L'Equazione di Terzo Grado

Circa quattro millenni fa i babilonesi sapevano risolvere a modo loro l'equazione di secondo grado generale. In notazione moderna l'idea che porta alla soluzione è semplicissima: bisogna aggiungere e togliere un termine in modo da "completare un quadrato", cioè (se $a \neq 0$, naturalmente)

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\iff x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \iff x^2+2\frac{b}{2a}x+\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2=\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{c}{a} \iff \\ &\iff \Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2} \iff x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \iff \\ &\iff x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \end{aligned}$$

dove vanno rettamente intesi la radice e il doppio segno.

Sembra che gli antichi amassero riportare le loro equazioni di secondo grado al "problema modello" di trovare due numeri di cui siano noti la somma e il prodotto. È facile dimostrare che tali numeri sono esattamente le due soluzioni dell'equazione di secondo grado $z^2 - \text{somma}\cdot z + \text{prodotto} = 0$. Con simboli moderni:

$$x,y \text{ verificano } \begin{cases} x+y=\alpha \\ xy=\beta \end{cases} \qquad \iff \qquad \{x,y\}=\{z\ :\ z^2-\alpha z+\beta=0\}\,.$$

Teniamo a mente questo fatto elementare perché ci servirà nel seguito.

Quando nell'Antichità e nel Medio Evo si incontravano equazioni di grado superiore al secondo, venivano risolte con metodi approssimati (lo si fa tuttora). Per quanto ne sappiamo però nessuno sapeva risolvere le equazioni *generali* di grado > 2 in maniera *esatta* con formule che ricordassero quelle risolutive dell'equazione di secondo grado, ossia che contenessero *un numero finito di* $+,-,\cdot,\div$ *ed estrazioni di radice* $\sqrt[n]{\ }$.

Nel 1545 colpo di scena. Gerolamo Cardano (1501–1576) pubblica nella sua opera *Ars Magna* il metodo risolutivo per le equazioni di terzo e di quarto grado. Cardano racconta che l'idea per il terzo grado gli era stata data da Nicolò Fontana, detto Tartaglia (∼1500–1557), omettendo però che Cardano si era impegnato a non divulgarla. Per il quarto grado, la soluzione era stata trovata da Ludovico Ferrari (1522–1565), collaboratore di Cardano. In quanto a Tartaglia, lo sprone a studiare il problema sembra fosse stata la notizia che un certo Antonio Maria Fior (?–?) conosceva la soluzione, per averla avuta a sua volta dal suo maestro Scipione Del Ferro (∼1465–1526), nessuno dei quali l'aveva resa pubblica. Ci fu una disfida matematica fra Tartaglia e Fior, ognuno dei quali propose all'altro dieci equazioni da risolvere entro un giorno fissato. Il punteggio finale fu dieci a zero in favore di Tartaglia. Chi vuole saperne di più, può consultare una Storia della Matematica, ad esempio quella di Carl B. Boyer, negli Oscar Studio Mondadori, n. 76.

Pare che Fior mancasse del trucchetto per ridurre l'equazione generale (il coefficiente di x^3 si può sempre supporre 1)

$$\boxed{x^3+ax^2+bx+c=0}$$

al tipo che lui sapeva (più o meno) risolvere: $y^3+py+q=0$. Basta il cambio di variabile $x=y-\frac{a}{3}$:

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad \iff \qquad y^3+py+q=0, \text{ dove } \boxed{y=x+\frac{a}{3}} \ \text{ e } \begin{cases} p=-\dfrac{a^2}{3}+b \\ q=\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c\,, \end{cases}$$

(sostituire per credere). La formula $x=y-\frac{a}{3}$ è meno misteriosa di quanto può sembrare. Data un'equazione di grado n e primo coefficiente 1, $x^n+ax^{n-1}+\cdots=0$, il coefficiente a di x^{n-1} è l'opposto della somma delle radici. Poiché le radici sono tre, $a/3$ è il *baricentro* delle radici. Il cambio di coordinate $x=y-\frac{a}{3}$ è una traslazione che porta l'origine a coincidere con tale baricentro. Il nuovo coefficiente sarà la nuova somma delle radici, che deve essere zero, perché il nuovo baricentro è l'origine.

