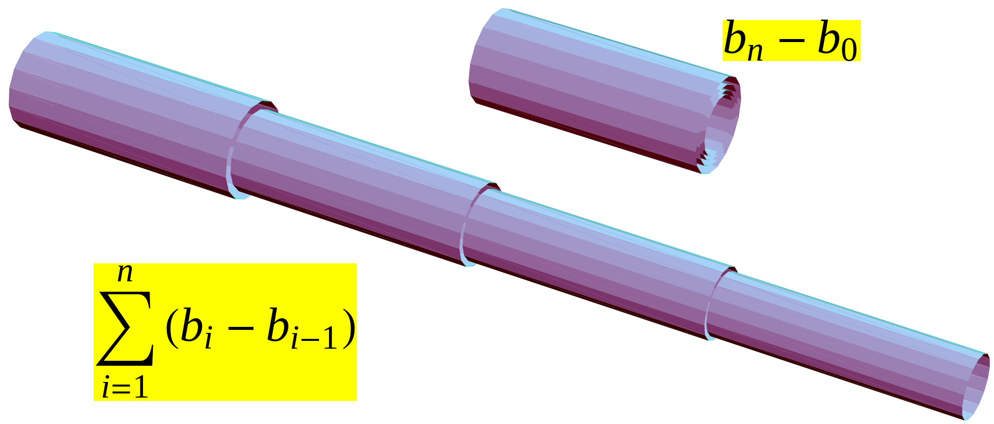
  - **La somma per disteso** $(b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1})$ **assomiglia al telescopio in versione dispiegata;**

- Perché si chiama somma “telescopica”?
  - **Non sono sicuro, ma credo che sia per un’analogia con i telescopi fatti di cilindri a scomparsa:**

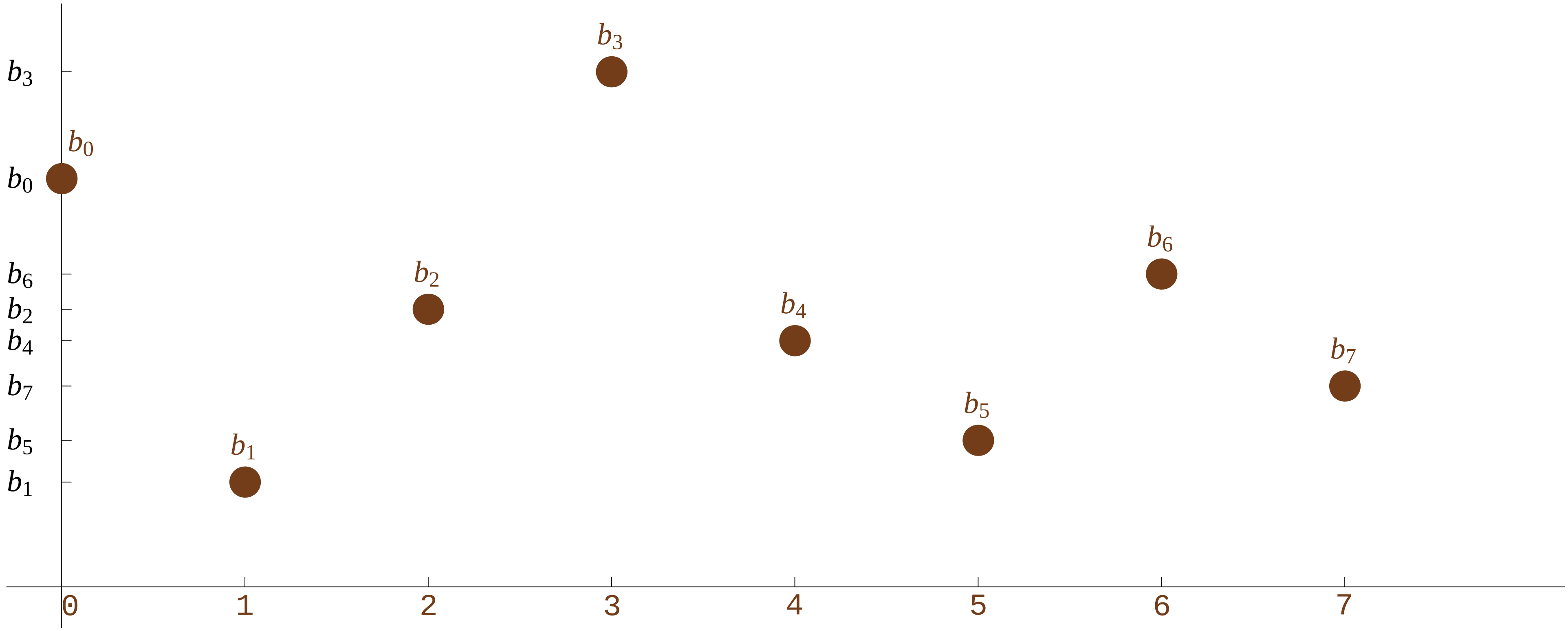


  - **La somma per disteso** $(b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1})$ **assomiglia al telescopio in versione dispiegata;**
  - **La forma** $b_n - b_0$ **ricorda il telescopio compattato.**

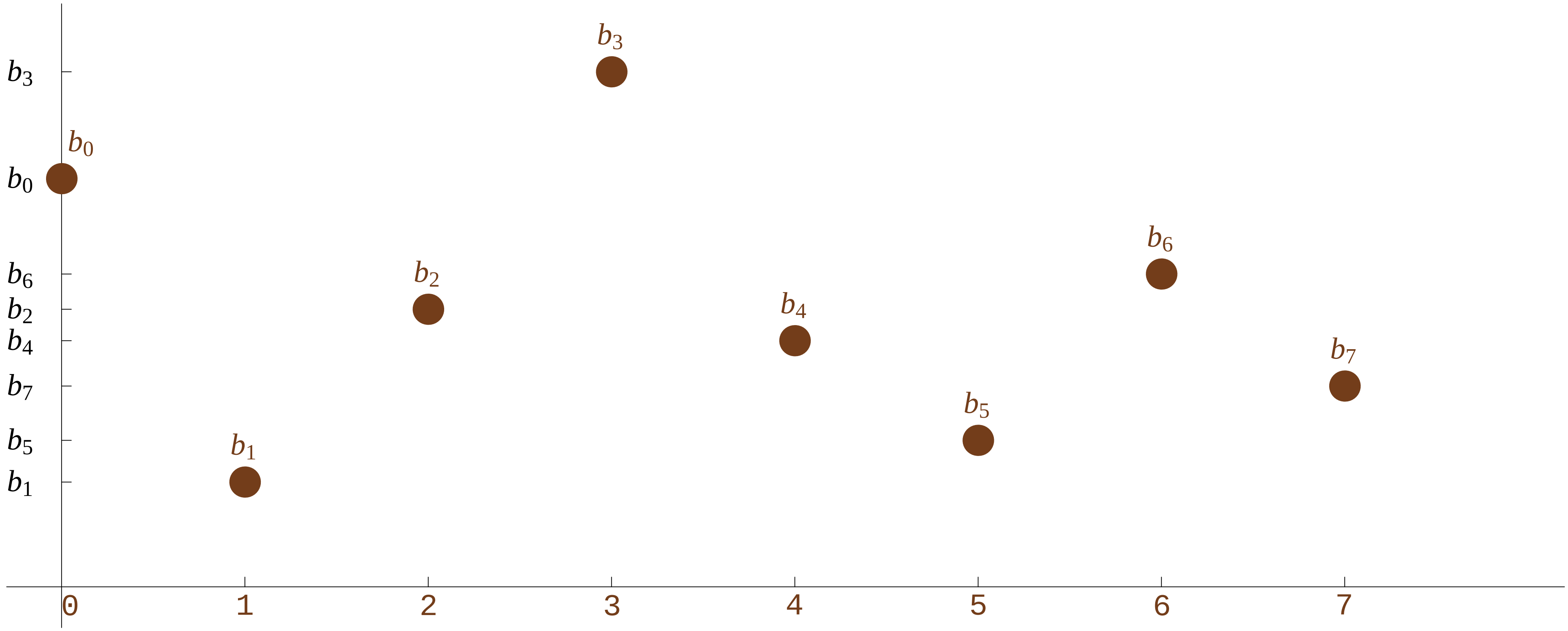
- Perché si chiama somma “telescopica”?
  - **Non sono sicuro, ma credo che sia per un’analogia con i telescopi fatti di cilindri a scomparsa:**



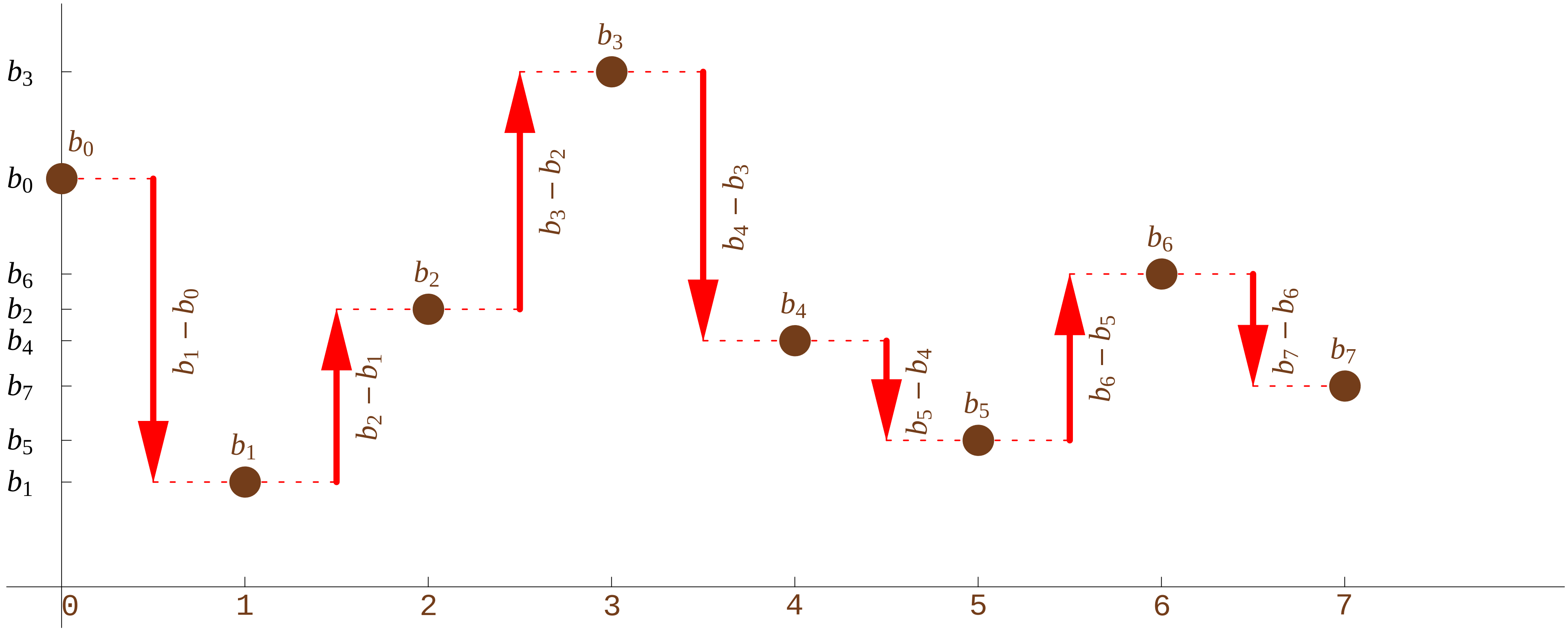
  - **La somma per disteso** $(b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1})$ **assomiglia al telescopio in versione dispiegata;**
  - **La forma** $b_n - b_0$ **ricorda il telescopio compattato.**
    - Si tratta di un’associazione di idee mnemonica.



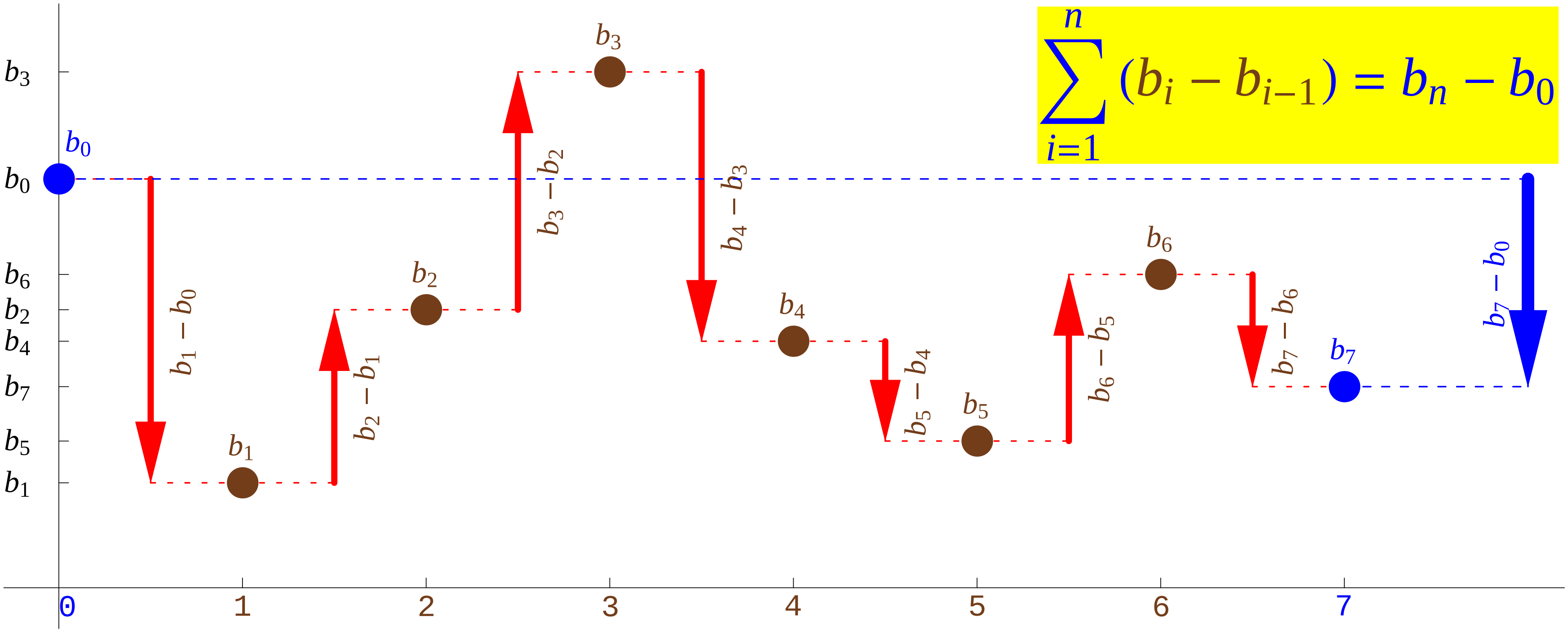
- Un'interpretazione geometrica seria è così:



- **Un'interpretazione geometrica seria è così:**
  - disegnamo un grafico a punti della sequenza;



- **Un'interpretazione geometrica seria è così:**
  - disegnamo un grafico a punti della sequenza;
  - l'incremento $b_i - b_{i-1}$ è un vettore verticale che porta dalla quota b_{i-1} alla quota b_i;



- **Un'interpretazione geometrica seria è così:**
  - disegnamo un grafico a punti della sequenza;
  - l'incremento $b_i - b_{i-1}$ è un vettore verticale che porta dalla quota b_{i-1} alla quota b_i;
  - la somma degli incrementi parziali è un vettore verticale che porta dalla prima quota b_0 all'ultima b_n.

- **Quando i b_i sono in ordine crescente, cioè**

$$b_0 \le b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_{n-1} \le b_n$$

l'interpretazione è più semplice:

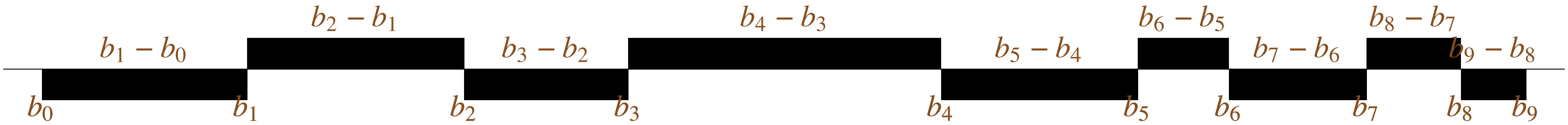
- **Quando i b_i sono in ordine crescente, cioè**

$$b_0 \leq b_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{n-1} \leq b_n$$

  l'interpretazione è più semplice:

  - gli intervallini $[b_{i-1}, b_i]$ non si sovrappongono;

Somme telescopiche

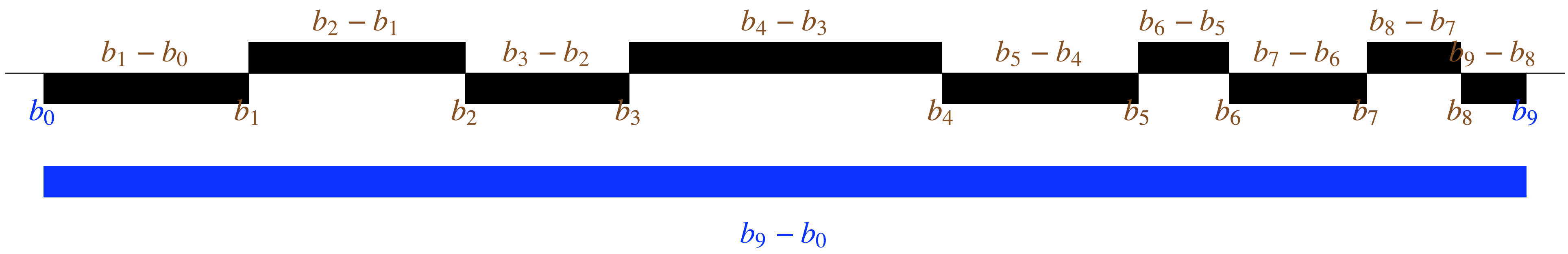


- **Quando i b_i sono in ordine crescente, cioè**

$$b_0 \le b_2 \le b_2 \le \cdots \le b_{n-1} \le b_n$$

l'interpretazione è più semplice:

  - gli intervallini $[b_{i-1}, b_i]$ non si sovrappongono;
  - l'incremento $b_i - b_{i-1}$ è la lunghezza dell'intervallino $[b_{i-1}, b_i]$;



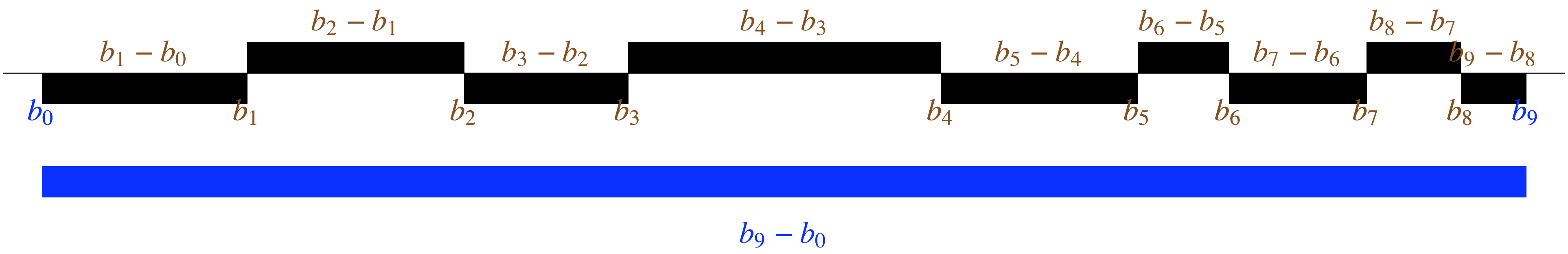
- **Quando i b_i sono in ordine crescente, cioè**

$$b_0 \leq b_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{n-1} \leq b_n$$

l'interpretazione è più semplice:

  - gli intervallini $[b_{i-1}, b_i]$ non si sovrappongono;
  - l'incremento $b_i - b_{i-1}$ è la lunghezza dell'intervallino $[b_{i-1}, b_i]$;
  - la somma degli incrementi è la lunghezza dell'intervallo complessivo $[b_0, b_n]$.

Somme telescopiche



- **Quando i b_i sono in ordine crescente, cioè**

$$b_0 \leq b_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{n-1} \leq b_n$$

  l'interpretazione è più semplice:

  - gli intervallini $[b_{i-1}, b_i]$ non si sovrappongono;
  - l'incremento $b_i - b_{i-1}$ è la lunghezza dell'intervallino $[b_{i-1}, b_i]$;
  - la somma degli incrementi è la lunghezza dell'intervallo complessivo $[b_0, b_n]$.

- **Gli estremi di una suddivisione marcata sono una situazione di questo tipo.**

Somme telescopiche

- La formula $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si verifica facilmente per via algebrica.

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si verifica facilmente per via algebrica.
  - **Prendiamo per esempio una sequenza di *sei* numeri $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Abbiamo $n = 5$.**

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si verifica facilmente per via algebrica.
  - **Prendiamo per esempio una sequenza di *sei* numeri $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Abbiamo $n = 5$.**
  - **Gli incrementi da sommare, incolonnati, sono**

$$\begin{array}{rr} +b_1 & -b_0 \\ +b_2 & -b_1 \\ +b_3 & -b_2 \\ +b_4 & -b_3 \\ +b_5 & -b_4 \end{array}$$

- La formula $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si verifica facilmente per via algebrica.
  - **Prendiamo per esempio una sequenza di *sei* numeri $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Abbiamo $n = 5$.**
  - **Gli incrementi da sommare, incolonnati, sono**

$$\begin{array}{ll} +b_1 & -b_0 \\ +b_2 & -b_1 \\ +b_3 & -b_2 \\ +b_4 & -b_3 \\ +b_5 & -b_4 \end{array}$$

  - **notare le coppie di addendi opposti!**

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si verifica facilmente per via algebrica.
  - **Prendiamo per esempio una sequenza di *sei* numeri $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Abbiamo $n = 5$.**
  - **Gli incrementi da sommare, incolonnati, sono**

$$\begin{array}{rr} +b_1 & -b_0 \\ +b_2 & -b_1 \\ +b_3 & -b_2 \\ +b_4 & -b_3 \\ +b_5 & -b_4 \end{array}$$

  - **notare le coppie di addendi opposti!**

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si verifica facilmente per via algebrica.
  - **Prendiamo per esempio una sequenza di *sei* numeri $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Abbiamo $n = 5$.**
  - **Gli incrementi da sommare, incolonnati, sono**

$$
\begin{array}{rr}
+b_1 & -b_0 \\
+b_2 & -b_1 \\
+b_3 & -b_2 \\
+b_4 & -b_3 \\
+b_5 & -b_4
\end{array}
$$

  - **notare le coppie di addendi opposti!**

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si verifica facilmente per via algebrica.
  - **Prendiamo per esempio una sequenza di *sei* numeri $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Abbiamo $n = 5$.**
  - **Gli incrementi da sommare, incolonnati, sono**

$$\begin{array}{cc} +b_1 & -b_0 \\ +b_2 & -b_1 \\ +b_3 & -b_2 \\ +b_4 & -b_3 \\ +b_5 & -b_4 \end{array}$$

  - **notare le coppie di addendi opposti!**

□ La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si verifica facilmente per via algebrica.

- **Prendiamo per esempio una sequenza di *sei* numeri $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Abbiamo $n = 5$.**
- **Gli incrementi da sommare, incolonnati, sono**

$$\begin{array}{rr} +b_1 & -b_0 \\ +b_2 & -b_1 \\ +b_3 & -b_2 \\ +b_4 & -b_3 \\ +b_5 & -b_4 \end{array}$$

- **notare le coppie di addendi opposti!**

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si verifica facilmente per via algebrica.
  - **Prendiamo per esempio una sequenza di *sei* numeri $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Abbiamo $n = 5$.**
  - **Gli incrementi da sommare, incolonnati, sono**

$$\begin{array}{rr} +b_1 & -b_0 \\ +b_2 & -b_1 \\ +b_3 & -b_2 \\ +b_4 & -b_3 \\ +b_5 & -b_4 \end{array}$$

  - **sommando si cancellano i termini a sfondo grigio;**

- La formula $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si verifica facilmente per via algebrica.
    - **Prendiamo per esempio una sequenza di *sei* numeri $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Abbiamo $n = 5$.**
    - **Gli incrementi da sommare, incolonnati, sono**

$$\begin{array}{rr}
+b_1 & -b_0 \\
+b_2 & -b_1 \\
+b_3 & -b_2 \\
+b_4 & -b_3 \\
+b_5 & -b_4
\end{array}$$

- **sopravvivono solo i due termini a sfondo giallo;**

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si verifica facilmente per via algebrica.
  - **Prendiamo per esempio una sequenza di *sei* numeri $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Abbiamo $n = 5$.**
  - **Gli incrementi da sommare, incolonnati, sono**

$$\begin{array}{cc} +b_1 & -b_0 \\ +b_2 & -b_1 \\ +b_3 & -b_2 \\ +b_4 & -b_3 \\ +b_5 & -b_4 \end{array}$$

  - **la somma è $b_5 - b_0$, che è proprio $b_n - b_0$.**

Somme telescopiche

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si può dimostrare per induzione.

- La formula $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si può dimostrare per induzione.
  - **Base dell'induzione:** $n = 1$

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si può dimostrare per induzione.
  - **Base dell'induzione:** $n = 1$
    - la sequenza ha solo i 2 termini b_0 e b_1;

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si può dimostrare per induzione.
  - **Base dell'induzione:** $n = 1$
    - la sequenza ha solo i 2 termini b_0 e b_1;
    - il membro di sinistra ha un solo addendo, che è $b_1 - b_0$

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si può dimostrare per induzione.
  - **Base dell'induzione:** $n = 1$
    - la sequenza ha solo i 2 termini b_0 e b_1;
    - il membro di sinistra ha un solo addendo, che è $b_1 - b_0$
    - che coincide con il termine di destra $b_n - b_0$:

$$\sum_{i=1}^{1}(b_i - b_{i-1}) = b_1 - b_0\,.$$

- La formula $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si può dimostrare per induzione.
  - **Passo induttivo.** **Sia $n \geq 1$ per il quale valga la tesi, per ogni sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots, b_n$.**

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si può dimostrare per induzione.
  - **Passo induttivo. Sia $n \geq 1$ per il quale valga la tesi, per ogni sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots, b_n$.**
    - Prendiamo una sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots b_n, b_{n+1}$.

