Successioni iterative reali

Esistenza e unicità.

Una successione a_n si dice iterativa se esiste una funzione f tale che $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = f(a_n)$. Se assegnamo un valore iniziale α e una funzione f a caso, per il principio di induzione non può esistere più di una successione $n \mapsto a_n$ che verifichi

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, \\ a_{n+1} = f(a_n). \end{cases}$$

Per forza di cose deve essere

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = f(a_0) = f(\alpha), \quad a_2 = f(a_1) = f(f(\alpha)), \quad a_3 = f(a_2) = f(f(f(\alpha))), \quad \ldots$$
$$a_n = (\underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ “fattori”}})(\alpha)\,.$$

Un problema che càpita è che potrebbe benissimo non esserci nessuna successione con questa proprietà, non appena un certo a_n esce dal dominio di f, e quindi non si può calcolare $a_{n+1} = f(a_n)$. Una semplice condizione *sufficiente* di *esistenza*, oltre che di unicità, della successione iterativa è che f trasformi il suo dominio A in se stesso, e che α appartenga a tale dominio:

$$\big(f\colon A \to A, \quad \alpha \in A\big) \quad \Rightarrow \quad \exists!\ a\colon \mathbb{N} \to A \text{ tale che } \begin{cases} a_0 = \alpha, \\ a_{n+1} = f(a_n). \end{cases}$$

Studieremo qui il caso in cui A è $\mathbb{R}$ o un sottinsieme di $\mathbb{R}$, perché è importante e si presta a essere visualizzato.

Le successioni iterative sono un caso particolare delle successioni *ricorsive*, che sono quelle definite da

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, \\ a_{n+1} = f(a_n, n), \end{cases} \qquad \text{dove } f\colon A \times \mathbb{N} \to A, \quad \alpha \in A.$$

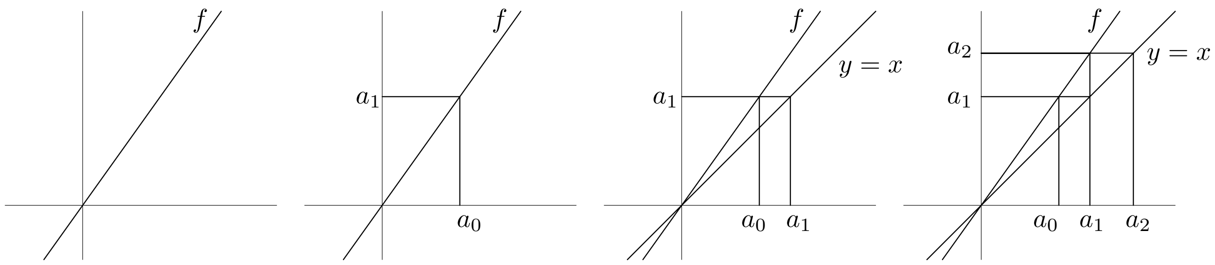
Il caso iterativo sarebbe quello in cui $f(x, n)$ dipende solo da x, mentre in quello “esplicito” la $f(x, n)$ dipende solo da n. Esempio: il fattoriale $a_n = n!$ si può pensare come una successione esplicita, oppure come una successione ricorsiva $a_0 = 1$, $a_{n+1} = n! \cdot (n+1) = f(a_n, n)$ con $f(x, n) = x(n+1)$.

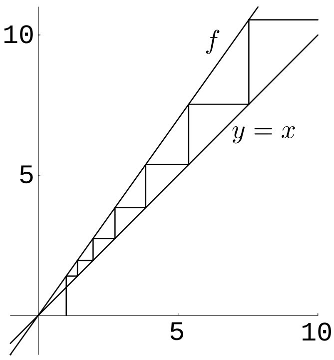
Esercizio. La successione $n \mapsto n^2$ è iterativa? C'è qualche condizione su $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che garantisca che la successione $n \mapsto g(n)$ si possa scrivere in forma iterativa? Dimostrare che se una successione $n \to a_n$ è iterativa ed $m \in \mathbb{N}$, allora $a_m = a_{m+1} \Rightarrow a_{m+1} = a_{m+2}$. Esistono successioni *non* iterative?

La potenza ennesima reale.

La successione $a_n := \alpha^n$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, è iterativa. Infatti si può scrivere $a_{n+1} = \alpha^{n+1} = \alpha \cdot \alpha^n = \alpha a_n$, e quindi basta porre $f(x) := \alpha x$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per avere la relazione iterativa $a_{n+1} = f(a_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Qui $a_0 = \alpha^0 = 1$.