Esercizio. Applicare il ragionamento all'equazione di secondo grado. Poi provare con quella di quarto: ricondurre $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ a $y^4+py^2+qy+r=0$.

Ci siamo riportati ad una equazione senza il termine quadratico:

$$\boxed{y^3+py+q=0.}$$

Per motivi imperscrutabili, decidiamo di cercare la soluzione y come somma di due numeri u e v:

$$\boxed{y=u+v.}$$

Sostituendo:

$$0=y^3+py+q=(u+v)^3+p(u+v)+q=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)+q=\underbrace{(u^3+v^3+q)}+(u+v)\underbrace{(3uv+p)}.$$

Questa è *una* equazione in *due* variabili. Fissato per esempio u, è di terzo grado in v, ed equivale in difficoltà al problema di partenza (anzi, il termine quadratico è resuscitato). Il miracolo è che c'è una *particolare* combinazione di u, v che si può calcolare con mezzi elementari. La si trova imponendo che u e v annullino i termini compresi nelle graffe: $u^3+v^3+q=0$ e $3uv+p=0$, ossia

$$\boxed{\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\dfrac{p}{3}. \end{cases}}$$

Vedremo fra poco come si risolve questo sistema. Soffermiamoci solo a verificare l'equivalenza fra la nostra equazione ed il sistema:

$$y^3+py+q=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists u,v \text{ tali che } \begin{cases} u+v=y \\ u^3+v^3=-q \\ uv=-\dfrac{p}{3}. \end{cases}$$

La freccia $\Leftarrow$ è immediata per l'identità $y^3+py+q=(u^3+v^3+q)+(u+v)(3uv+p)$. Viceversa, sia y tale che $y^3+py+q=0$. Allora possiamo trovare u, v tali che $u+v=y$, $uv=-p/3$ (rimembrare l'antico problema della somma-prodotto di due numeri) e ricavare da $0=y^3+py+q=(u^3+v^3+q)+(u+v)(3uv+p)$ che anche $u^3+v^3+q=0$ è verificata, come desiderato.

Procediamo ora alla soluzione del sistema in u, v. Eleviamo al cubo la seconda equazione:

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\dfrac{p}{3} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}, \end{cases}$$

($\mathfrak{Achtung}$: vale solo la freccia "$\Rightarrow$"). Dunque di u^3 e v^3 conosciamo la somma e il prodotto. Ne traiamo che

$$\{u^3, v^3\}=\Big\{z \ : \ z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0\Big\}.$$

L'equazione in z è presto risolta:

$$z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\,;$$

di slancio scriviamo

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\,, \qquad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\,,$$

da cui, estraendo le radici cubiche e ricordando che $y=u+v$, si ha

$$\boxed{y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,,}$$

e questa è la celebre Formula Risolutiva delle equazioni di terzo grado.

Ma se il risultato è così semplice, perché non lo si insegna nelle scuole superiori? La risposta è che la formula non può essere interpretata correttamente senza i numeri complessi, la trigonometria e soprattutto la logica.

Per cominciare, quando scriviamo $+\sqrt{\ }$ e $-\sqrt{\ }$ nelle formule per u^3 e v^3 intendiamo che le due radici quadrate *complesse* del radicando vanno poste una per u^3 e una per v^3. Soltanto quando il radicando è reale e ≥ 0 si dà un senso univoco al segno di radice quadrata. È indifferente poi quale delle due radici si assegna ad u^3 e quale rimane a v^3, perché tutto è simmetrico in u, v.