Somme telescopiche

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si può dimostrare per induzione.
  - **Passo induttivo. Sia $n \geq 1$ per il quale valga la tesi, per ogni sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots, b_n$.**
    - Prendiamo una sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots b_n, b_{n+1}$.
    - Partendo da

$$\sum_{i=1}^{n+1}(b_i - b_{i-1}) =$$

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si può dimostrare per induzione.
  - **Passo induttivo. Sia $n \geq 1$ per il quale valga la tesi, per ogni sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots, b_n$.**
    - Prendiamo una sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots b_n, b_{n+1}$.
    - Partendo da

$$\sum_{i=1}^{n+1}(b_i - b_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) + (b_{n+1} - b_n)$$

    - isoliamo l'ultimo addendo, quello con $i = n + 1$;

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si può dimostrare per induzione.
  - **Passo induttivo. Sia $n \geq 1$ per il quale valga la tesi, per ogni sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots, b_n$.**
    - Prendiamo una sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots b_n, b_{n+1}$.
    - Partendo da

$$\sum_{i=1}^{n+1}(b_i - b_{i-1}) = \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1})}^{=b_n - b_0} + (b_{n+1} - b_n)$$

    - usiamo l'ipotesi induttiva;

- La formula $\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0$ si può dimostrare per induzione.
  - **Passo induttivo. Sia $n \geq 1$ per il quale valga la tesi, per ogni sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots, b_n$.**
    - Prendiamo una sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots b_n, b_{n+1}$.
    - Partendo da

$$\sum_{i=1}^{n+1}(b_i - b_{i-1}) = \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1})}^{=b_n - b_0} + (b_{n+1} - b_n) =$$
$$= (b_n - b_0) + (b_{n+1} - b_n)$$

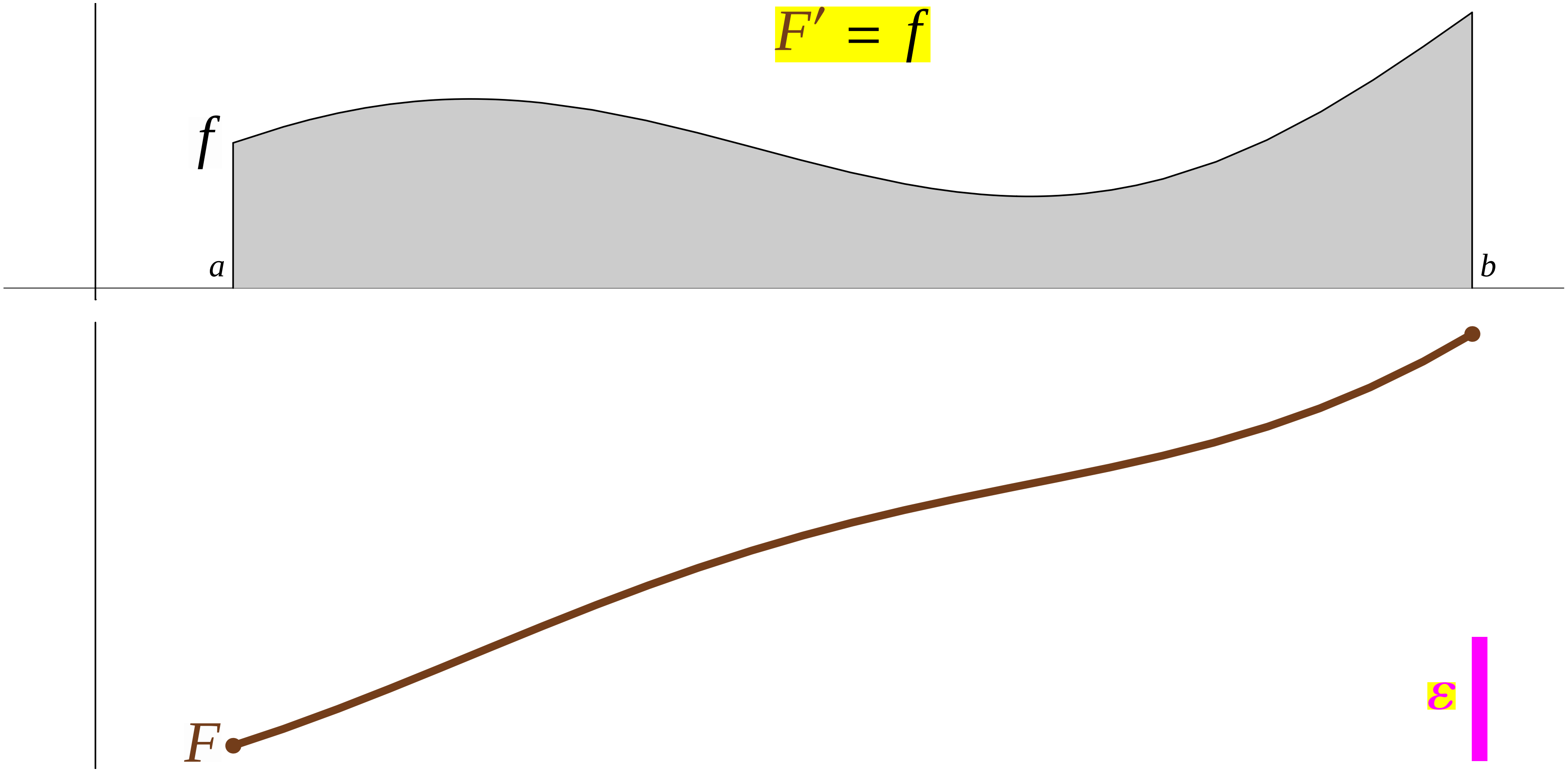
    - due addendi si cancellano;

Somme telescopiche

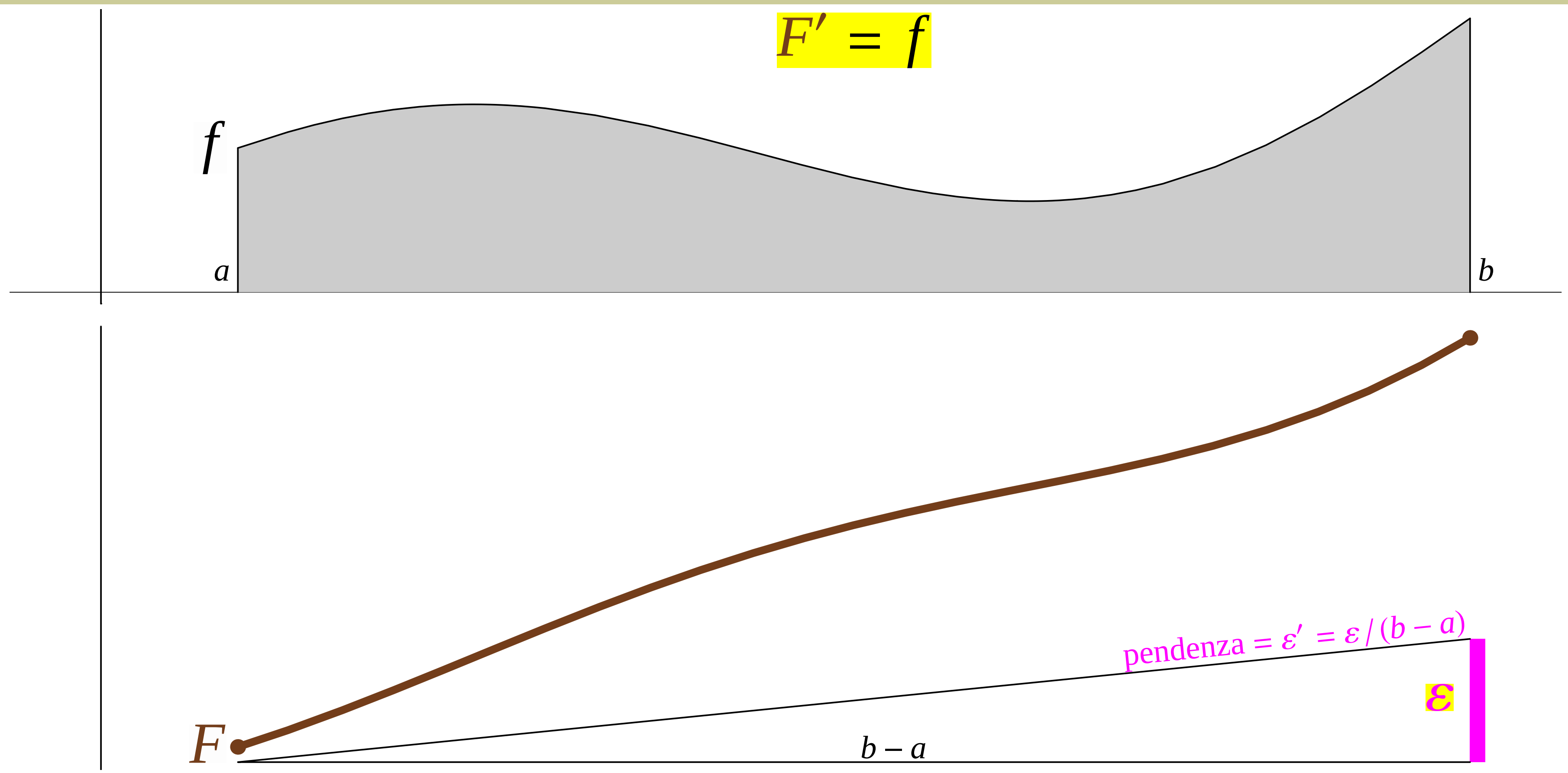
- La formula $\boxed{\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0}$ si può dimostrare per induzione.
  - **Passo induttivo. Sia $n \geq 1$ per il quale valga la tesi, per ogni sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots, b_n$.**
    - Prendiamo una sequenza di numeri $b_0, b_1, \ldots b_n, b_{n+1}$.
    - Partendo da

$$\begin{aligned}\boxed{\sum_{i=1}^{n+1}(b_i - b_{i-1})} &= \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1})}^{=b_n - b_0} + (b_{n+1} - b_n) \\ &= (b_n - b_0) + (b_{n+1} - b_n) = \boxed{b_{n+1} - b_0}.\end{aligned}$$

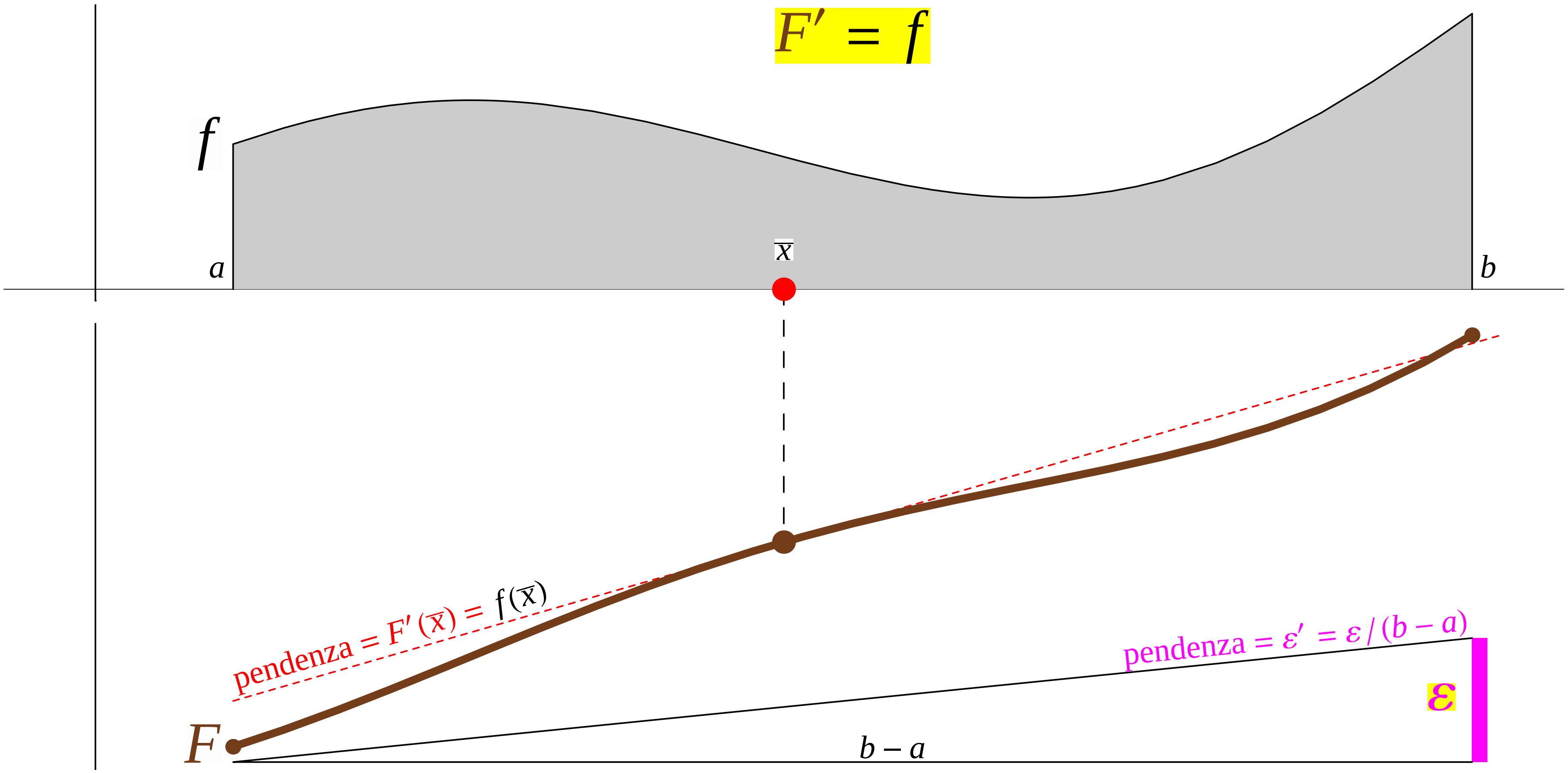
    - che è la tesi con $n+1$ al posto di n, come volevasi dimostrare!



- **Fissiamo un** $\varepsilon > 0$

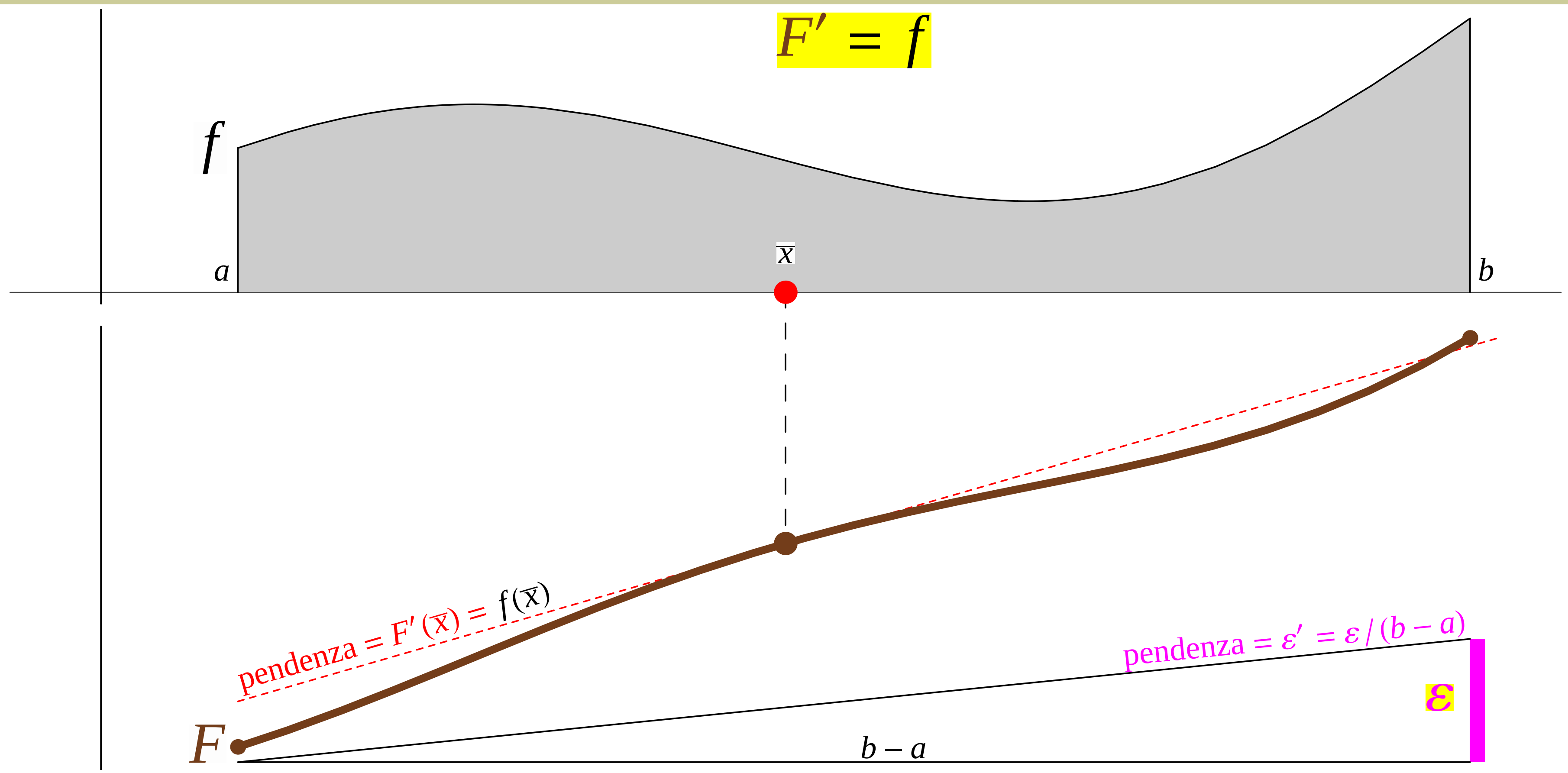


- **Fissiamo un** $\varepsilon > 0$, **e poniamo** $\varepsilon' = \varepsilon/(b-a)$.

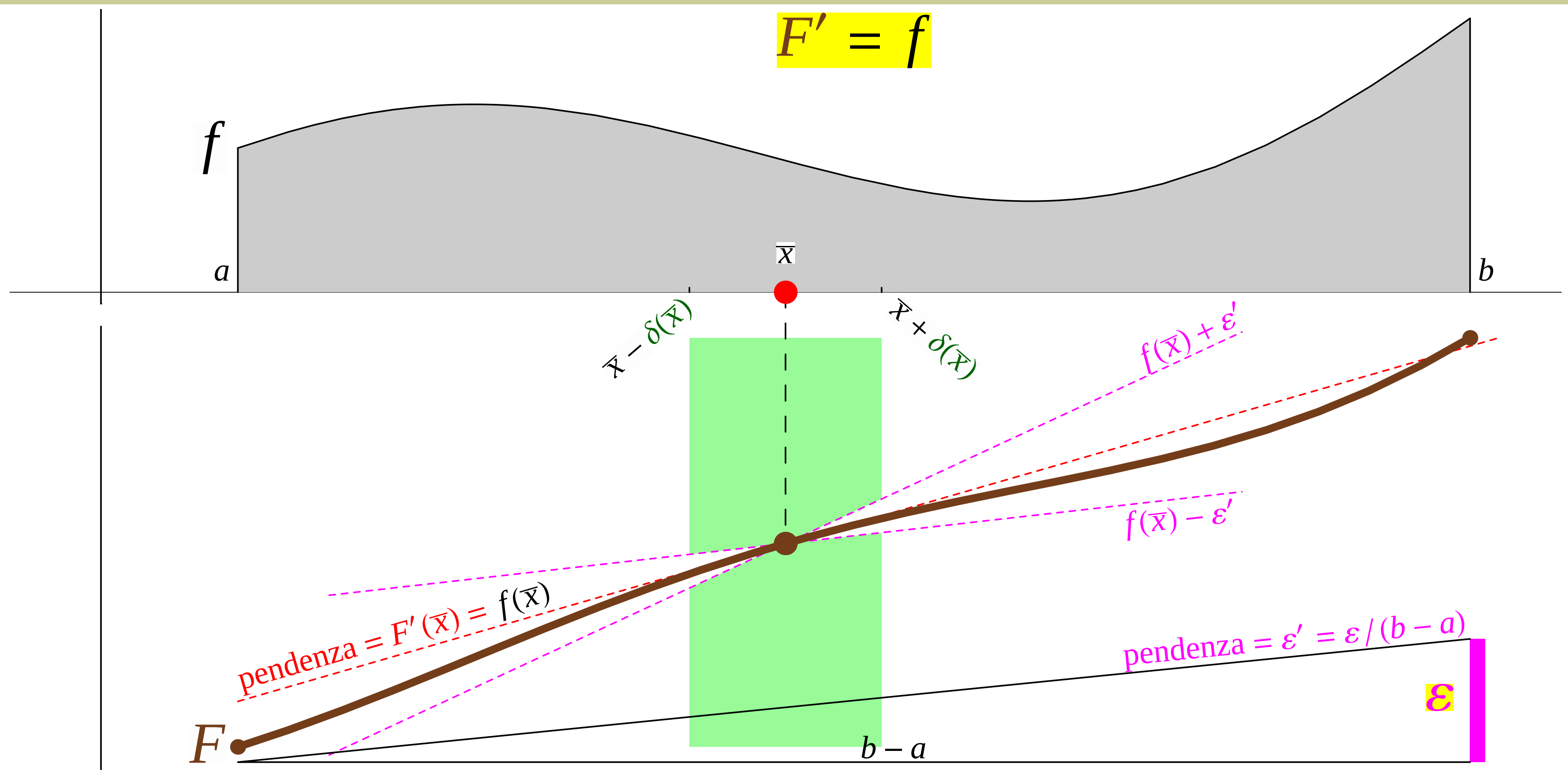


- **Fissiamo un** $\varepsilon > 0$**, e poniamo** $\varepsilon' = \varepsilon/(b-a)$**.**
- **Prendiamo un qualsiasi** $\bar{x} \in [a, b]$**.**

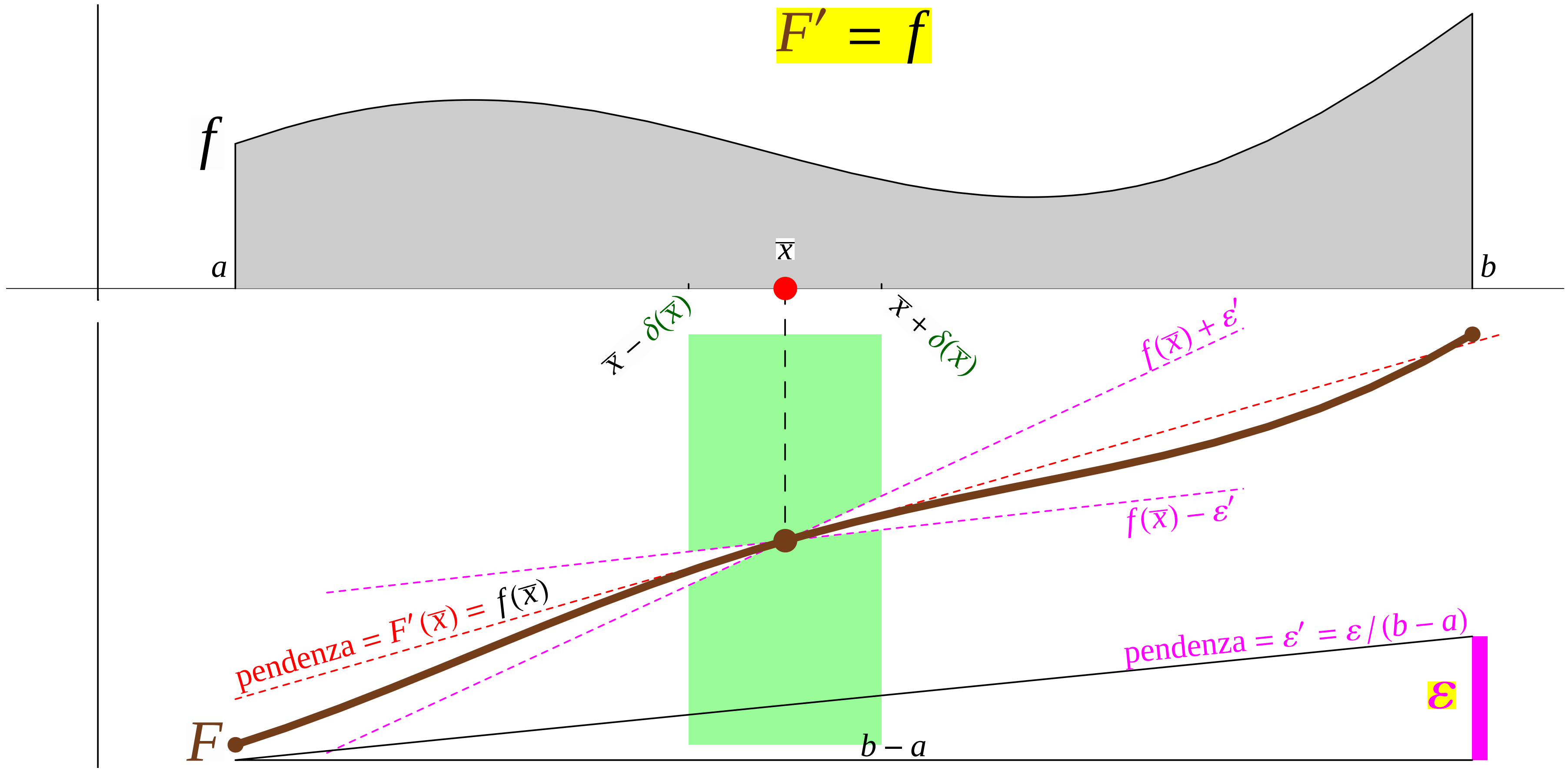
Dimostr. del teor. fond.



- **Fissiamo un $\varepsilon > 0$, e poniamo $\varepsilon' = \varepsilon/(b-a)$.**
- **Prendiamo un qualsiasi $\bar{x} \in [a, b]$.**
  - Per ipotesi F è derivabile in $\bar{x}$, con derivata $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$.



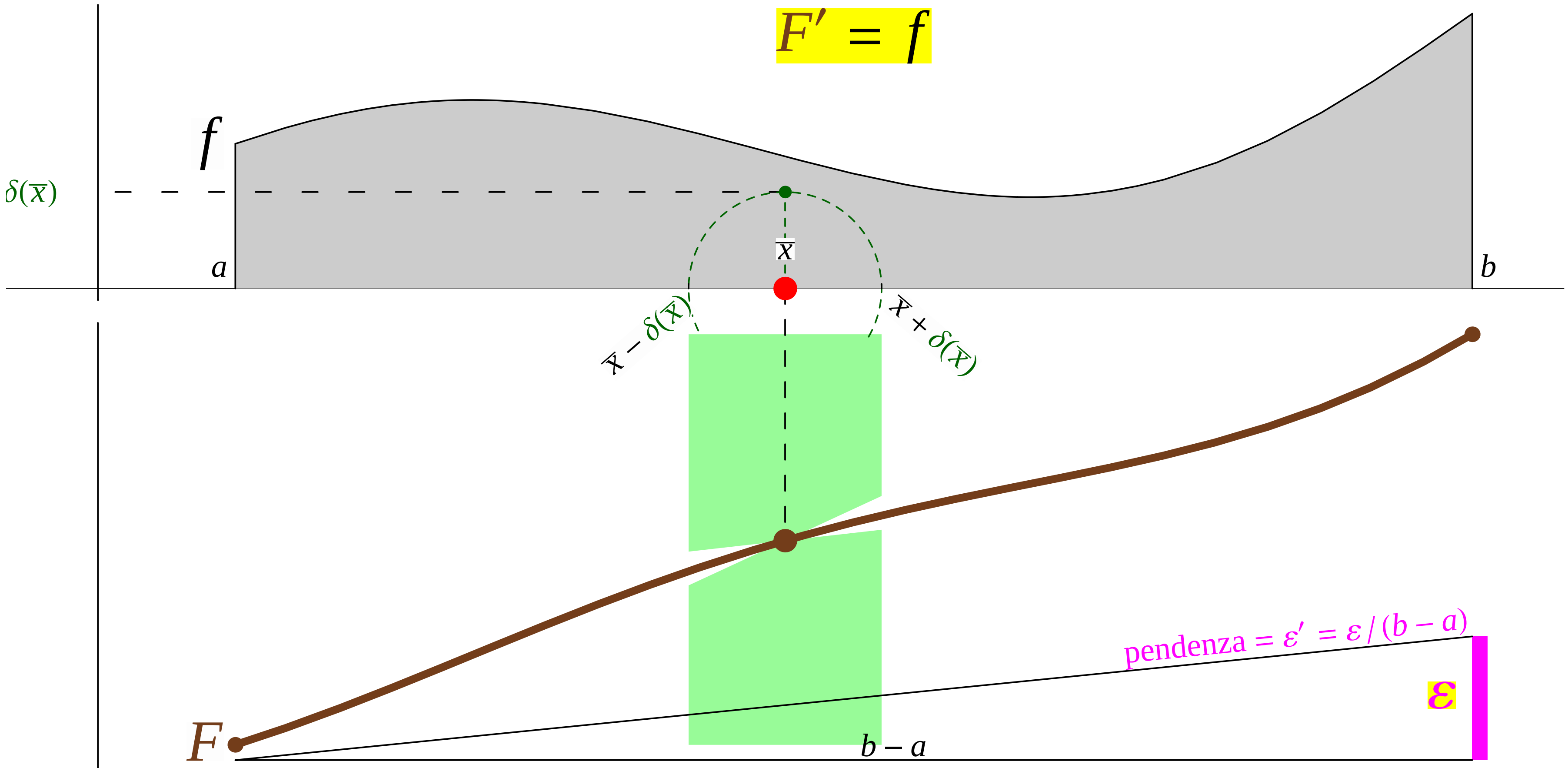
- Possiamo applicare il lemma con ε' al posto di ε:



