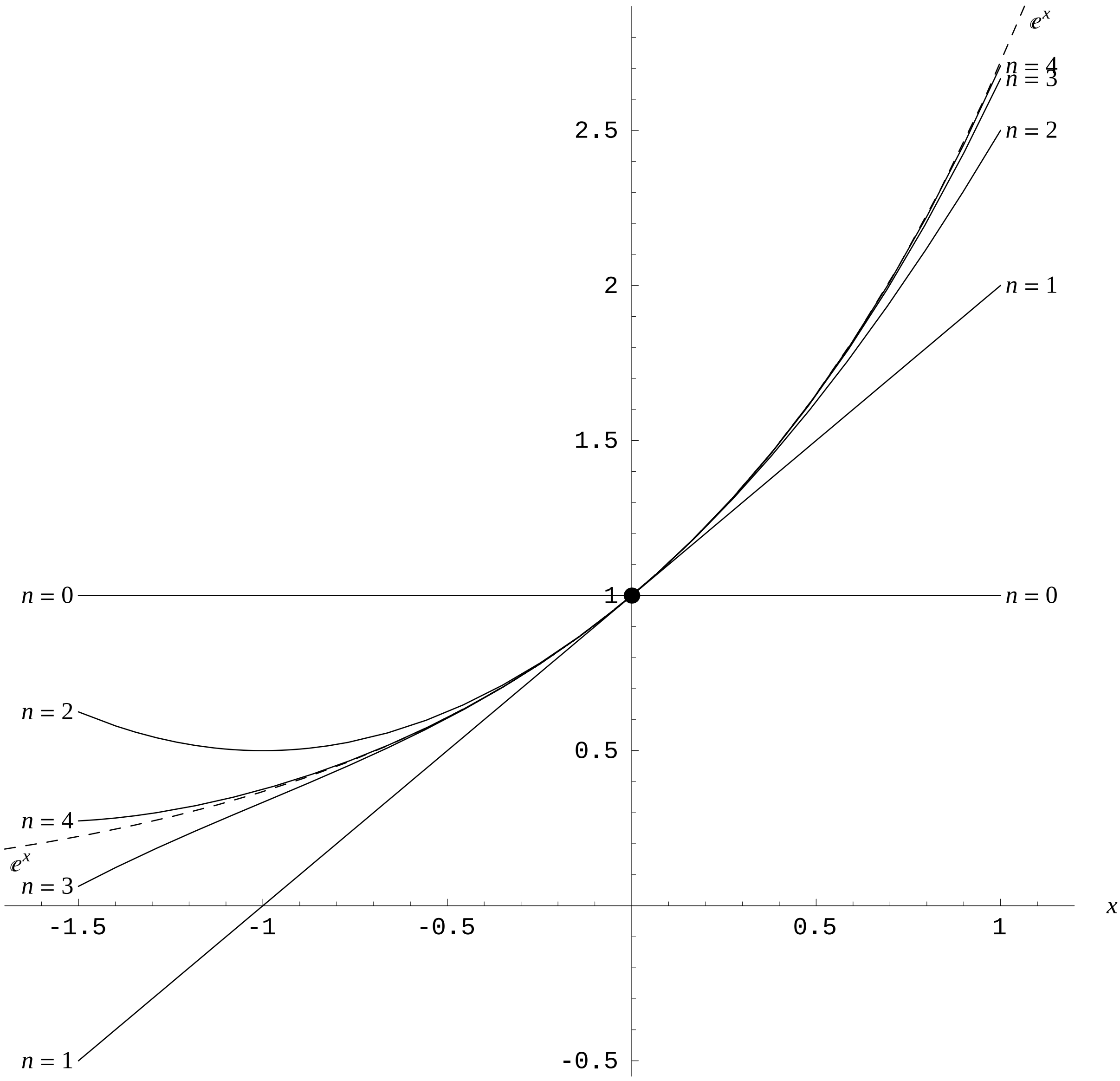
Polinomi di Taylor: illustrazioni

Gianluca Gorni, Università di Udine

1. L'esponenziale

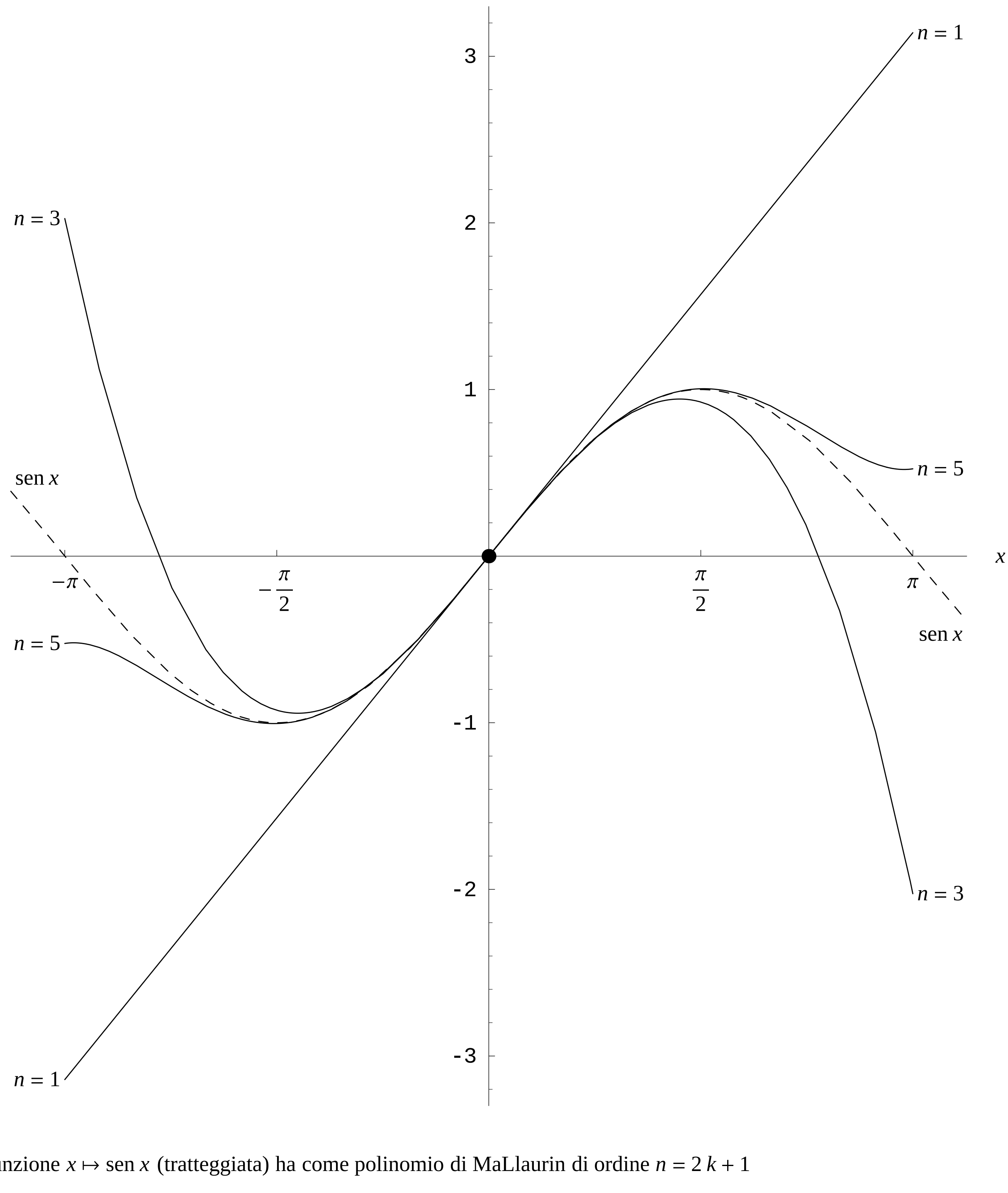


La funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ (tratteggiata) ha come polinomio di MaLlaurin di ordine n

$$p_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Al crescere dell'ordine n i grafici dei polinomi (non tratteggiati) si "adagiano" sempre di più e su una regione sempre più vasta sul grafico della funzione esponenziale. Quella dell'esponenziale è una delle situazioni in cui i polinomi di Taylor hanno pieno successo nell'opera di approssimare una funzione.

