La funzione di Van der Waerden

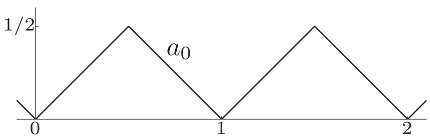
Definiamo la funzione $a_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$\boxed{a_0(x) := \text{distanza di } x \text{ dal numero intero più vicino.}}$$

Che vuol dire? Dunque, per un corollario del principio di Archimede sappiamo che ogni numero reale x appartiene ad uno ed un solo intervallo della forma $[n, n+1[$, con $n \in \mathbb{Z}$. Questo n è detto "parte intera di x", ed è solitamente indicato con $n = \lfloor x \rfloor$. Quindi il numero intero più vicino a x è n se $n \le x < n + \frac{1}{2}$, è $n+1$ se $n + \frac{1}{2} < x < n+1$; se infine $x = n + \frac{1}{2}$, entrambi n ed $n+1$ hanno distanza minima da x fra i numeri interi. Ne segue la formula esplicita

$$a_0(x) = \begin{cases} x - n & \text{se } x \in [n, n+\frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} & \text{se } x = n + \frac{1}{2} \\ n+1-x & \text{se } x \in \,]n+\frac{1}{2}, n+1[\end{cases} \qquad \text{dove } n = \lfloor x \rfloor \text{ è la parte intera di } x.$$

Potremmo anche inglobare il caso $x = n + \frac{1}{2}$ in uno qualsiasi degli altri due casi, perché entrambi $x - n$ e $n + 1 - x$ valgono $\frac{1}{2}$ per $x = n + \frac{1}{2}$. Chi si sente a disagio per la definizione iniziale non rigorosa di a_0 (non sempre c'è "il" numero intero più vicino) può scartarla e prendere la formula esplicita come vera definizione.



Il grafico di a_0 è "a dente di sega": assieme all'asse x forma una catena infinita di triangoli isosceli tutti uguali fra loro, di base 1 ed altezza 1/2, con gli estremi delle basi nei punti di ascissa intera. I vertici hanno ascissa della forma $n + 1/2$. Un fatto che sarà necessario ricordare nel seguito è che a_0 *è continua su* $\mathbb{R}$. Infatti nei punti degli intervalli aperti $]n, n+1/2[$, $]n+1/2, n+1[$ la a_0 è continua perché coincide con una funzione lineare in un intorno. Nei punti del tipo n o $n + 1/2$ è continua perché il valore della funzione coincide con i limiti da destra e da sinistra (tali limiti sono rispettivamente 0 e 1/2). Notare anche che $a_0(x+1) = a_0(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, ossia che a_0 *è periodica di periodo 1.* Altri due fatti da tenere presenti sono

$$0 \le a_0(x) \le \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad a_0(x) = 0 \iff x \in \mathbb{Z}, \qquad a_0(x) = \frac{1}{2} \iff x \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}.$$

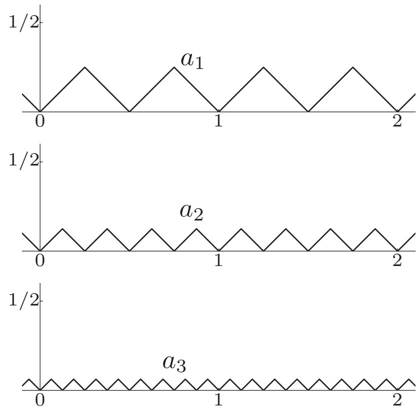
Esercizio. Dimostrare che a_0 si può scrivere anche in uno qualsiasi dei modi seguenti:

$$a_0(x) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n| = \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x\}\,.$$

Esercizio. Dimostrare che $|a_0(x) - a_0(y)| \le |x - y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (suggerimento: il primo membro è sempre $\le 1/2$, quindi basta studiare il caso $|x - y| < 1/2$). In particolare a_0 è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

L'indice 0 della funzione a_0 lascia temere che ci siano in agguato $a_1, a_2 \ldots$ e infatti eccole:

$$\boxed{a_k(x) := \frac{1}{2^k} a_0(2^k x)\,, \qquad k \in \mathbb{N}.}$$



Non è difficile interpretare la formula: $a_0(2^k x)$ è la distanza di $2^k x$ dall'$n \in \mathbb{Z}$ più vicino, quindi $a_k(x) = 2^{-k} a_0(2^k x) = 2^{-k} |2^k x - n| = |x - 2^{-k} n|$. Così come a_0 era la distanza dall'insieme $\mathbb{Z}$, a_k rappresenta la distanza dall'insieme $2^{-k}\mathbb{Z}$ (insieme dei multipli interi di 2^{-k}). Il grafico di a_k è una copia del grafico di a_0 rimpicciolita del fattore 2^k: i triangolini isosceli hanno basi di lunghezza 2^{-k}, con estremi nei punti di $2^{-k}\mathbb{Z}$, ed altezza 2^{-k-1}. Per passare dal grafico di a_k a quello di a_{k+1} basta prendere le basi dei triangoli di a_k, dividerle in due parti uguali e costruire un nuovo triangolino su ciascuna delle due metà, con l'altezza ovviamente dimezzata: $\to$.