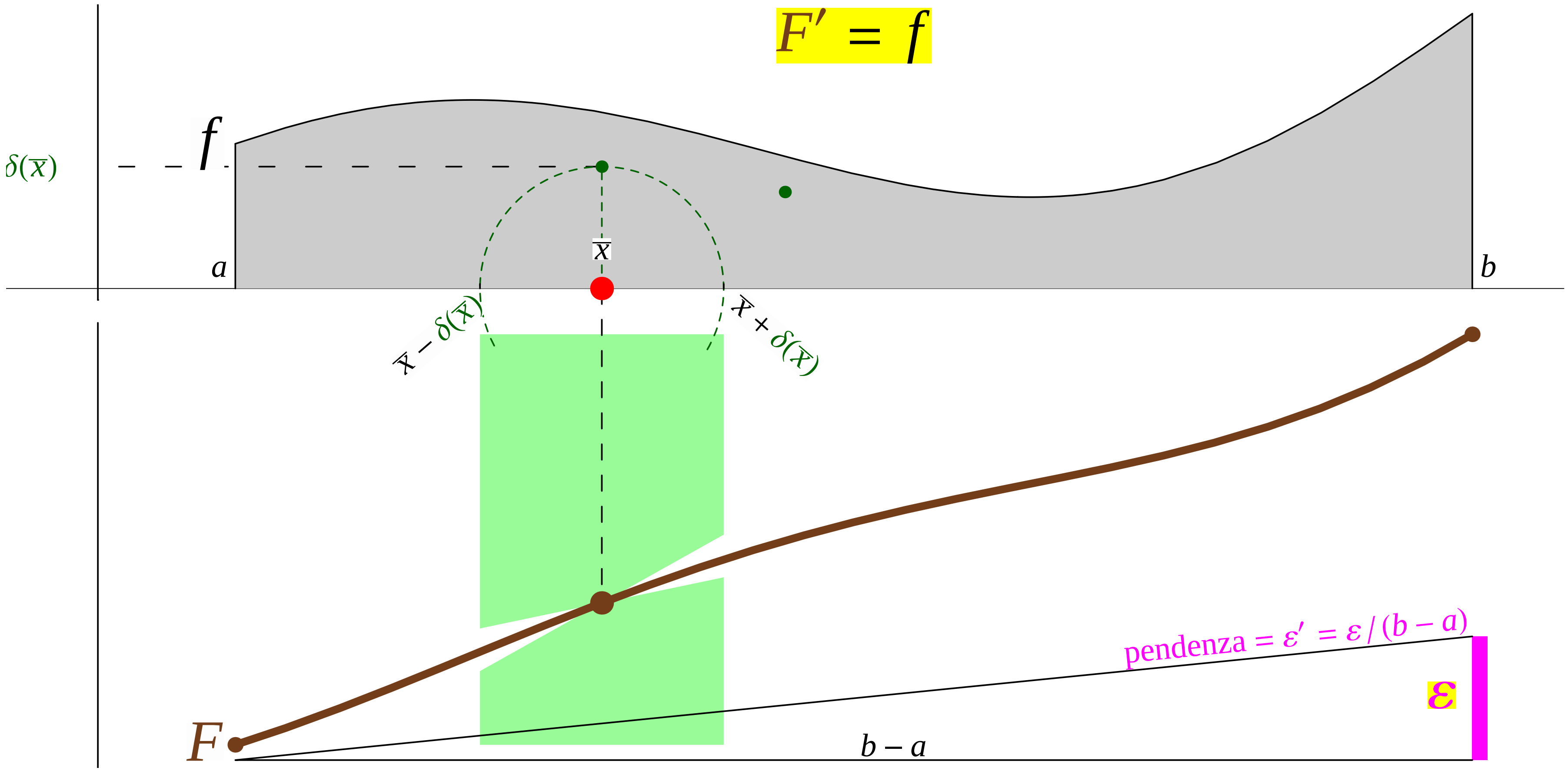
- Possiamo applicare il lemma con ε' al posto di ε:
- esiste $\delta(\bar{x}) > 0$ (dipendente da $\bar{x}$) tale che $\forall \alpha, \beta$

$$\bar{x} - \delta(\bar{x}) \leq \alpha \leq \bar{x} \leq \beta \leq \bar{x} + \delta(\bar{x}) \quad \Rightarrow$$

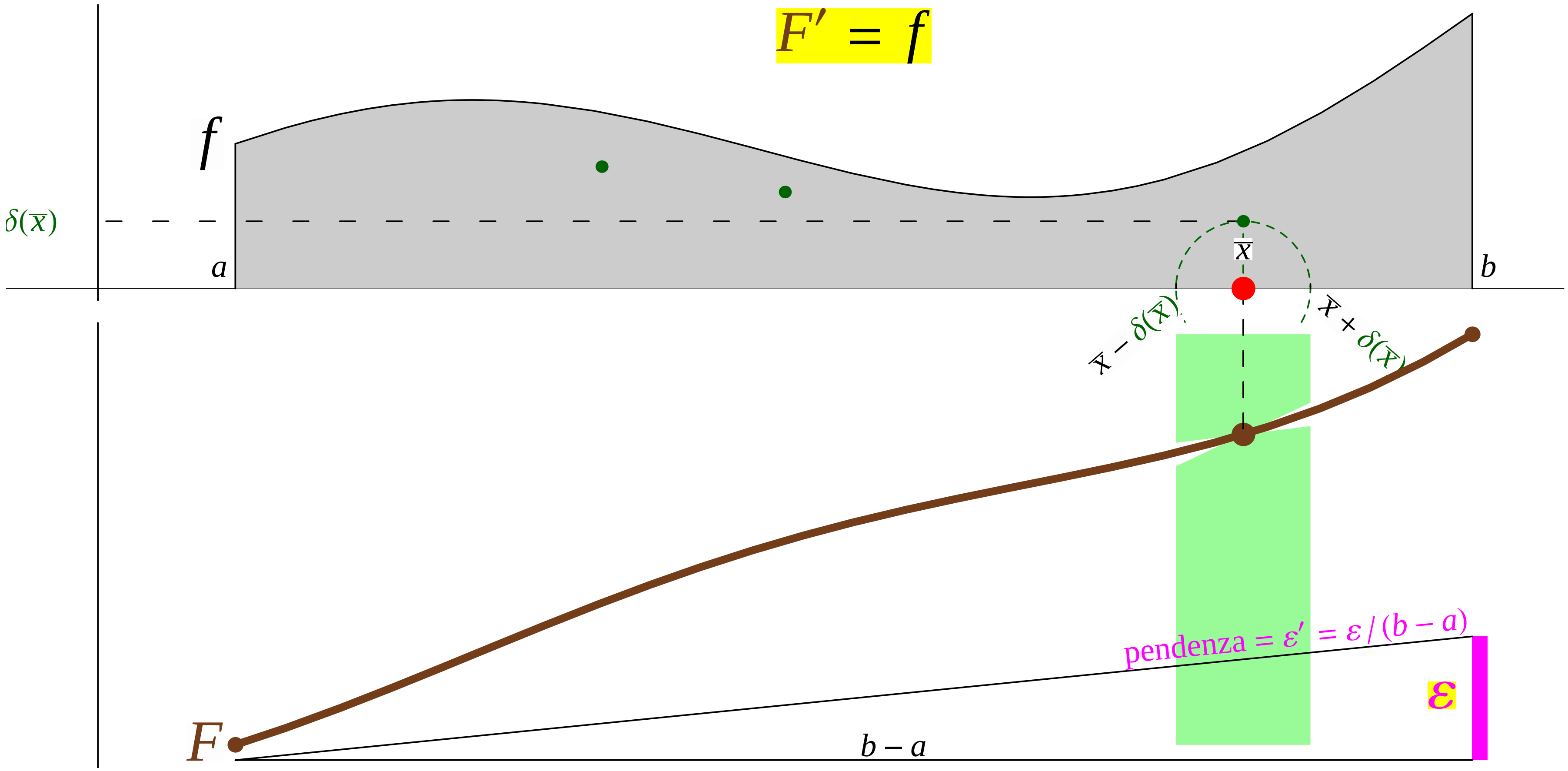
$$\Rightarrow \quad \left| F'(\bar{x})(\beta - \alpha) - \Big(F(\beta) - F(\alpha) \Big) \right| \leq \varepsilon'(\beta - \alpha)$$



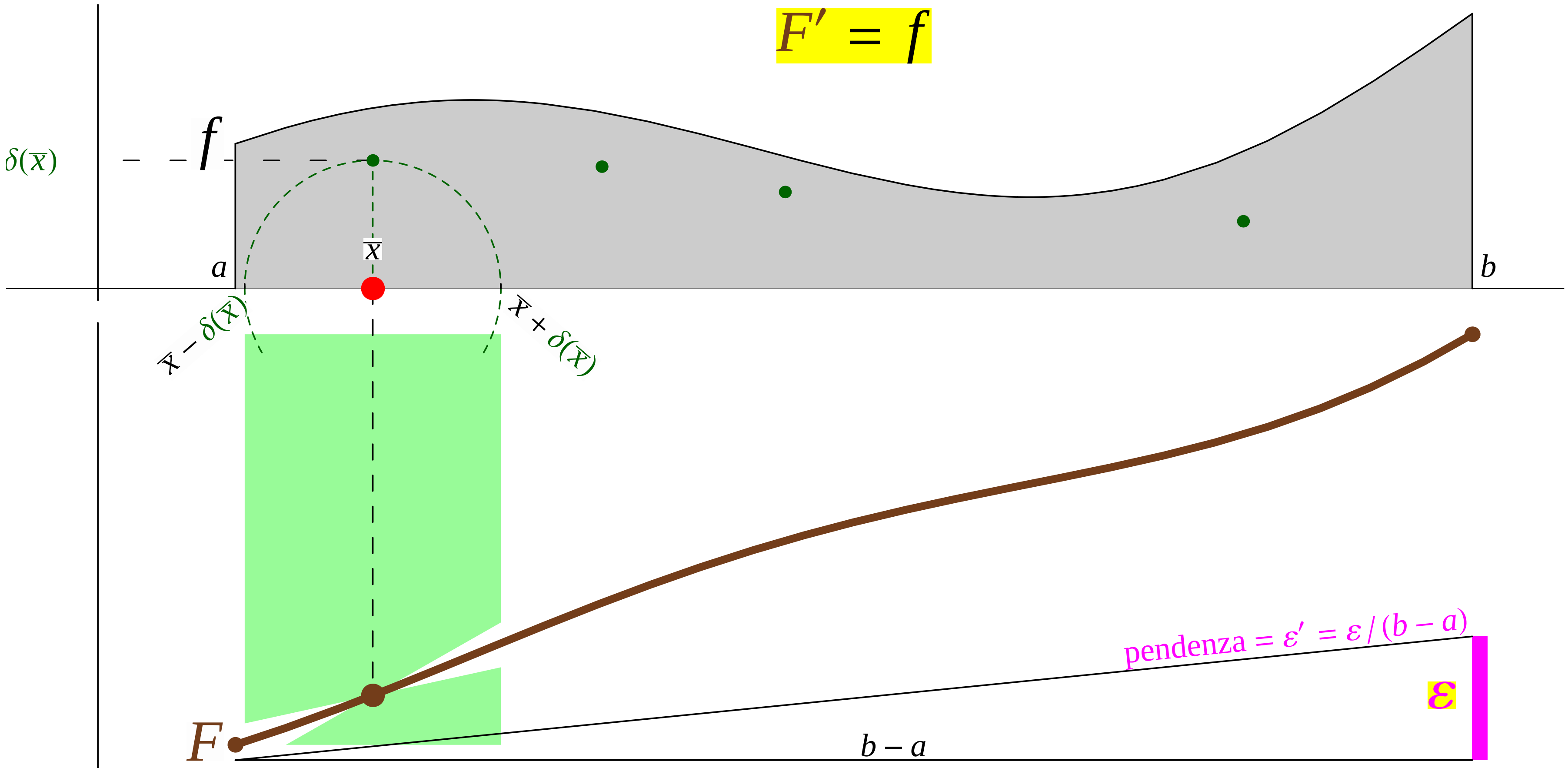
- Riportiamo il valore di $\delta(\bar{x})$ in ordinata.



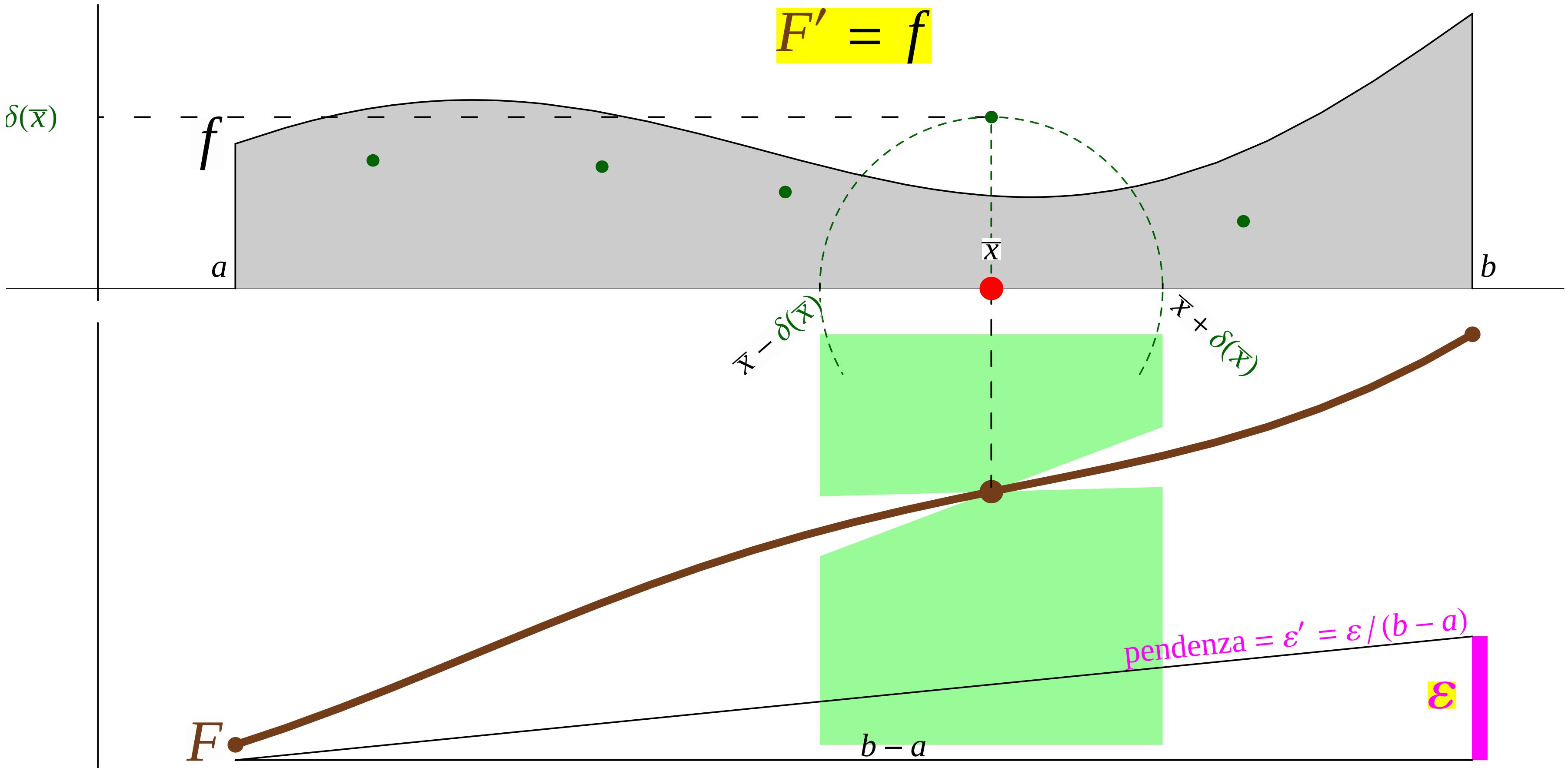
- Riportiamo il valore di $\delta(\bar{x})$ in ordinata.
- Cambiando il valore di $\bar{x}$ ricaviamo un altro valore di $\delta(\bar{x})$.



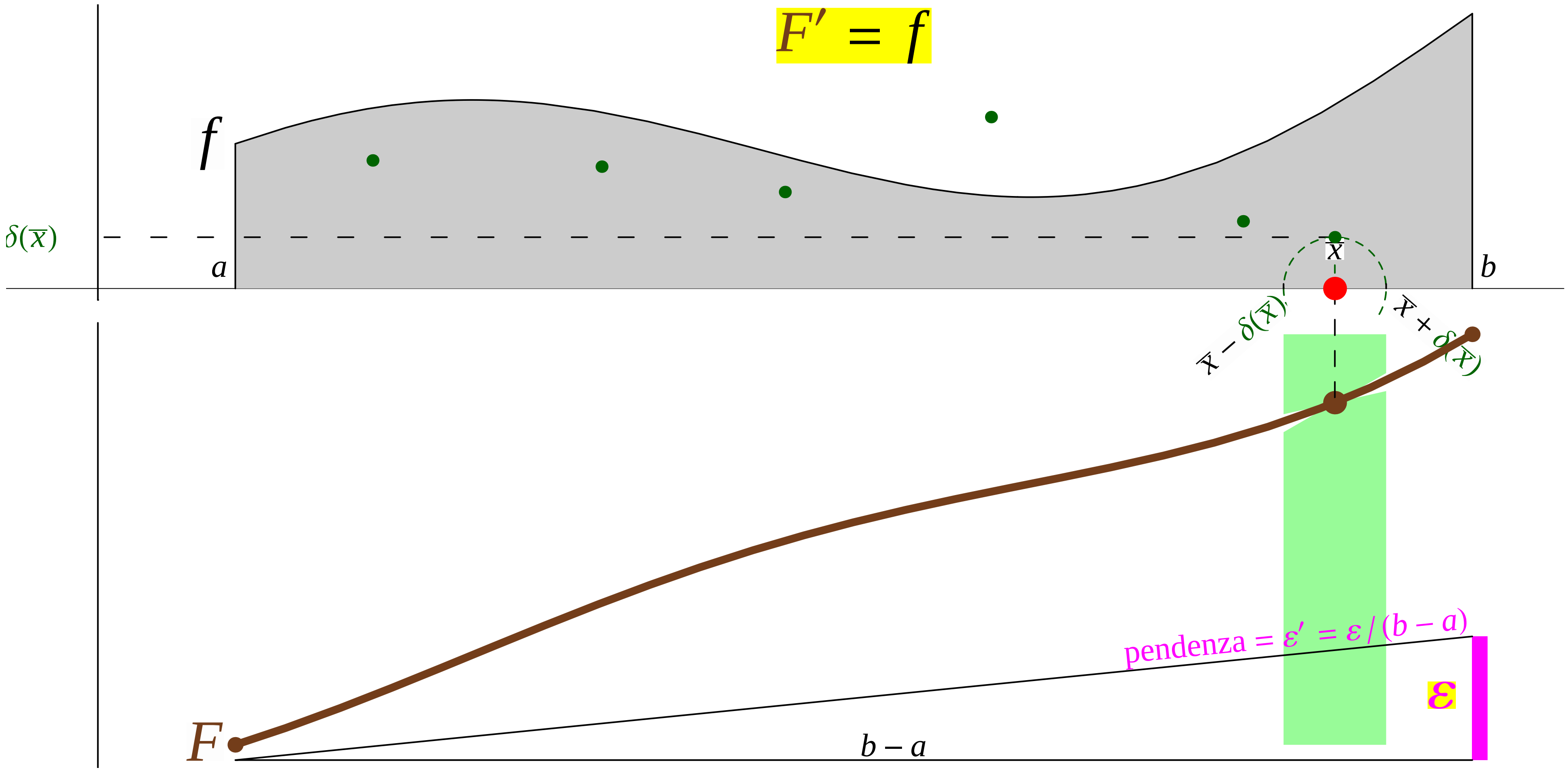
- Riportiamo il valore di $\delta(\bar{x})$ in ordinata.
- Cambiando il valore di $\bar{x}$ ricaviamo un altro valore di $\delta(\bar{x})$.
- Possiamo cambiare $\bar{x}$ ancora



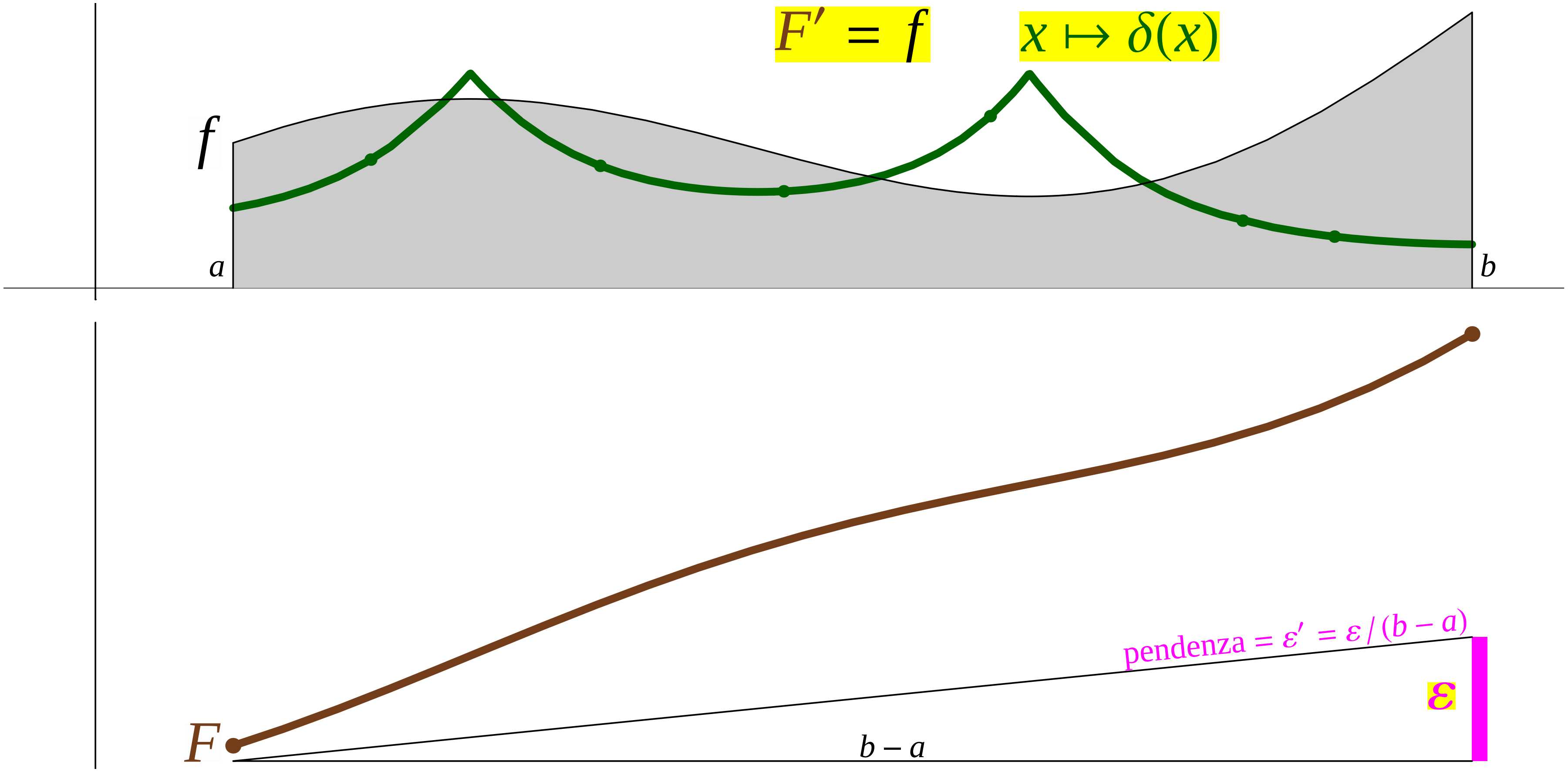
- Riportiamo il valore di $\delta(\bar{x})$ in ordinata.
- Cambiando il valore di $\bar{x}$ ricaviamo un altro valore di $\delta(\bar{x})$.
- Possiamo cambiare $\bar{x}$ ancora, ancora



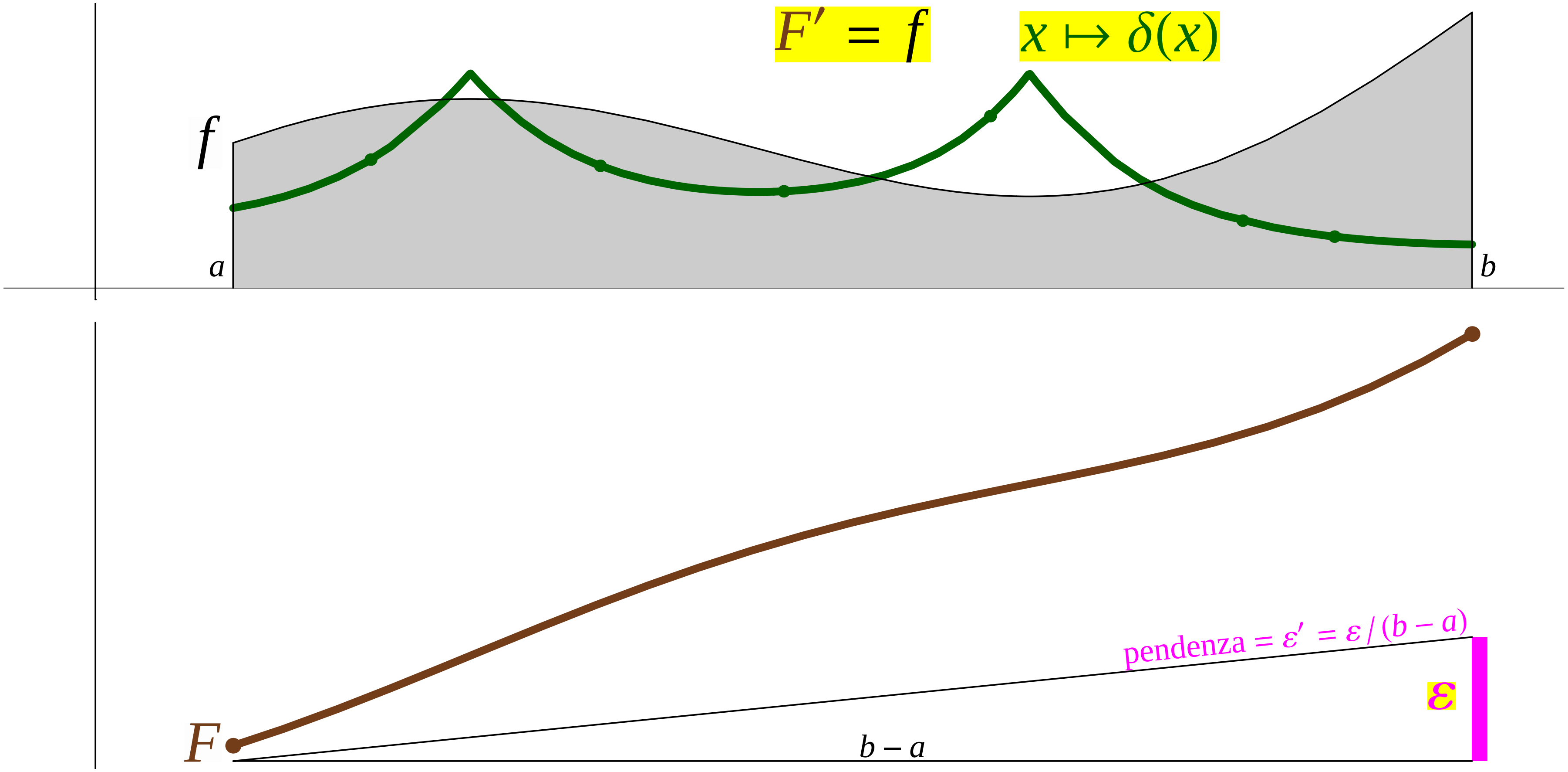
- Riportiamo il valore di $\delta(\bar{x})$ in ordinata.
- Cambiando il valore di $\bar{x}$ ricaviamo un altro valore di $\delta(\bar{x})$.
- Possiamo cambiare $\bar{x}$ ancora, ancora, ancora



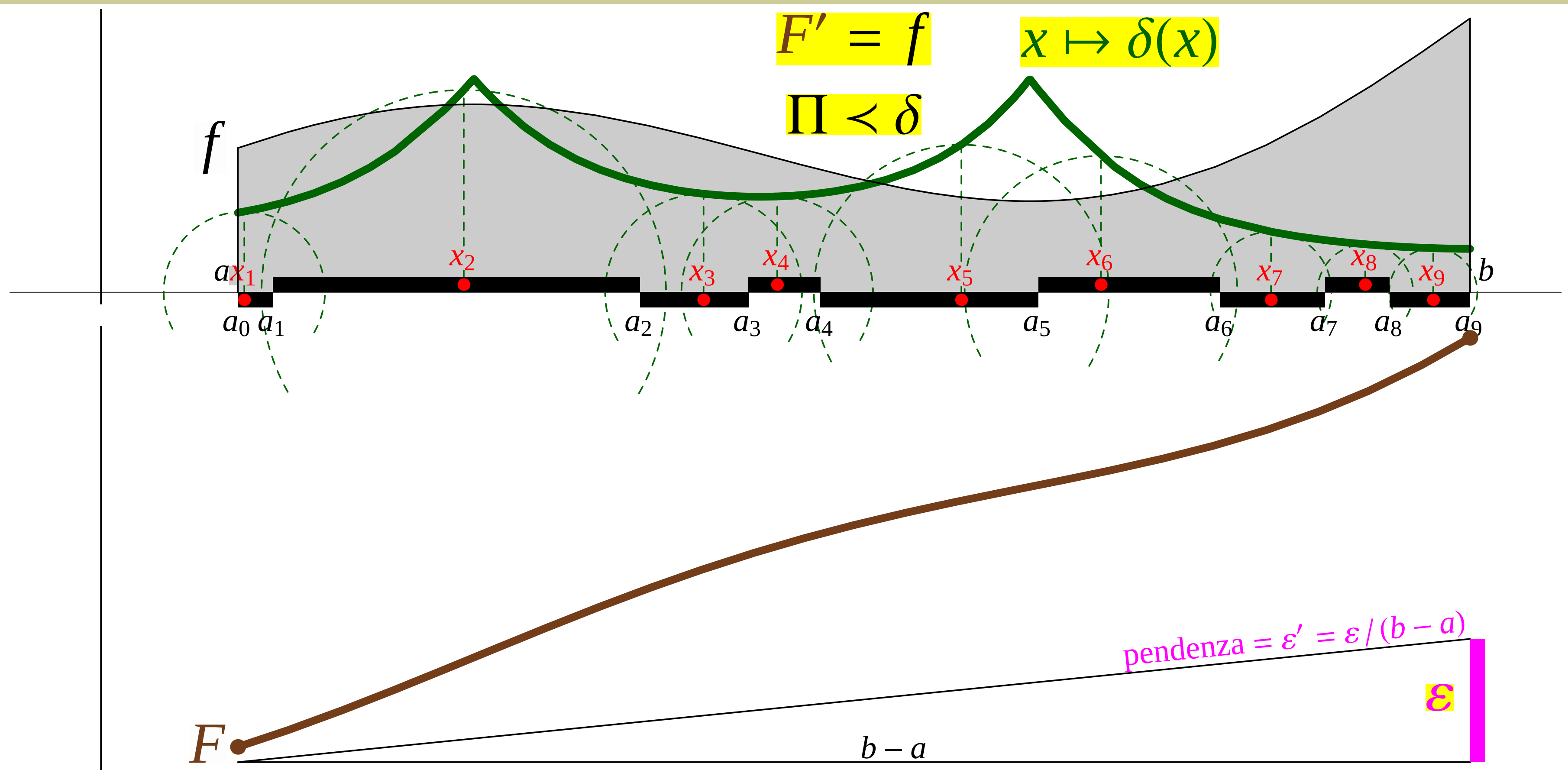
- Riportiamo il valore di $\delta(\bar{x})$ in ordinata.
- Cambiando il valore di $\bar{x}$ ricaviamo un altro valore di $\delta(\bar{x})$.
- Possiamo cambiare $\bar{x}$ ancora, ancora, ancora, ancora. . .