2. Il Seno

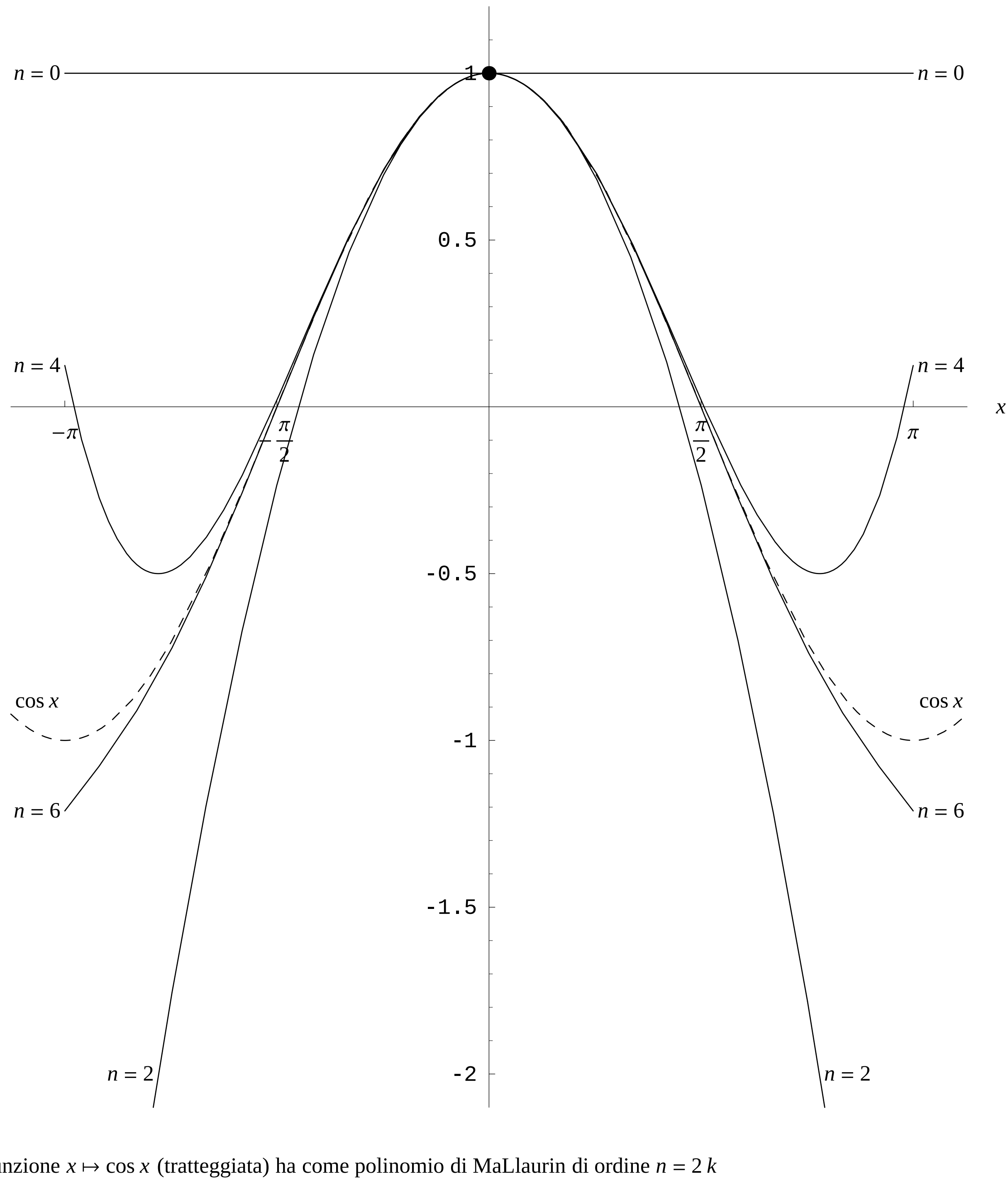


La funzione $x \mapsto$ sen x (tratteggiata) ha come polinomio di MaLlaurin di ordine $n = 2\,k + 1$

$$p_{2\,k+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^n\ \frac{x^{2\,k+1}}{(2\,n+1)!}\,.$$