Giacché a_k è ottenuta tramite prodotti per costanti e composizione con la funzione continua a_0, possiamo dire che *tutte le a_k sono continue su $\mathbb{R}$*. Le a_k sono anche *periodiche di periodo 1* (anzi, a_k è periodica anche di periodo 2^{-k}, ma l'unico periodo in comune a tutte le a_k è 1). Inoltre

$$0 \le a_k(x) \le \frac{1}{2^{k+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad a_k(x) = 0 \iff x \in 2^{-k}\mathbb{Z}, \qquad a_k(x) = \frac{1}{2^{k+1}} \iff x \in \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k}\mathbb{Z}.$$

Altre osservazioni facili da verificare, e che ci serviranno, sono che:

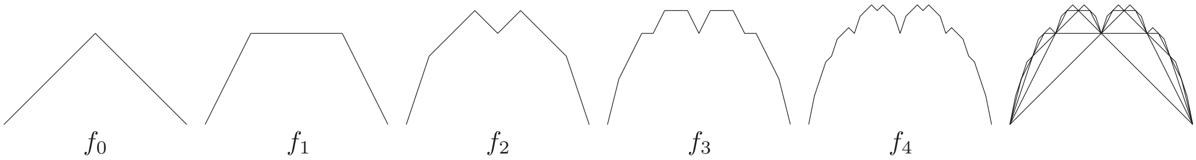
1) in ogni punto in cui a_k si annulla, si annullano pure tutte le seguenti $a_{k+1}, a_{k+2}\ldots$;
2) la funzione a_k è derivabile in tutti i punti di $\mathbb{R}$ esclusi i punti di $2^{-k-1}\mathbb{Z}$, che corrispondono ai punti angolosi del grafico. Dove esiste, la derivata vale $+1$ o -1 a seconda di quale intervallo ci si trovi (più precisamente ...).

Esercizio. Dimostrare che $|a_k(x)-a_k(y)| \le |x-y|\ \forall x,y \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ (usare il risultato dell'esercizio precedente). Mostrare poi che i grafici di tutte le a_k sono simmetrici rispetto alla retta verticale $x = 1/2$, ossia che $a_k(x) = a_k(\frac{1}{2} - x)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Ci sono anche altre simmetrie?

Le funzioni $a_0, a_1, a_2\ldots$ sono i mattoni con cui si edifica la funzione di Van der Waerden. Si comincia a costruire da a_0 sommando a_1, poi a_2, a_3 &cetera, ottenendo una *successione di funzioni*:

$$f_0 := a_0\,, \qquad f_1 := a_0 + a_1\,, \qquad f_2 := a_0 + a_1 + a_2\,, \quad \ldots \quad f_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n\,.$$

Il grafico di f_0 coincide con quello di a_0 che abbiamo già visto. Riportiamo qui i grafici di f_0, f_1, f_2, f_3, f_4



sull'intervallo $[0,1]$, dapprima separati e poi sovrapposti.

Esercizio. Munirsi di carta quadrettata fine o millimetrata e disegnare i grafici di f_4, f_5.

Prendiamo nota dei seguenti fatti riguardanti le funzioni f_n:

3) f_n è *continua e periodica di periodo 1* in quanto tutte le a_n hanno tali proprietà.
4) Il grafico di f_n è una *poligonale* con i vertici nei punti di ascissa in $2^{-n-1}\mathbb{Z}$. Questo perché ciascuna delle $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ è *lineare* sugli intervalli del tipo $[m2^{-n-1}, (m+1)2^{-n-1}]$. Talvolta due segmenti consecutivi della poligonale sono allineati (per esempio il tratto orizzontale di f_1), in modo da farli sembrare un solo segmento (in effetti *sono* pure un solo segmento, ma qui conviene pensarne due).
5) I vertici (o meglio, gli estremi dei segmenti) del grafico di f_n restano vertici anche per il grafico di f_{n+1} (e di tutte le successive). Si passa da f_n ad f_{n+1} così: per ciascun segmento del grafico di f_n si considera il suo punto medio, ci si innalza in verticale di 2^{-n-2} e si congiunge il punto di arrivo (nuovo vertice) con gli estremi del segmento di partenza. Si osservi la sovrapposizione dei grafici di $f_0, \ldots, f_3$ per capire meglio.
6) le *pendenze* dei segmenti che formano il grafico di f_n sono tutte numeri interi *pari* se n è dispari e sono tutte interi *dispari* se n è pari. Lo si può dimostrare per induzione. Per $n = 0$ abbiamo già osservato che le pendenze di a_0 sono ± 1, quindi tutte interi dispari. Supponiamo che le pendenze di f_n siano tutte interi della stessa parità (o tutte pari o tutte dispari) e dimostriamo che le pendenze di f_{n+1} sono tutti interi della parità opposta. Dunque, passando ad f_{n+1} ogni intervallo $[m2^{-n-1}, (m+1)2^{-n-1}]$ viene diviso in due parti uguali e alla funzione (ivi) lineare f_n viene sommata la funzione a_{n+1} della forma (ivi) $\wedge$, con pendenze ± 1. Ricordiamo che sommando due funzioni lineari si sommano le pendenze. Quindi le pendenze dei due segmenti risultanti sono di parità opposta a quella del segmento originale.

