Introduzione illustrata alle funzioni di due variabili

Gianluca Gorni, Università di Udine

Versione: 26 giugno 2006

Grafici in 3D, grafici di densità, insiemi di livello.

Una funzione di due variabili è una funzione in cui per ottenere un valore numerico bisogna specificare il valore di 2 variabili, non più di una sola. I nomi delle due variabili sono comunemente x, y. Una funzione generica di due variabili si scrive spesso come $f(x, y)$. Esempi: $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = x^2 - 2xy$, $f(x, y) = \cos(x - 2y)$. Una tabella di valori di una funzione di due variabili è fatta di triple:

General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "acca" is similar to existing symbol "tacca". More…

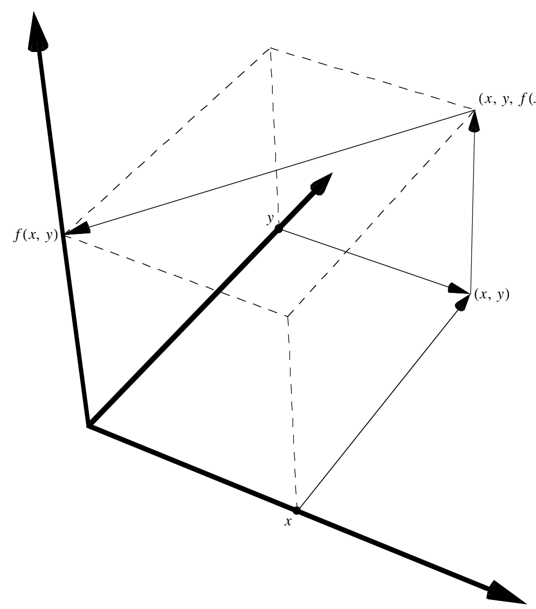
Out[94]//DisplayForm=

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	1	2
-1	2	1
-2	π	$-2+\pi$

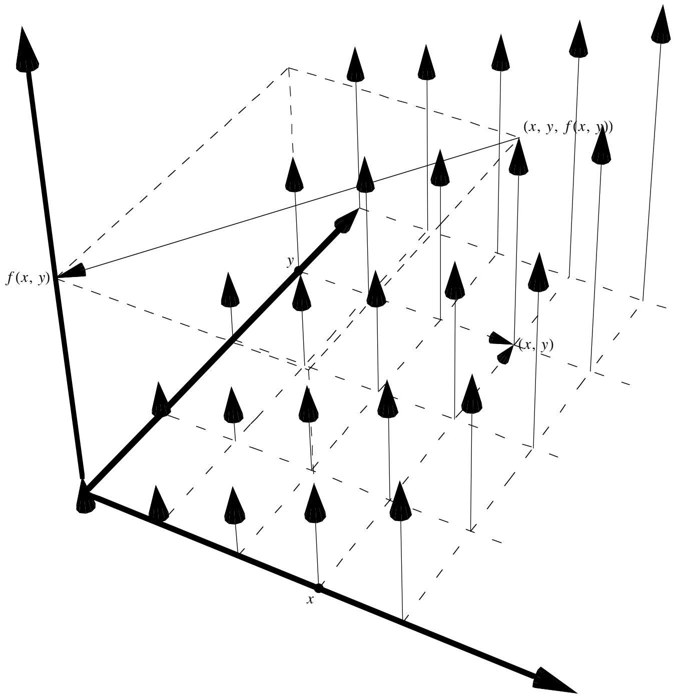
x	y	x^2-2xy
0	0	0
0	1	0
1	1	-1
-1	2	5
-2	π	$4+4\pi$

x	y	$\cos(x-2y)$
0	0	1
0	1	-0.41615
1	1	0.5403
-1	2	0.28366
-2	π	-0.41615

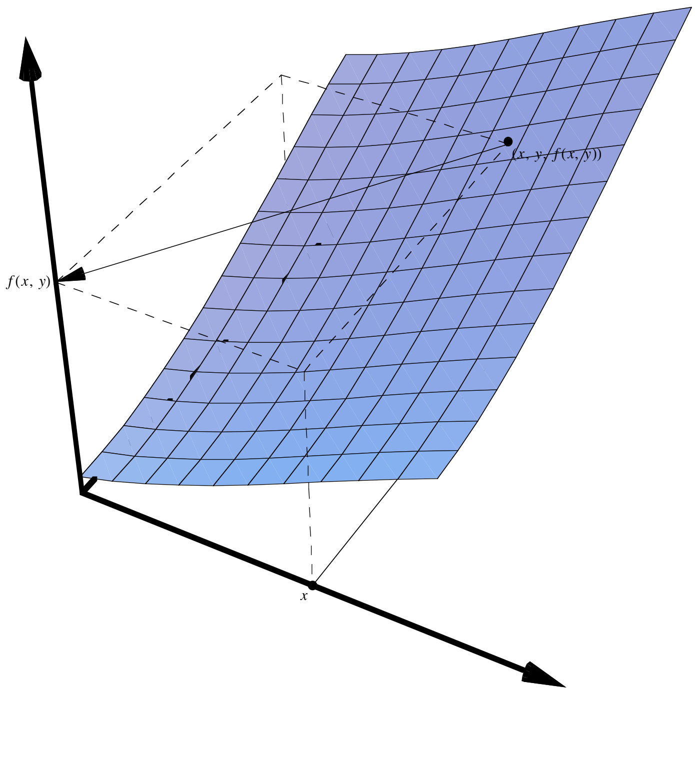
Una tripla di numeri $(x, y, f(x, y))$ si può associare a un punto nello spazio a 3 dimensioni:



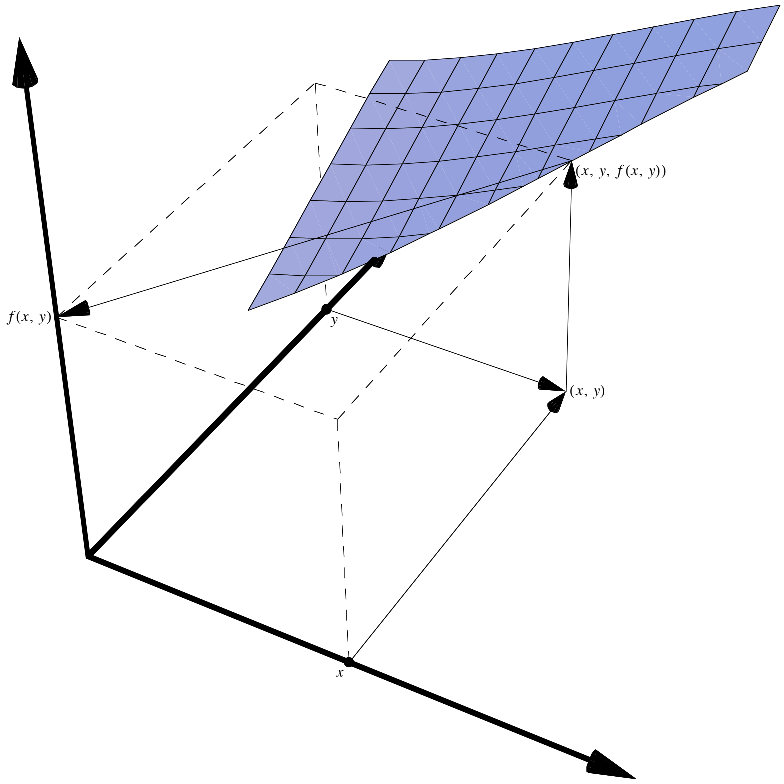
Segnamo una griglia di punti nel piano x, y, e da ognuno innalziamo la freccia che sale al punto $(x, y, f(x, y))$. Viene un boschetto di frecce:



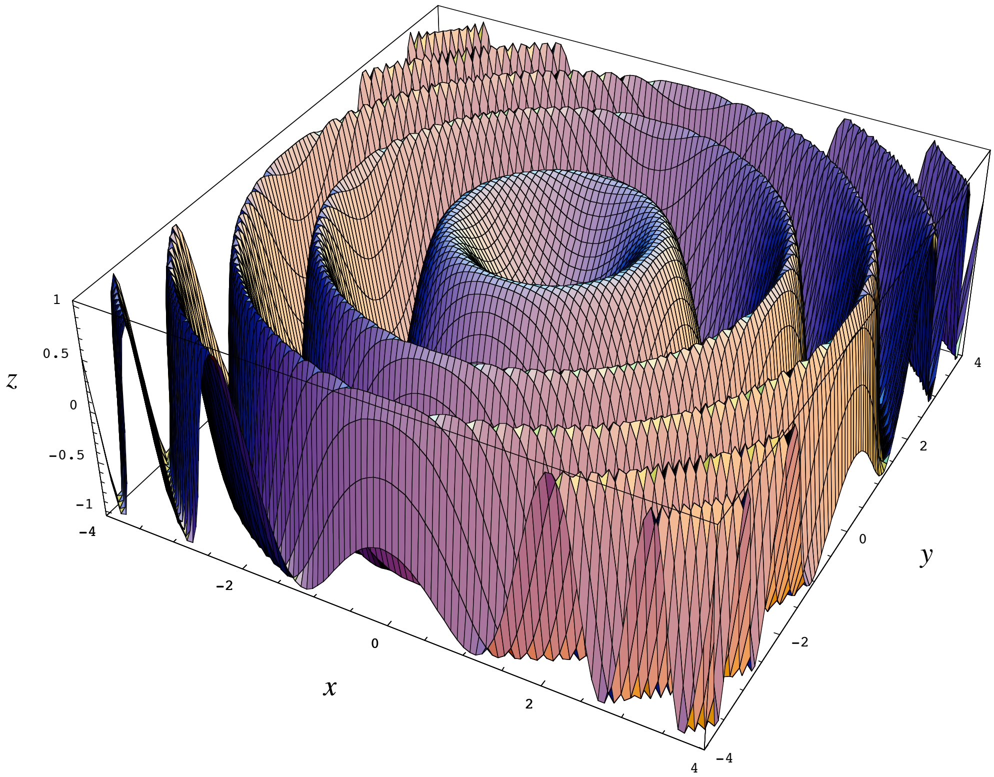
"Normalmente" le punte delle frecce, cioè i punti di coordinate $(x, y, f(x, y))$, si distribuiscono non in una nuvola di punti a casaccio, ma su una *superficie*, che evidenziamo con la piastrellatura:



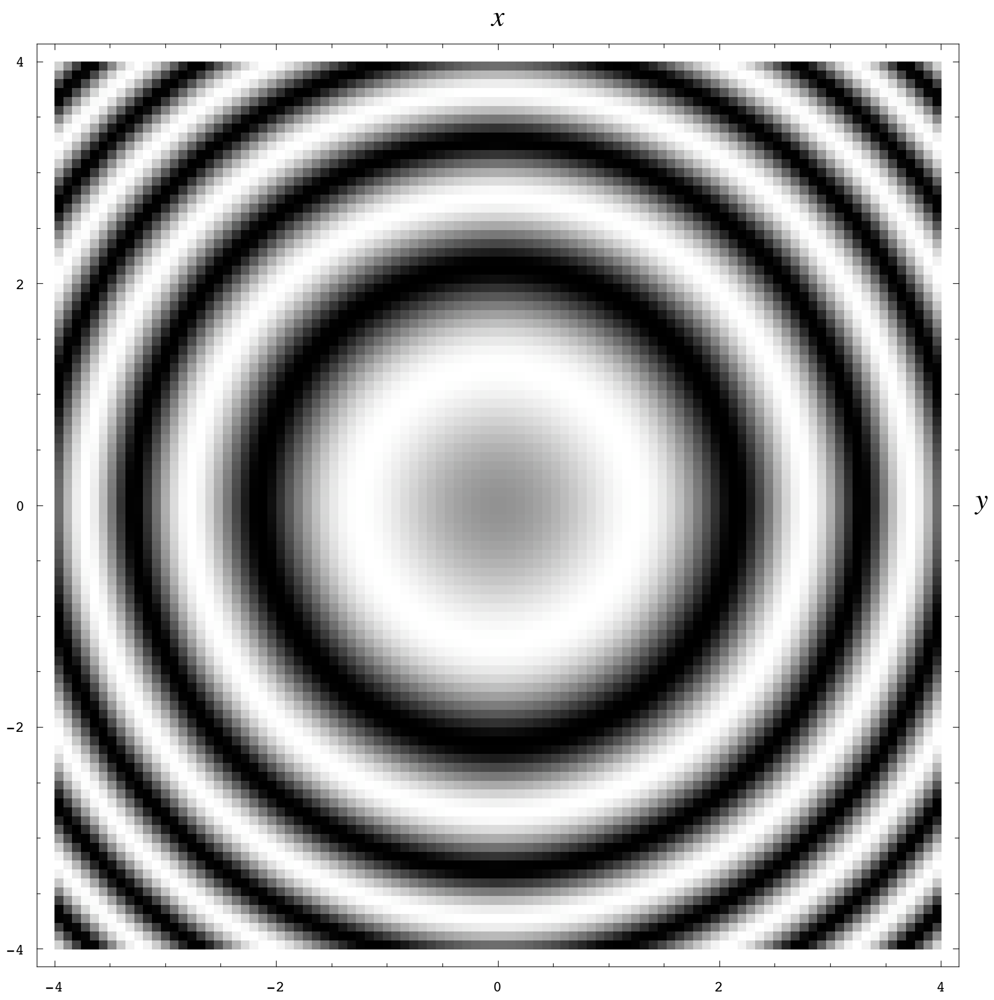
Così come una funzione individua una superficie, così dalla superficie si può ricostruire la funzione: dato il punto $(x, y, 0)$, si traccia la retta verticale per quel punto e si trova l'intersezione con la superficie. La quota del punto intersezione è il valore $f(x, y)$. Nella figura che segue la superficie è stata tagliata per lasciar veder cosa succede sotto:



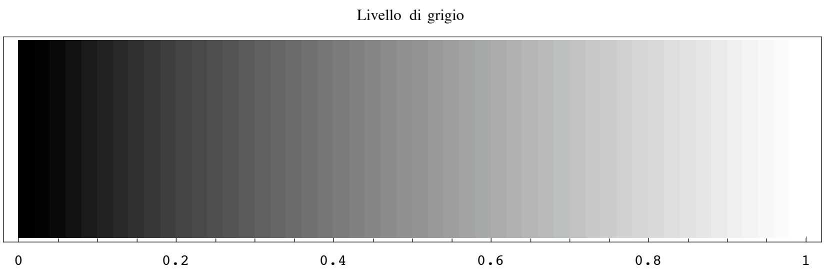
Un grafico di superficie della funzione $f(x, y) := \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$.