Ciò che inganna di più nella formula risolutiva sono le radici cubiche. Risolvendo $u^3 = \text{tot}$ e $v^3 = \text{tot}$ abbiamo *tre* radici cubiche complesse per u e *tre* per v. Quindi il sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27}, \end{cases}$$

ha in genere *nove* soluzioni $\{u, v\}$ (avremmo diciotto soluzioni se contassimo come diverse le coppie-soluzione (u, v) in cui u e v si scambiano di posto; ma ai fini della somma $y = u + v$ le possiamo considerare indistinte). Sappiamo per altre vie che l'equazione di terzo grado ha *tre* soluzioni y. Il problema nasce con il passaggio non reversibile "$\Rightarrow$" quando abbiamo elevato al cubo. Va precisato che

$$\text{le soluzioni di } \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \quad \text{sono quelle soluzioni di } \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases} \quad \text{che verificano } uv = -\frac{p}{3}\,.$$

In altre parole *nella formula risolutiva vanno scelte quelle combinazioni di radici cubiche il cui prodotto sia* $-p/3$. Vanno scartate le altre.

In linea di principio il problema è risolto: basta scrivere tutte le nove combinazioni di radici cubiche e poi verificarne i prodotti una ad una. Altro modo di procedere è di scegliere una radice complessa per u e ricavare v da $v = -p/3u$. Si potrebbe addirittura cortocircuitare il procedimento, usando direttamente la sostituzione $y = u - \frac{p}{3u}$. Provare a farlo per **esercizio**.

Discussione del caso di coefficienti reali

Se l'equazione di partenza è a *coefficienti reali*, allora è cruciale il *segno* del

$$\boxed{\text{discriminante} := \Delta := \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\,.}$$

Facciamo una discussione dettagliata dei due casi: ≥ 0 e < 0.

Primo caso: $\Delta \geq 0$.

Se il discriminante è non negativo, allora il radicando delle radici cubiche è *reale*, e fra tutti i radicali cubici ce n'è uno solo reale. Se scelgo il radicale reale per u, la relazione $uv = -p/3$ assegna un numero pure reale per v, che corrisponde necessariamente al radicale cubico reale per v. *Nel caso $\Delta \geq 0$ la formula risolutiva quindi fornisce una soluzione reale dell'equazione qualora tutti i radicali siano interpretati nel senso reale stretto.*

Se vogliamo le altre due radici dobbiamo tirare in ballo i radicali complessi: questi sono il prodotto del radicale reale per le due radici cubiche non reali dell'unità $\cos 2\pi/3 \pm i \sin 2\pi/3 = -(1/2) \pm i\sqrt{3}/2$:

$$u_1 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}\,, \quad u_2 := u_1\Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\,, \quad u_3 := u_1\Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\,,$$
$$v_1 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}\,, \quad v_2 := v_1\Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\,, \quad v_3 := v_1\Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\,.$$

	v_1	v_2	v_3
u_1	sì	no	no
u_2	no	no	sì
u_3	no	sì	no

Se $u_1 \neq 0$ e $v_1 \neq 0$, invece di verificare $uv = -p/3$, fortuna vuole che ci basti trovare quando $uv \in \mathbb{R}$. Infatti questo succede esattamente in tre casi. Nella tabella qui accanto, “sì” e “no” sono le risposte alla domanda “$uv \in \mathbb{R}$?”. La conclusione è che per avere le due soluzioni complesse coniugate bisogna e basta scegliere *segni opposti per u e v nelle parti immaginarie*. Nel caso speciale in cui u_1 o v_1 è nullo, lo è anche p e pertanto la relazione $uv = -p/3$ è soddisfatta da tutte le combinazioni. Lasciamo i dettagli alle studiose.