7) Per $x \in \mathbb{R}$ fissato, la successione $f_0(x), f_1(x), f_2(x) \ldots$ è *debolmente crescente.* Infatti

$$f_{n+1}(x) = \underbrace{a_0(x) + \cdots + a_n(x)}_{f_n(x)} + \underbrace{a_{n+1}(x)}_{\geq 0} \geq f_n(x)\,.$$

Per i punti di $2^{-n}\mathbb{Z}$ la successione è *costante da* $n-1$ *in poi*: se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, $m \in \mathbb{Z}$

$$f_k(m2^{-n}) = \underbrace{a_0 + \cdots + a_{n-1}}_{f_{n-1}} + \underbrace{a_n(m2^{-n}) + \cdots + a_k(m2^{-n})}_{\text{tutti}=0} = f_{n-1}(m2^{-n})\,.$$

8) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la successione $n \mapsto f_n(x)$ è *limitata superiormente da 1.* Infatti, ricordandosi che $a_k \leq 2^{-k-1}$ e la formula per la somma di una progressione geometrica:

$$f_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\Big) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1\,.$$

Le proprietà 7 ed 8 ci permettono di dire che per ogni $x \in \mathbb{R}$ *la successione* $n \mapsto f_n(x)$ *ha limite finito* (compreso fra 0 e 1). La funzione limite

$$\boxed{f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)}$$

è stata introdotta nel 1930 da Bartel Leendert Van der Waerden (1903–1996) come esempio maneggevole di una $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è *continua ovunque ma non derivabile in alcun punto.* Esempi più complicati di funzioni con questa proprietà erano noti già nella seconda metà dell'800.

Il valore del limite che definisce $f(x)$ è facile da calcolare nei punti del tipo $m2^{-n}$, con $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, cioè nei punti di $\mathbb{R}$ che hanno *espansione binaria finita*, giacché per essi la successione è definitivamente costante, e tutto si riduce al calcolo di f_{n-1}, che è a sua volta una somma finita di funzioni elementari. In altre parole, *i vertici delle poligonali delle approssimanti* f_n *sono punti del grafico della funzione di Van der Waerden.* Per esempio, riciclando le coordinate dei vertici di f_3, già calcolati in precedenza, si ricava la seguente tabella di valori *esatti* di f:

x	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{15}{16}$	1
$f(x)$	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	0

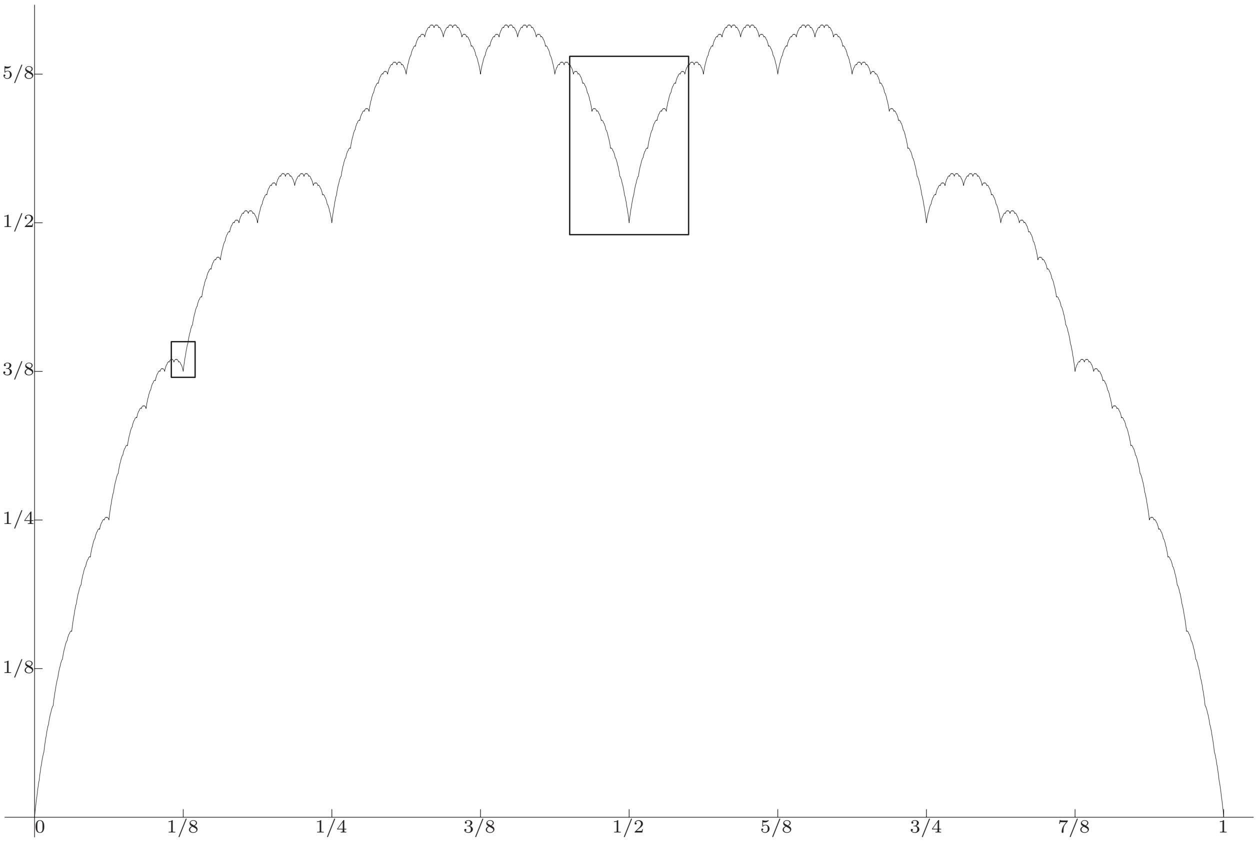
Esercizio. Calcolare $f(1/32), f(9/8), f(3/2)$. Dimostrare che $f(x+1) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ (f *è periodica di periodo 1*), $f(x) = f(-x)$ (è una funzione *pari*) e $f(x) = f(\frac{1}{2} - x)$ (grafico simmetrico rispetto alla retta $x = \frac{1}{2}$).