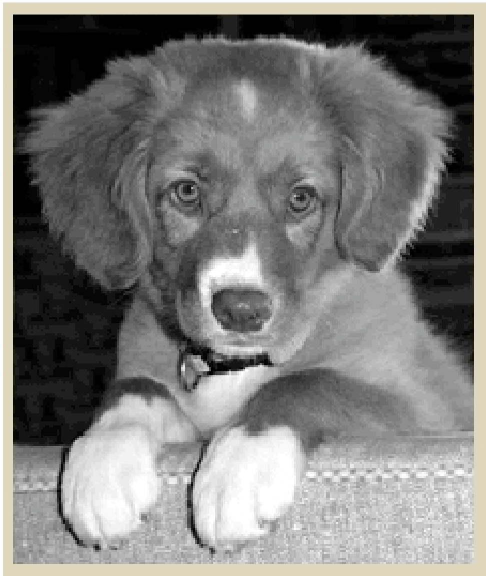
Un grafico *di densità* della stessa funzione $f(x, y) := \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$: qui il valore di f viene interpretato come livello di grigio: da 0 corrispondente al nero a 1 corrispondente al bianco.



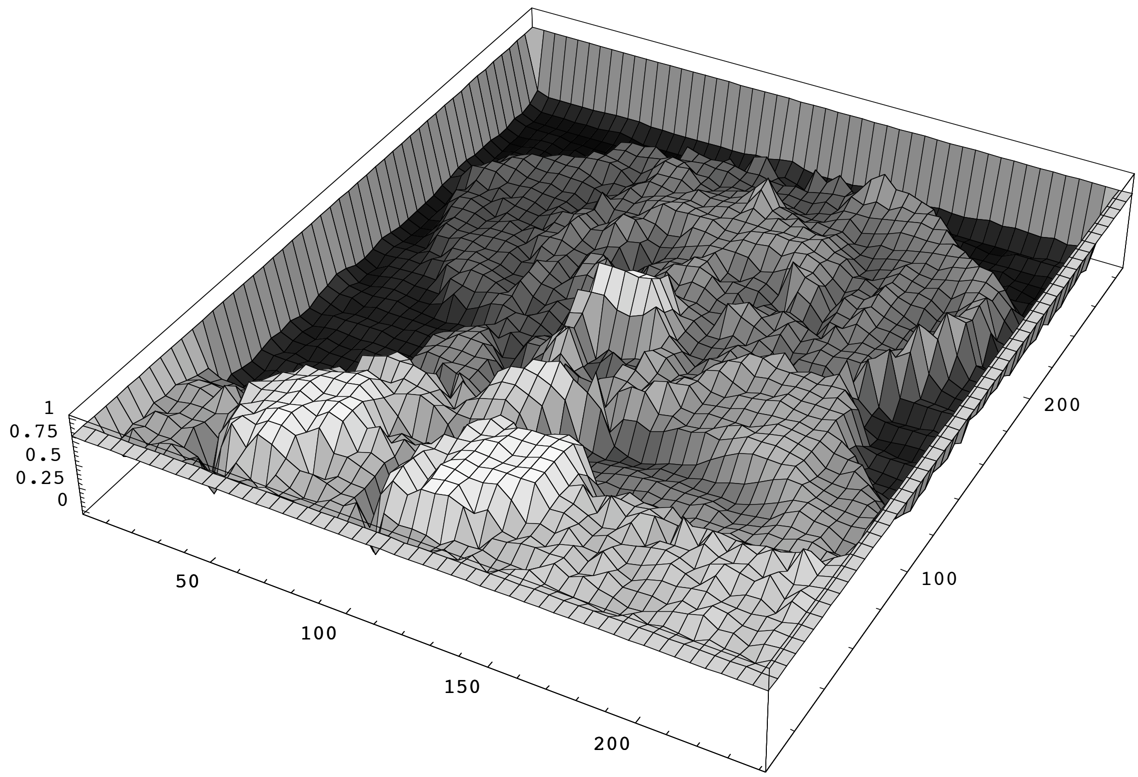
Una scala di riferimento per i livelli di grigio:



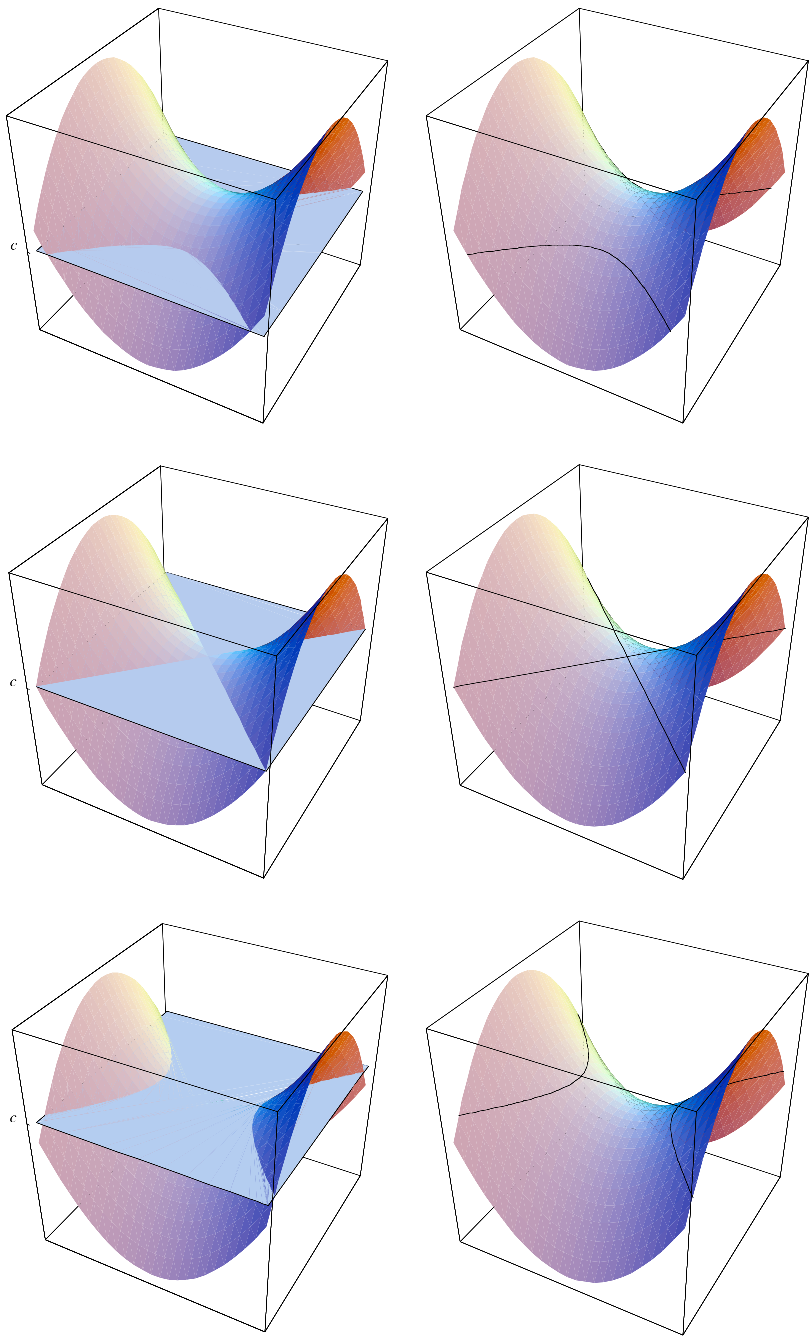
Una fotografia in bianco e nero, come quella qui sotto, si può interpretare come una funzione $f(x, y)$ dove le due coordinate x, y individuano un punto della foto e il valore della funzione f è il livello di grigio del punto.



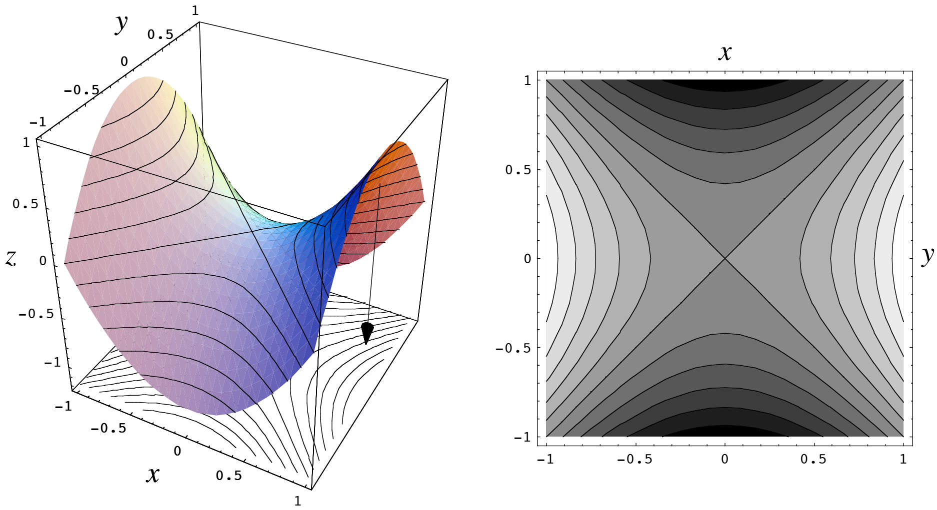
La funzione corrispondente alla figura del cagnetto si può anche disegnare come un grafico tridimensionale in cui $f(x, y)$ rappresenta la quota.