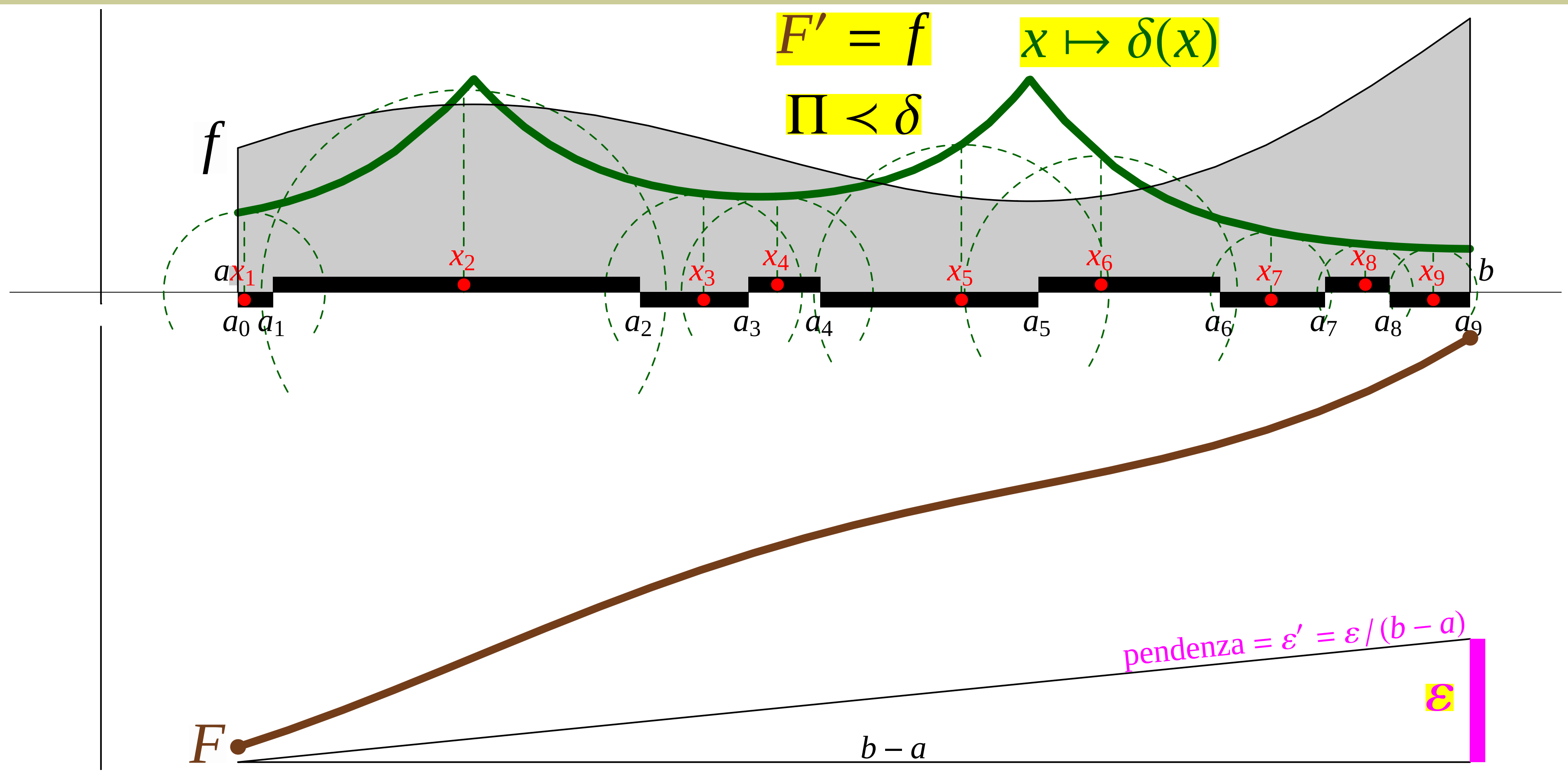
- **C'è un valore** $\delta(\bar{x}) > 0$ **per ogni** $\bar{x} \in [a, b]$**.**



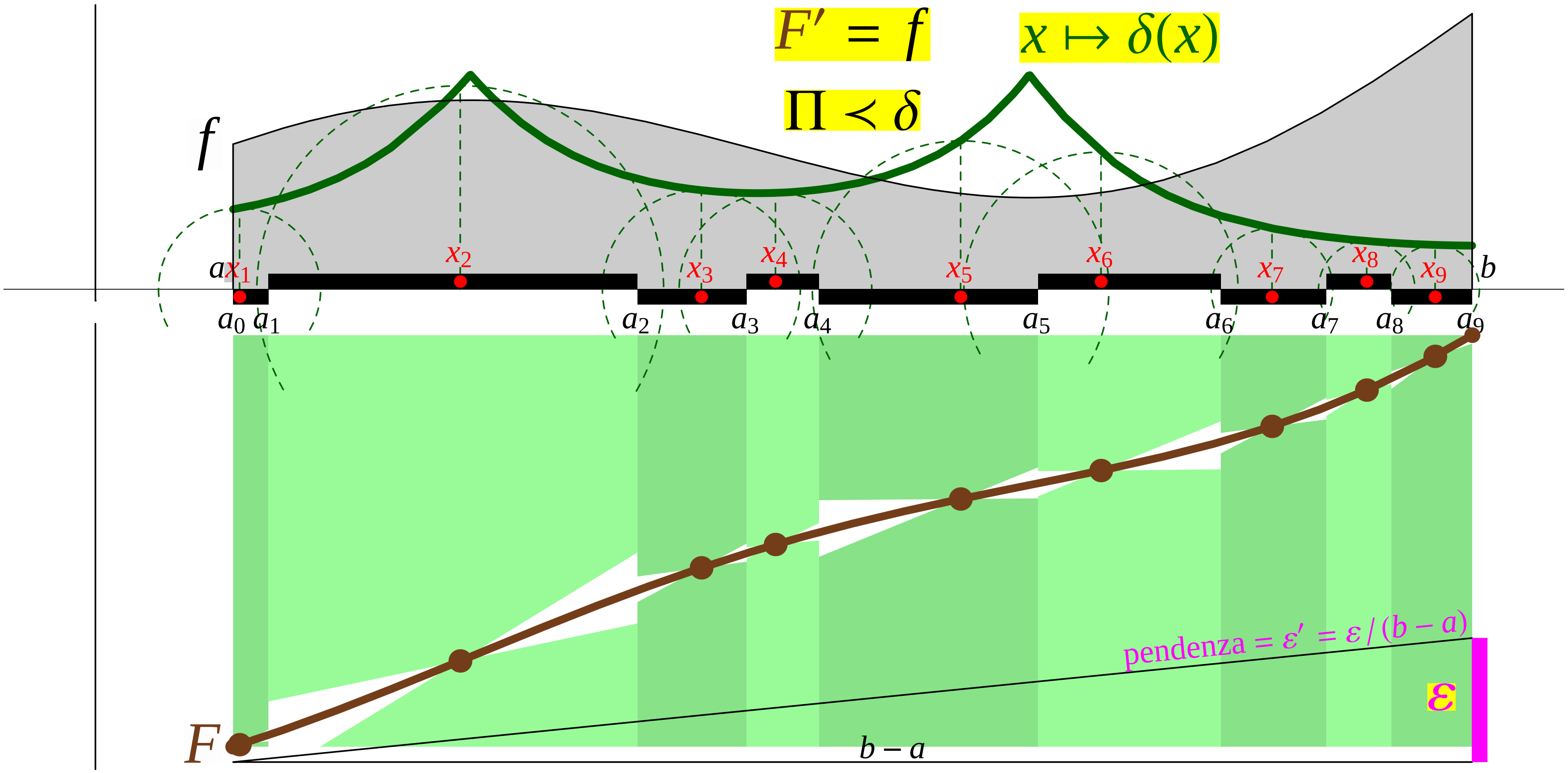
- **C'è un valore** $\delta(\bar{x}) > 0$ **per ogni** $\bar{x} \in [a, b]$.
- **Insomma, abbiamo un calibro** $\delta(x)$ **su** $[a, b]$.



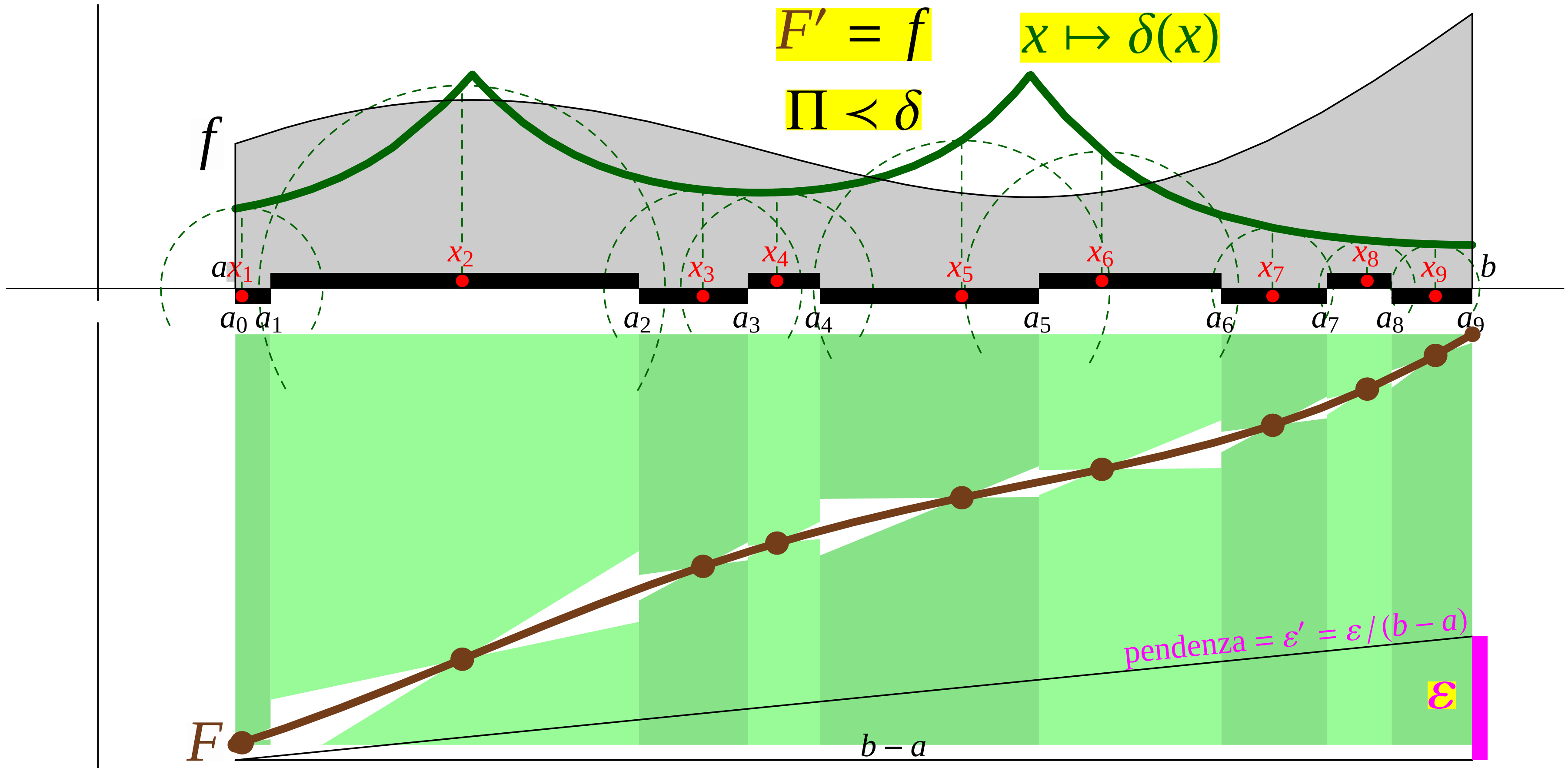
- C'è un valore $\delta(\bar{x}) > 0$ per ogni $\bar{x} \in [a, b]$.
- Insomma, abbiamo un calibro $\delta(x)$ su $[a, b]$.
- Sia Π una ***qualsiasi*** suddivisione tale che $\Pi \prec \delta$.



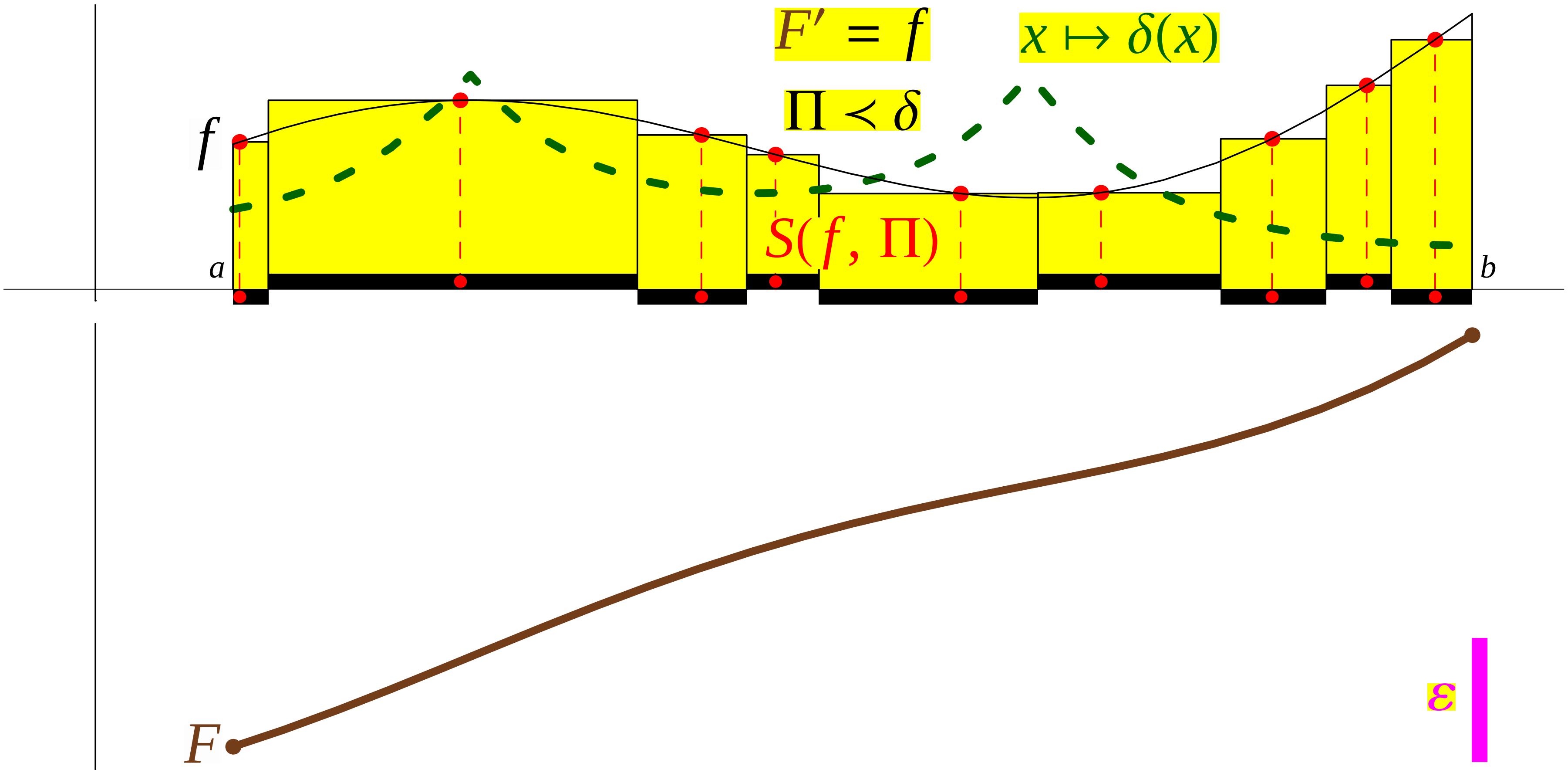
- C'è un valore $\delta(\bar{x}) > 0$ per ogni $\bar{x} \in [a, b]$.
- Insomma, **abbiamo un calibro** $\delta(x)$ su $[a, b]$.
- Sia Π una ***qualsiasi*** suddivisione tale che $\Pi \prec \delta$.
  - Sia n il numero di intervallini di Π.



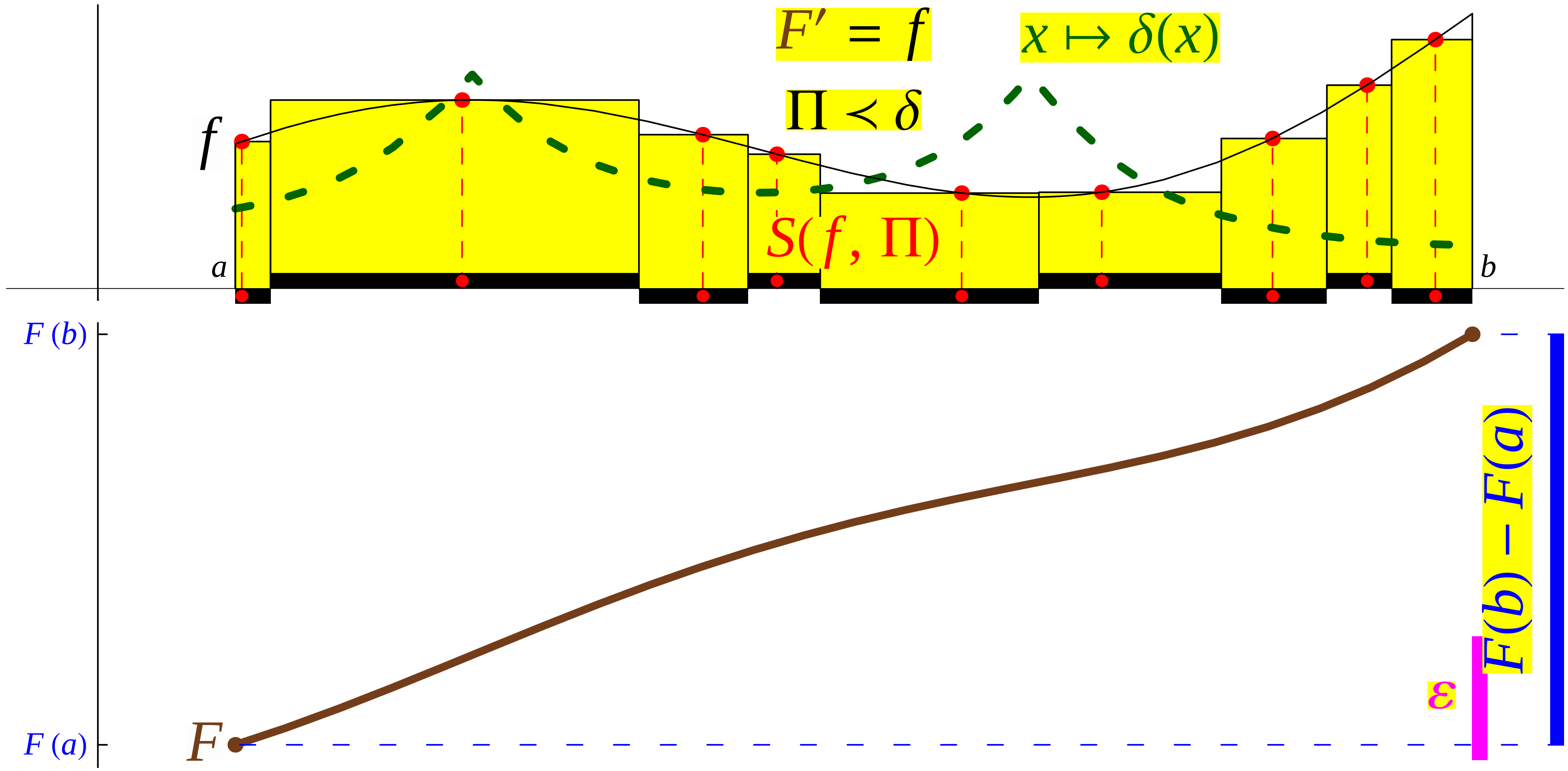
- Si tratta di sfruttare il lemma,



- Si tratta di sfruttare il lemma,
- cioè il fatto che il grafico di F è tutto costretto in un numero finito di “imbuti”.

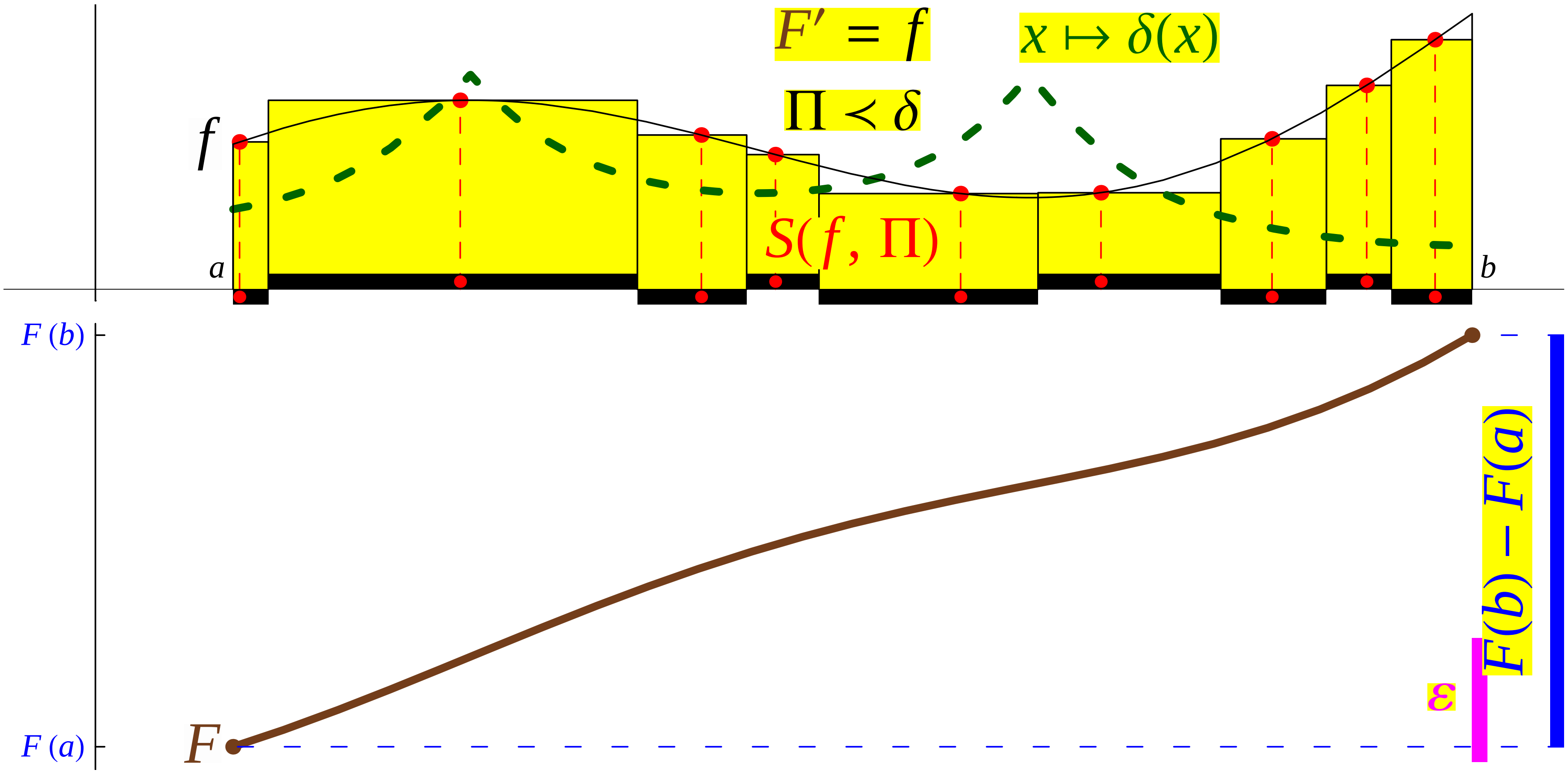


- **Consideriamo la somma di Riemann $S(\Pi, f)$ associata a Π, cioè l'area del plurirettangolo in figura.**

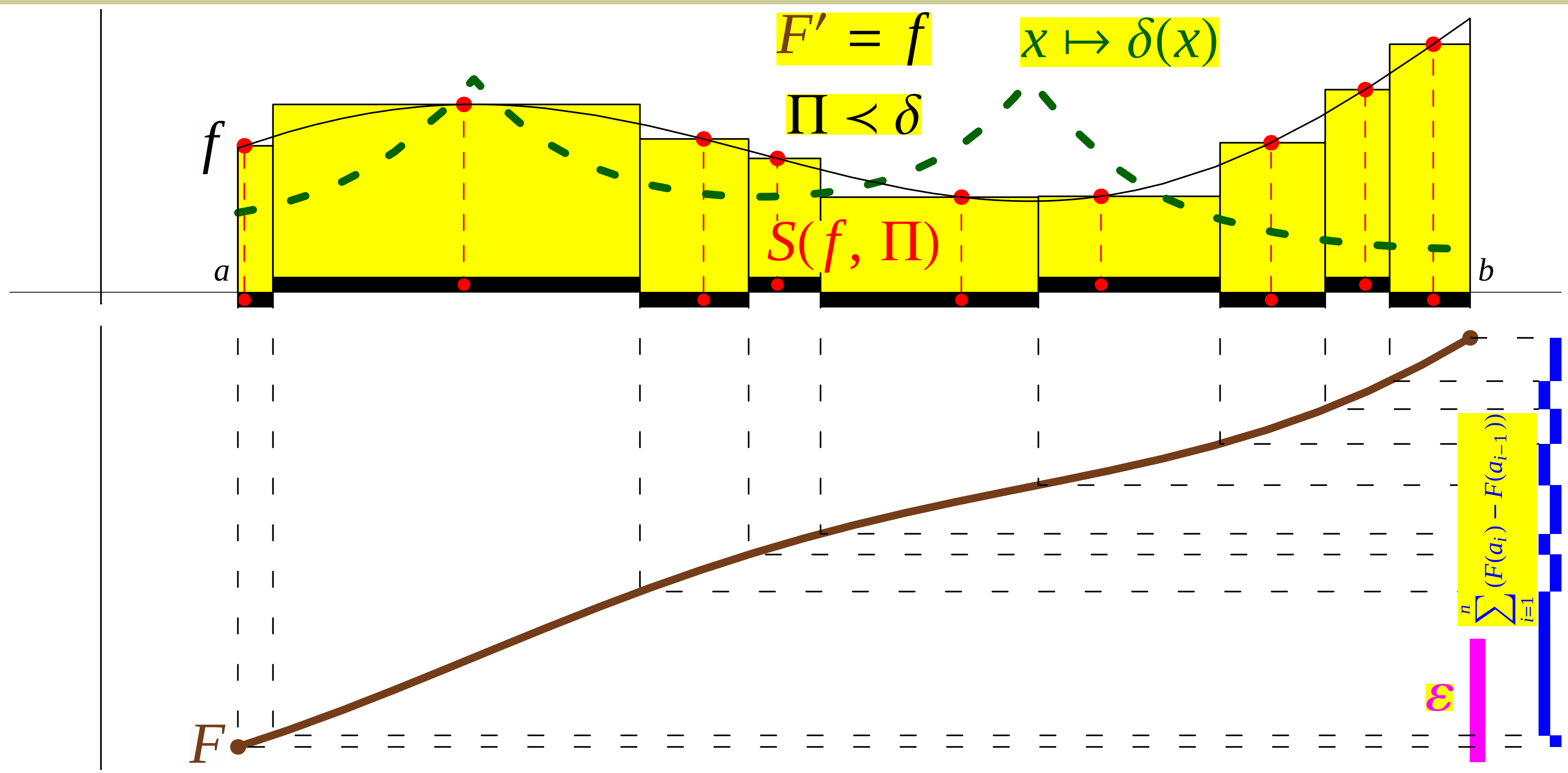


- Consideriamo la somma di Riemann $S(\Pi, f)$ associata a Π, cioè l'area del plurirettangolo in figura.
- Quest'area va confrontata colla quantità $F(b) - F(a)$,

Dimostr. del teor. fond.