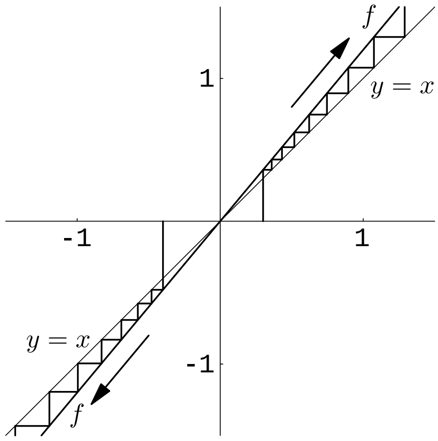
Prendiamo per fissare le idee $\alpha = 7/5$. Disegnamo il grafico della funzione f, che è una retta per l'origine di pendenza $7/5$, e segnamo il punto $a_0 = 1$ sull'asse x. Se tracciamo una retta verticale da quel punto fino a raggiungere il grafico di f, l'ordinata dell'intersezione è $a_1 = f(a_0)$. Se vogliamo confrontare i due valori a_0 e a_1, possiamo tracciare la bisettrice del primo e quarto quadrante, cioè la retta di equazione $y = x$, e poi dal punto (a_0, a_1) andare in orizzontale fino a incontrare la bisettrice nel punto (a_1, a_1), che possiamo infine far piovere giù sull'asse x. Otteniamo così a_0 e a_1 insieme sull'asse x. Poiché il procedimento che fa ottenere a_2 ad a_1 è lo stesso che di quello che fa passare da a_0 ad a_1, possiamo ripartire in verticale da $(a_1, 0)$ fino al grafico di f in (a_1, a_2), spostarci in orizzontale fino alla bisettrice in (a_2, a_2) e proiettare sull'asse x in $(a_2, 0)$.

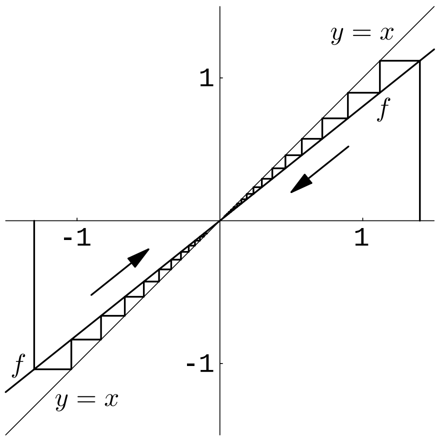




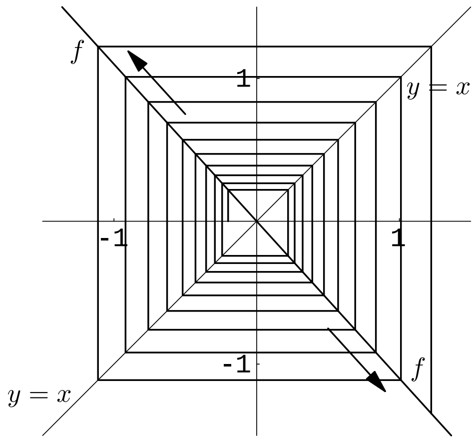
Acquistata un minimo di esperienza, la figura può essere potata di molti segmenti senza perdere informazione essenziale. Un risultato tipico è quello qui accanto, che mostra alcune iterazioni in più, sempre per la successione $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 7x/5$.

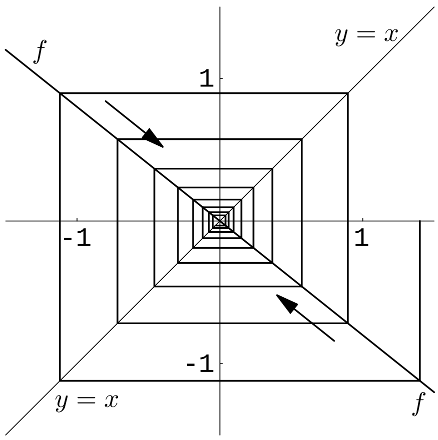
Se dalla formula iterativa $x_{n+1} = \alpha x_n$ partiamo da un numero a_0 diverso da 1, otteniamo la successione (in forma esplicita) $a_n = a_0 \alpha^n$. Quando $\alpha = 7/5$ e $a_0 > 0$, la figura corrispondente differisce da quella con $a_0 = 1$ solo per un fattore di scala. Se $a_0 < 0$, oltre al fattore di scala bisogna mettere anche una simmetria rispetto all'origine. La prima delle figure qui sotto fa vedere l'effetto di un $a_0 > 0$ e di un $a_0 < 0$ e con $\alpha = 6/5$. Si noterà che un α più vicino a 1, ma maggiore di 1, provoca scalini più fitti. La seconda figura invece prova con $\alpha = 4/5$. Gli scalini ci sono sempre, ma questa volta si dirigono verso l'origine invece di divergere. Che succede quando $\alpha = 1$? Quando α è positivo ma molto prossimo a 0? Quando $\alpha = 0$?