Sulla via di dimostrare continuità e non derivabilità di f, cominciamo col valutare di quanto al massimo le funzioni approssimanti f_n si possano discostare dalla funzione limite f:

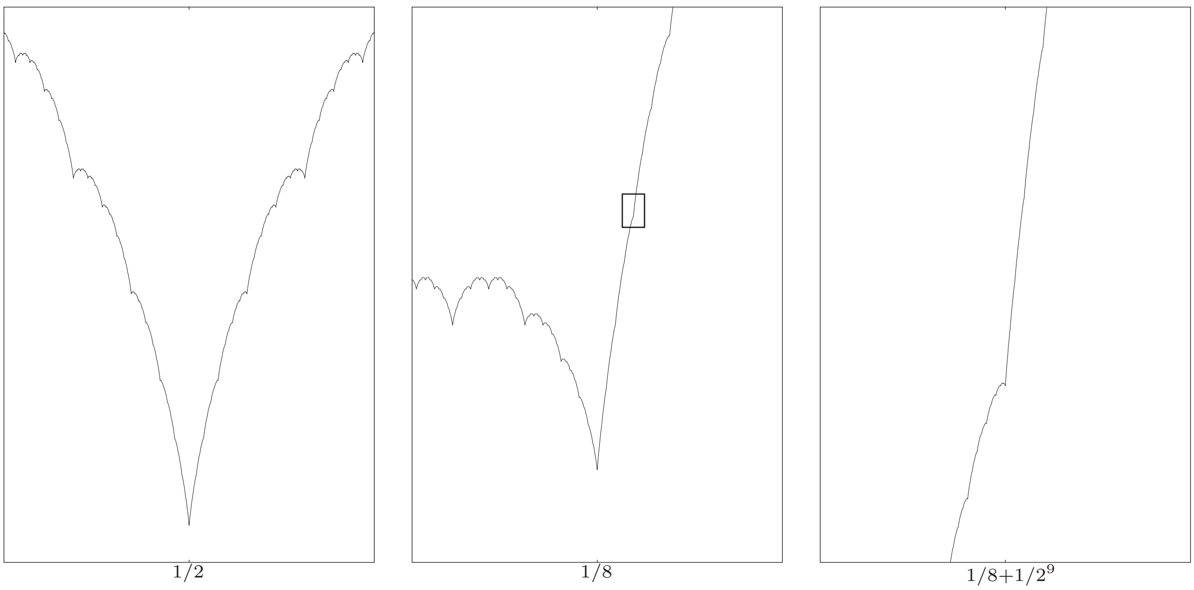
$$|f(x) - f_n(x)| = f(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \leq \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{2^{n+4}} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\Big) = \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

(si usa la formula per la somma di una serie geometrica $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = 1/(1-\alpha)$ per $|\alpha| < 1$). La disuguaglianza si può interpretare dicendo che giace su una striscia di altezza 2^{-n-1} che si appoggia sul grafico di f_n (l'altezza va misurata in verticale, non obliquamente).



La figura qui sopra mostra la poligonale grafico di f_{10}. Il grafico di f si trova a non più di 1/2048 (2^{-11}) al di sopra della poligonale (usando l'ampiezza orizzontale della figura come unità di misura), cioè a meno di un decimo di millimetro di distanza. Possiamo affermare tranquillamente che *la poligonale che si ottiene dalla figura non si distingue ad occhio nudo dal grafico della funzione di Van der Waerden.* In cima alla pagina seguente ci sono due ingrandimenti dei riquadri della figura grande, e un ingrandimento del secondo ingrandimento, presi dalle poligonali di f_{12}, f_{13} ed f_{18}.



Proposizione 1. *La funzione di Van der Waerden è continua su* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Gli addendi sono continui e la serie converge totalmente. $\square$

Esercizio. Mostrare che $|f(x) - f(y)| \leq 2^{-n} + (n+1)|x-y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esercizio. Calcolare $f(\sqrt{5})$ con una approssimazione di meno di $1/10$. (Usare il fatto che $|\sqrt{5} - 9/4| < 2^{-6}$ e la disuguaglianza dell'esercizio precedente, con n opportuno).

Osservando il grafico di f si può notare che nei punti di ascissa $1/2$, $1/4$, $3/4$ e in molti altri (anche se più in piccolo) si ha una specie di "cuspide" rivolta verso il basso. Al riguardo si può in effetti affermare che ogni tratto del grafico della funzione presenta infinite di queste cuspidi. Sembra quasi che il grafico sia fatto apposta per aiutare una scalatrice che voglia arrampicarcisi sopra, con tutti gli appigli che le dà. Detto in termini rigorosi:

Proposizione 2. *Se $x_0 \in \mathbb{R}$ è del tipo $m_0 2^{-n_0}$ con $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ (numero binario finito) allora il rapporto incrementale*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tende a $+\infty$ per $x \to x_0^+$ e tende a $-\infty$ per $x \to x_0^-$.

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è di seguire l'andamento delle approssimanti f_{n_0-1}, f_{n_0}, $f_{n_0+1} \ldots$ attorno ad x_0. Il punto $(x_0, f(x_0))$ è un vertice di f_{n_0-1}. Da esso si dipartono due segmenti della poligonale di f_{n_0-1}, con pendenze che qui sono irrilevanti. Ciò che importa invece è che passando ad f_{n_0} abbiamo due nuovi segmenti (più corti) incernierati ancora in $(x_0, f(x_0))$, le cui pendenze sono quelle di f_{n_0-1} a cui va sommato -1 a sinistra e $+1$ a destra. Ad ogni successivo passaggio i segmenti si accorciano ma le pendenze si incrementano ogni volta di -1 e di $+1$ dalle due parti. è chiaro che la pendenza a sinistra tende a $-\infty$ e quella a destra a $+\infty$.