Esercizio. Completare con i segni giusti la tabella delle soluzioni per $\Delta \geq 0$, dove *tutti i radicali vanno intesi reali*:

$$\begin{aligned} \Delta &:= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}, \\ u_1 &:= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \quad \sqrt{\Delta}}, \\ v_1 &:= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \quad \sqrt{\Delta}}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \quad u_1 \quad v_1, \\ y_2 &= \quad \frac{1}{2}y_1 \quad i\frac{\sqrt{3}}{2}(\quad u_1 \quad v_1), \\ y_3 &= \quad \frac{1}{2}y_1 \quad i\frac{\sqrt{3}}{2}(\quad u_1 \quad v_1). \end{aligned}}$$

Se non ci sono sbagli, le due radici non reali devono essere coniugate fra loro, e il baricentro delle tre radici deve essere ... Che ne è del caso $\Delta = 0$?

Secondo caso: $\Delta < 0$.

Il discriminante negativo è il caso più rognoso. Per cominciare, i radicandi cubici

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\Delta}$$

sono complessi coniugati, aventi come modulo R il valore

$$R := \left|-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\Delta}\right| = \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + (\sqrt{-\Delta})^2} = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

(notare che se $\Delta < 0$ allora necessariamente $p < 0$, cosicché quest'ultimo radicale è reale) e come argomento un angolo $\pm\theta$ di cui per esempio la tangente è

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{-\frac{q}{2}} \qquad \text{se } q \neq 0.$$

È opportuno qui indicare i numeri complessi come coppie modulo-argomento. I valori di u^3 e v^3 sono

$$u^3 = (R, \theta), \qquad v^3 = (R, -\theta)$$

per cui le radici cubiche sono

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\sqrt[3]{R}, \frac{\theta}{3}\right), \quad & u_2 &= \left(\sqrt[3]{R}, \frac{\theta + 2\pi}{3}\right), \quad & u_3 &= \left(\sqrt[3]{R}, \frac{\theta + 4\pi}{3}\right), \\ v_1 &= \left(\sqrt[3]{R}, \frac{-\theta}{3}\right), \quad & v_2 &= \left(\sqrt[3]{R}, \frac{-\theta + 2\pi}{3}\right), \quad & v_3 &= \left(\sqrt[3]{R}, \frac{-\theta + 4\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Come sempre bisogna scegliere le combinazioni $\{u, v\}$ che soddisfano $uv = -p/3$. In particolare, bisogna che *il prodotto sia reale*, ossia che gli argomenti abbiano somma nulla (o multipla di 2π). La tabella è identica a quella del caso $\Delta \geq 0$ e non la riscriviamo. Vanno bene le tre coppie $\{u_1, v_1\}$, $\{u_2, v_3\}$, $\{u_3, v_2\}$, in ciascuna delle quali conviene osservare che u e v sono fra loro *coniugati*.

Le tre coppie forniscono tre soluzioni $y = u + v$ *tutte reali*, perché la somma (oltre che il prodotto) di due numeri complessi coniugati è reale (più precisamente $z + \bar{z} = 2\Re z$, dove $\Re z$ indica la parte reale di z). La parte reale di un complesso è il modulo volte il coseno dell'argomento. Ricordando che $\sqrt[3]{R} = \sqrt{-p/3}$, possiamo scrivere una tavola con le soluzioni espresse in termini reali:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 = 2\Re u_1 = 2\Re v_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta}{3} \\ y_2 &= u_2 + v_3 = 2\Re u_2 = 2\Re v_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3} \\ y_3 &= u_3 + v_2 = 2\Re u_3 = 2\Re v_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}\,. \end{aligned}}$$

Si lascia per esercizio di verificare che θ non è un multiplo di π e di dedurne che le tre radici sono *distinte.*

Conclusione: *se il discriminante è negativo, per trovare le tre radici (che sono reali e distinte) bisogna dapprima calcolare l'angolo θ, e poi applicare le formule.* In quanto a θ, una volta che ne è nota la tangente, basta sapere in che quadrante è per determinarlo completamente:

a) se $-q/2 > 0$ allora siamo nel I–IV quadrante, e $\theta = \arctan(-2\sqrt{-\Delta}/q)$;
b) se $-q/2 < 0$ allora siamo nel II–III quadrante, e $\theta = \pi + \arctan(-2\sqrt{-\Delta}/q)$.