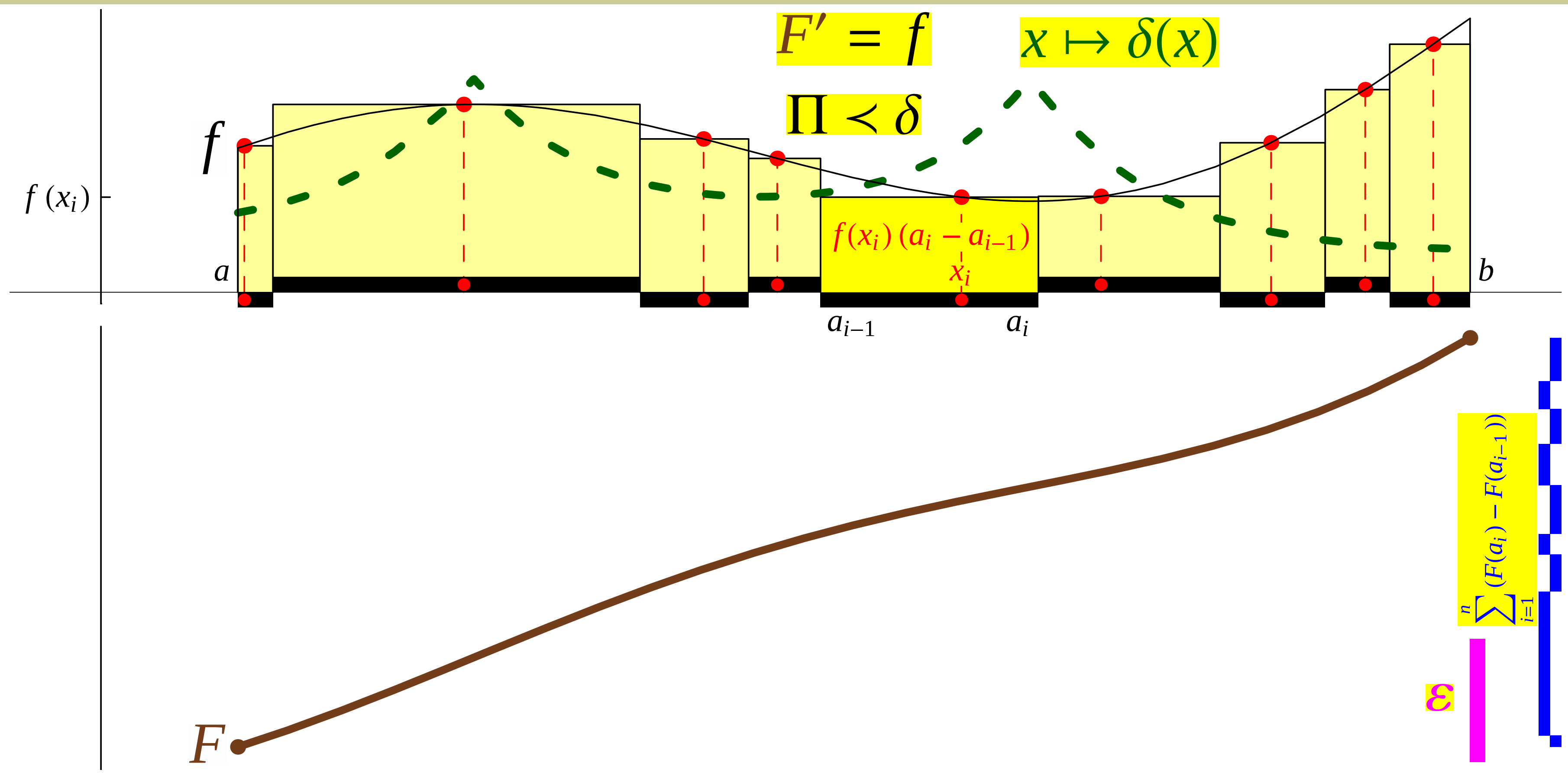


- Consideriamo la somma di Riemann $S(\Pi, f)$ associata a Π, cioè l'area del plurirettangolo in figura.
- Quest'area va confrontata colla quantità $F(b) - F(a)$,
  - e va dimostrato che la differenza fra le due non supera ε.

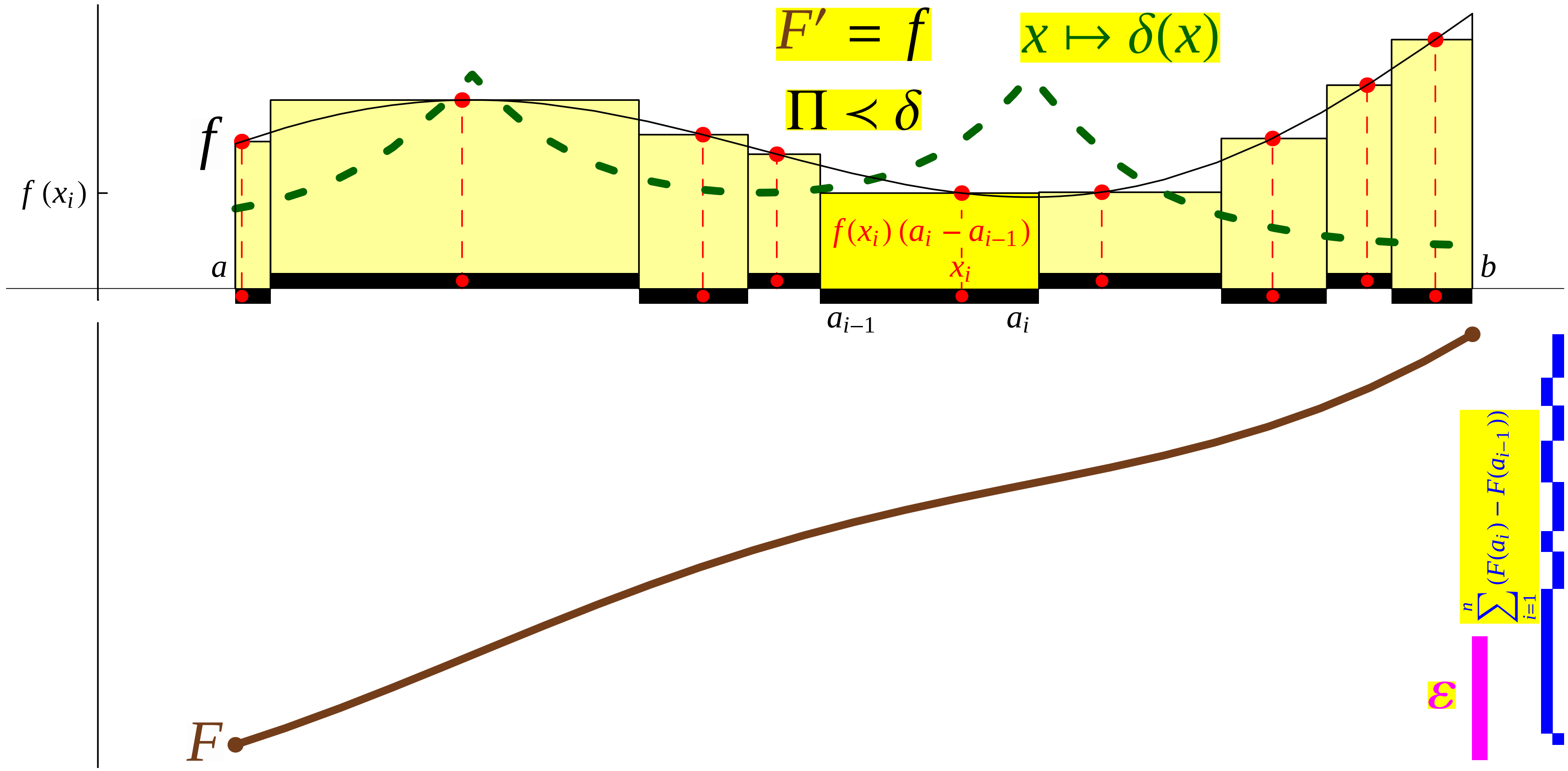


- "Telescopizziamo" l'incremento $F(b) - F(a)$:

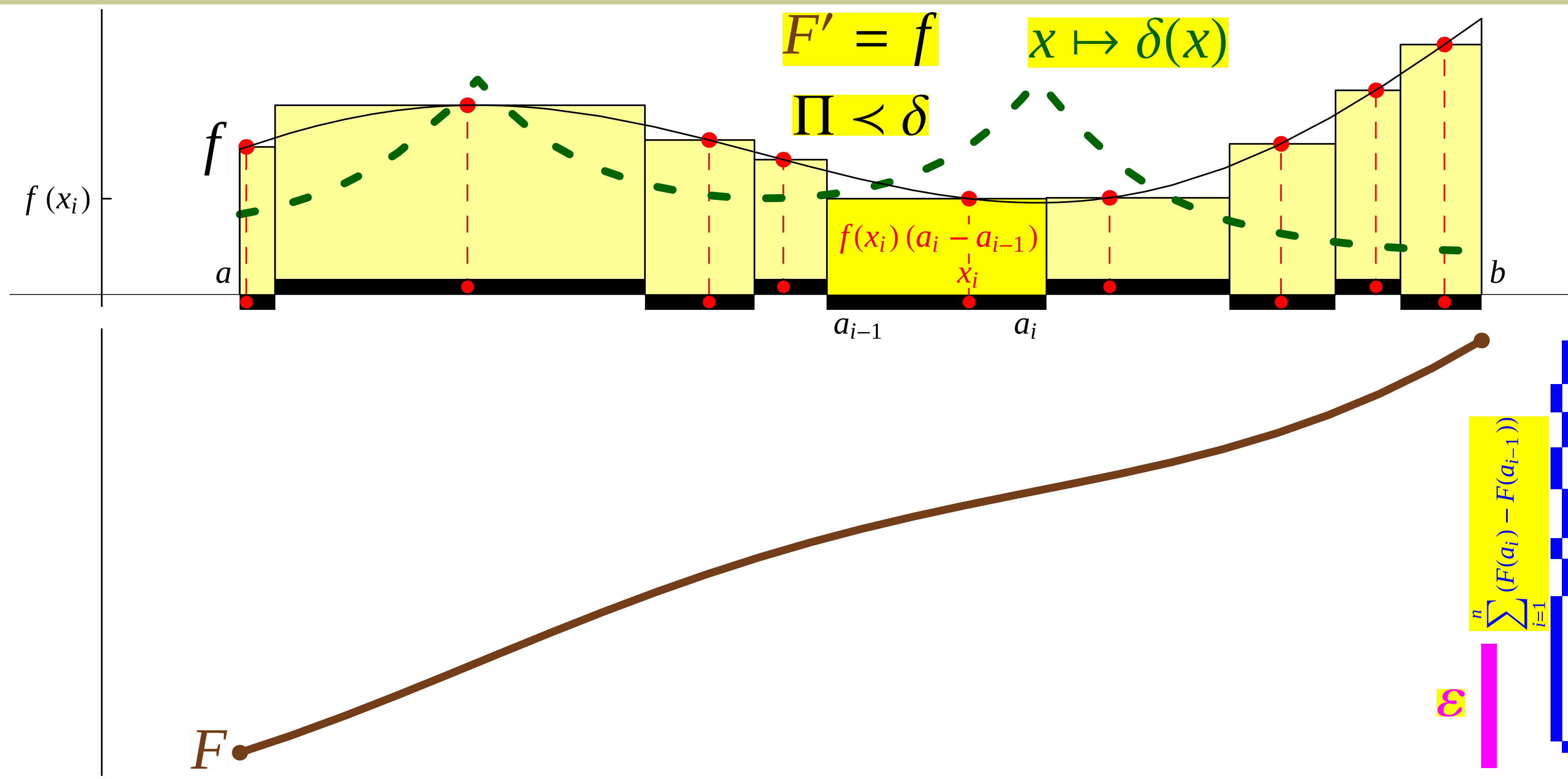
$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}\Big(F(a_i) - F(a_{i-1})\Big).$$



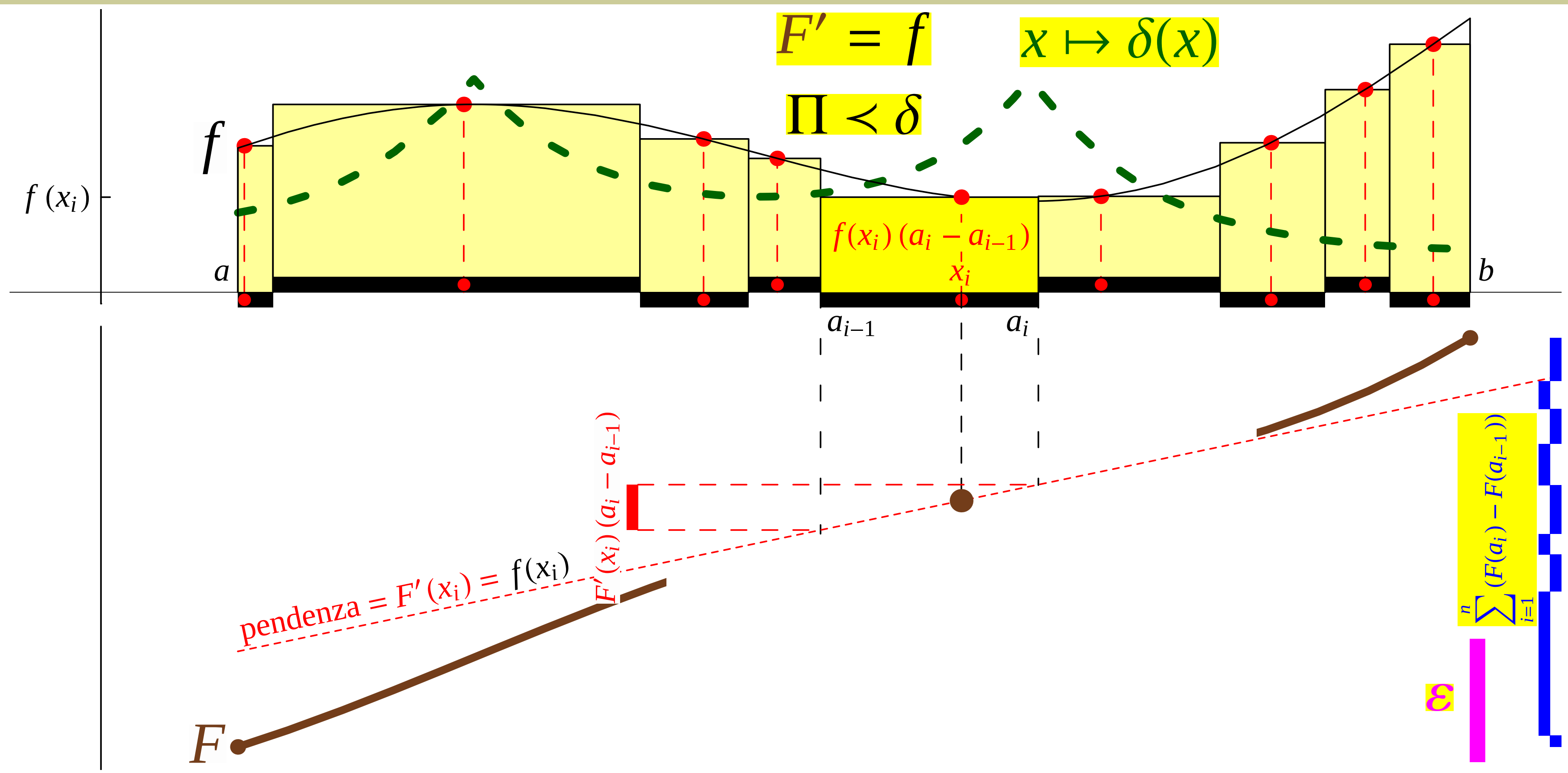
- **Concentriamoci sull'i-esimo rettangolino:**



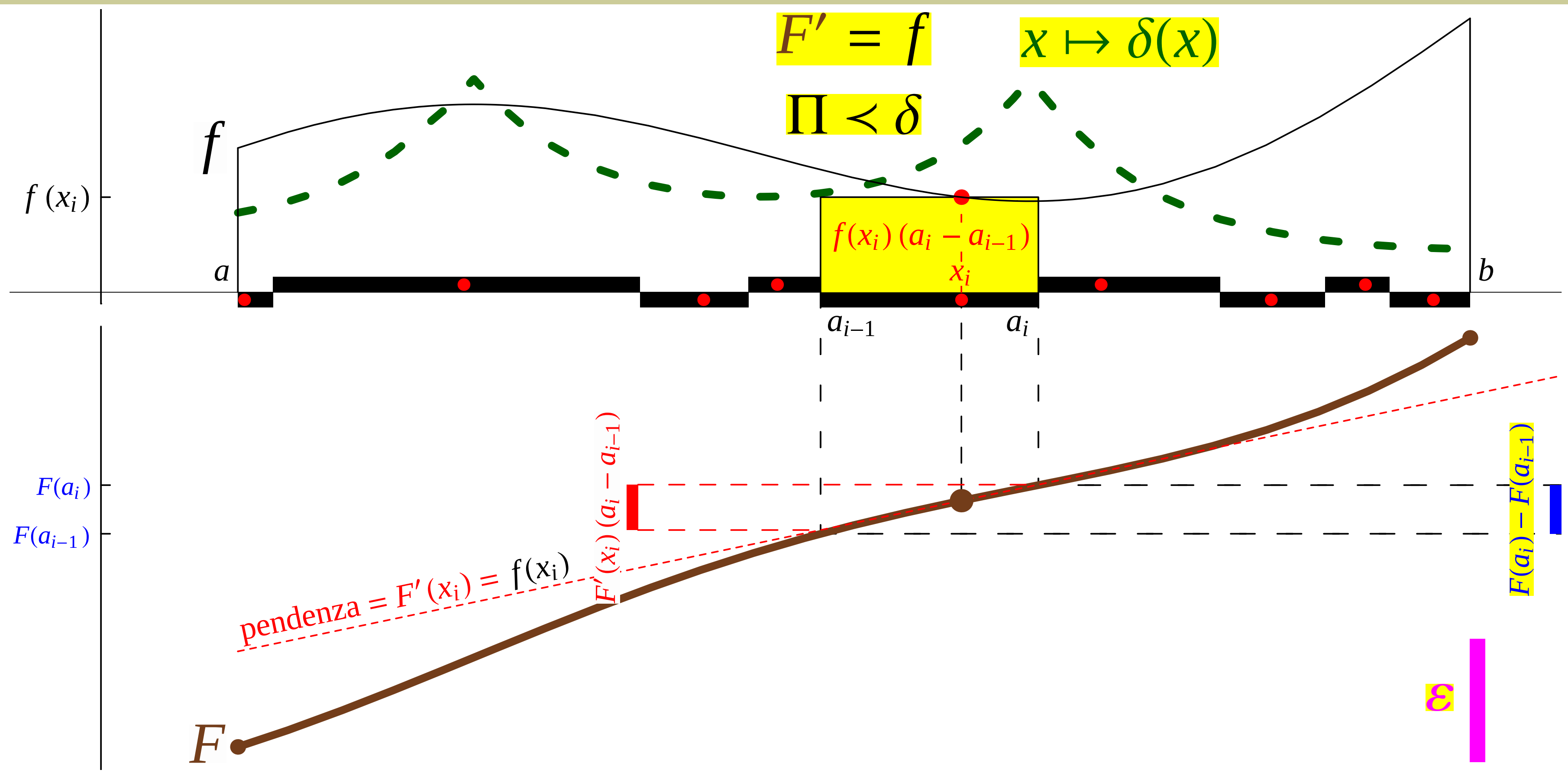
- Concentriamoci sull'i-esimo rettangolino:
- Vogliamo stimare la differenza fra



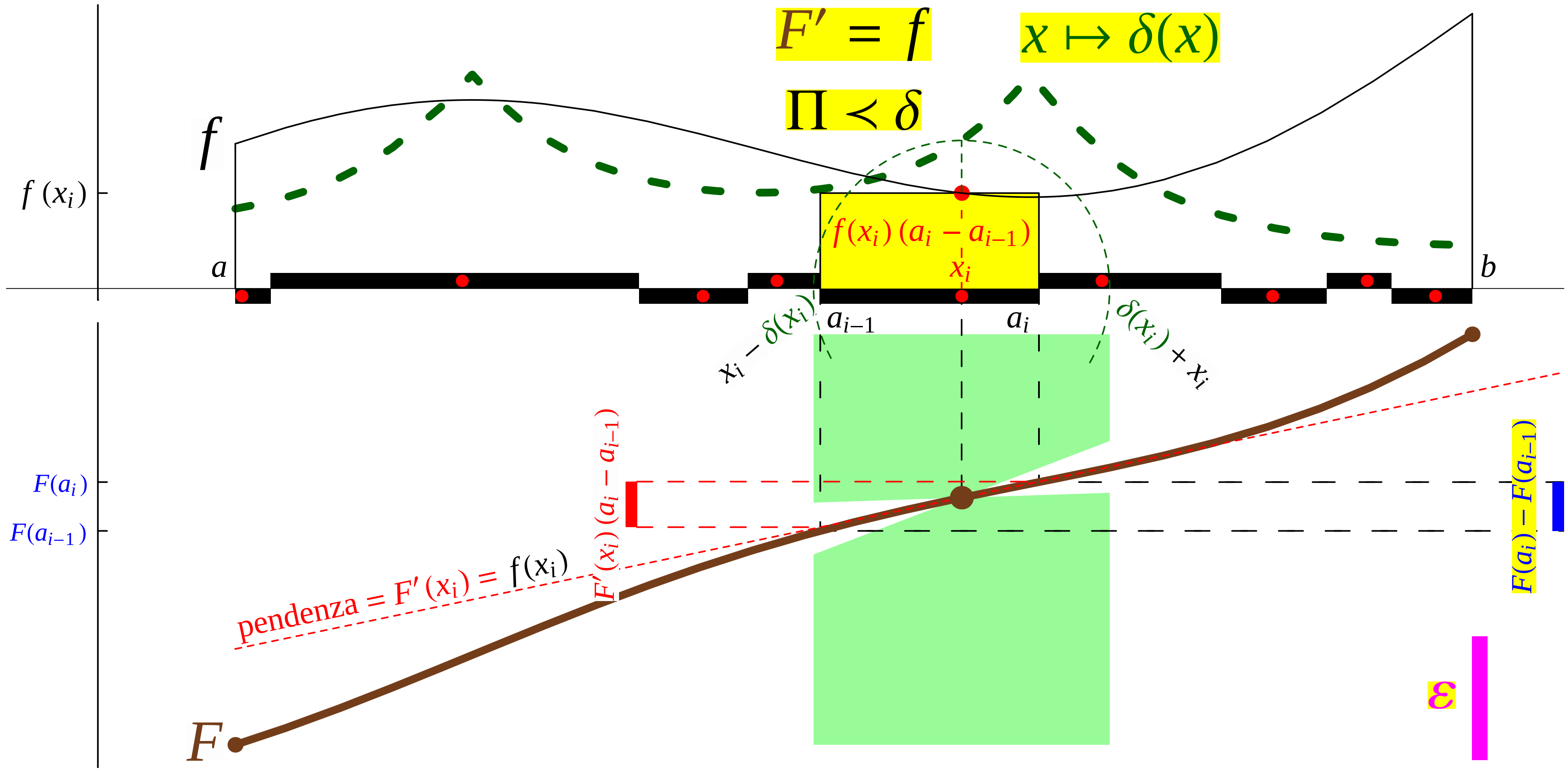
- Concentriamoci sull'i-esimo rettangolino:
- Vogliamo stimare la differenza fra
  - l'area del rettangolino, che è $f(x_i)(a_i - a_{i-1})$



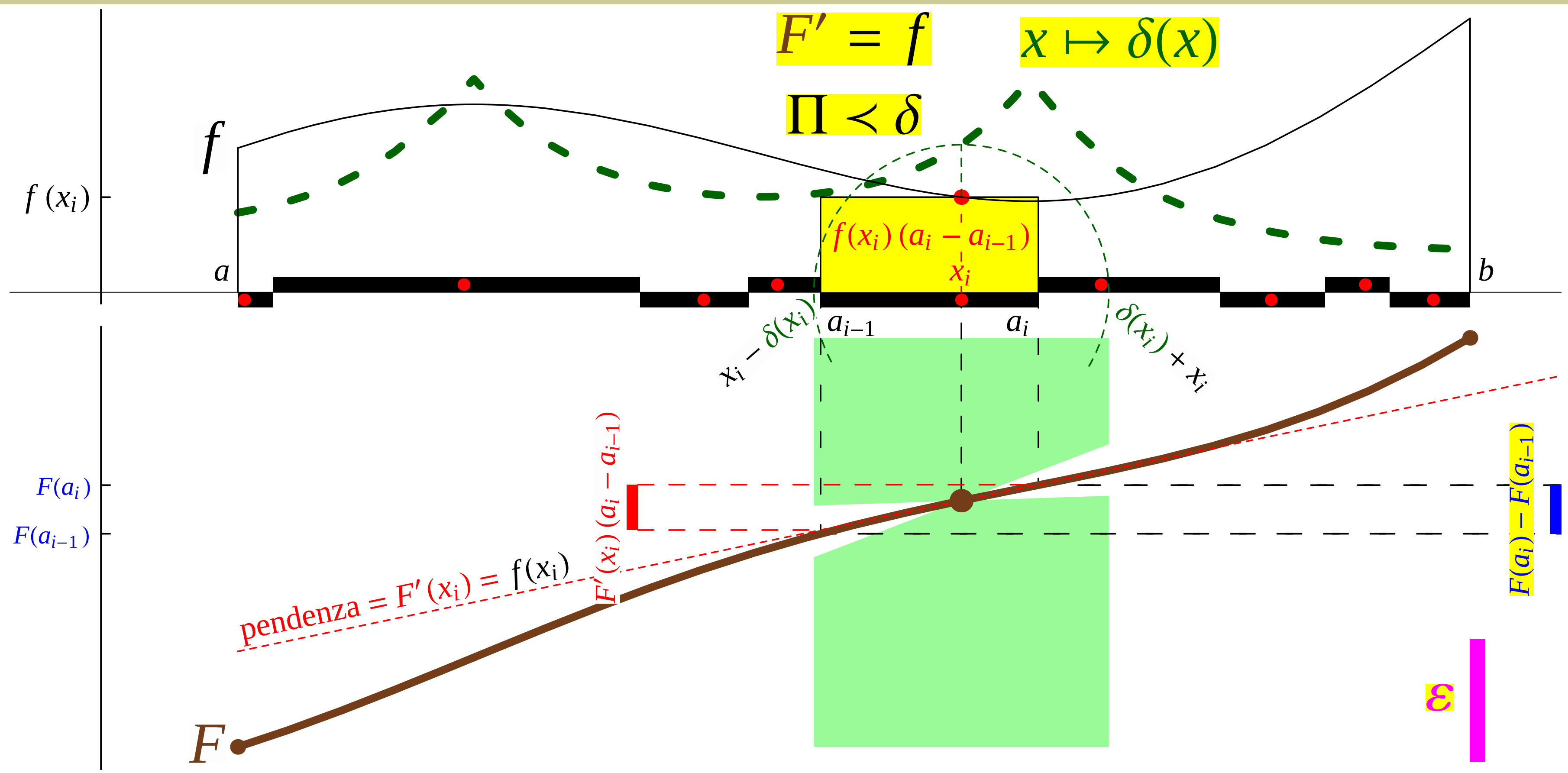
- **Concentriamoci sull'i-esimo rettangolino:**
- **Vogliamo stimare la differenza fra**
  - l'area del rettangolino, che è $f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = F'(x_i)(a_i - a_{i-1})$



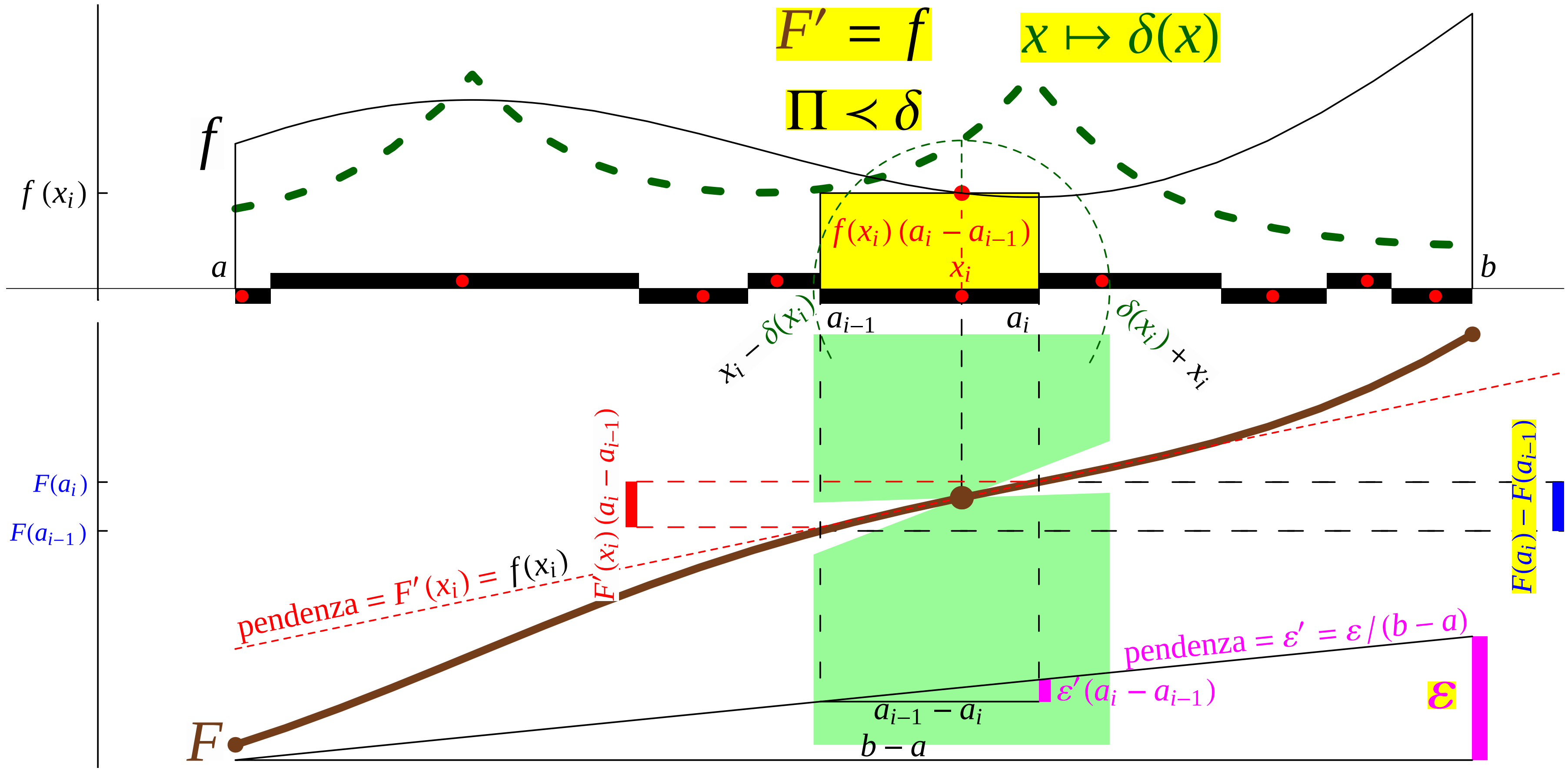
- **Concentriamoci sull'i-esimo rettangolino:**
- **Vogliamo stimare la differenza fra**
  - l'area del rettangolino, che è $f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = F'(x_i)(a_i - a_{i-1})$
  - e il relativo "incrementino", che è $F(a_i) - F(a_{i-1})$.