Facciamo una dimostrazione formale completa per il caso $x \to x_0^+$. Sia $x \in \mathbb{R}$, $x_0 < x < x_0 + 2^{-n_0-1}$, e prendiamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq n_0$ e $|x - x_0| \leq 2^{-n-1}$. Possiamo scrivere

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_{n_0-1}(x_0) \geq f_n(x) - f_{n_0-1}(x_0) = \left(f_{n_0-1}(x) + \sum_{k=n_0}^{n} a_k(x)\right) - f_{n_0-1}(x_0) =$$

$$= \big(f_{n_0-1}(x) - f_{n_0-1}(x_0)\big) + \sum_{k=n_0}^{n} a_k(x)\,.$$

Notiamo che x_0 ed x giacciono entrambi in uno stesso intervallino di $2^{-n-1}\mathbb{Z}$ (precisamente in $[x_0, x_0 + 2^{-n-1}]$, che si può anche scrivere $[(m_0 2^{n-n_0+1})2^{-n-1}, (m_0 2^{n-n_0+1} + 1)2^{-n-1}]$) sul quale le funzioni $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots, a_n$ sono lineari di pendenza $+1$ e si annullano nell'estremo sinistro. Quindi $a_k(x) = a_k(x) - a_k(x_0) = x - x_0$ per $n_0 \leq k \leq n$. Dunque

$$f(x) - f(x_0) \geq \big(f_{n_0-1}(x) - f_{n_0-1}(x_0)\big) + \sum_{k=n_0}^{n} a_k(x) = \big(f_{n_0-1}(x) - f_{n_0-1}(x_0)\big) + (n - n_0 + 1)(x - x_0)\,.$$

D'altra parte anche f_{n_0-1} è lineare su quell'intervallino, con pendenza ignota che indicheremo con $f'_{n_0-1,+}(x_0)$ (derivata destra in x_0). Allora

$$f(x) - f(x_0) \geq \big(f_{n_0-1}(x) - f_{n_0-1}(x_0)\big) + (n - n_0 + 1)(x - x_0) = f'_{n_0-1,+}(x_0)(x - x_0) + (n - n_0 + 1)(x - x_0)\,.$$

Dividendo per $x - x_0$ si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'_{n_0-1,+}(x_0) + n - n_0 + 1 \qquad \forall x \in \,]x_0, x_0 + 2^{-n-1}]\,.$$

Grazie all'addendo n, il secondo membro della disuguaglianza può essere reso grande a piacere pur di prendere x sufficentemente vicino ad x_0. Conclusione:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty\,. \quad \square$$

Esercizio. Ricavare la disuguaglianza più esplicita:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq f'_{n_0-1,+}(x_0) - n_0 + \left\lfloor \log_2 \frac{1}{x-x_0} \right\rfloor \qquad \text{per } x_0 < x \leq x_0 + 2^{-n_0-1}\,.$$

Esercizio. Dimostrare che nessun punto di massimo locale per f è un numero binario finito.

Esercizio. Esiste un intervallo $[a,b]$ con $a<b$ su cui la f sia monotona? (In ogni tale intervallo ci sono infinite cuspidi ...).

Veniamo ora al punto cruciale: la non derivabilità di f in alcun punto. Notare che la seguente proposizione 3 è indipendente dalla proposizione 2, ossia nessuna delle due è corollario dell'altra.

Proposizione 3. *Non esiste la derivata (né destra né sinistra) di f in alcun punto di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Prendiamo $n \in \mathbb{N}$ e siano u_n, v_n i due punti di $2^{-n}\mathbb{Z}$ che seguono immediatamente x_0, ossia:

$$u_n - \frac{1}{2^n} \leq x_0 < u_n < v_n = u_n + \frac{1}{2^n}\,.$$

Notiamo che

$$\left|\frac{v_n - x_0}{v_n - u_n}\right| \leq 2\,.$$

Elaboriamo il rapporto incrementale di f fra u_n e v_n nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\frac{f(v_n)-f(u_n)}{v_n-u_n} &= \frac{f(v_n)-f(x_0)}{v_n-u_n} - \frac{f(u_n)-f(x_0)}{v_n-u_n} = \\
&= \frac{f(v_n)-f(x_0)}{v_n-x_0}\cdot\frac{v_n-x_0}{v_n-u_n} - \frac{f(u_n)-f(x_0)}{u_n-x_0}\cdot\frac{u_n-x_0}{v_n-u_n} = \\
&= \frac{f(v_n)-f(x_0)}{v_n-x_0}\cdot\frac{v_n-x_0}{v_n-u_n} - \frac{f(u_n)-f(x_0)}{u_n-x_0}\cdot\Bigl(\underbrace{\frac{u_n-v_n}{v_n-u_n}}_{=-1} + \frac{v_n-x_0}{v_n-u_n}\Bigr) = \\
&= \left(\frac{f(v_n)-f(x_0)}{v_n-x_0} - \frac{f(u_n)-f(x_0)}{u_n-x_0}\right)\cdot\frac{v_n-x_0}{v_n-u_n} + \frac{f(u_n)-f(x_0)}{u_n-x_0}\,.
\end{aligned}$$