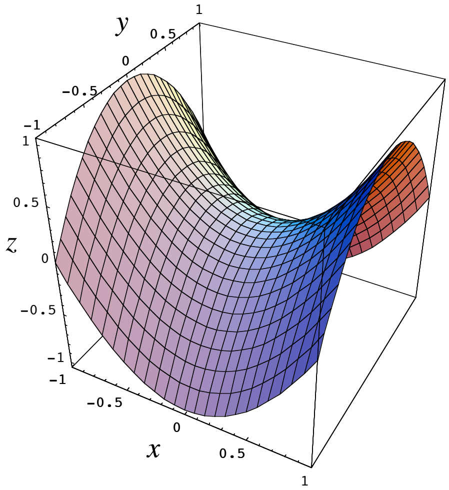
Spesso nello studio di una funzione di due variabili hanno interesse gli *insiemi di livello*, cioè gli insiemi ottenuti intersecando il grafico della funzione con piani orizzontali. Tipicamente gli insiemi di livello risultano essere curve, per cui spesso vengono chiamate *cuve* di livello, o anche *linee* di livello. Ogni insieme di livello è individuato dal suo livello, cioè dalla quota del piano intersecante.
Negli esempi seguenti a sinistra c'è la superficie intersecata con un piani orizzontali, e a destra la superficie con evidenziata la rispettiva curva di livello:

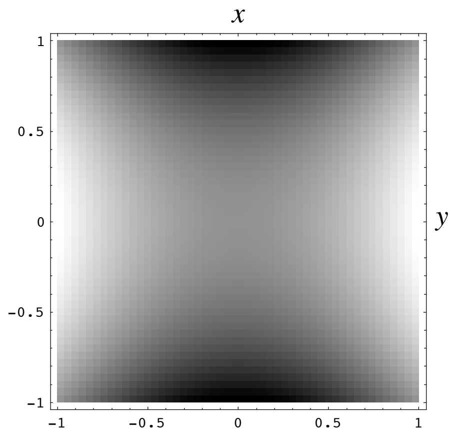


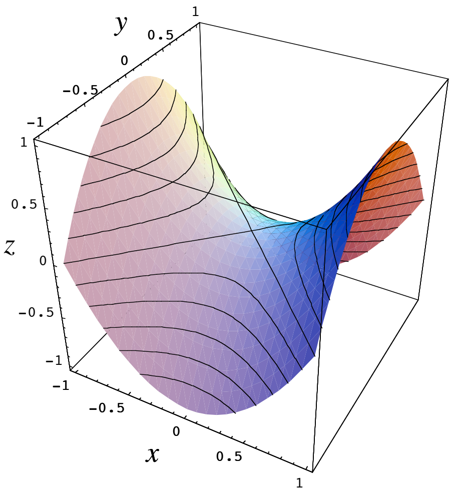
Invece che come insiemi di punti in 3 dimensioni, le curve di livello si possono proiettare sul piano orizzontale, eventualmente sovrapponendole a un grafico di densità. È il sistema comunemente usato nelle carte topografiche:

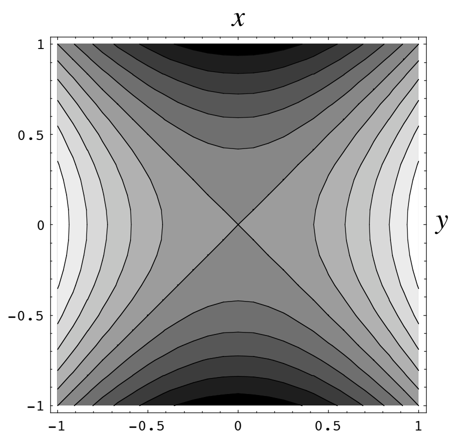


Riassumendo: la funzione $f(x, y) := x^2 - y^2$ rappresentata in 3D con una griglia rettangolare, come grafico di densità, in 3D con gli insiemi di livello evidenziati, e con grafico di insiemi di livello:





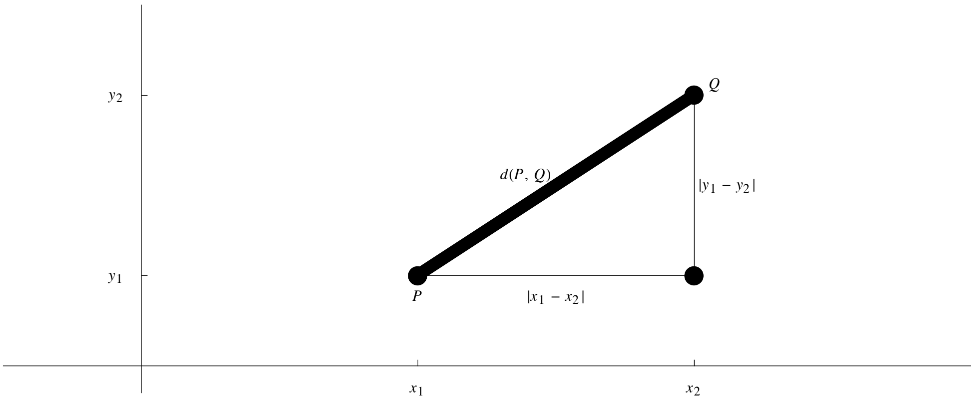




Distanza, limiti, continuità (cenni)

In una dimensione la distanza fra due punti (numeri reali) x e y è $|x-y|$. In due dimensioni la distanza più usata è la *distanza euclidea*:

posto $P=(x_1, y_1)$, $Q=(x_2, y_2)$, definiamo $d(P, Q) := \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. Questa non è altro che la lunghezza del segmento fra P e Q, per il teorema di Pitagora



La definizione di **limite** nel caso di una variabile è $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ equivale a $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,x\,(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon)$

La definizione per il caso di due variabili si fa semplicemente sostituendo la distanza $d(P, Q)$ al posto di $|x-y|$:

$\lim_{P\to P_0} f(P)=\ell$ equivale a

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,P\quad(0<d(P, Q)<\delta\Rightarrow|f(P)-\ell|<\varepsilon)$$

In una variabile la definizione di **continuità** in x_0 è

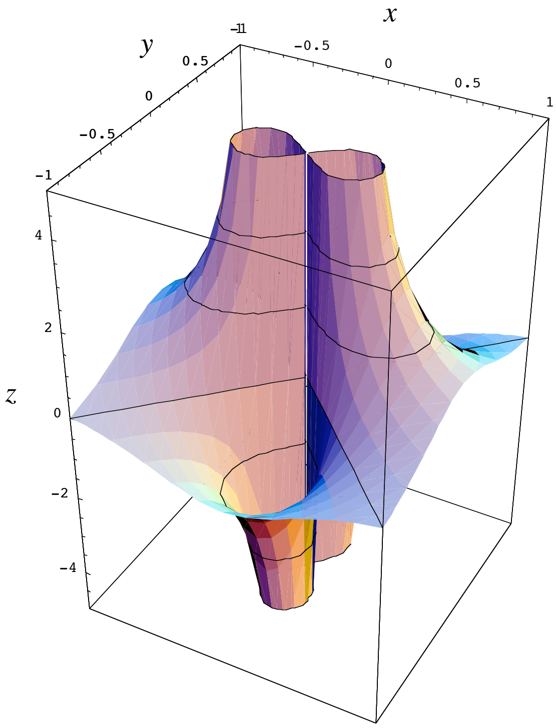
$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,x\,(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon).$$

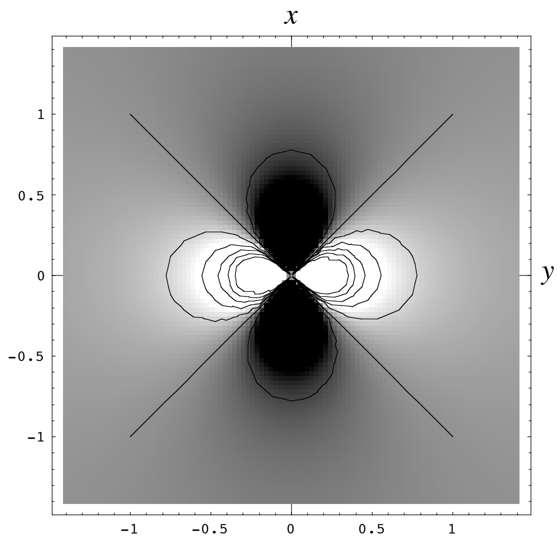
La definizione per il caso di due variabili si fa ancora sostituendo la distanza $d(P, Q)$ al posto di $|x-y|$:

f è continua in P_0 se $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,P\quad(d(P, P_0)<\delta\Rightarrow|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon)$

Funzioni non continue nell'origine

La funzione $f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ non è continua nell'origine: in certe direzioni tende a $+\infty$, in altre a $-\infty$, lungo la diagonale tende a 0.





La funzione $f(x,\ y) = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,\ y) \neq (0,\ 0) \\ 0 & \text{per } (x,\ y) = (0,\ 0) \end{cases}$ non è continua nell'origine. Il grafico è "a scala a chiocciola".Le curve di livello sono semirette per l'origine.

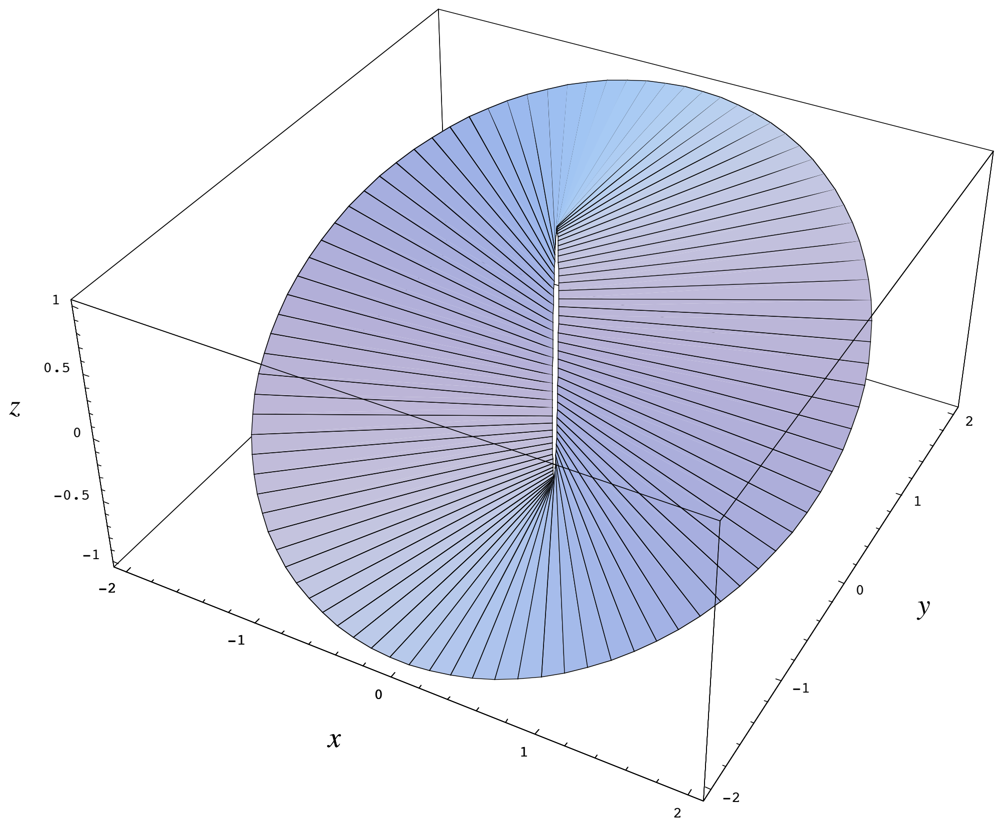
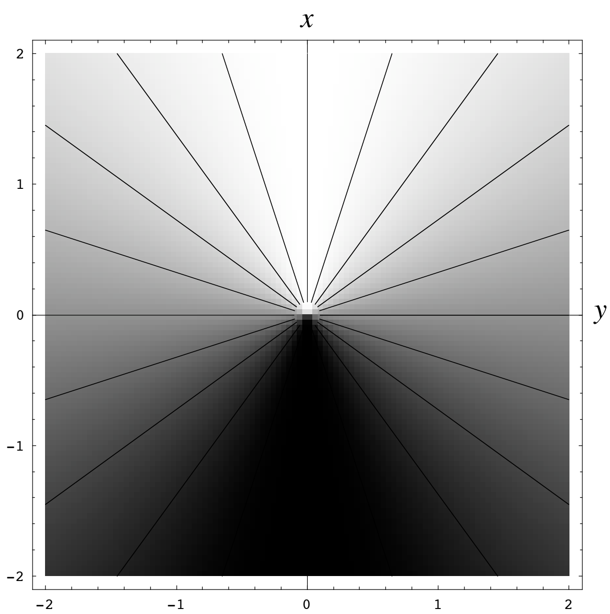


Grafico di densità con le curve di livello:



La funzione $f(x,\,y) := \frac{x^3 - 3\,x\,y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ non è continua nell'origine: ha limiti diversi nelle diverse direzioni. Il grafico è del tipo "a scala a chiocciola". Le curve di livello sono semirette per l'origine.