Curiosità. Ci si può chiedere se esista una formula che fa passare dalle funzioni trigonometriche di θ a quelle di $\theta/3$ senza passare attraverso il calcolo di θ, così come si può fare per $\theta/2$:

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\,.$$

La risposta è che *non è possibile farlo tramite una combinazione finita di $+, -, \cdot, \div$ e di radicali reali.* C'è di mezzo il classico problema della *trisezione dell'angolo con riga e compasso*, problema che è stato dimostrato (in generale) insolubile. Per trovare esattamente le tre soluzioni reali nel caso $\Delta < 0$ evitando i numeri complessi, ci tocca passare per le funzioni trigonometriche inverse. Si capirà ora perché la formula di Cardano non è adatta ad un corso elementare di algebra.

Cenno all'equazione di quarto grado

Data l'equazione $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, cerchiamo la soluzione nella forma $y = u + v + w$ e, sostituendo, ci riportiamo al sistema

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\dfrac{p}{2} \\ u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \dfrac{p^2}{16} - \dfrac{r}{4} \\ uvw = -\dfrac{q}{8}\,. \end{cases}$$

Elevando al quadrato l'ultima equazione, si ottiene che u^2, v^2, w^2 sono le soluzioni dell'equazione di terzo grado

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \Big(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\Big)z - \frac{q^2}{64} = 0\,.$$

Questo è conseguenza di un fatto generale: in una equazione $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ (con coefficiente 1 per x^n) si ha che a_{n-1} è l'opposto della somma delle radici, a_{n-2} è la somma dei prodotti delle radici due a due, a_{n-3} è l'opposto della somma dei prodotti delle radici tre a tre, eccetera. Ci si può convincere sviluppando il prodotto $(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$.

Equazioni di grado superiore. È stato dimostrato che *dal grado 5 in su non esistono formule risolutive per radicali.*

Radici razionali di un polinomio a coefficienti interi

Lemma preliminare. *Se a, b, c sono numeri interi, a e b sono primi fra loro e a è un divisore del prodotto bc, allora a è un divisore di c.*

Proposizione. *Sia data una equazione polinomiale a coefficienti interi:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,, \qquad a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0\,,$$

e supponiamo che il numero razionale p/q sia soluzione, con p, q interi non nulli e primi fra loro. Allora p è divisore di a_0 e q è divisore di a_n.

Dimostrazione. Sostituendo $x = p/q$ nell'equazione si ha

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0\,,$$

da cui, moltiplicando per q^n:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0\,,$$

che riscriviamo in due modi, isolando rispettivamente il primo e l'ultimo addendo e raccogliendo un fattore comune al secondo membro:

$$\begin{aligned} a_n p^n &= -\,q\big(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\big)\,,\\ a_0 q^n &= -\,p\big(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}\big)\,; \end{aligned}$$

Notare che le quantità fra parentesi sono intere. Dalla prima relazione vediamo che q è un divisore del secondo (e quindi anche del primo) membro. Ma q e p^n sono primi fra loro, quindi q deve essere divisore di a_n. Analogamente dall'altra equazione segue la proprietà di p. $\square$

Morale. In una equazione a *coefficienti interi*, c'è un procedimento che in un numero *finito* di passi porta a trovare *tutte le soluzioni razionali*: basta scomporre in fattori il primo e l'ultimo coefficiente, scrivere tutte le possibili frazioni del tipo

$$\frac{\text{divisore di } a_0}{\text{divisore di } a_n}$$

(non dimenticarsi che ci sono anche i divisori *negativi*) e sostituirle nell'equazione per la verifica. Se nessuna di esse è radice del polinomio, possiamo concludere che non ci sono soluzioni razionali. Trovata una o più soluzioni razionali, si può poi ridurre il grado dell'equazione con la regola di Paolo RUFFINI (1765–1822).