Ora, u_n e v_n sono le ascisse di due vertici consecutivi della poligonale grafico di f_{n-1}. Il rapporto incrementale fra quei due punti è la pendenza del segmento corrispondente della poligonale. Per quanto osservato al punto 6, si ha che

$$\frac{f(v_n)-f(u_n)}{v_n-u_n} \text{ è un numero intero } \begin{cases} \text{pari} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \text{dispari} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi la successione di questi rapporti incrementali non può avere limite finito per $n \to +\infty$.
Supponiamo ora *per assurdo* che la f sia derivabile a destra in x_0, con derivata destra $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$. Allora, poiché $u_n \to x_0^+$ e $v_n \to x_0^+$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(v_n)-f(x_0)}{v_n-x_0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)-f(x_0)}{u_n-x_0} = f'_+(x_0)\,.$$

Passiamo al limite per $n \to +\infty$ nell'identità:

$$\underbrace{\frac{f(v_n)-f(u_n)}{v_n-u_n}}_{\text{non ha limite finito}} = \Bigl(\underbrace{\frac{f(v_n)-f(x_0)}{v_n-x_0}}_{\to f'_+(x_0)} - \underbrace{\frac{f(u_n)-f(x_0)}{u_n-x_0}}_{\to f'_+(x_0)}\Bigr)\cdot\underbrace{\frac{v_n-x_0}{v_n-u_n}}_{|\cdot|\leq 2} + \underbrace{\frac{f(u_n)-f(x_0)}{u_n-x_0}}_{\to f'_+(x_0)}\,.$$

Il termine fra parentesi grandi tende a zero, per cui anche il suo prodotto per una quantità limitata va a 0. Mentre il primo membro non ha limite finito, il secondo ha limite $f'_+(x_0)$. Questa contraddizione mostra che non può esistere la derivata destra di f in x_0. $\square$

Esercizio. Svolgere la dimostrazione per $f'_-(x_0)$.

Esercizio. Sia $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile a destra in $x_0\in\mathbb{R}$ e siano $x_0<u_n<v_n$ tali che $v_n\to x_0$, $|v_n-x_0|\le k|v_n-u_n|$ con k costante. Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty}(g(v_n)-g(u_n))/(v_n-u_n)=g'_+(x_0)$.

Chi abbia dimestichezza con le sole funzioni elementari (valore assoluto, polinomi, radici, esponenziali, logaritmi, seno, coseno ...) si convince più o meno inconsciamente che il passo fra continuità e derivabilità sia invero molto breve. Le cose sembrano andare storte solo in qualche punto angoloso o cuspide, eventi marginali e da trattare con disprezzo. Immaginiamo un microscopio capace di qualsiasi ingrandimento e "zoomiamo" su un punto del grafico di una funzione continua. La scommessa è che, se non siamo scalognati, all'aumentare dell'ingrandimento vedremo via via le curve e gli angoli allontanarsi e uscire dallo schermo; la parte inquadrata del grafico assomiglierà sempre più ad un segmento liscio di retta, di inclinazione pari alla derivata. Funzioni come quella di Van der Waerden ci disilludono. Nell'ambito delle funzioni *continue* l'aspettativa ragionevole non è uno zoom rettificante, bensì la *rugosità*: ad ogni ingrandimento ci attendiamo dettagli, oscillazioni, angoli, cuspidi.

Esercizio. (Autosimilarità I).

a) Dimostrare che $a_{n+2}(x)=2^{-2}a_n(4x-1)\ \forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

b) Il grafico di f_2 su $[\frac14,\frac12]$ è una copia in scala 1:4 del grafico di f_0 su $[0,1]$. In formula:

$$f_2(x)=\frac12+\frac14 f_0\big(4(x-\tfrac14)\big)\qquad \forall x\in[\tfrac14,\tfrac12]\,.$$

c) Il grafico di f_{n+2} su $[\frac14,\frac12]$ è una copia in scala 1:4 del grafico di f_n su $[0,1]$. In formula:

$$f_{n+2}(x)=\frac12+\frac14 f_n\big(4(x-\tfrac14)\big)\qquad \forall x\in[\tfrac14,\tfrac12]\,.$$

d) Il grafico di f su $[\frac14,\frac12]$ è una copia in scala 1:4 del grafico di f su $[0,1]$. In formula ...

Esercizio. (Autosimilarità II). Consideriamo un lato della poligonale f_n che sia orizzontale, ossia un segmento $[a,b]=[m2^{-n-1},(m+1)2^{-n-1}]$ su cui f_n sia costante (attenzione: gli estremi devono distare 2^{-n-1}; non vanno fusi fra loro due segmenti orizzontali consecutivi). (Come deve essere n, pari o dispari?). Dimostrare che il grafico di f su $[a,b]$ è una copia in scala $1:2^{n+1}$ del grafico di f su $[0,1]$.

Esercizio. (Autosimilarità III).

e) Supponiamo che $x_0\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ sia l'ascissa di un vertice per la poligonale f_n ma non per la poligonale f_{n-1} (ossia $x_0=m2^{-n-1}$ con m dispari). Dimostrare che non può succedere che la pendenza del segmento di f_n a sinistra di x_0 sia <0 e allo stesso tempo che la pendenza a destra sia >0. In altre parole, x_0 non può essere di minimo locale *stretto* per f_n. (Suggerimento: x_0 capita nel mezzo di un segmento per f_{n-1}, quindi al passo precedente le pendenze a destra e a sinistra sono uguali; venendo ad f_n come cambiano le pendenze dai due lati?).

f) Dimostrare che se $x_0\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ è un numero binario finito, allora esiste un $p\in\mathbb{N}$ tale che f_p è costante in un segmento a sinistra o a destra di x_0. (Suggerimento: usare il punto precedente e rivedere la dimostrazione della proposizione 2).

g) Dimostrare che se $x_0\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ è un numero binario finito, allora esiste $p\in\mathbb{N}$ tale che il grafico di f su $[x_0-2^{-p-1},x_0]$ oppure su $[x_0,x_0+2^{-p-1}]$ è una copia in scala $1:2^{p+1}$ del grafico di f su $[0,1]$. (p è necessariamente pari o dispari?).