Al crescere dell'ordine n i grafici dei polinomi (non tratteggiati) si "adagiano" sempre di più e su una regione sempre più vasta sul grafico della funzione seno. Quella del seno è un'altra delle situazioni in cui i polinomi di Taylor hanno pieno successo nell'opera di approssimare una funzione.

3. Il coseno

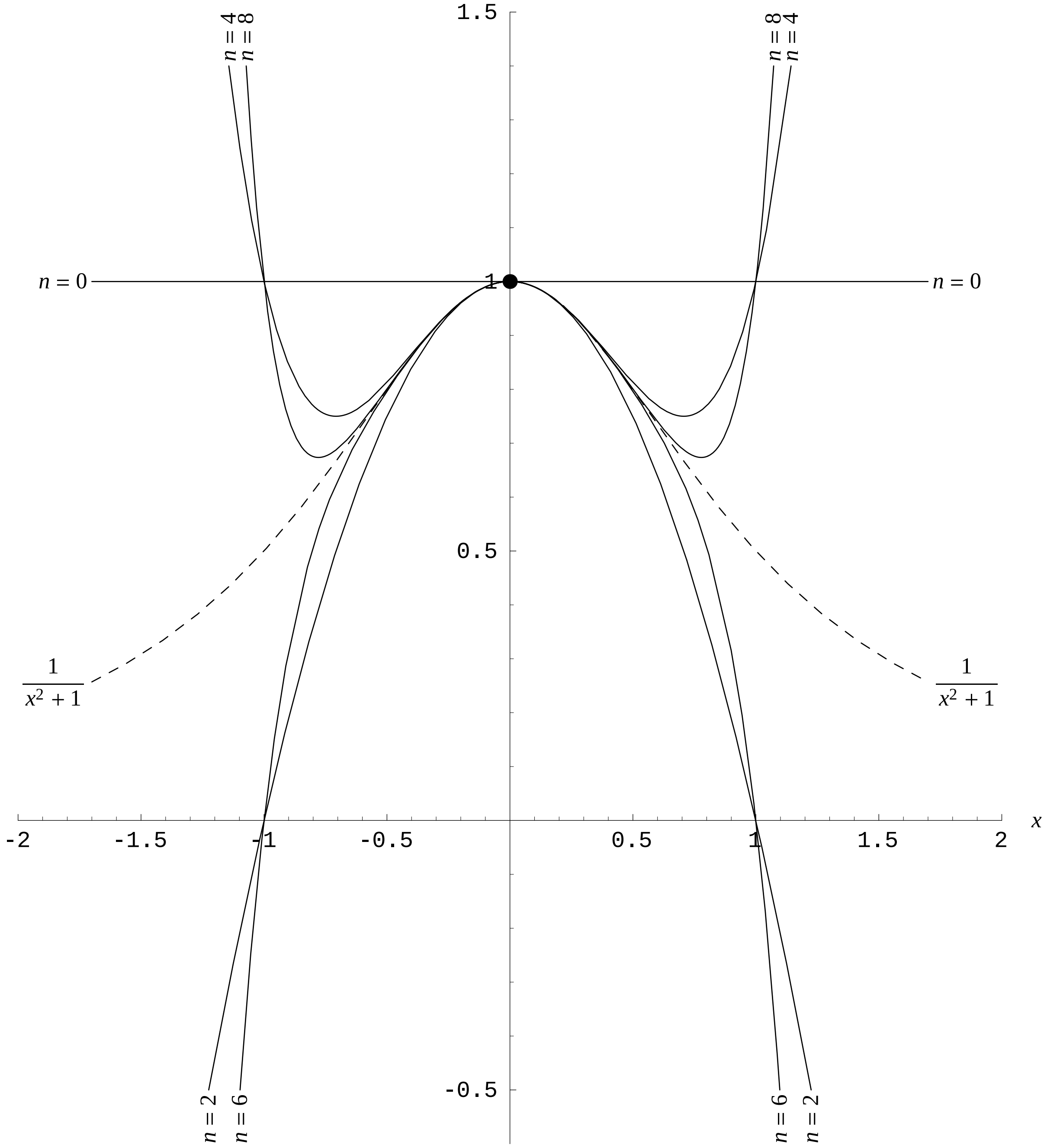


La funzione $x \mapsto \cos x$ (tratteggiata) ha come polinomio di MaLlaurin di ordine $n = 2k$

$$p_{2k,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2k}}{(2n)!}$$

Al crescere dell'ordine n i grafici dei polinomi (non tratteggiati) si "adagiano" sempre di più e su una regione sempre più vasta sul grafico della funzione coseno. Quella del coseno è un'altra ancora delle situazioni in cui i polinomi di Taylor hanno pieno successo nell'opera di approssimare una funzione.