- Entra in gioco il lemma: poiché $\Pi \prec \delta$

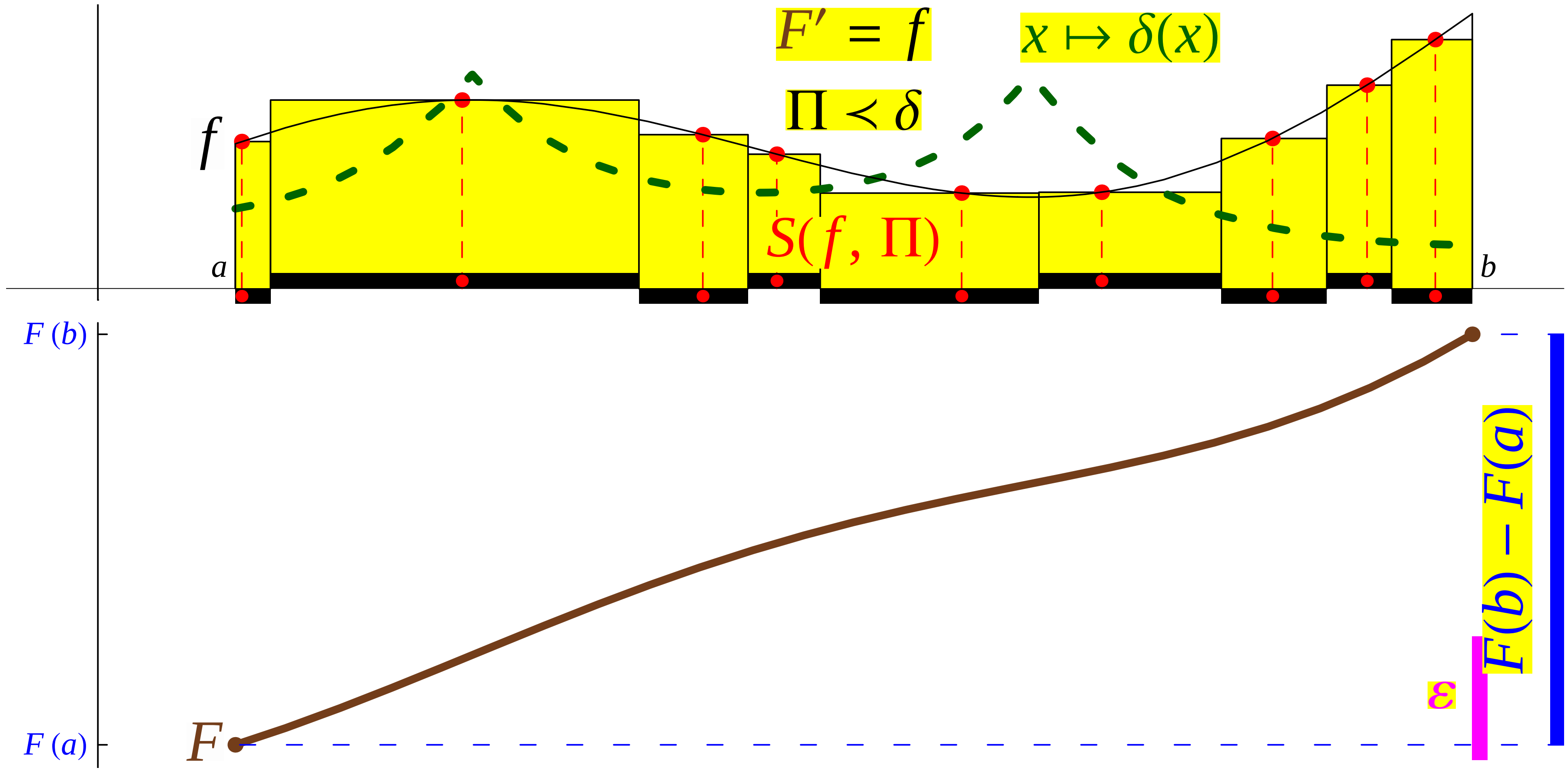


- **Entra in gioco il lemma: poiché $\Pi \prec \delta$**
  - abbiamo che $x_i - \delta(x_i) \le a_{i-1} \le x_i \le a_i \le x_i + \delta(x_i)$.



- **Entra in gioco il lemma: poiché $\Pi \prec \delta$**
  - abbiamo che $x_i - \delta(x_i) \le a_{i-1} \le x_i \le a_i \le x_i + \delta(x_i)$.
  - Per il lemma quindi

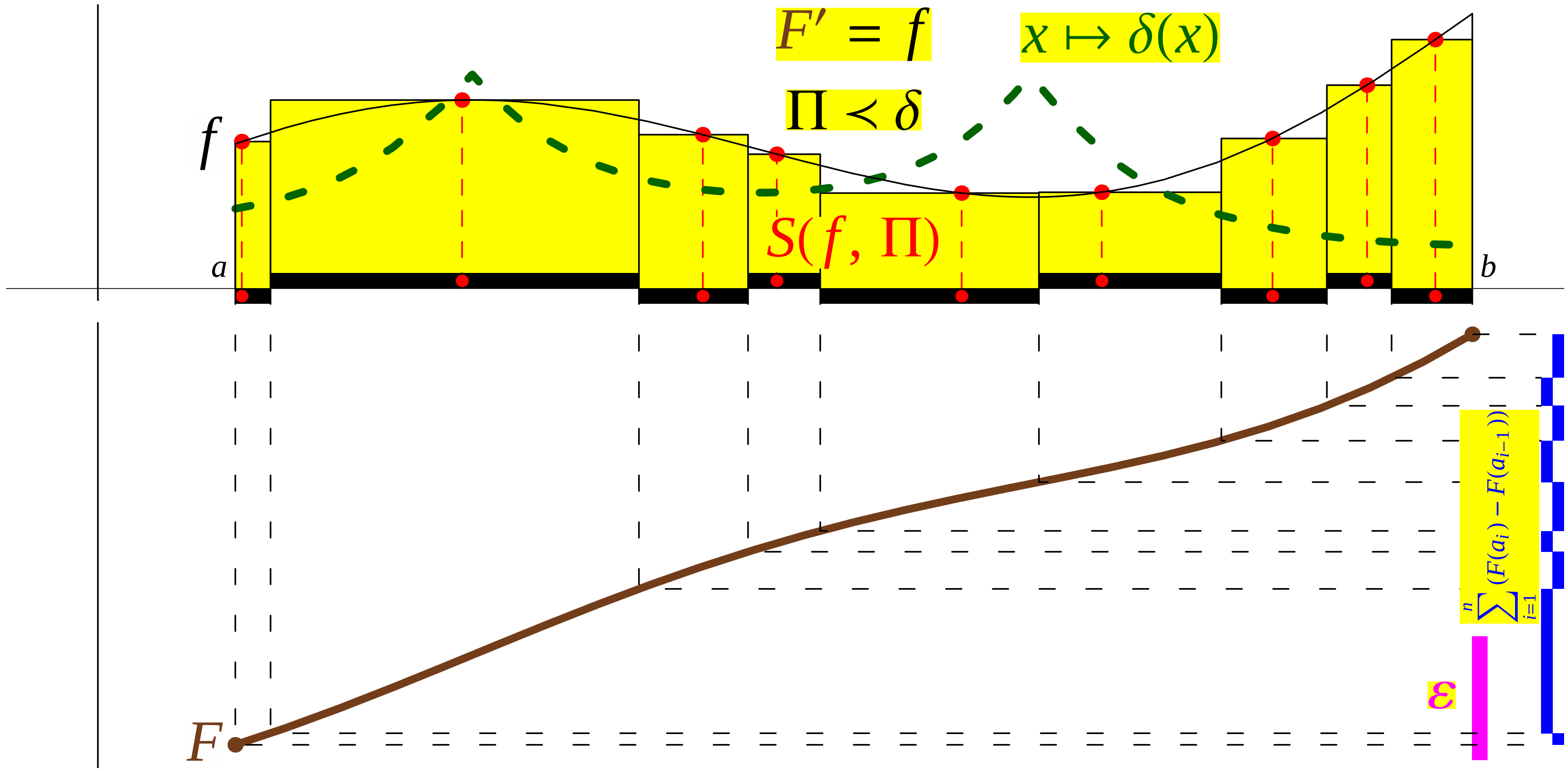
$$\left| F'(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big) \right| \le \varepsilon'(a_i - a_{i-1})\,.$$



- Espandiamo la differenza

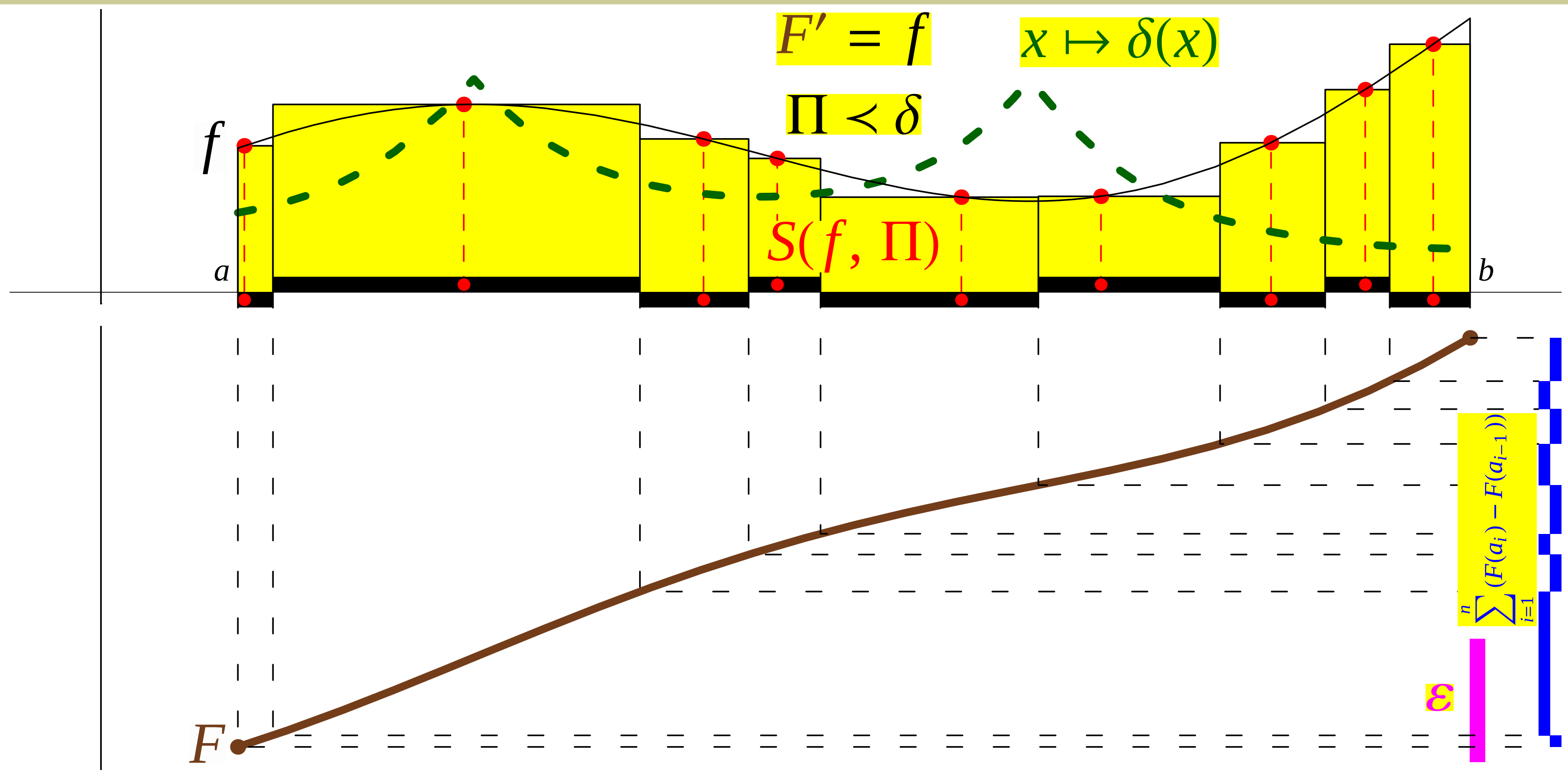
$$\left| S(f, \Pi) - \Big(F(b) - F(a) \Big) \right|$$

e lavoriamoci:



$$\left| S(f,\Pi) - \big(F(b) - F(a)\big) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big) \right| =$$

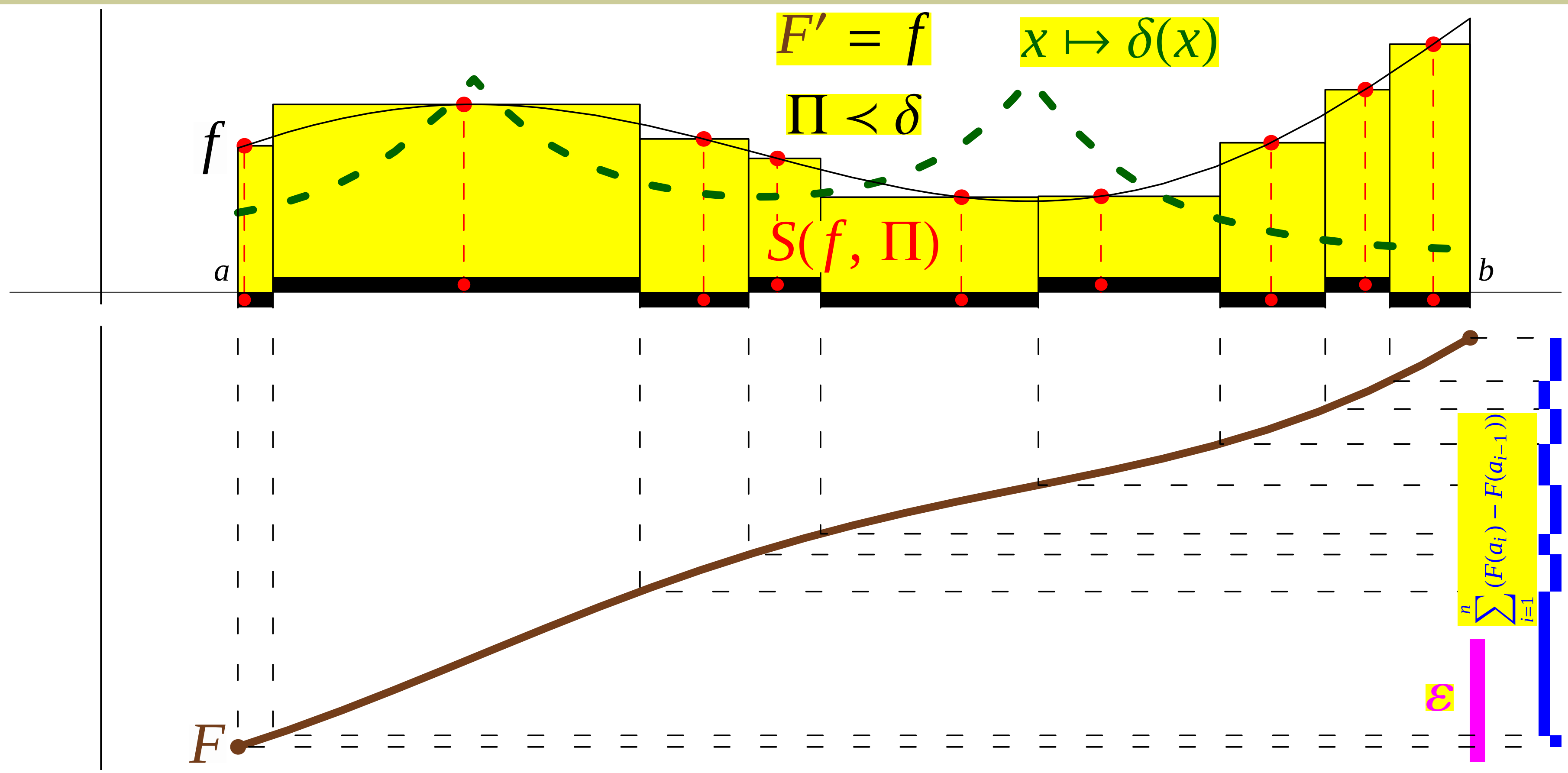
(espandendo)



$$\boxed{\left| S(f,\Pi) - \big(F(b) - F(a)\big) \right|} = \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big) \Big) \right|$$

(raccogliendo la somma)

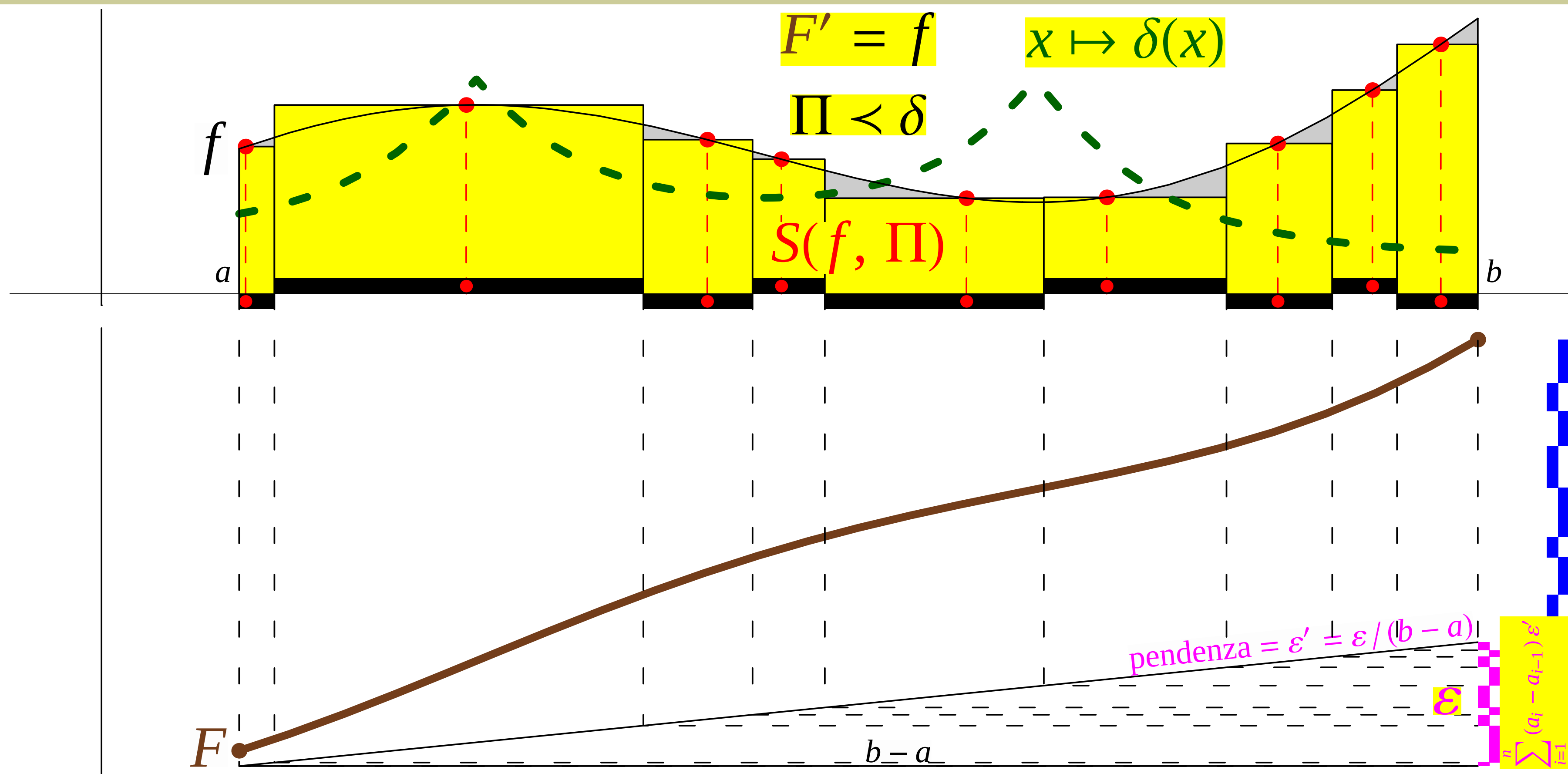


$$\boxed{\left|S(f,\Pi)-\big(F(b)-F(a)\big)\right|} = \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i-a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\big(F(a_i)-F(a_{i-1})\big)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i)(a_i-a_{i-1}) - \big(F(a_i)-F(a_{i-1})\big)\Big)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)(a_i-a_{i-1}) - \big(F(a_i)-F(a_{i-1})\big)\right|$$

(disug. triangolare)

Dimostr. del teor. fond.

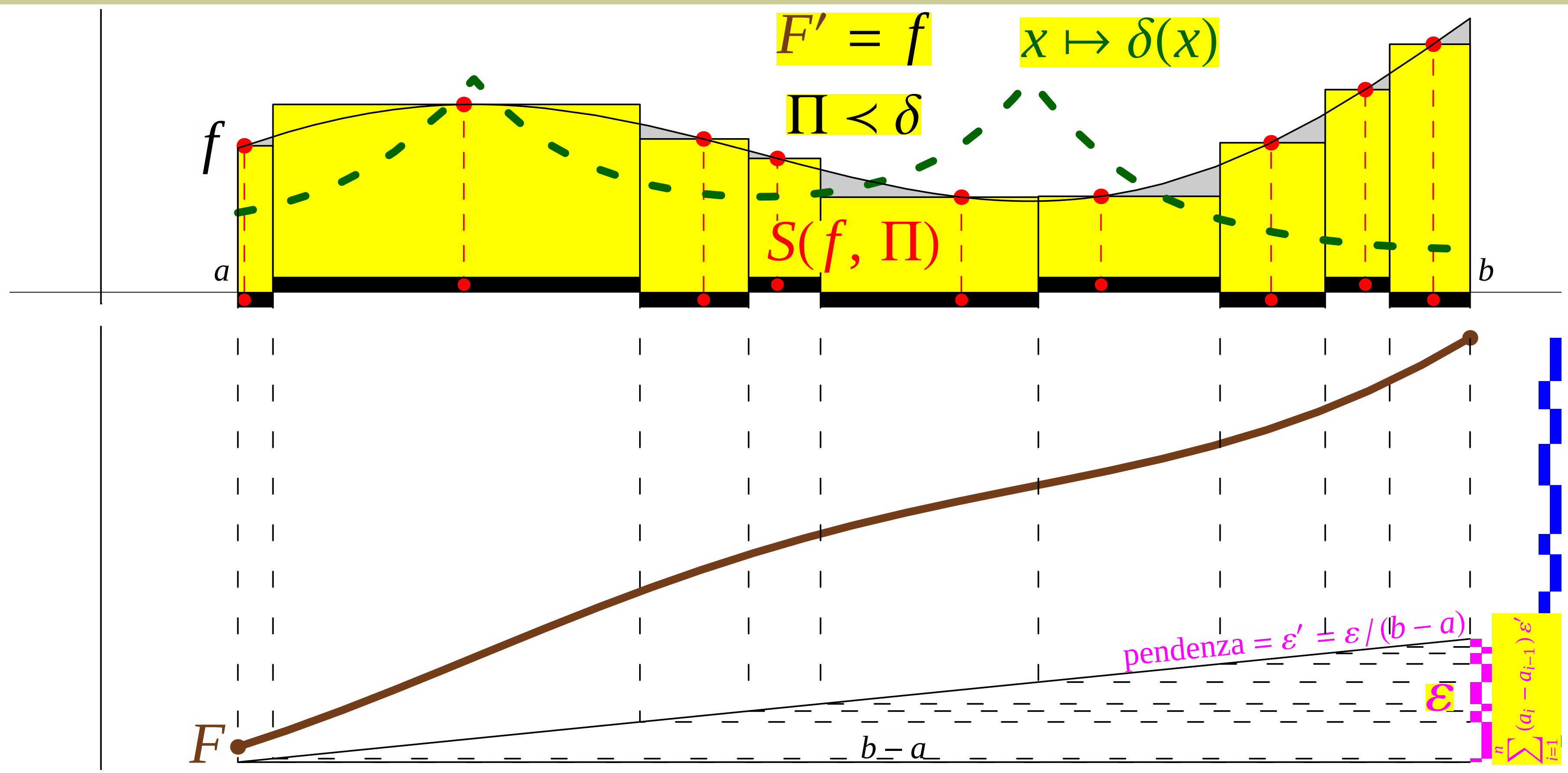


$$\boxed{\left|S(f,\Pi)-\big(F(b)-F(a)\big)\right|} = \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i-a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\big(F(a_i)-F(a_{i-1})\big)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i)(a_i-a_{i-1}) - \big(F(a_i)-F(a_{i-1})\big)\Big)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)(a_i-a_{i-1}) - \big(F(a_i)-F(a_{i-1})\big)\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon'(a_i-a_{i-1}) \qquad \text{(lemma)}$$