Ogni tratto del grafico di f contiene infinite copie del grafico di f su $[0,1]$. Nella figura grande del grafico di f si vedono distintamente due copie in scala 1:4, sei copie in scala 1:16, venti copie in scala 1:64. Nei tratti apparentemente monotoni della figura, per esempio vicino agli estremi, si possono notare delle lievi mancanze di allineamento nei segmenti, che preludono a microscopiche copie del grafico intero. Non ci si dimentichi che ogni copia in scala contiene a sua volta copie in scala più piccole, queste altre ancora, e così via.

Esercizio. Dimostrare che il grafico di f su $[0,1]$ contiene esattamente $\binom{2n}{n}$ copie in scala $1:4^n$ di se stesso. (Traccia: bisogna contare il numero di segmenti orizzontali di f_{2n-1}; questi sono tanti quanti le possibili $2n$-uple composte di ±1 la cui somma sia 0; queste a loro volta sono tante quanti i sottinsiemi di n elementi presi da un insieme di $2n$ elementi ...).

Esercizio. (Variazione totale di f). Sia V_1 il chilometraggio totale (detto in gergo "variazione totale") del punto $f_n(x)$ sull'asse y quando x viaggia da 0 a 1. Per esempio, $f_0(x)$ sale da 0 a $1/2$ e poi scende di nuovo a 0, quindi $V_0 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$. $f_2(x)$ fa la stessa strada, più veloce ma con una sosta, racimolando un V_1 pure $= 1$. $f_2(x)$ sale da 0 a $5/8$, scende di $1/8$, risale di $1/8$, e torna a 0, per un percorso totale di $V_2 = (5+1+1+5)/8 = 3/2$. Anche $V_3 = 3/2$. Calcolare V_4. Dimostrare che in generale $V_{2n+1} = V_{2n}$ (i segmenti monotoni di f_{2n} rimangono monotoni fra gli stessi estremi per f_{2n+1} a causa di pendenze pari o dispari, quindi il percorso fatto è lo stesso, anche se con velocità diversa). Dimostrare che $V_{2n} = V_{2n-1} + 4^{-n}\binom{2n}{n}$ (l'incremento di percorso è dovuto alle copie del grafico di f_0 in scala ... che si formano sui segmenti piani della poligonale f_{2n-1}, i quali sono in totale ...). Dimostrare che vale anche la formula $V_n = 2^{-n-1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}|n+1-2k|$. Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ (osservare che $n \mapsto 4^{-n}\binom{2n}{n}$ è crescente ...). Notare che la lunghezza della poligonale f_n è sempre maggiore di V_n e trarre la morale che *per tracciare il grafico di f occorre una quantità infinita (in lunghezza) di inchiostro*.

Esercizio. (Massimo di f I).

h) Dimostrare che $\max\{a_n(x) + a_{n+1}(x) \ : \ x \in \mathbb{R}\} = 2^{-n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e che il massimo è raggiunto in tutti e soli i punti di $\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}[2^{-n-2} + m2^{-n}, 3 \cdot 2^{-n-2} + m2^{-n}]$.

i) Dimostrare che
$$\max f_{2n-1} \le 2^{-1} + 2^{-2-1} + 2^{-4-1} + \cdots + 2^{-2n-1} = \frac{2}{3}(1 - 4^{-n}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

j) Dimostrare che $\max f \le 2/3$.

Esercizio. (Massimo di f II).

k) Il massimo di f_1 su $[0,1]$ è $1/2$ ed è raggiunto in tutti e soli i punti di $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

l) Sia $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che il massimo di f_{2n-1} sia precisamente $\frac{2}{3}(1 - 4^{-n})$ e che
$$v_0 < v_1 < v_2 < \ldots < v_7 < v_8$$
siano nove punti consecutivi di $2^{-2n-2}\mathbb{Z}$ (ascisse di vertici di f_{2n+1}) e che v_0, v_4, v_8 siano in $2^{-2n}\mathbb{Z}$ (ascisse di vertici di f_{2n-1}) in modo tale che su tutto $[v_0, v_8]$ venga raggiunto il massimo di f_{2n-1}. Dimostrare allora che il massimo di f_{2n+1} è $\frac{2}{3}(1 - 4^{-n-1})$ e che viene raggiunto su tutto $[v_1, v_3]$, su tutto $[v_5, v_7]$ e in nessun altro punto di $[v_0, v_8]$. Dimostrare anche che il massimo di f_{2n} è $\frac{2}{3}(1 - 4^{-n-1})$ e viene raggiunto in v_2, in v_6 e in nessun altro punto di $[v_0, v_8]$.

m) Dimostrare che
$$\max f_{2n-1} = \max f_{2n-2} = \frac{2}{3}(1 - 4^{-n}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Inoltre sull'intervallo $[0,1]$ il massimo di f_{2n-1} viene raggiunto in tutti e soli i punti degli intervalli della forma $[s, s + 2^{-2n+1}]$, dove s è a sua volta del tipo
$$s = \frac{1}{4} \text{ se } n = 1, \qquad s = \frac{1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \frac{\alpha_3}{4^3} + \cdots \frac{\alpha_n}{4^n} \text{ se } n > 1, \text{ con } \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n \in \{1, 5\}\,.$$
La condizione su s equivale a chiedere che l'espansione in base 4 di s abbia solo n cifre dopo la virgola, che queste cifre possano essere solo 1 e 2, e l'ultima sia 1. (Porre $\alpha_i = 1 + 4\beta_i$, $\gamma_i = 1 + \beta_i \ldots$). Il massimo di f_{2n-2} su $[0,1]$ è raggiunto in tutti e soli i punti della forma $s + 2^{-2n}$.