4. La funzione $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

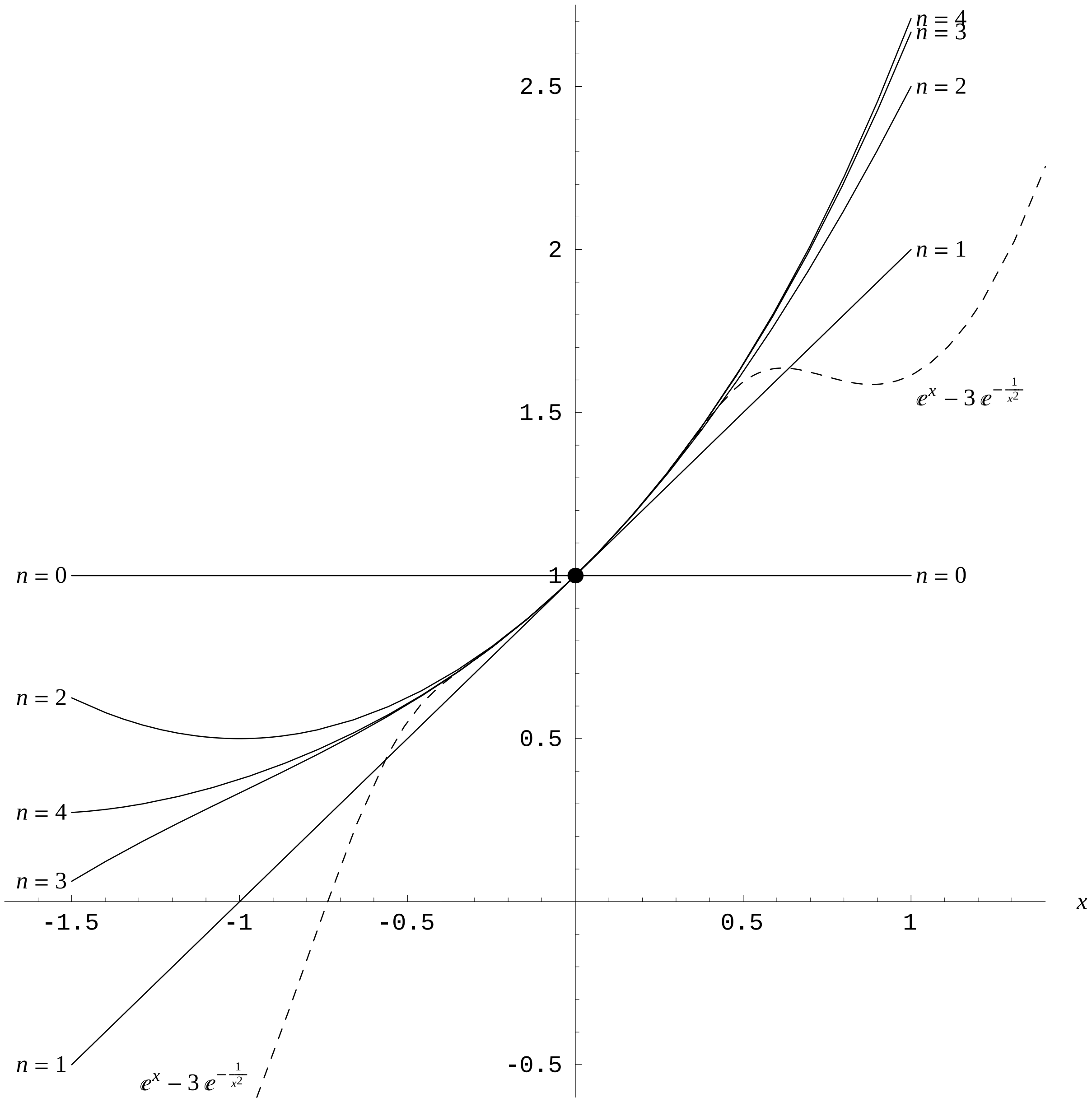


La funzione $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ (tratteggiata) ha come polinomio di MacLaurin di ordine $n = 2\,k$

$$p_{2\,k,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots + (-1)^n\ x^{2\,k}\,.$$

Al crescere dell'ordine n i grafici dei polinomi (non tratteggiati) si "adagiano" sempre di più sul grafico della funzione, e la regione di adagiamento è sempre più vasta, ma non a dismisura: invade lentamente l'intervallo $]-1,\,1[$, ma non si spinge oltre. Fuori da quell'intervallo i grafici dei polinomi di Taylor in effetti *si allontanano* da quello della funzione, e tendono a *divergere* (positivamente o negativamente a seconda se si prendono gli n pari o dispari).
Questo è un esempio in cui i polinomi di Taylor hanno successo solo *parziale* nell'opera di approssimare una funzione.