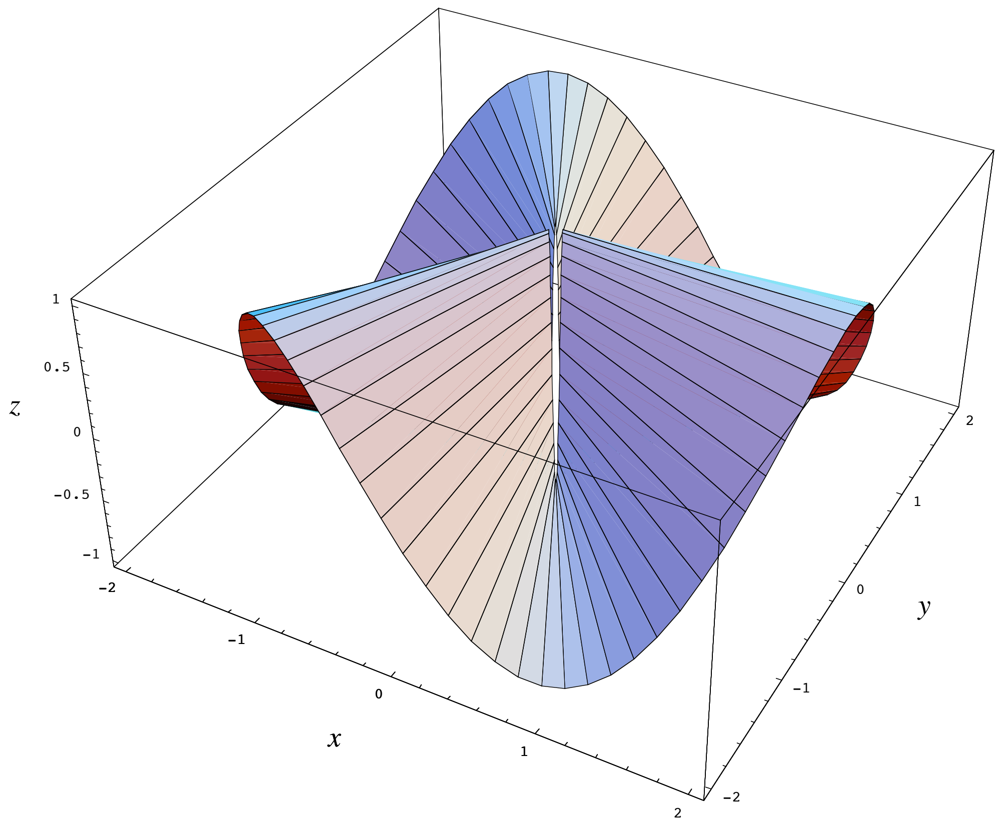
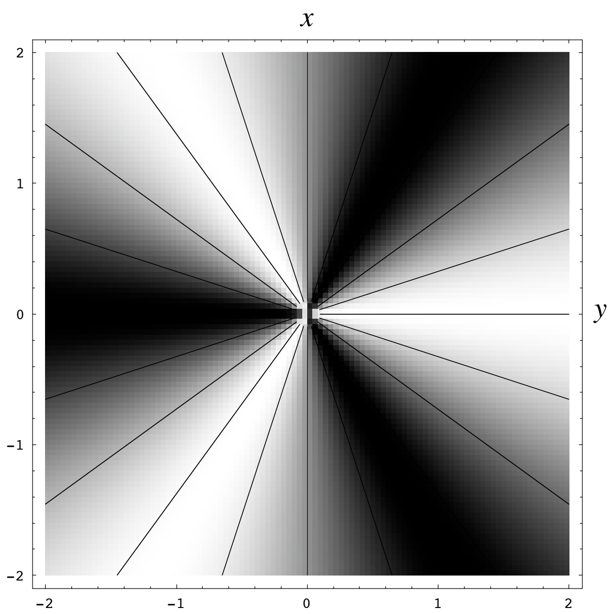
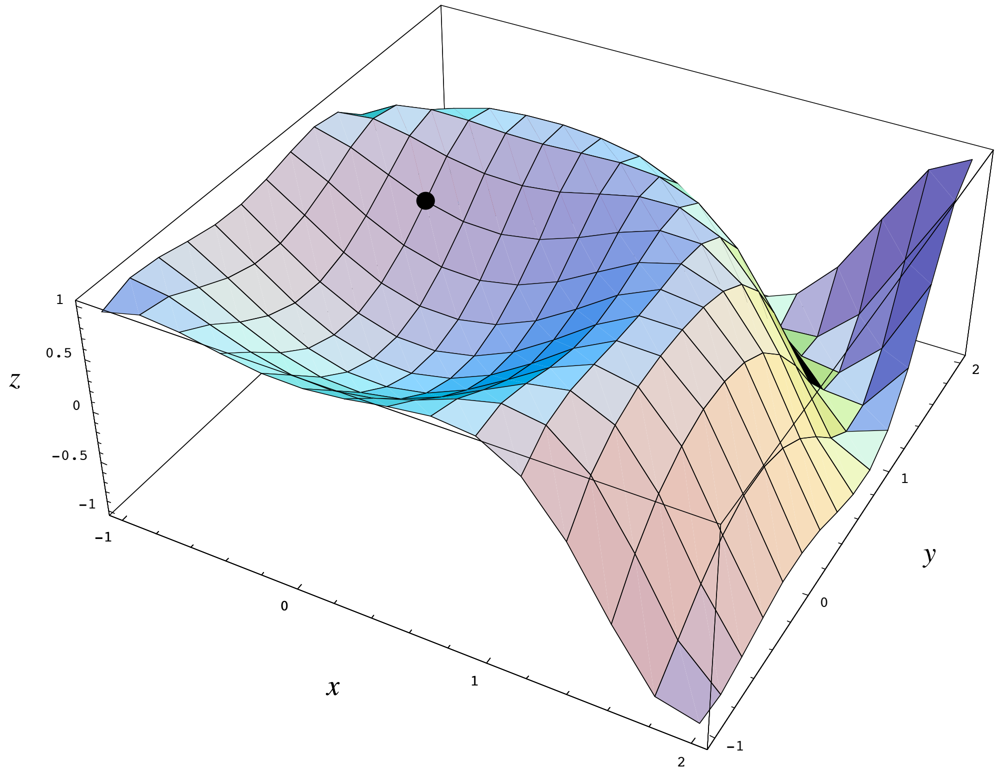


Grafico di densità con curve di livello:

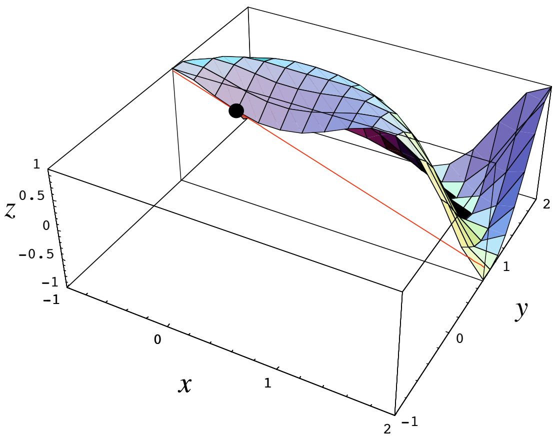


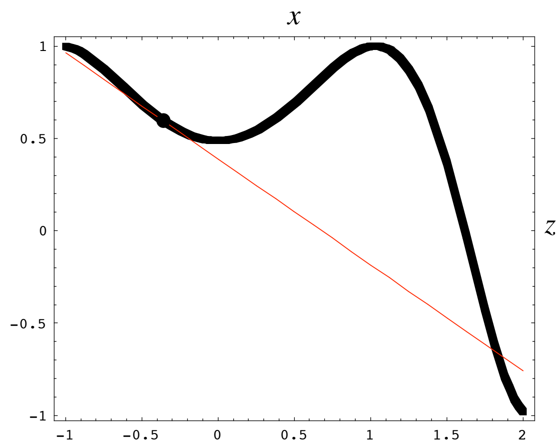
Derivate parziali e piano tangente

Il grafico 3D di una funzione (qui è $f(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$) si può tagliare con piani verticali paralleli ai piani xz e yz e passanti per un punto dato.

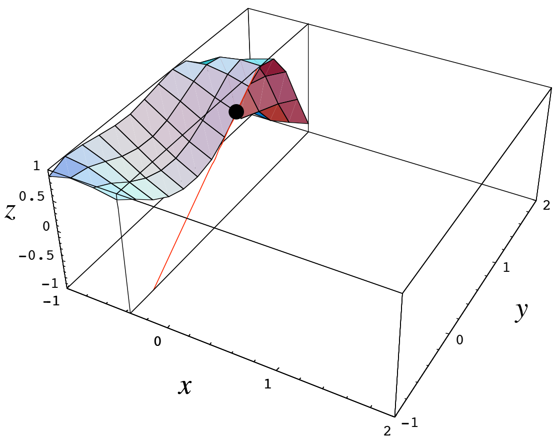


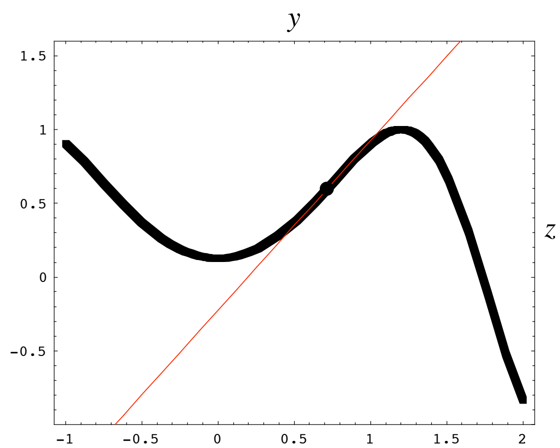
Il grafico della funzione tagliato con un piano parallelo al piano $x\,z$ passante per il punto dato, con evidenziata la retta tangente:



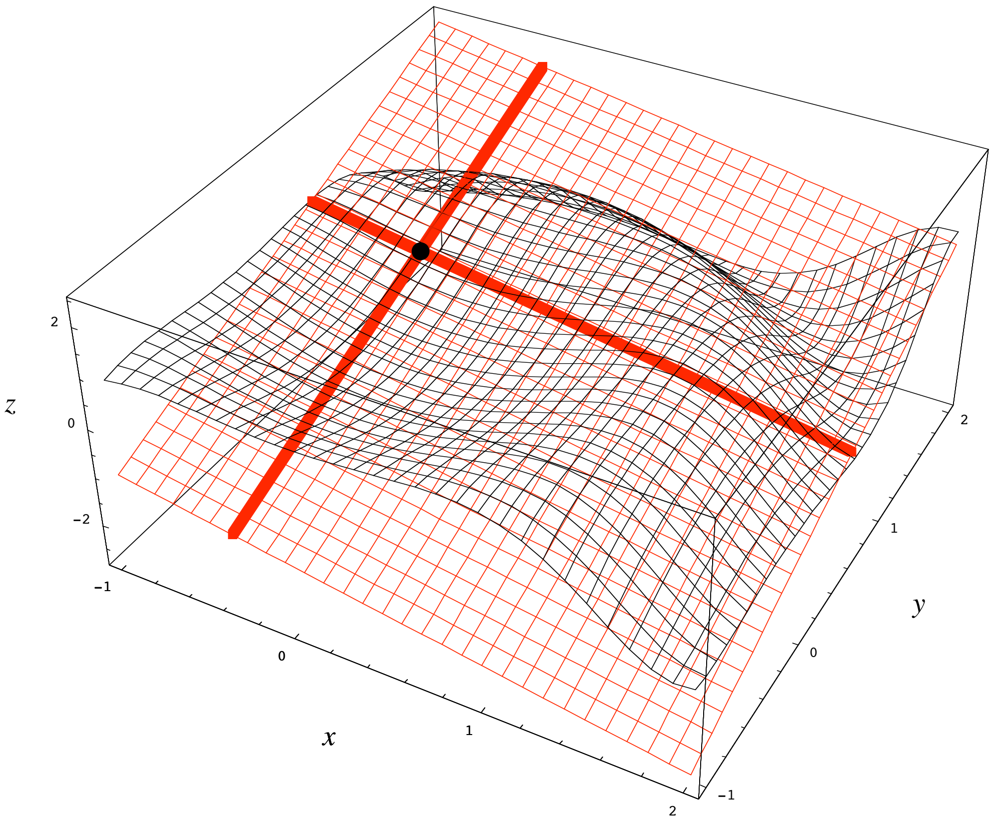


Il grafico della funzione tagliato con un piano parallelo al piano $y\,z$ passante per il punto dato, con evidenziata la retta tangente:





Il piano tangente è il piano che passa per le due rette tangenti nelle due direzioni:



Funzioni continue senza piano tangente (non differenziabili)

La funzione $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ è continua ovunque ma non ha piano tangente nell'origine. L'origine è un punto angoloso.