Come corollario $\sqrt{2}$ risulta irrazionale: infatti $\sqrt{2}$ è soluzione dell'equazione a coefficienti interi $x^2 - 2 = 0$, e la proposizione dice che le eventuali soluzioni razionali sono da cercare fra $\pm1, \pm2$, ma queste *non* sono soluzioni, come si vede sostituendo. Quindi $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Esercizio. È restrittivo che nella proposizione si chieda $a_0 \neq 0$? Sarebbe restrittivo chiedere $a_n = 1$? Come si riduce l'enunciato in tale caso?

Esempio. Il polinomio $x^3 - 2x - 4$ è a coefficienti interi. I divisori dell'ultimo coefficiente sono $\pm1, \pm2, \pm4$. Quelli del primo sono ±1. Quindi gli unici candidati ad essere soluzioni razionali di $x^3 - 2x - 4 = 0$ sono $\pm1, \pm2, \pm4$. Verifichiamoli uno ad uno, a partire dai più facili. Una sostituzione diretta dà subito risposta negativa per ±1:

$$1^3 - 2\cdot 1 - 4 = 1 - 2 - 4 = -5 \neq 0\,, \qquad (-1)^3 - 2(-1) - 4 = -1 + 2 - 4 = -3 \neq 0\,.$$

Con numeri più grossi conviene usare la regola di Ruffini, che con poche operazioni fornisce sia il valore del polinomio in un punto α sia il quoziente della divisione del polinomio per $(x - \alpha)$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -2 & -4 \\ & & -2 & 4 & -4 \\ -2 & & & & \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -8 \end{array} \neq 0 \ (\Rightarrow -2 \text{ non è soluzione}) \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -2 & -4 \\ & & 2 & 4 & 4 \\ +2 & & & & \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Dunque $+2$ è soluzione e non conviene per ora provare con ± 4. Abbassiamo di grado invece:

$$x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2 + 2x + 2)\,.$$

Le altre due soluzioni si ottengono dall'equazione di secondo grado $x^2 + 2x + 2 = 0$, che dà $-1 \pm i$ (la proposizione applicata a quest'ultima equazione esclude che ± 4 possano essere soluzioni, ed abbiamo risparmiato dei conti).

Ora che conosciamo gli zeri di $x^3 - 2x - 4$, vediamo che cosa ci dice la formula di Cardano:

$$p = -2, \quad q = -4, \qquad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{16}{4} - \frac{8}{27} = 4 - \frac{8}{27} = \frac{108-8}{27} = \frac{100}{27} > 0\,.$$

Il discriminante è positivo. Quindi c'è una soluzione reale e due non reali coniugate fra loro. Quella reale è data dalla formula

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}}\,.$$

Ma sappiamo già che l'unica soluzione reale dell'equazione è 2. Ci dobbiamo arrendere alla logica e concludere che vale la sorprendente uguaglianza

$$2 = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}}\,.$$

Esercizio. Scrutinare anche le due soluzioni complesse ed arguire che

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \qquad \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

C'è una maniera veloce ed elementare per dimostrare queste relazioni?

Esercizio. Risolvere $x^3 + 9x - 26 = 0$, $x^3 - 12x + 16 = 0$, provando anche con la formula di Cardano, se vi va.

Esercizio. Dimostrare che $\sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ è irrazionale.

Esercizio. Risolvere le equazioni $x^3 - 6x + 9 = 0$, $x^3 - 6x + 4 = 0$, $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$.

Esercizio autogestito. Scegliere tre numeri x_1, x_2, x_3, costruire l'equazione di terzo grado che ha quei numeri come soluzioni e poi provare a ritrovarli con la formula di Cardano. Chi è a corto di fantasia provi con $-3, 1, 2$.

Esercizio. Confrontare il numero di addizioni e moltiplicazioni che occorrono per calcolare un polinomio in un punto dato, usando (1) la sostituzione diretta e (2) la regola di Ruffini.