Esercizio. (Massimo di f III). *Si ha $\max f = 2/3$ e su $[0,1]$ il massimo viene raggiunto in tutti e soli i punti la cui espansione in base 4 contiene solo le cifre 1 e 2.* In particolare, l'insieme dei punti di massimo assoluto di f ha la cardinalità del continuo.

Esercizio. Calcolare $f(1/3)$, $f(5/12)$. Calcolare il massimo assoluto di f su $[1, \frac{1}{4}]$ e un punto in cui viene raggiunto. Dimostrare che $\max|f - f_n| = \frac{2}{3}2^{-n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Esercizio. (Continuità hölderiana). Dimostrare che $\forall\alpha \in]0,1[$ la funzione f è hölderiana di esponente α, ossia

$$\exists M_\alpha \geq 0 \quad \text{tale che} \quad |f(x)-f(y)| \leq M_\alpha |x-y|^\alpha \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

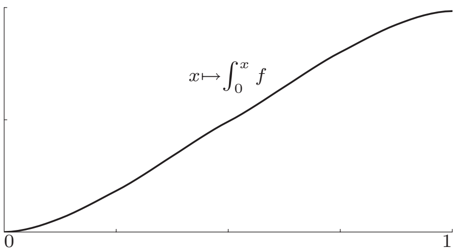
Traccia: con $M_\alpha \geq 1$ la disuguaglianza da dimostrare è certamente verificata per $|x-y|>1$, per cui basta considerare il caso $|x-y| \leq 1$. Riprendere la disuguaglianza già vista $|f(x)-f(y)| \leq 2^{-n} + (n+1)|x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Sia $n \geq 0$ tale che $2^{-n-1} < |x-y| \leq 2^{-n}$ (in particolare $2^{-n} < 2|x-y|$). Abbiamo:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq 2^{-n} + (n+1)|x-y| \leq 2|x-y| + (n+1)|x-y| = (3+n)|x-y| = \\ &= (3+n)|x-y|^{1-\alpha}|x-y|^\alpha \leq (3+n)(2^{-n})^{1-\alpha}|x-y|^\alpha = \frac{3+n}{2^{(1-\alpha)n}}|x-y|^\alpha\,.\end{aligned}$$

Poiché $\lim_{k\to+\infty}(3+k)/2^{(1-\alpha)k} = 0$, si ha che esiste finito il

$$N_\alpha := \sup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{3+k}{2^{(1-\alpha)k}}\,.$$

Posto $M_\alpha := \max\{1, N_\alpha\}$ si ha la disuguaglianza richiesta. Dimostrare che una disuguaglianza del genere non può valere con $\alpha = 1$ (vedi le cuspidi ...).

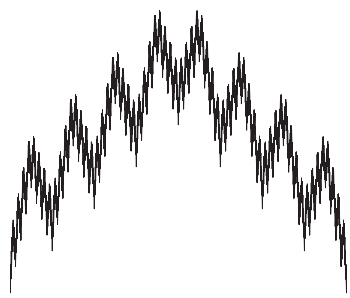


Esercizio. (Primitiva della funzione di Van der Waerden). Se f è la funzione di Van der Waerden, consideriamo la funzione $F(x) := \int_0^x f$. Questa F è ben definita, è derivabile con continuità su $\mathbb{R}$, è strettamente crescente, è lipschitziana (di che costante?). Ha un grafico piuttosto insipido, da cui non si sospetterebbe che non ha derivata seconda in alcun punto, e che non esiste alcun intervallo $[a,b]$ con $a<b$ sul quale F sia convessa o concava. In ogni punto di ascissa del tipo $m/2^{-n}$, con $m,n \in \mathbb{Z}$, il grafico della F ha un flesso (in un intorno sinistro la F sta strettamente sotto la retta tangente e in un intorno destro sta strettamente sopra). Calcolare F in $k/8$ con $k=1,\dots,8$. Dimostrare che $x \mapsto F(x+1)-F(x)$ è costante. Calcolare i limiti di $F(x)$ e di $F(x)/x$ per $x \to +\infty$.

Esercizio. (Variante "gotica" della funzione di Van der Waerden). Studiare la funzione

$$g(x) := \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} a_0(8^n x)\,.$$

Dire in particolare se è continua e se è derivabile in qualche punto. (Suggerimento: il ragionamento è lo stesso che per la funzione originale, ma qui le pendenze dei denti di sega sono... invece di ± 1). Il grafico su $[0,1]$ di una approssimante è qui a destra.



Ritorniamo ai grafici a dente di sega delle funzioni a_k e "ribaltiamo" alcuni dei denti sotto l'asse x, in qualche ordine o a caso. Vanno così perse le simmetrie del grafico della funzione somma, però le pendenze delle poligonali approssimanti rimangono sempre somme di ± 1, per cui i ragionamenti che hanno portato alla mancanza di derivabilità continuano a valere. Un esempio di funzione di Van der Waerden "randomizzata" è riportato in figura. Assomiglia a un grafico dell'andamento degli indici della borsa, o della temperatura atmosferica. Ci si può convincere che ci sono infinite possibili varianti alla funzione di Van der Waerden. Si può anche dimostrare che data una qualsiasi funzione continua $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ esiste una successione di funzioni $\varphi_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue e mai derivabili e che convergono a φ uniformemente.