5. La funzione $x \mapsto e^x - 3\, e^{-1/x^2}$

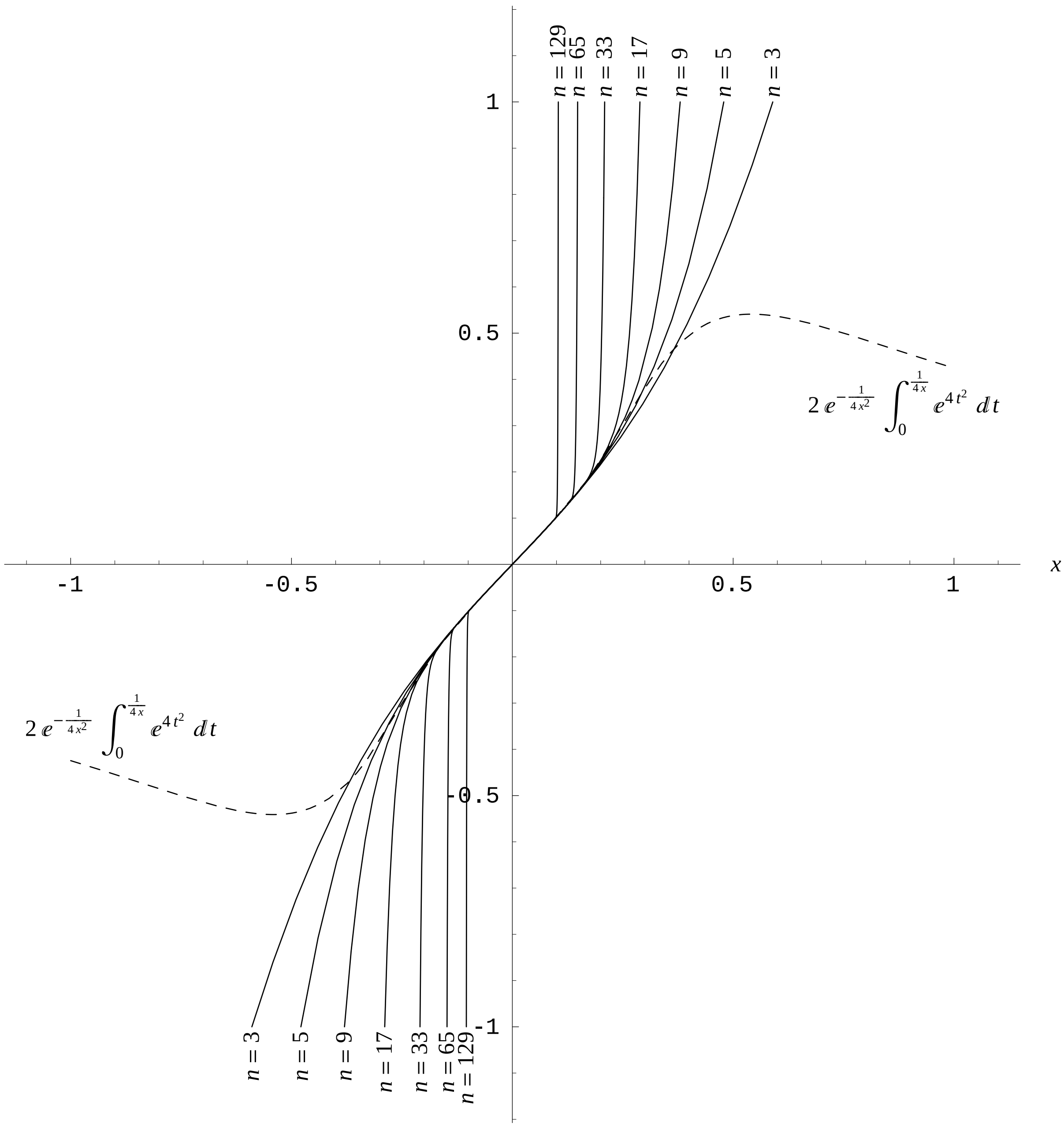


La funzione $x \mapsto \begin{cases} e^x - 3\, e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ (tratteggiata) è derivabile infinite volte su tutto $\mathbb{R}$ (omettiamo la dimostrazione) e il suo polinomio di MacLaurin di ordine n è

$$p_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

Già visti da qualche parte questi polinomi? Sì: sono identici ai polinomi di MacLaurin dell'esponenziale e^x.
Al crescere dell'ordine n i grafici dei polinomi (non tratteggiati) si "adagiano" sempre di più sul grafico della funzione *esponenziale*, che però *non è* la funzione da cui siamo partiti.
Questo è un esempio in cui i polinomi di Taylor *falliscono* completamente nell'opera di approssimare una funzione.

6. La funzione $x \mapsto 2\, e^{-\frac{1}{4x^2}} \int_0^{\frac{1}{4x}} e^{4t^2}\, dt$



La funzione $x \mapsto \begin{cases} 2\, e^{-\frac{1}{4x^2}} \int_0^{\frac{1}{4x}} e^{4t^2}\, dt & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ (tratteggiata) è derivabile infinite volte su tutto $\mathbb{R}$ (omettiamo la dimostrazione) e il suo polinomio di MacLaurin di ordine $n = 2\,k + 1$ è

$$p_{2k+1,0}(x) = \frac{0!}{0!}\, x + \frac{2!}{1!}\, x^3 + \frac{4!}{2!}\, x^5 + \frac{6!}{3!}\, x^7 + \cdots + \frac{(2\,k)!}{k!}\, x^{2k+1}\,.$$

Al crescere dell'ordine n i grafici dei polinomi (non tratteggiati) si "adagiano" sul grafico della funzione su una regione che via via *si restringe*. I polinomi tendono all'infinito, eccetto nel caso banale di $x = 0$.
Questo è un altro esempio in cui i polinomi di Taylor *falliscono* miseramente nell'opera di approssimare una funzione.