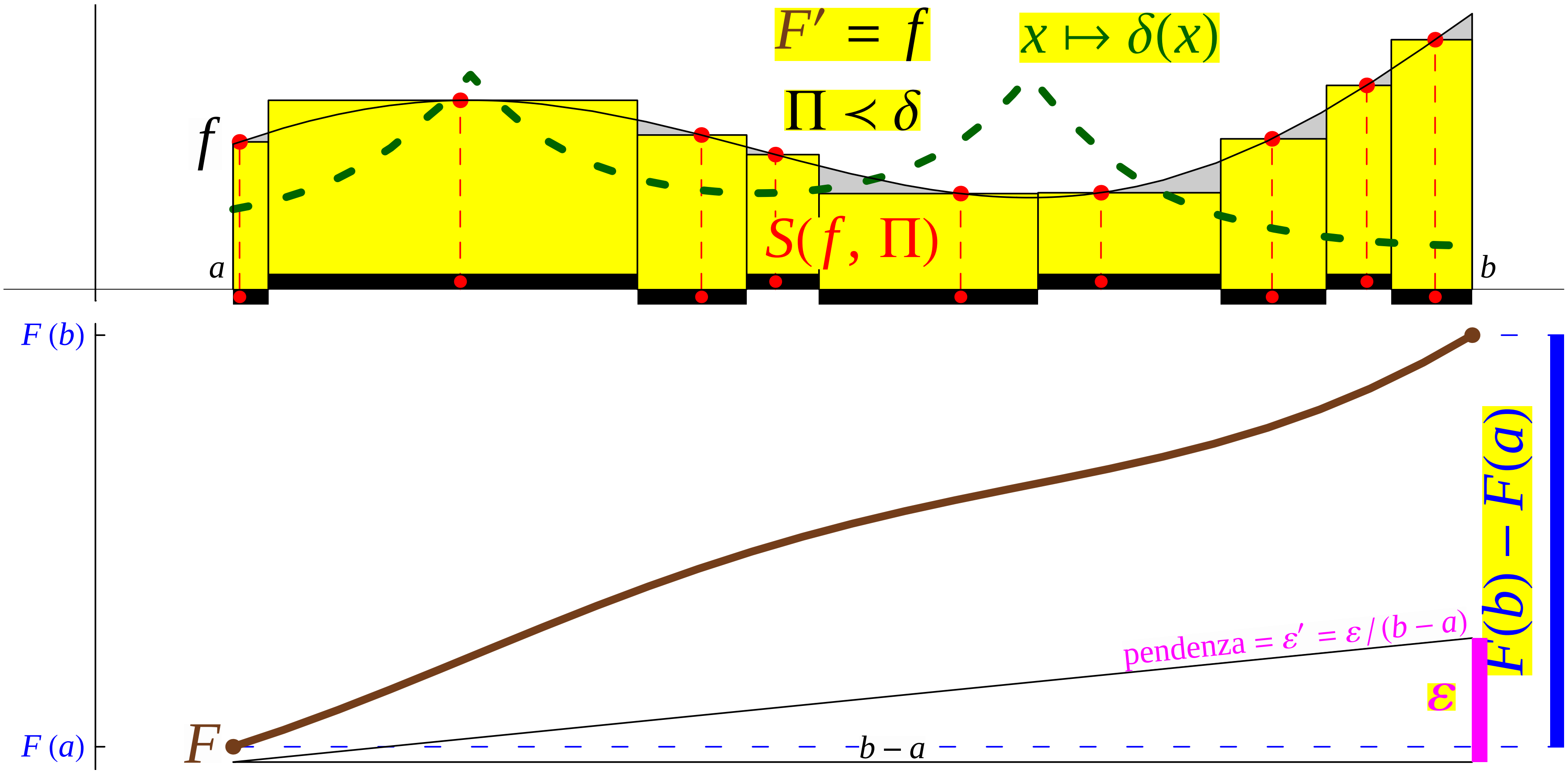
Dimostr. del teor. fond.



$$\boxed{\left|S(f,\Pi) - \big(F(b) - F(a)\big)\right|} = \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\Big)\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\right| \leq$$

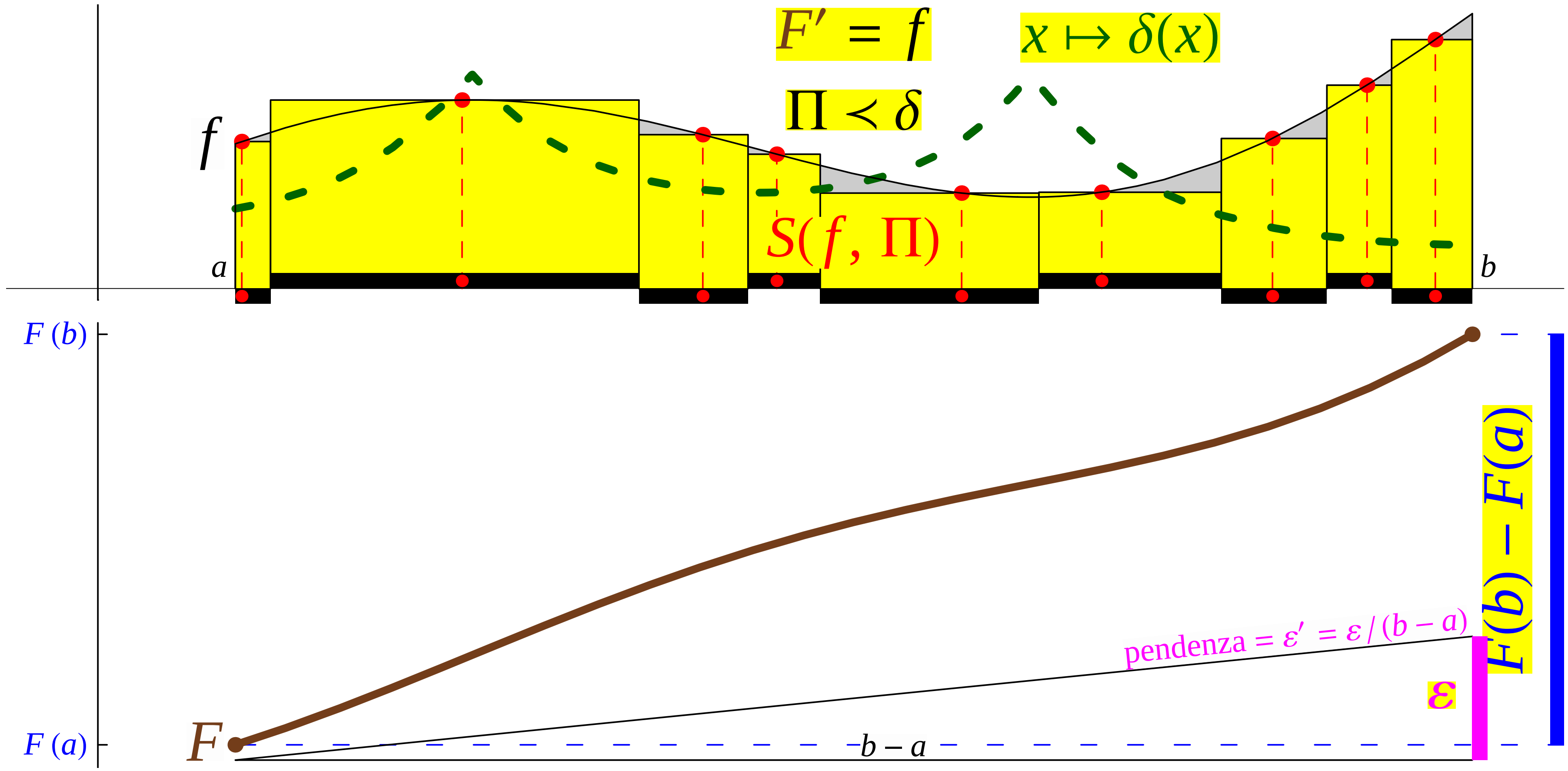
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon'(a_i - a_{i-1}) = \varepsilon' \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \qquad \text{(fattore comune } \varepsilon'\text{)}$$



$$\boxed{\left|S(f,\Pi) - \big(F(b) - F(a)\big)\right|} = \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\Big)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\right| \le$$

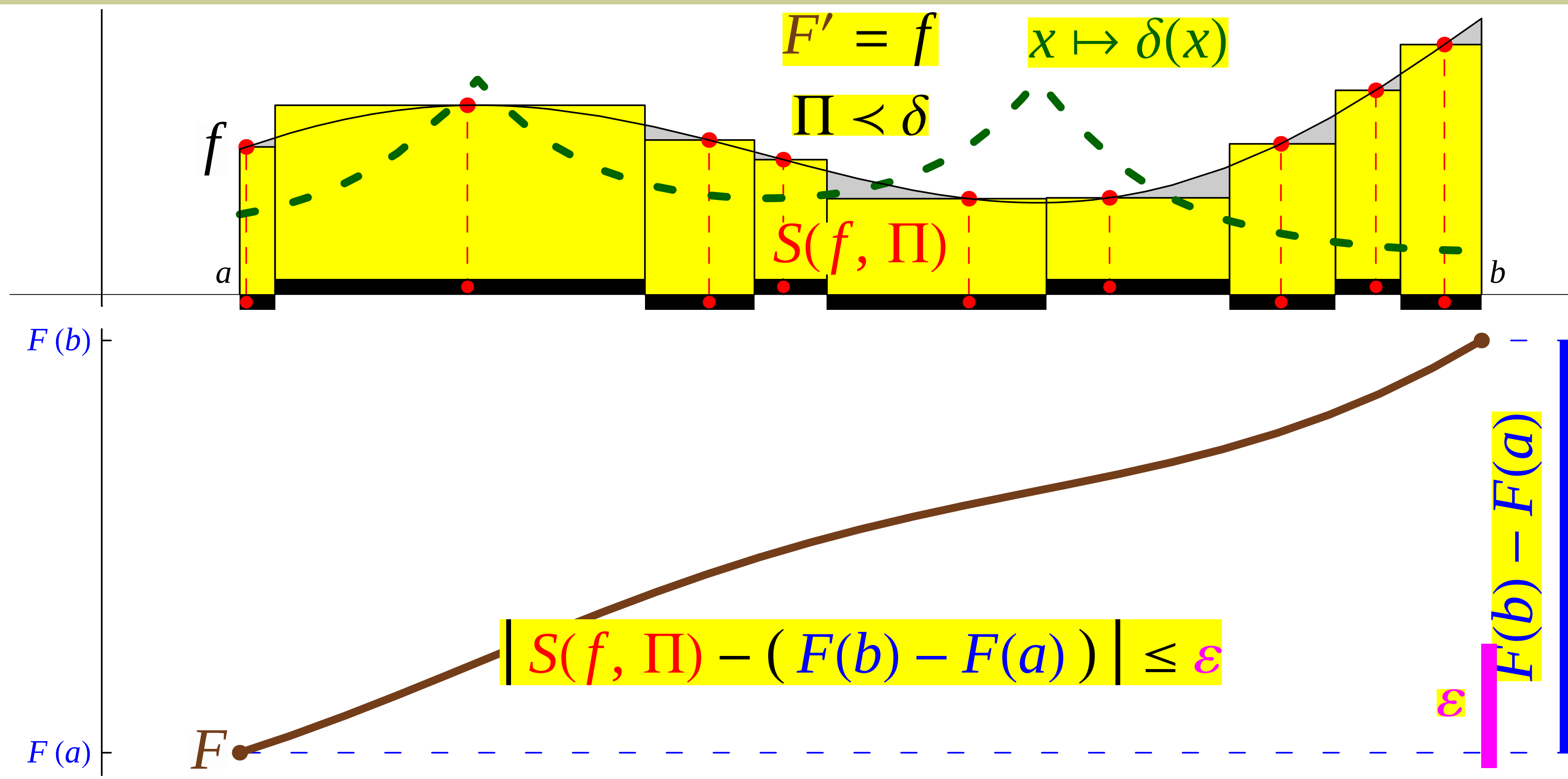
$$\le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon'(a_i - a_{i-1}) = \varepsilon' \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = \varepsilon'(b-a) \qquad \text{(somma telescopica)}$$



$$\left|S(f,\Pi) - \big(F(b) - F(a)\big)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\Big)\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon'(a_i - a_{i-1}) = \varepsilon' \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = \varepsilon'(b-a) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) \qquad \text{(definizione di } \varepsilon')$$

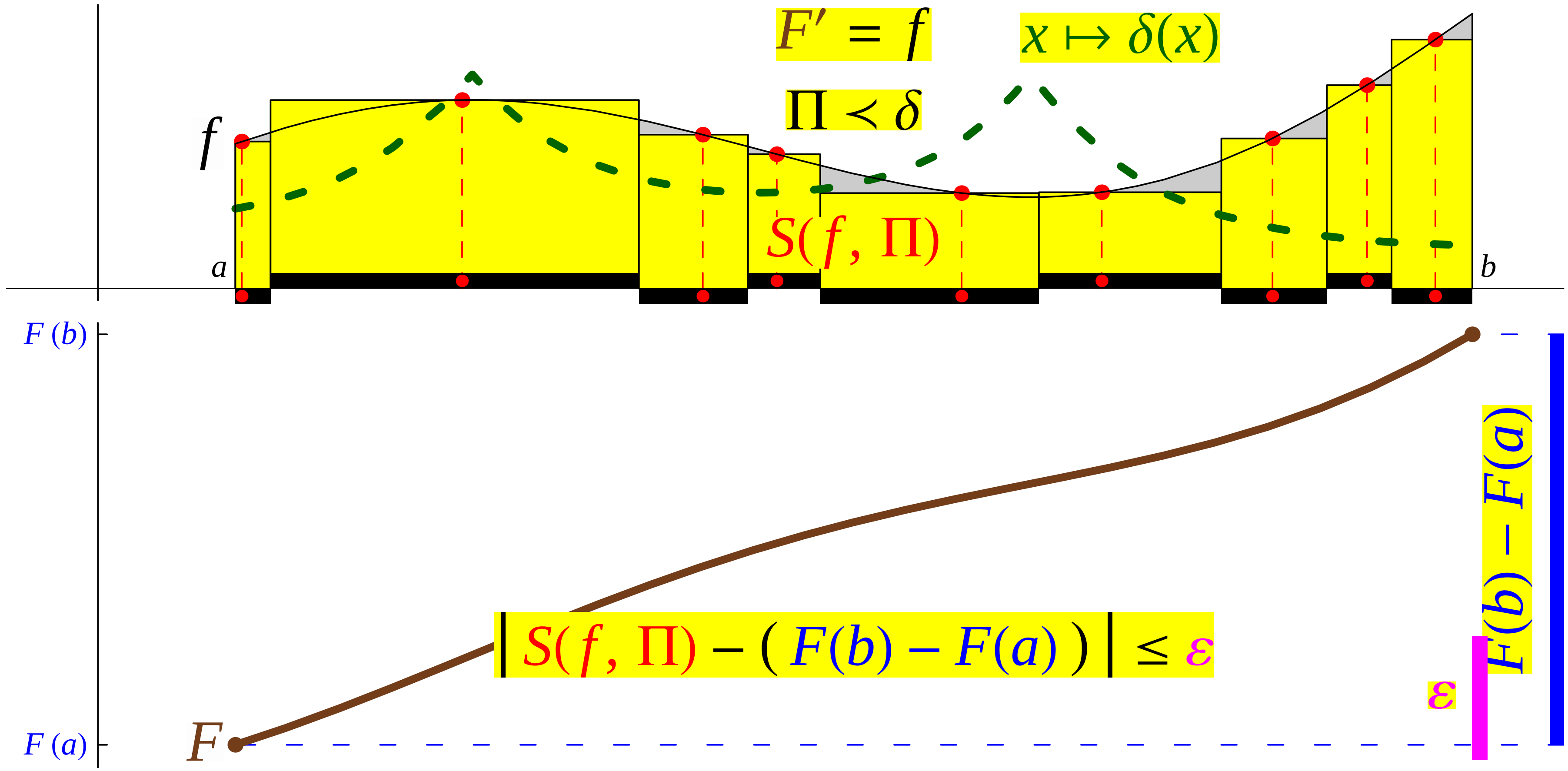


$$\boxed{\Big|S(f,\Pi) - \big(F(b) - F(a)\big)\Big|} = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\Big)\Big| \le \sum_{i=1}^{n}\Big|f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\Big| \le$$

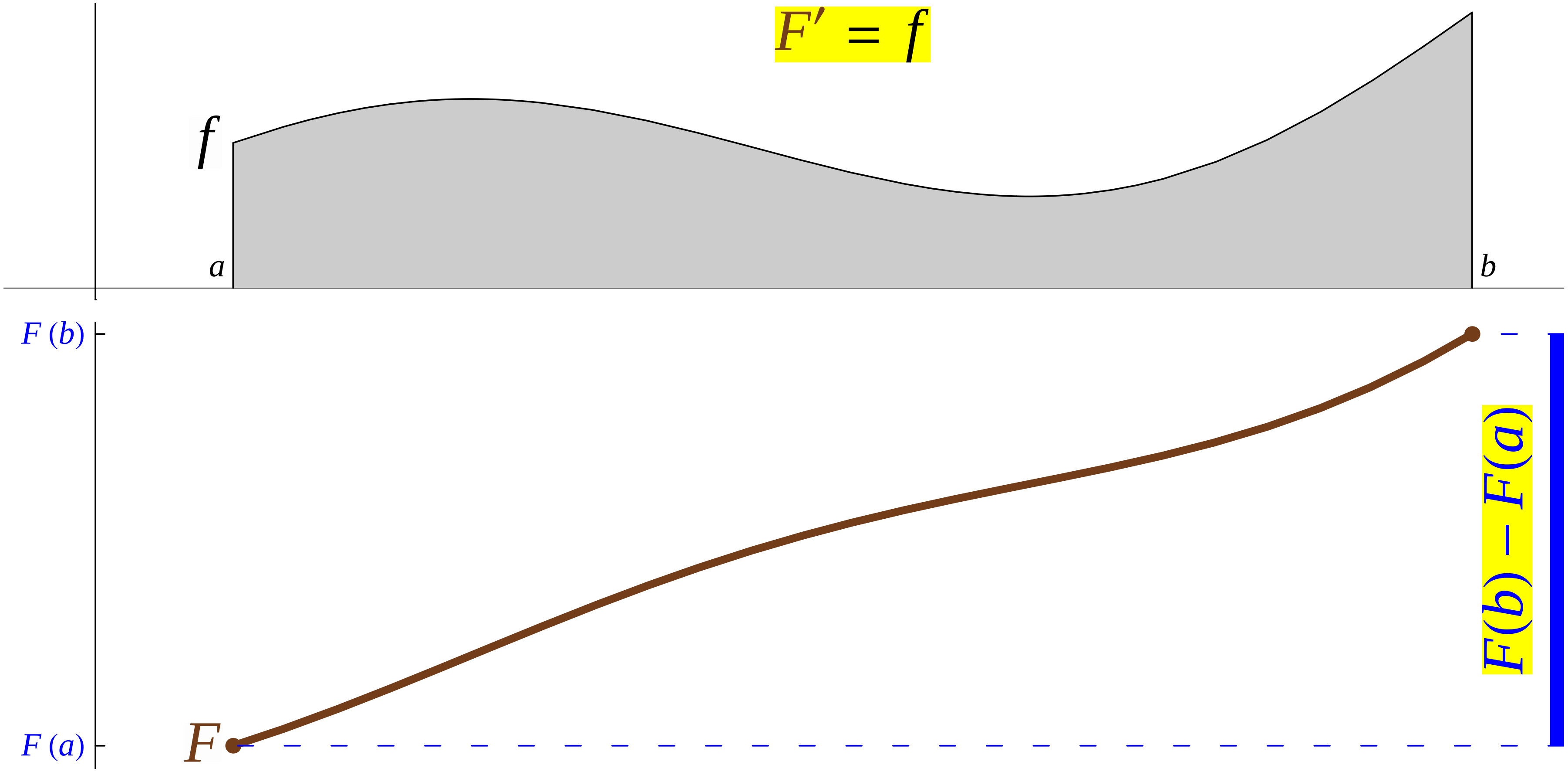
$$\le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon'(a_i - a_{i-1}) = \varepsilon' \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = \varepsilon'(b-a) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \boxed{\varepsilon}.$$

(semplificando)

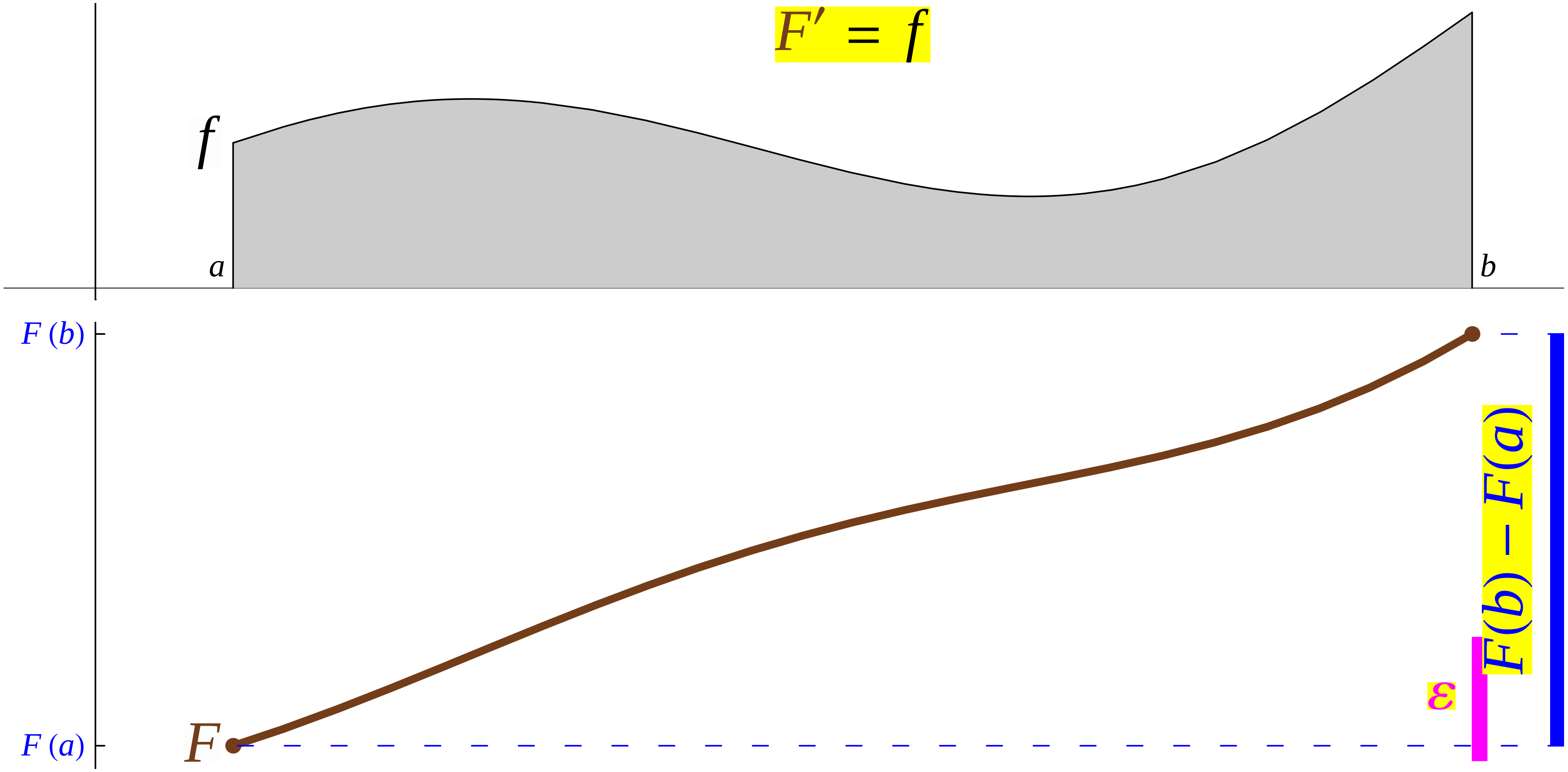


- **Eliminando i termini intermedi:**

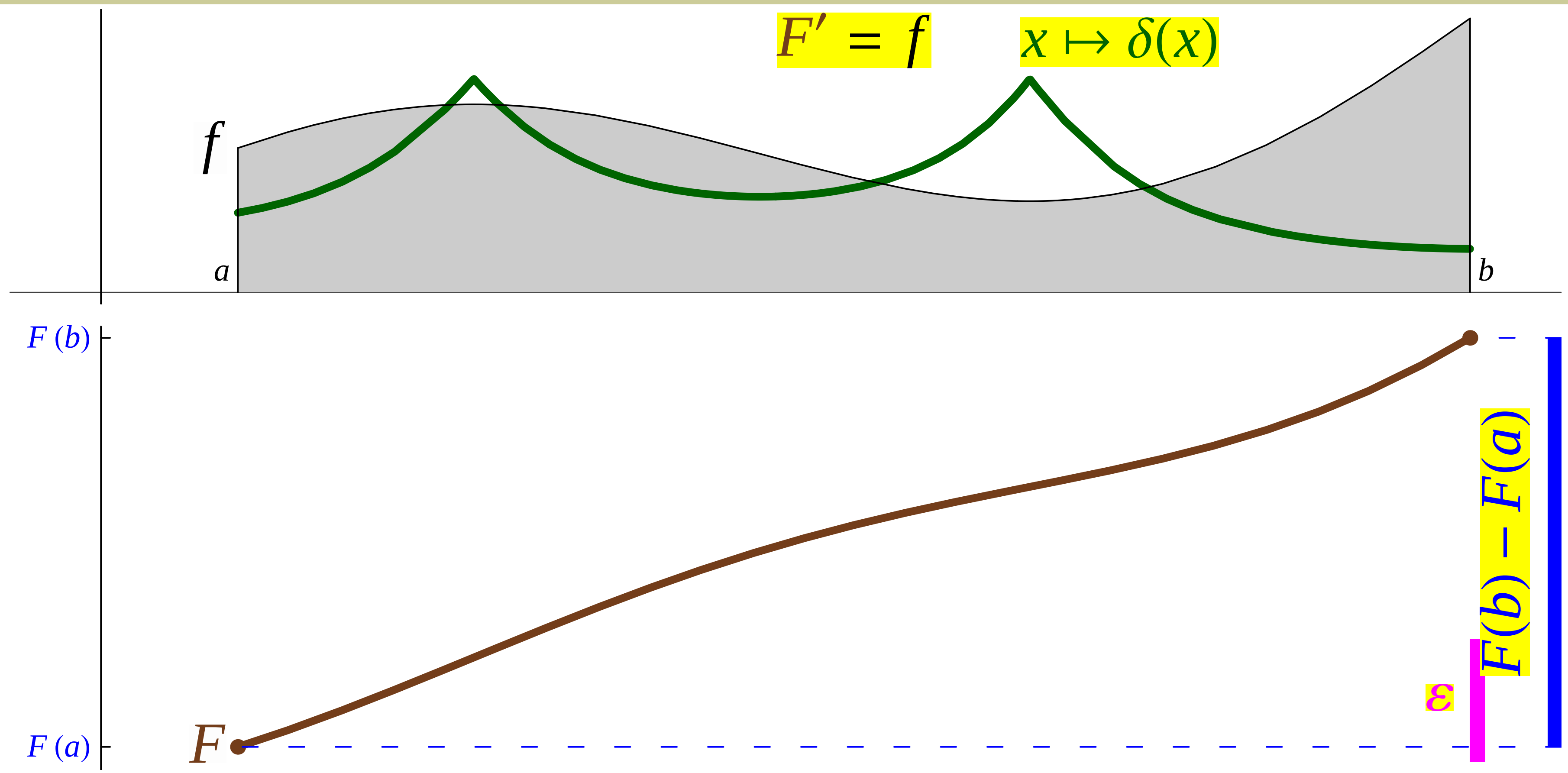
$$\left| S(f,\Pi) - \Big(F(b) - F(a)\Big) \right| \le \varepsilon$$