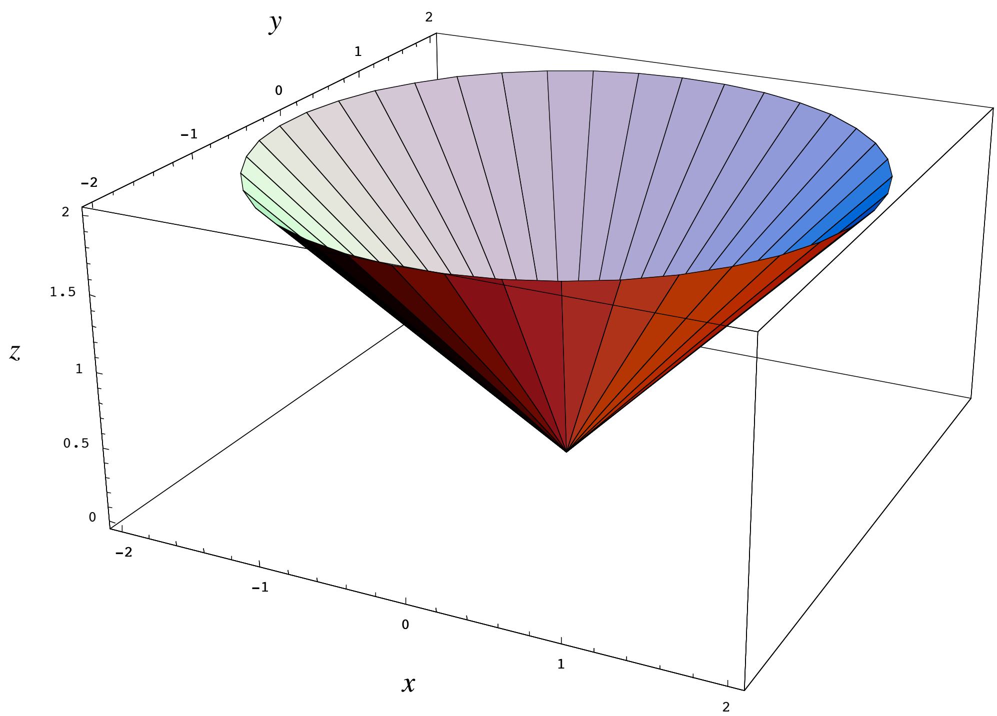
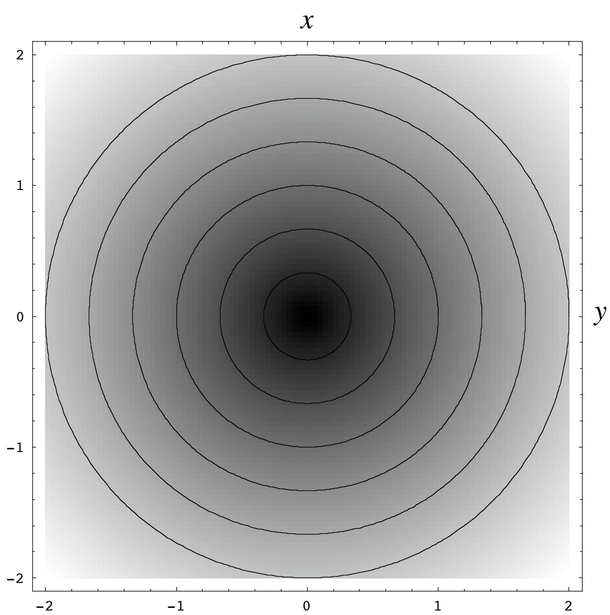


Grafico di densità:



La funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 - 3\,x\,y^2}{x^2 + y^2} & \text{per } (x,\ y) \neq (0,\ 0) \\ 0 & \text{per } (x,\ y) = (0,\ 0) \end{cases}$$

non ha piano tangente nell'origine, sebbene sia continua e abbia tutte e due le derivate parziali finite

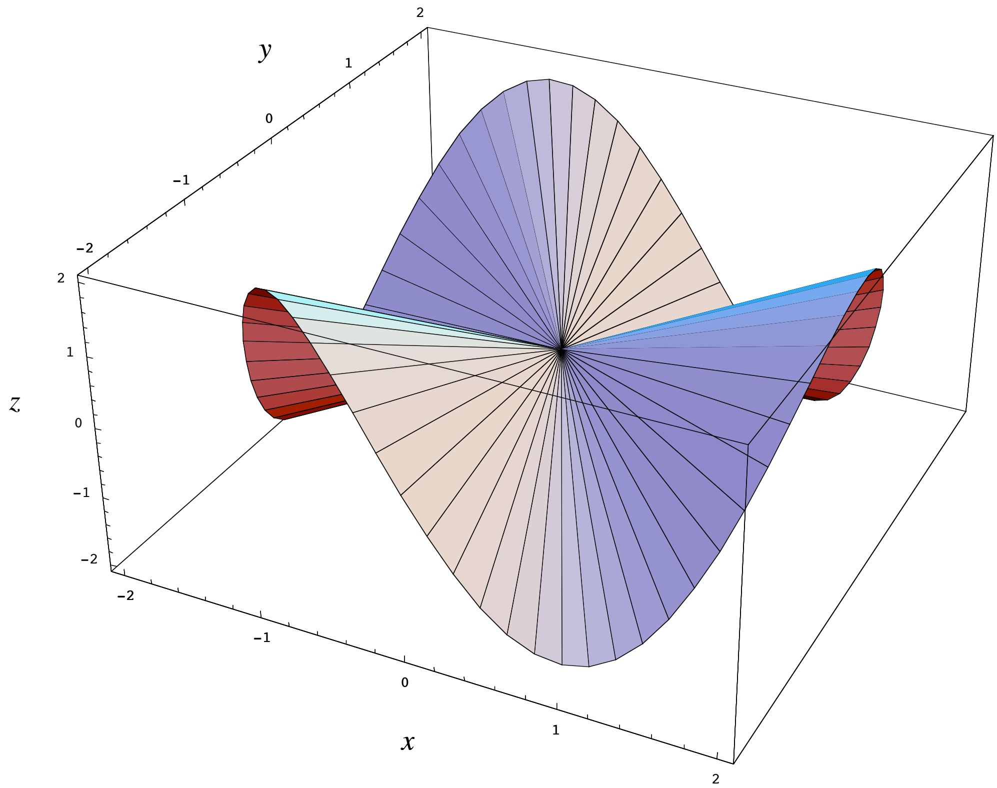
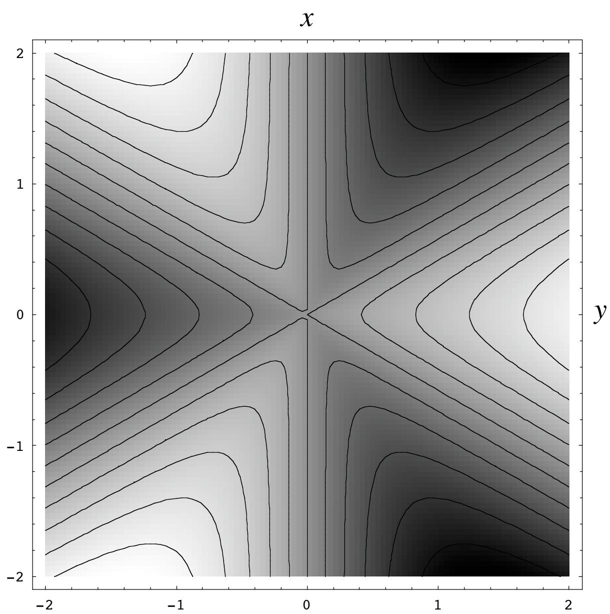
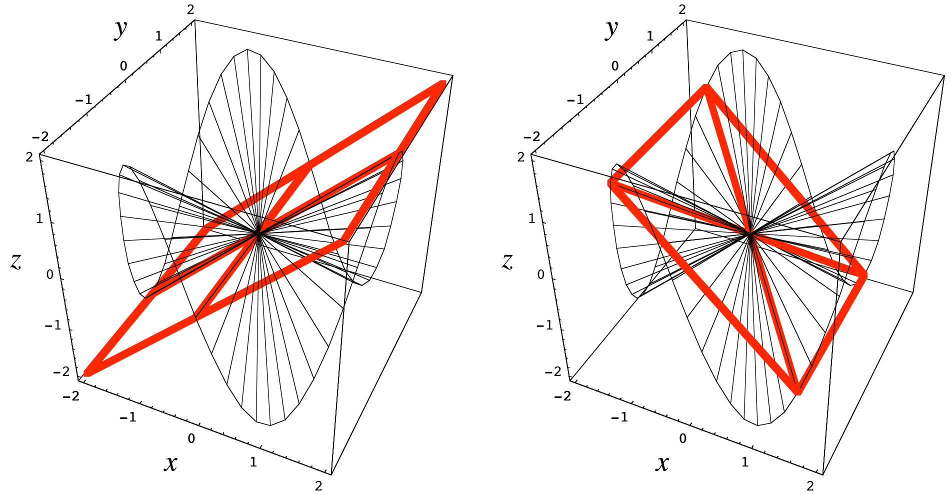


Grafico di densità:

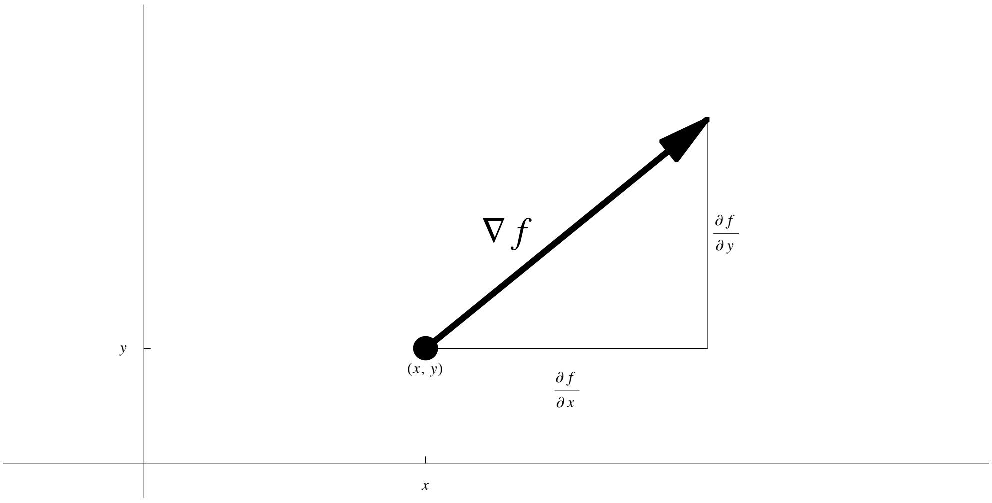


Supponiamo di intersecare la superficie con due piani verticali per l'origine,di considerare le rette tangenti alle intersezioni nell'origine,e di prendere il piano che passa per quelle due rette,il risutato dipende dalla scelta dei due piani iniziali. Nella figura a sinistra si interseca coi piani passanti per gli assi *x* e *y*; in quella a destra i coi piani passanti per le bisettrici dei quadranti. Si vede che i piani passanti per le rette intersezione sono diversi nei due casi.



Gradiente

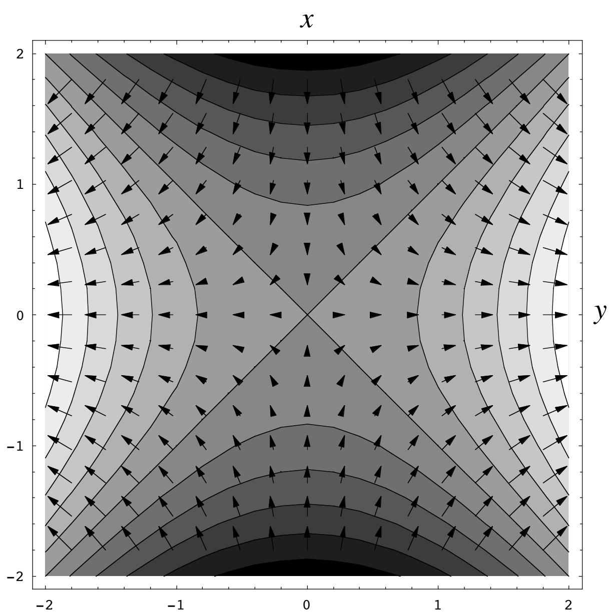
Quando una funzione di due variabili $f(x, y)$ ha derivate parziali, ad ogni punto (x, y) possiamo associare il vettore delle due derivate parziali $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, che è detto il **gradiente** di f, e spesso indicato col simbolo ∇f.



Esempio: $f(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\,x \cos(x^2 + y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\,y \cos(x^2 + y^2)$,
$\nabla f(x, y) = (2\,x \cos(x^2 + y^2),\ 2\,y \cos(x^2 + y^2))$.

Quando c'è il piano tangente (ipotesi tecnica che daremo per scontata d'ora in poi), il gradiente ha una significato geometrico abbastanza semplice: la sua direzione è quella in cui scostandoci dal punto (x, y) la funzione $f(x, y)$ cresce con velocità massima rispetto alla distanza percorsa, e la lunghezza del vettore gradiente è il valore di tale velocità. **La direzione del gradiente è quella di massima pendenza**. Inoltre dove ∇f è diverso da zero, **il gradiente è ortogonale alla curva di livello** di $f(x, y)$ passante per il punto.

La figura seguente mostra un grafico di densità con curve di livello insieme coi vettori gradienti in una griglia di punti, per la funzione $f(x, y) := x^2 - y^2$. Nell'origine il gradiente è nullo.