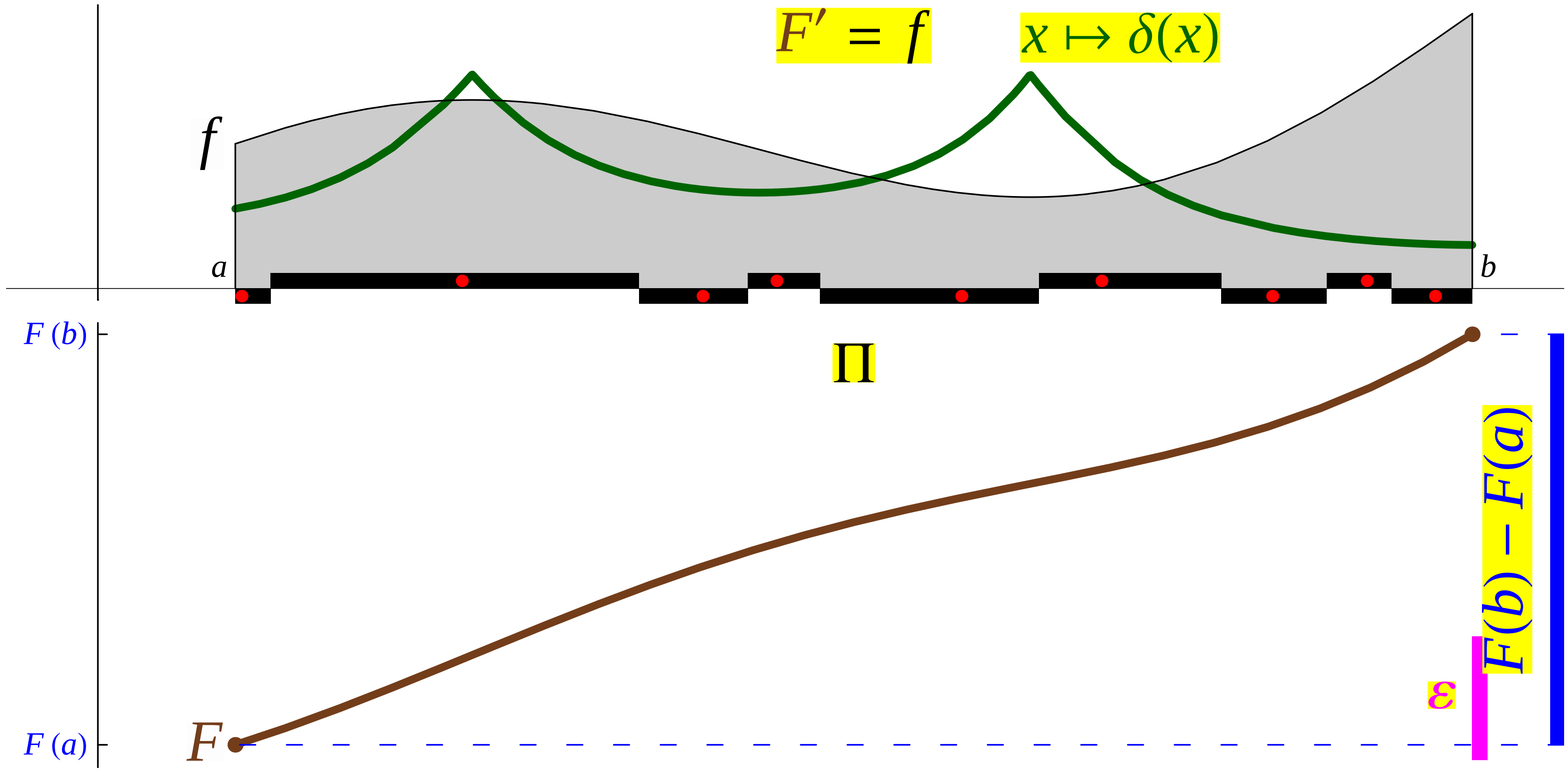
- **Ricapitolando:**



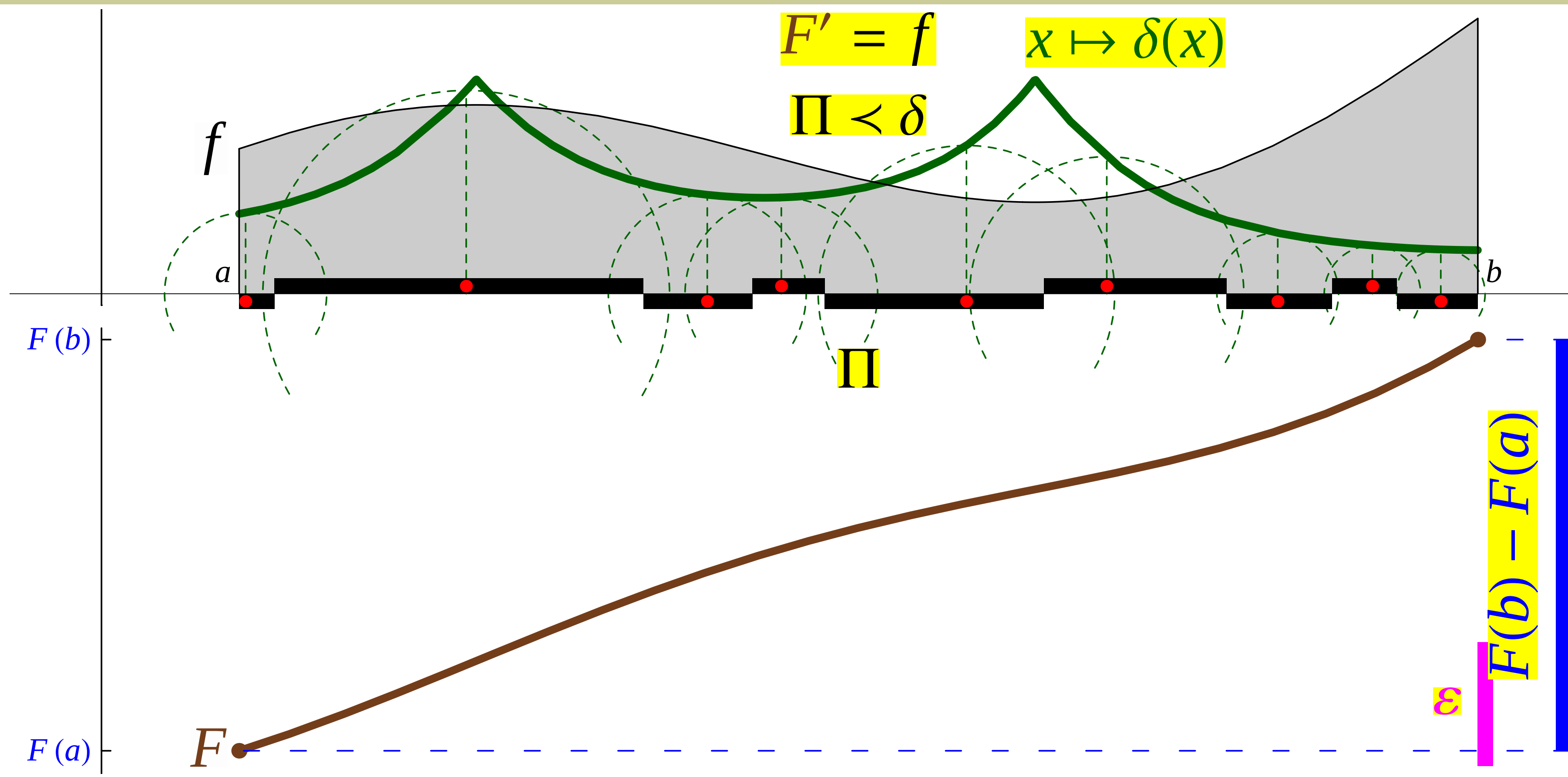
- **Ricapitolando:**
  - per ogni $\varepsilon > 0$



- **Ricapitolando:**
  - per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro δ su $[a, b]$

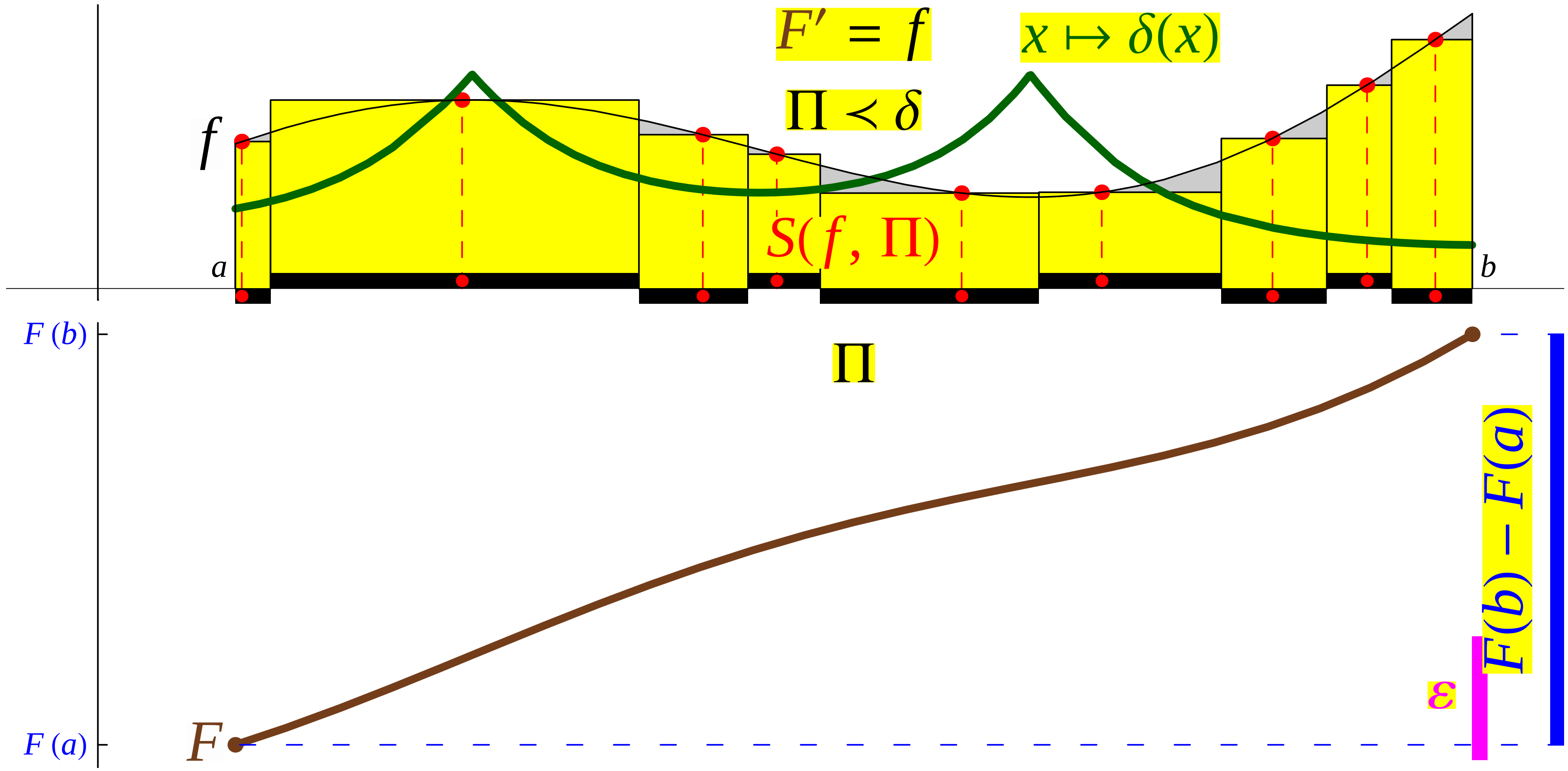


- **Ricapitolando:**
  - per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro δ su $[a, b]$ tale che
  - per ogni suddivisione Π di $[a, b]$



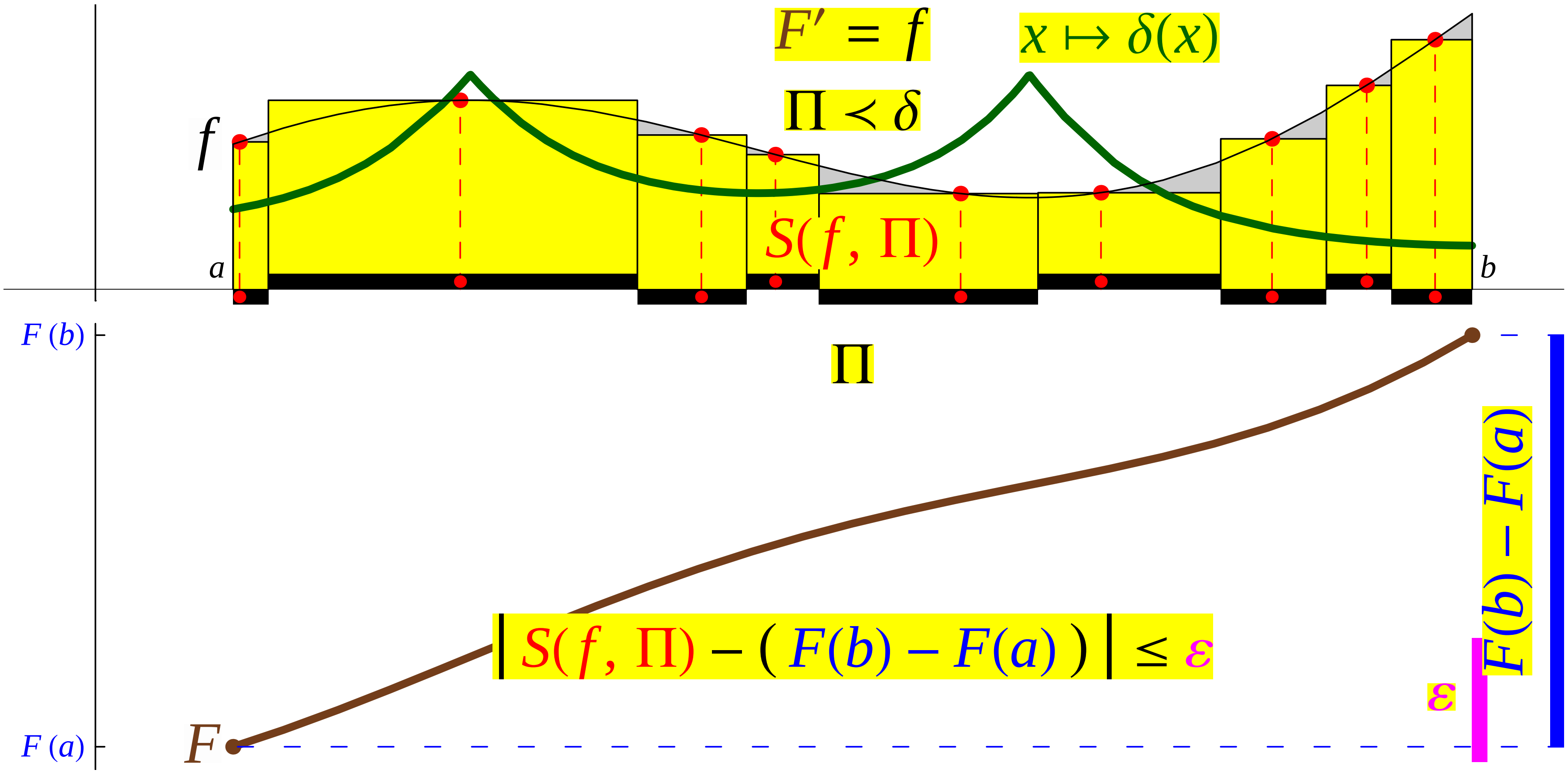
- **Ricapitolando:**
  - per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro δ su $[a, b]$ tale che
  - per ogni suddivisione Π di $[a, b]$

$$\Pi \prec \delta$$



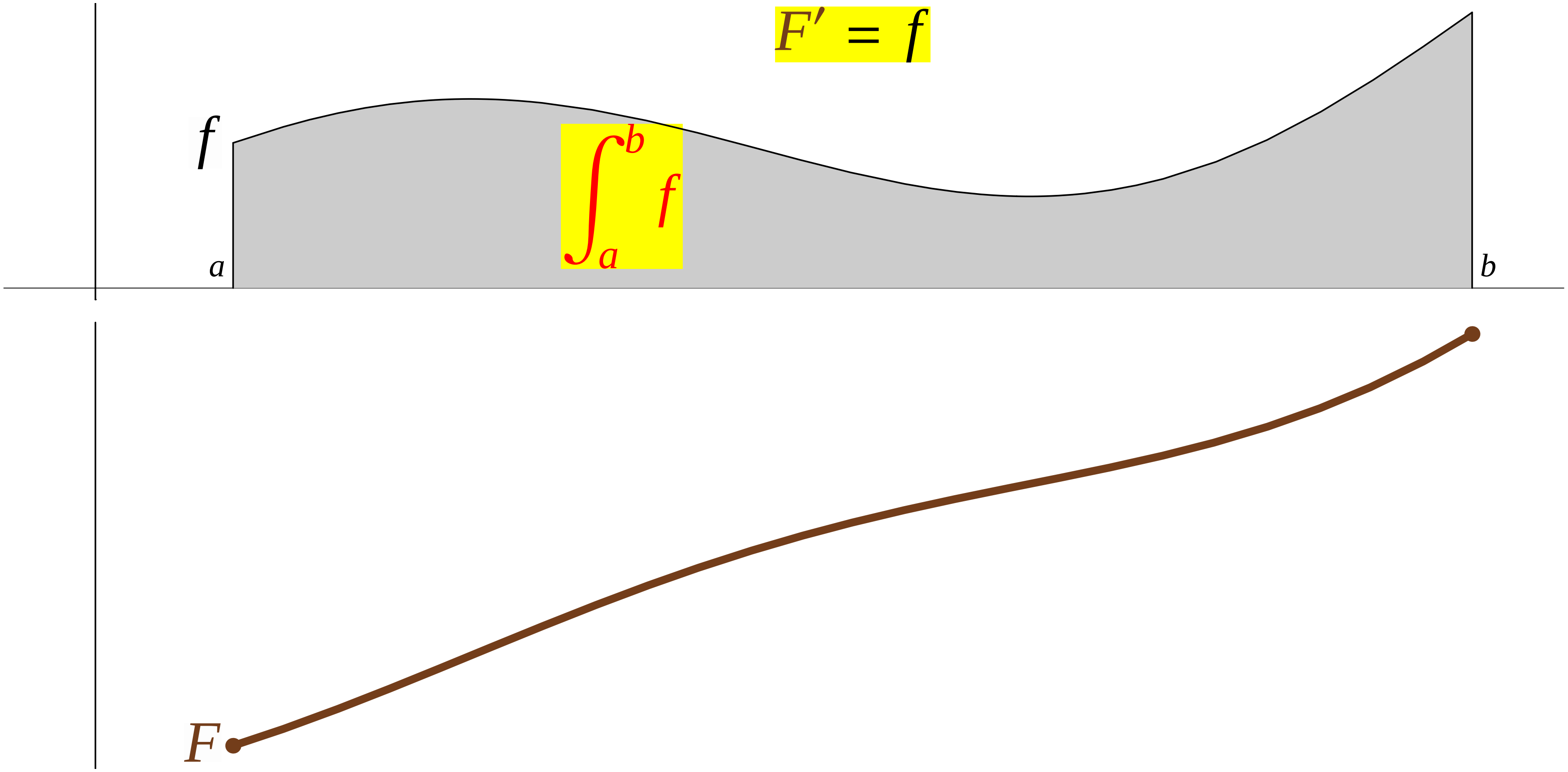
- **Ricapitolando:**
  - per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro δ su $[a, b]$ tale che
  - per ogni suddivisione Π di $[a, b]$

$$\Pi \prec \delta \quad \Rightarrow \quad S(f, \Pi)$$

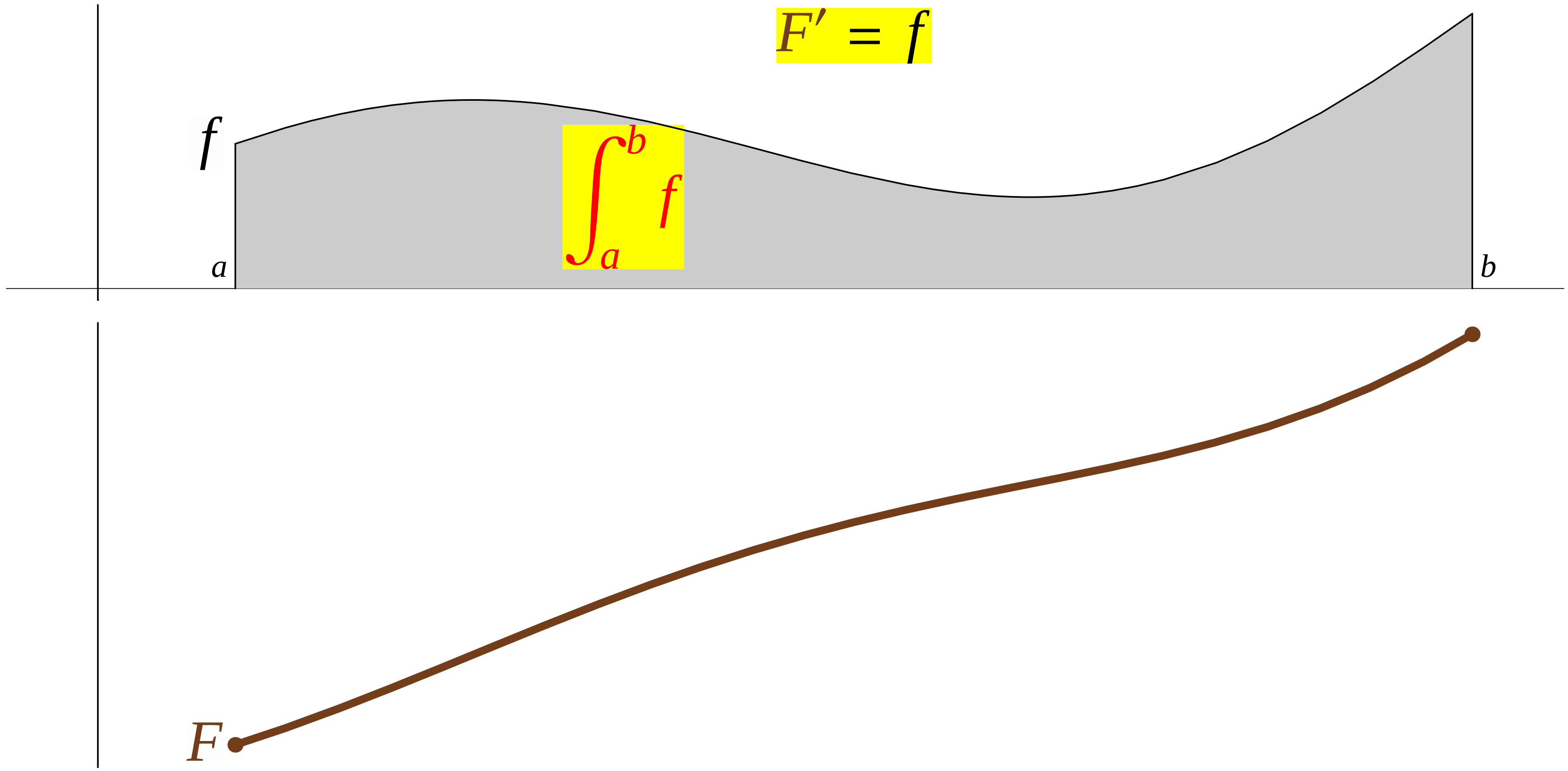


- **Ricapitolando:**
  - per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro δ su $[a, b]$ tale che
  - per ogni suddivisione Π di $[a, b]$

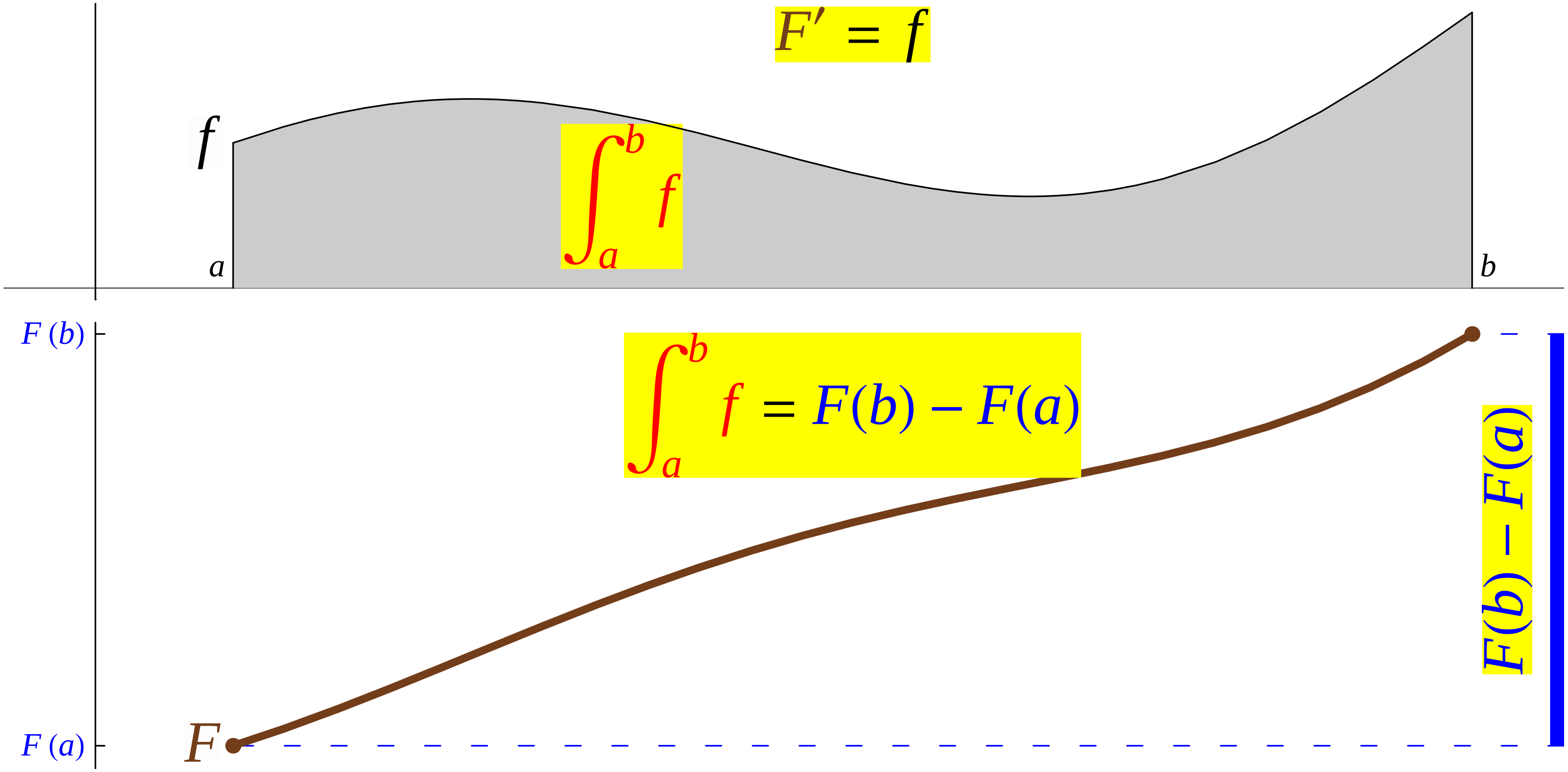
$$\Pi \prec \delta \quad \Rightarrow \quad \left| S(f, \Pi) - \big(F(b) - F(a)\big) \right| \leq \varepsilon.$$



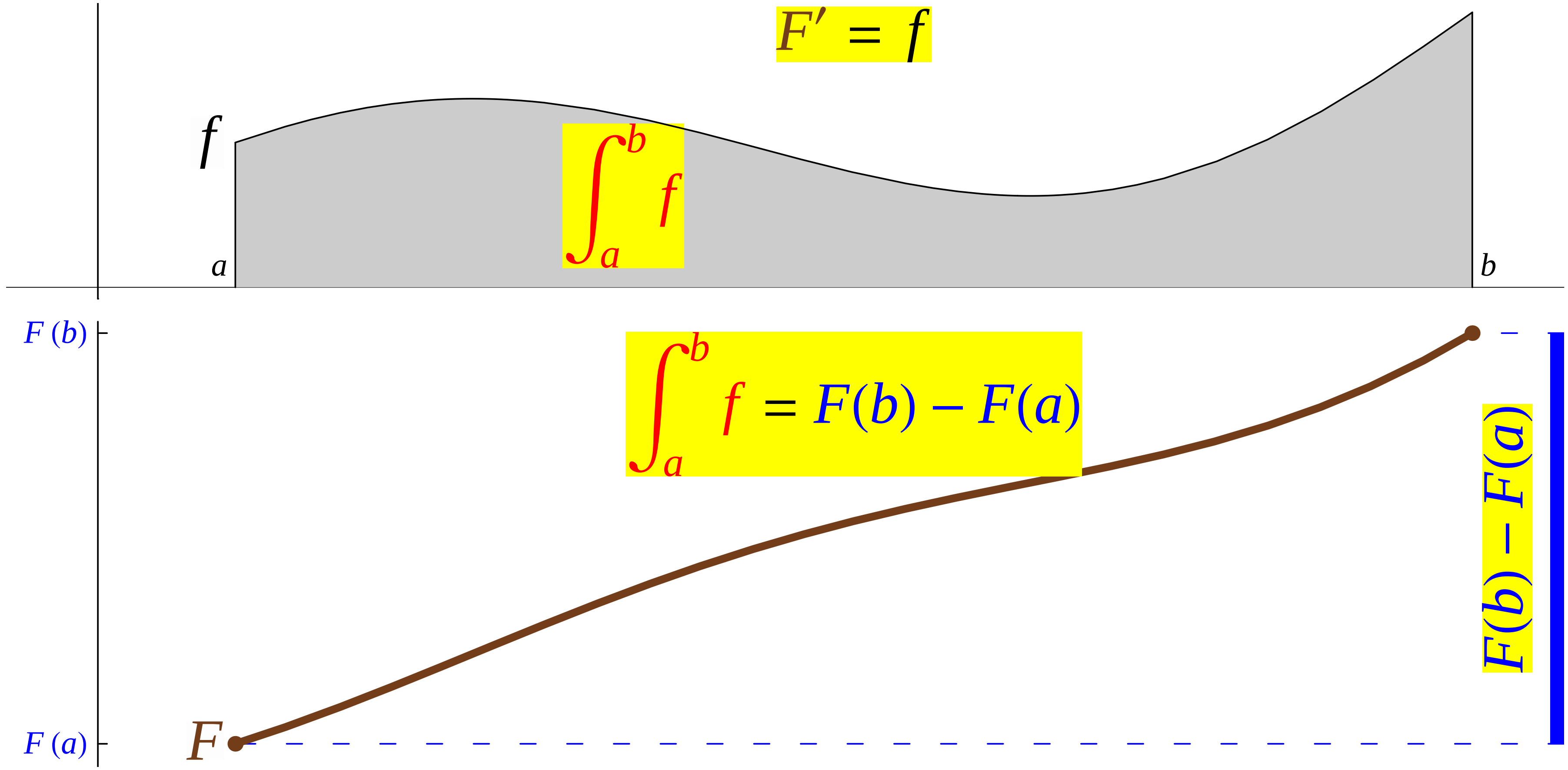
- Per definizione di integrabilità, questo vuol dire che



- **Per definizione di integrabilità, questo vuol dire che**
  - f è integrabile su $[a, b]$



- **Per definizione di integrabilità, questo vuol dire che**
  - f è integrabile su $[a, b]$
  - con integrale $F(b) - F(a)$.



- **Per definizione di integrabilità, questo vuol dire che**
  - f è integrabile su $[a, b]$
  - con integrale $F(b) - F(a)$.
- **Come volevasi dimostrare!**

Fine