Derivate parziali seconde e matrice hessiana

Data una funzione $f(x, y)$ di due variabili, la sua derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ rispetto a x è a sua volta una funzione di due variabili, che possiamo derivare a sua volta rispetto a x o rispetto a y: i risultati si indicano rispettivamente con $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$. Analogamente la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}$ rispetto a y è a sua volta una funzione di due variabili, che possiamo derivare a sua volta rispetto a x o rispetto a y: i risultati si indicano rispettivamente con $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Questi quattro oggetti sono detti **derivate parziali seconde** di $f(x, y)$.

Esempio: $f(x, y) := \cos(x + 2\, x^2\, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = -(1 + 4\, x\, y) \operatorname{sen}(x + 2\, x^2\, y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4\, y \operatorname{sen}(x + 2\, x^2\, y) - (1 + 4\, x\, y)^2 \cos(x + 2\, x^2\, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = -4\, x \operatorname{sen}(x + 2\, x^2\, y) - 2\, x^2 (1 + 4\, x\, y) \cos(x + 2\, x^2\, y)$,
$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\, x^2 \operatorname{sen}(x + 2\, x^2\, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -4\, x \operatorname{sen}(x + 2\, x^2\, y) - 2\, x^2 (1 + 4\, x\, y) \cos(x + 2\, x^2\, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\, x^4 \cos(x + 2\, x^2\, y)$.

Non è un caso fortuito che $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ coincida con $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$. È un teorema generale che sotto ipotesi assai poco pesanti **le due derivate parziali miste coincidono (teorema di Schwarz).**

La matrice 2×2 delle derivate parziali seconde è detta **matrice hessiana di** f:

$$\operatorname{Hess}(f)\,(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\,(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\,(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x, y) \end{pmatrix}$$

oppure, tralasciando le variabili x, y:

$$\operatorname{Hess}(f) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Per esempio, con la $f(x, y) := \cos(x + 2\, x^2\, y)$ di prima il gradiente e la matrice hessiana nel punto generico (x, y) sono

$$\nabla f(x, y) = (-(1 + 4\, x\, y) \operatorname{sen}(x + 2\, x^2\, y),\ -2\, x^2 \operatorname{sen}(x + 2\, x^2\, y)),$$

$$\operatorname{Hess}(f)\,(x, y) =$$
$$\begin{pmatrix} -4\, y \operatorname{sen}(x + 2\, x^2\, y) - (1 + 4\, x\, y)^2 \cos(x + 2\, x^2\, y) & -4\, x \operatorname{sen}(x + 2\, x^2\, y) - 2\, x^2 (1 + 4\, x\, y) \cos(x + 2\, x^2\, y) \\ -4\, x \operatorname{sen}(x + 2\, x^2\, y) - 2\, x^2 (1 + 4\, x\, y) \cos(x + 2\, x^2\, y) & -4\, x^4 \cos(x + 2\, x^2\, y) \end{pmatrix}$$

e nel punto $(\pi, 0)$

$$\nabla f(\pi, 0) = (0, 0), \qquad \operatorname{Hess}(f)\,(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2\,\pi^2 \\ 2\,\pi^2 & 4\,\pi^4 \end{pmatrix}.$$

Il numero più importante associato alla matrice hessiana è il suo determinante, detto **determinante hessiano**, o anche, semplicemente, **hessiano di** f:

$$\det \operatorname{Hess}(f) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2.$$

Nell'esempio di prima $\det \operatorname{Hess}(f)\,(\pi, 0) = 4\,\pi^4 - 2\,\pi^2 \cdot 2\,\pi^2 = 0$.

Punti stazionari

Si dice **punto stazionario** (o anche **punto critico**) di una funzione di due variabili $f(x, y)$ un punto in cui vale una delle seguenti tre condizioni equivalenti:

- **il piano tangente alla superficie è orizzontale (descrizione geometrica);**
- **entrambe le derivate parziali di f si annullano, o in altre parole, $\nabla f = 0$ (descrizione analitica);**
- **una pallina appoggiata ferma in quel punto della superficie rimane in *equilibrio* (stabile o instabile) (descrizione meccanica).**

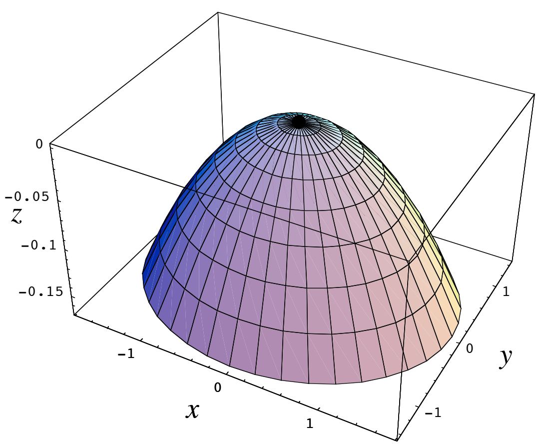
È importante sapere quali sono i comportamenti tipici di una funzione nei paraggi di un punto stazionario: i più comuni sono quelli di **massimo locale**, **minimo local**e e di **sella**.

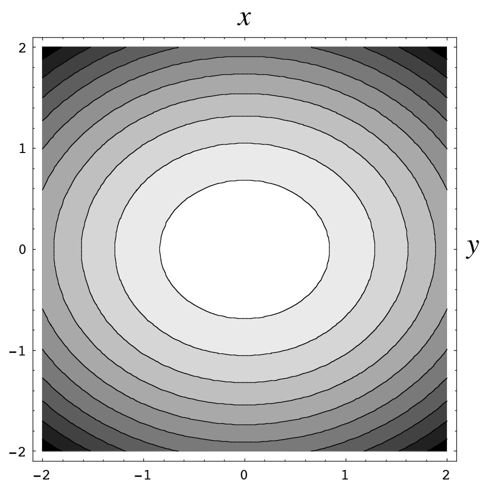
Massimo locale

Si dice che un punto (x_0, y_0) è di **massimo locale** (interno) per la funzione $f(x, y)$ se (1) la f è definita tutt'intorno al punto (x_0, y_0), (2) la f nei punti vicini a (x_0, y_0) vale meno (o al più lo stesso) che nel punto (x_0, y_0).

Geometricamente, o geograficamente, i punti di massimo locale corrispondono alle cime delle montagne. Attenzione: le montagne spesso non sono un buon esempio per noi, perché sono spigolose (*senza piano tangente*). Conviene immaginarsi delle colline ben arrotondate dall'erosione.

Esempio: l'origine è un punto di massimo locale (anzi, globale) per la funzione $f(x, y) := -2\,x^2 - 3\,y^2$. Lo si vede dalla formula, in quanto nell'origine la f vale 0, mentre in tutti gli altri punti è < 0. Un grafico della f attorno all'origine è il seguente:





Minimo locale

Si dice che un punto (x_0, y_0) è di **minimo locale** (interno) per la funzione $f(x, y)$ se

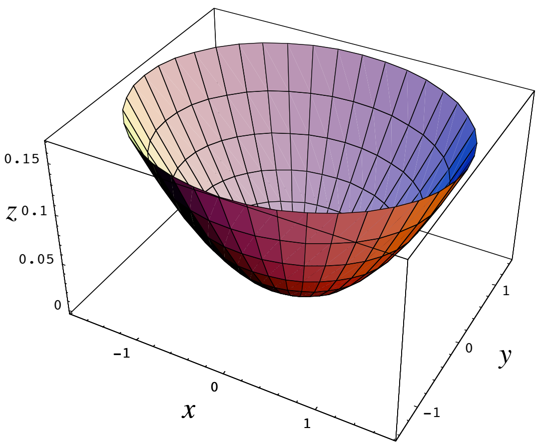
(1) la f è definita tutt'intorno al punto (x_0, y_0),

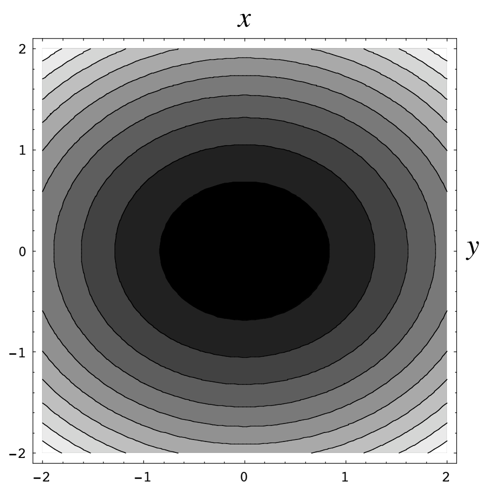
(2) la f nei punti vicini a (x_0, y_0) vale di più (o al più lo stesso) che nel punto (x_0, y_0).

Ovviamente un punto è di minimo locale per f se e solo se è di massimo locale per $-f$.

Geometricamente, o geograficamente, i punti di minimo locale corrispondono al fondo delle depressioni, dei laghi e dei mari.

Esempio: l'origine è un punto di minimo locale (anzi, globale) per la funzione $f(x, y) := 2x^2 + 3y^2$. Lo si vede dalla formula, in quanto nell'origine la f vale 0, mentre in tutti gli altri punti è > 0. Un grafico della f attorno all'origine è il seguente:





Punti di sella

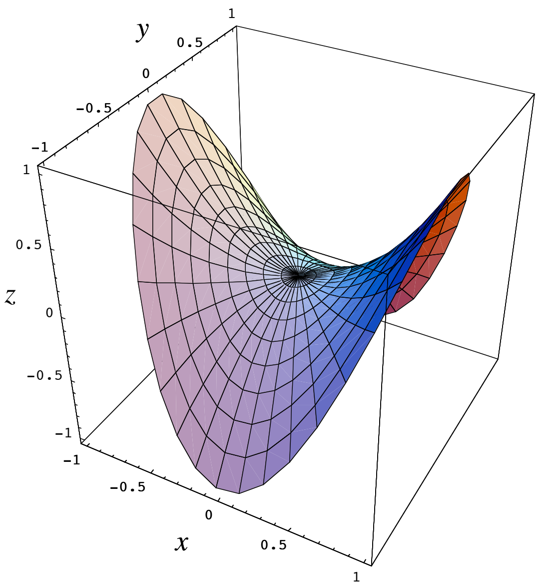
Mentre i massimi e i minimi locali ci sono anche in una variabile, in due variabili compare un fenomeno nuovo: i **punti di sella.** Non diamo una definizione rigorosa del concetto, ma solo una descrizione discorsiva e delle figure.

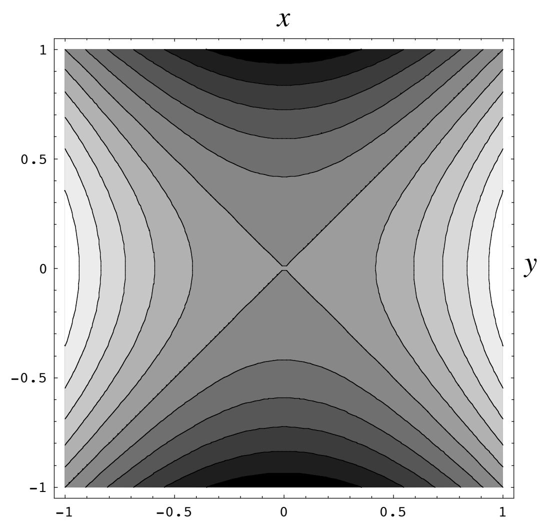
Un punto di sella è un punto stazionario con questa proprietà: se passiamo per il punto andando in certe direzioni il punto si presenta come massimo locale, mentre in certe altre direzioni il punto ci appare come minimo. Complessivamente il punto non è né di massimo né di minimo.

Geograficamente, il punto di sella corrisponde al passo di montagna: per chi attraversa il valico il passo è il punto più alto del cammino, mentre per chi segue il crinale da una cima all'altra il passo è il punto più basso del percorso.

Il nome di punto "di sella" viene da una metafora equestre, invece che alpinistica: il punto in cui il cavaliere è seduto è un massimo nella direzione destra-sinistra, ed è un minimo nella direzione avanti-indietro.

Per la funzione $f(x, y) := x^2 - y^2$ si vede facilmente che l'origine è un punto di sella: innanzitutto è un punto stazionario, e poi nella direzione dell'asse x si presenta come minimo ($f(x, 0) = x^2$), mentre nella direzione dell'asse y si presenta come massimo ($f(0, y) = -y^2$). Grafico:





Come si studiano i punti stazionari usando l'hessiana

Regola

Supponiamo di avere un punto (x_0, y_0) **stazionario** per $f(x, y)$:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0), \text{ o, che è lo stesso, } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

e consideriamo la matrice hessiana di f in (x_0, y_0):

$$\text{Hess}(f) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

- Se il **determinante** hessiano è **< 0** allora il punto è di **sella** (e quindi né di minimo né di massimo);
- Se il **determinante** hessiano è **> 0** allora si guardano i termini sulla diagonale principale: $\begin{pmatrix} \color{red}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \color{red}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \end{pmatrix}$ (quelli in rosso)
  - se questi sono **> 0** il punto è di **minimo** locale;
  - se sono **< 0** il punto è di **massimo** locale.
- Se il **determinante** hessiano è **nullo** allora **non si sa**: può succedere di tutto, come vedremo con esempi più avanti.

Osservazioni

Quando il determinante hessiano è >0 qualcuno si chiederà perché abbiamo passato sotto silenzio il caso in cui i termini diagonali sono uno positivo e uno negativo (o i casi nulli). Ebbene, li abbiamo omessi perché non esistono. Il determinante è $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2$, per cui quando questo è >0 abbiamo che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \geq 0$, da cui segue che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ non possono annullarsi e hanno lo stesso segno.

Qualcuno si ricorderà che in una variabile la casistica tipica comprende massimi, minimi e flessi. Sentendo ora di massimi, minimi e selle si è tentati di considerare le selle come l'analogo in due variabili dei flessi. Sbagliato! Le selle sono un fenomeno nuovo, che non ha un corrispettivo in una dimensione. Ricordate anche che in una variabile non basta il valore della derivata seconda per decidere se un punto è un flesso orizzontale, mentre in due variabili la sella è decidibile (di solito) usando le derivate seconde.

Un esercizio svolto

Cosideriamo la funzione $f(x, y) := 2\log(x^2 + y^2 + 2) - x\,y$. Vogliamo trovarne i punti stazionari e classificarli usando l'hessiana.

Calcoliamo le derivate parziali prime: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\cdot 2\,x}{x^2+y^2+2} - y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\cdot 2\,y}{x^2+y^2+2} - x$. I punti stazionari sono quelli in cui entrambe le derivate prime si annullano:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4\,x}{x^2+y^2+2} - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4\,y}{x^2+y^2+2} - x = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha un brutto aspetto, ma si può risolvere se si sfrutta il fatto che i denominatori sono gli stessi. Isoliamo i denominatori, supponendo per ora che x e y siano diversi da 0:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2+2} = \frac{y}{4\,x} \\ \frac{1}{x^2+y^2+2} = \frac{x}{4\,y} \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2+2} = \frac{y}{4\,x} \\ \frac{y}{4\,x} = \frac{x}{4\,y} \end{cases}, \text{ o ancora } \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2+2} = \frac{y}{4\,x} \\ 4\,y^2 = 4\,x^2 \end{cases}, \text{ che equivale a } \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2+2} = \frac{y}{4\,x} \\ y = \pm x \end{cases}.$$

Sostituendo $y = x$ nella prima equazione si ottiene $\frac{1}{x^2+x^2+2} = \frac{x}{4\,x}$, cioè $4 = 2\,x^2 + 2$, ossia $x = \pm 1$. Abbiamo quindi **due punti critici** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Sostituendo $y = -x$ nella prima equazione si ottiene invece $\frac{1}{x^2+x^2+2} = \frac{-x}{4\,x}$, cioè $4 = -2\,x^2 - 2$, che non ha soluzioni.

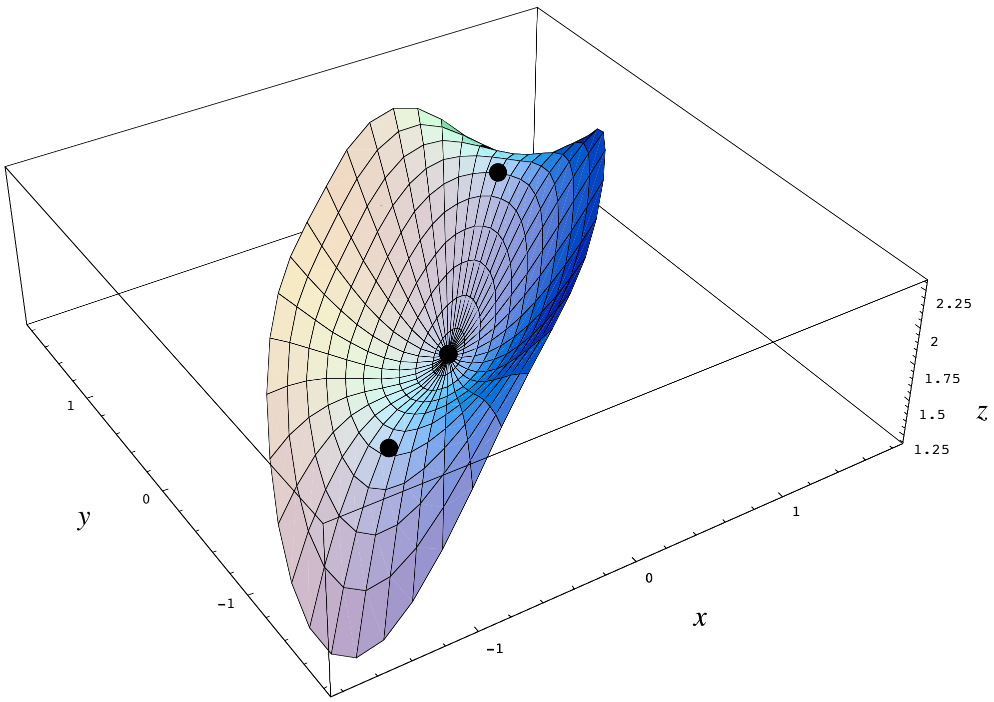
Nell'ipotesi rimanente che una fra le due variabili x, y sia nulla, sostituendo nell'equazione si ottiene che anche l'altra variabile deve essere 0. Otteniamo quindi il **terzo punto critico** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Calcoliamo le derivate seconde: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4\,(x^2+y^2+2) - 4\,x\cdot 2\,x}{(x^2+y^2+2)^2} - 0 = 4\,\frac{-x^2+y^2+2}{(x^2+y^2+2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{4\,x}{(x^2+y^2+2)^2}\cdot 2\,y - 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4\,(x^2+y^2+2) - 4\,y\cdot 2\,y}{(x^2+y^2+2)^2} - 0 = 4\,\frac{x^2-y^2+2}{(x^2+y^2+2)^2}$. La matrice hessiana nei tre punti critici è

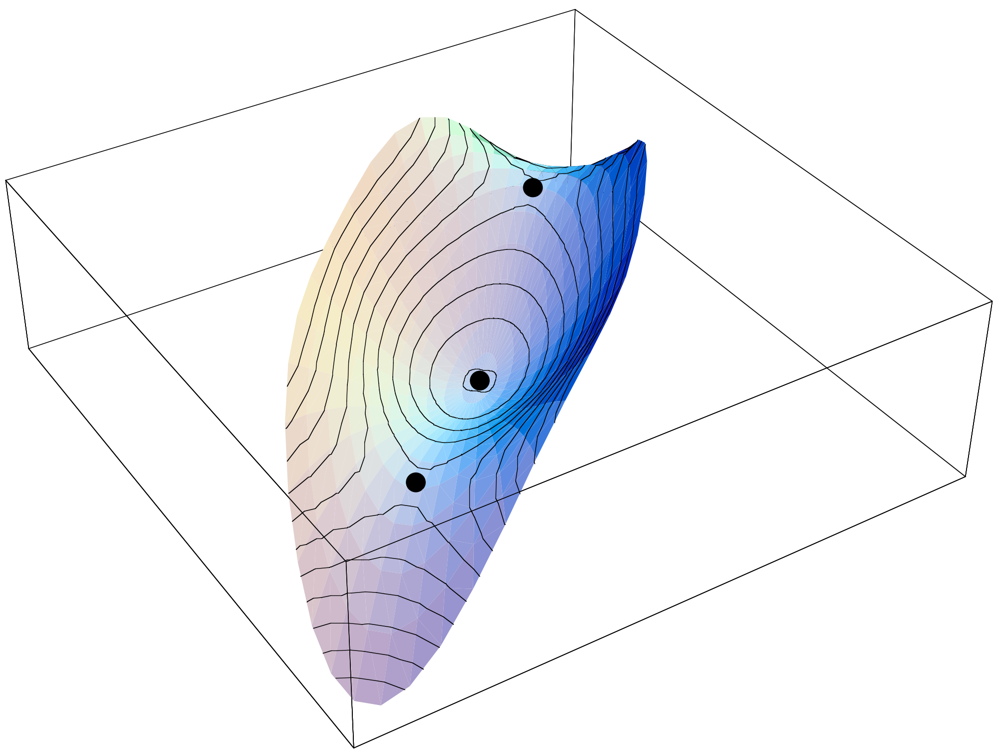
$$\operatorname{Hess} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \operatorname{Hess} f(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \operatorname{Hess} f(-1, -1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

In (0, 0) il determinante hessiano è 3 e i termini diagonali sono > 0, quindi l'origine è un punto di minimo locale. Negli altri due punti il determinante hessiano è -2, e quindi sono due punti di sella.

Ecco una figura del grafico della funzione $f(x, y) := 2\log(x^2 + y^2 + 2) - x\,y$:



Altra figura della stessa funzione, ma con le linee di livello evidenziate:



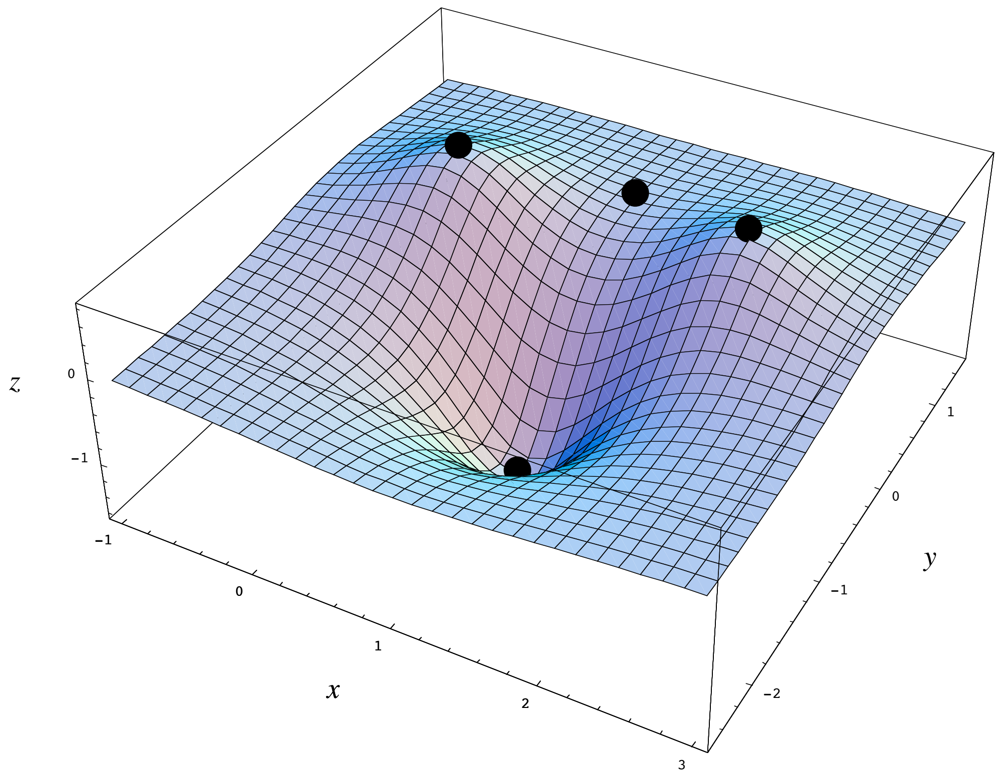
Galleria di punti critici (senza calcoli)

Un esempio di una funzione che ha massimi, mimini e selle insieme

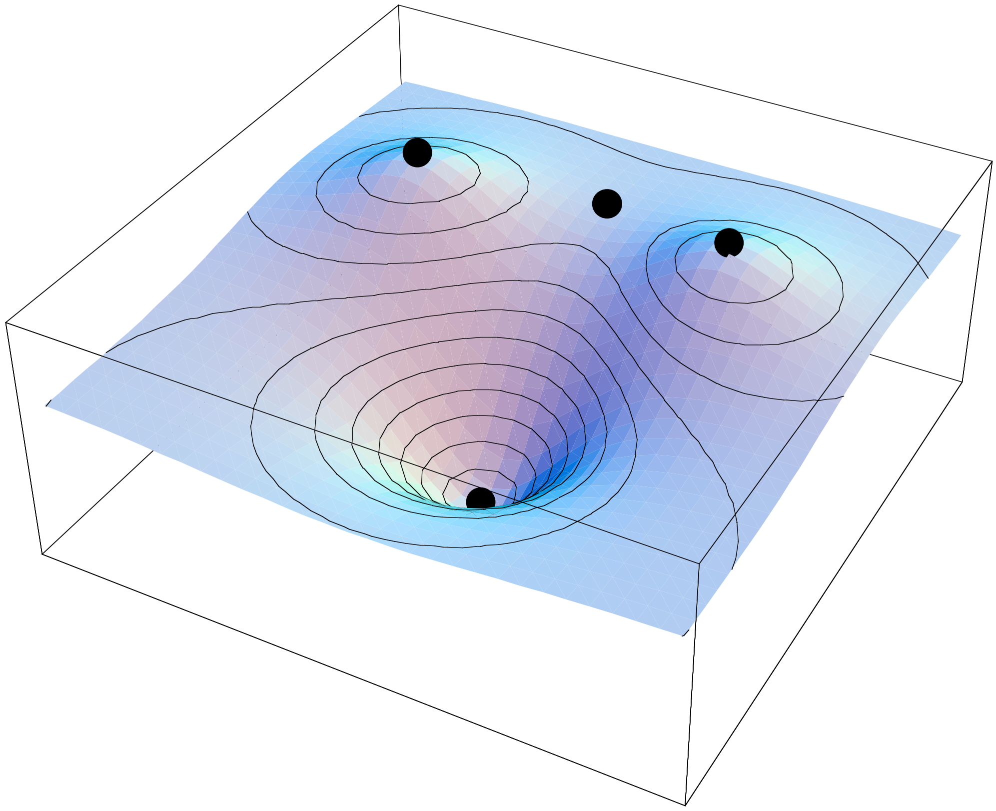
Un grafico più spettacolare, in cui si distinguono due punti di massimo locale, un punto di minimo locale, e un punto di sella. Nella prima figura vediamo una panoramica, mentre le quattro figure più piccole sono degli ingrandimenti dei quattro punti stazionari. Per i curiosi la formula della funzione è

$$f(x, y) := \frac{1}{2\,(x-2)^2 + 2\,y^2 + 1} + \frac{1}{2\,x^2 + 2\,y^2 + 1} - \frac{2}{2\,(x-1)^2 + 2\,(y+1)^2 + 1}$$

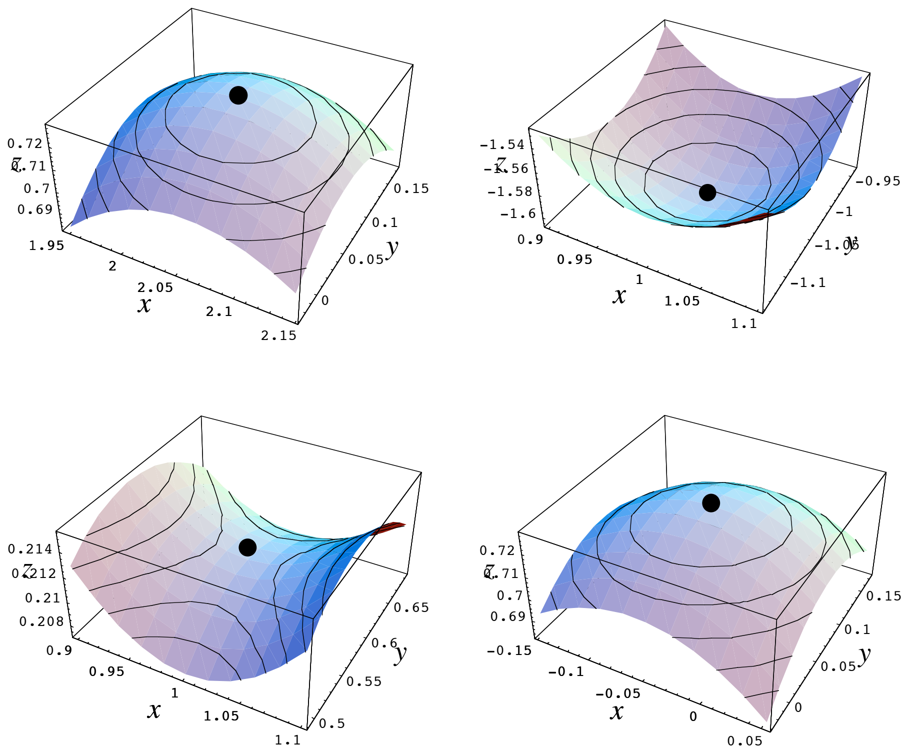
ma attenzione, i conti per uno studio analitico non sono elementari. Per primo un grafico generico:



Un grafico con evidenziate le curve di livello:



Ingrandimenti delle regioni attorno ai quattro punti critici:

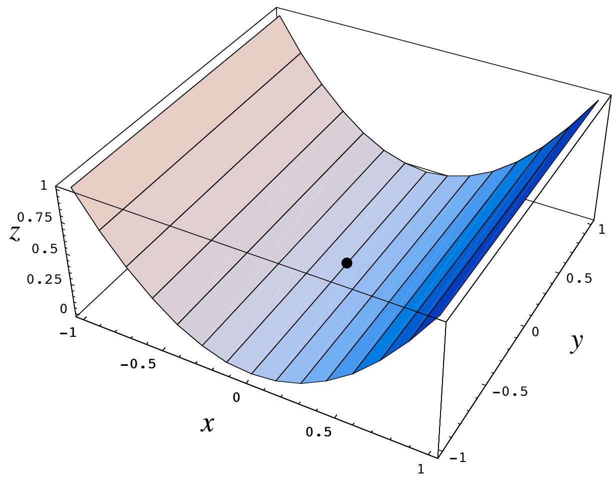


z
0.72
0.71
0.7
0.69
1.95
2
2.05
2.1
2.15
x
0
0.05
0.1
0.15
y
z
-1.54
-1.56
-1.58
-1.6
0.9
0.95
1
1.05
1.1
x
-0.95
-1
-1.05
-1.1
y
z
0.214
0.212
0.21
0.208
0.9
0.95
1
1.05
1.1
x
0.5
0.55
0.6
0.65
y
z
0.72
0.71
0.7
0.69
-0.15
-0.1
-0.05
0
0.05
x
0
0.05
0.1
0.15
y

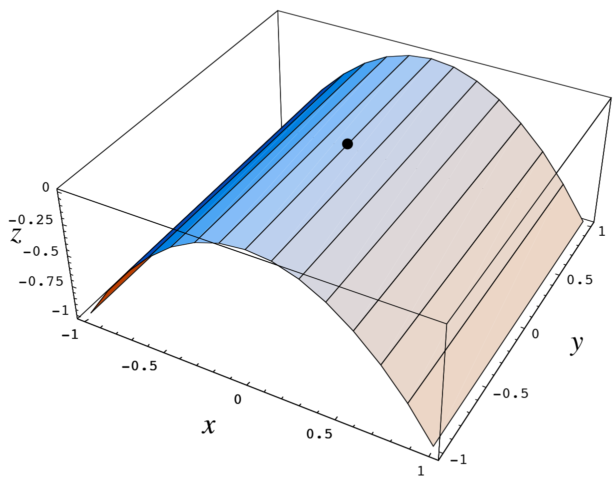
Una sfilata di punti stazionari con determinante hessiano nullo, e che quindi non si possono decidere con l'hessiana

Ci sono più cose sotto il sole di quante ne possa distinguere l'hessiana. Facciamo una carrellata.

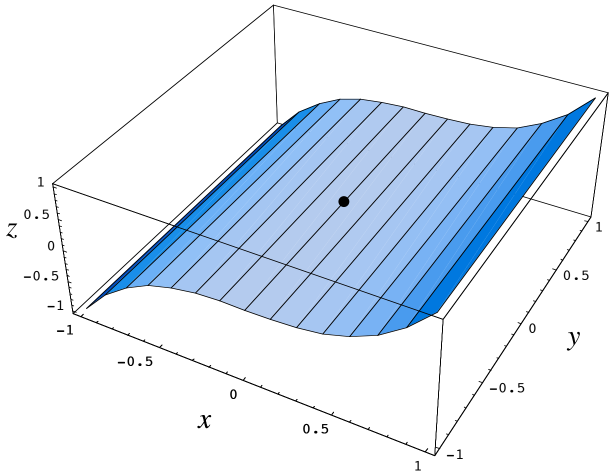
Un minimo locale debole: $f(x, y) := x^2$



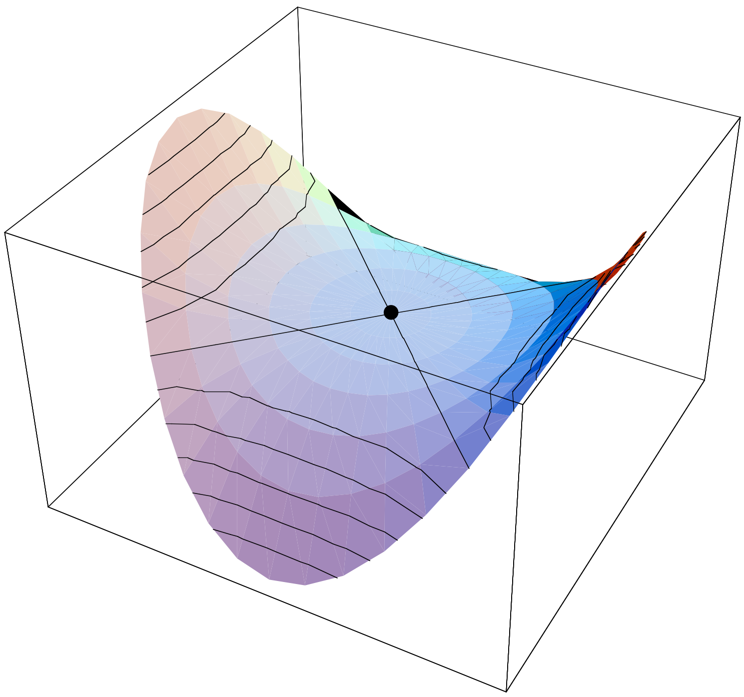
Un *massimo locale debole*: $f(x, y) := -x^2$



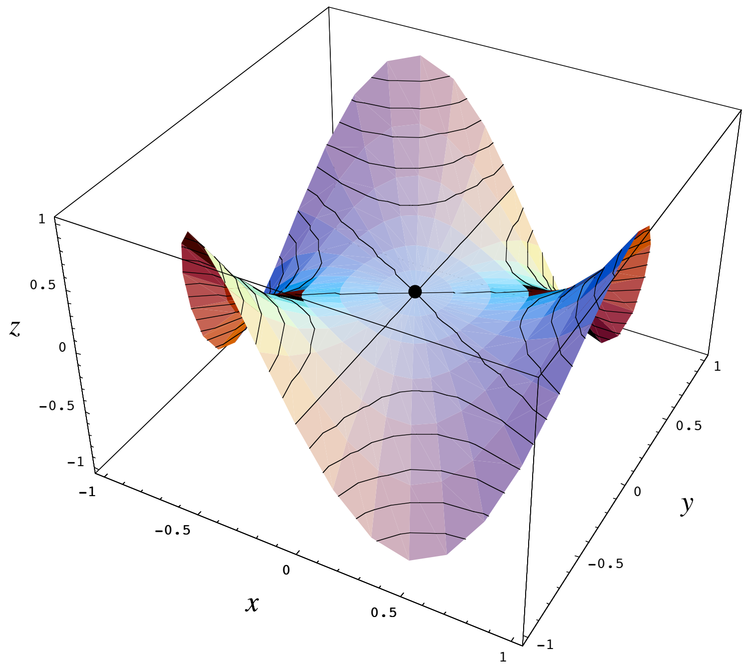
Un *flesso orizzontale* : $f(x, y) := x^3$



Una *sella di ordine superiore*: $f(x, y) := x^4 - y^4$. Qui le quarte potenze "appiattiscono" la sella e le derivate seconde sono tutte nulle.



Una *sella di scimmia:* una sella fatta per far sedere una scimmia, perché fa posto per la coda oltre che per le due gambe, anche se non si conoscono cavalli su cui fissarla: $f(x, y) := x^3 - 3\,x\,y^2$



Lagrange aveva dato una regola per capire se un punto era un minimo o un massimo: (1) studiare le restrizioni della funzione alle rette passanti per il punto; (2) se tutte queste restrizioni hanno nel punto un minimo, allora il punto è di minimo per il problema originale. Idem con massimo al posto di minimo. Soltanto dopo un secolo **Peano** si è accorto che la regola era sbagliata. Il contresempio è semplicissimo: $f(x, y) := (x^2 - y)\,(x^2 - \frac{y}{3})$. Nell'origine questa funzione non è né massimo né minimo, perché nelle vicinanze dell'origine prende sia valori positivi (sull'asse y per esempio) che valori negativi (sula parabola $y = 2\,x^2$ per esempio). Ciononostante la restrizione di $f(x, y)$ a *ogni* retta $y = m\,x$ ha un *minimo* nell'origine (provare per credere).