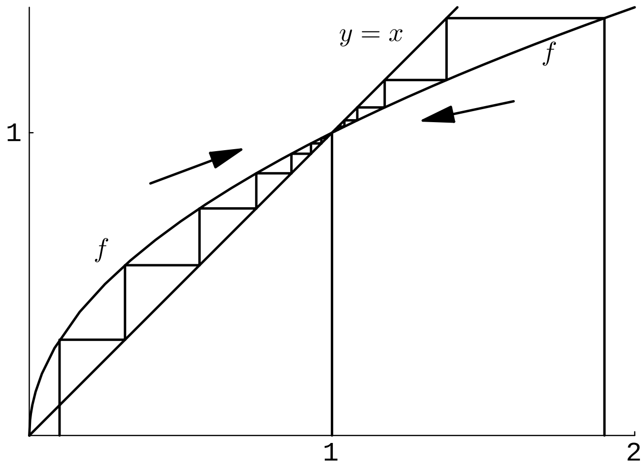
Quando α è minore di 0, le figure cambiano completamente aspetto: invece di gradinate, abbiamo delle "ragnatele" che girano attorno all'origine. Il ragno si avvicina all'origine quando $-1 < \alpha < 0$ (la prima figura qui sotto è fatta con $\alpha = -11/10$) e si allontana quando $\alpha < -1$ (vedi la seconda figura, con $\alpha = -4/5$). Che cosa succede quando $\alpha = -1$?





La successione reale $n \mapsto \alpha^n$ è un caso particolare della successione complessa $n \mapsto \alpha^n$, di cui avevamo pure dato dei grafici, che però non vanno assolutamente confusi con quelli presenti. Infatti laggiù i punti della successione erano numeri complessi, quindi punti del piano. Qui invece la successione è a valori reali, unidimensionali. La seconda dimensione nelle figure viene introdotta solo perché così col grafico di f si può "costruire" geometricamente la successione unidimensionale. Potremmo anche immaginare di fare lo stesso per le successioni complesse, se non fosse che il grafico di una funzione $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una superficie bidimensionale in uno spazio a quattro dimensioni, abbastanza fuori dalla nostra portata.

La radice quadrata iterata.



Che accade se partendo da un numero reale $\alpha \geq 0$ estraiamo la radice quadrata, poi del risultato estraiamo di nuovo la radice, e così via? La successione che si ricava si può scrivere in vari modi:

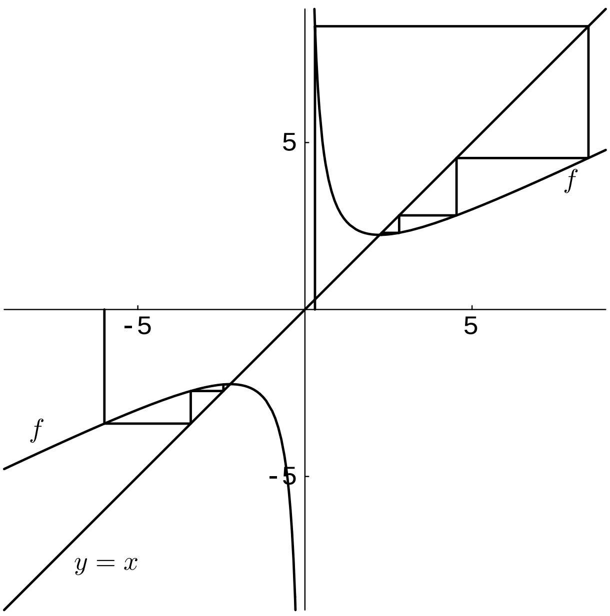
$$a_n = \underbrace{\sqrt{\dots\sqrt{\sqrt{\alpha}}}}_{n \text{ radici quadrate}} = \sqrt[2^n]{\alpha}$$

per $n \geq 1$, e, in particolare, in forma iterativa:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n}\,. \end{cases}$$

Poiché la funzione $f(x) := \sqrt{x}$ trasforma $\mathbb{R}^+$ in se stesso, siamo sicuri che la successione è ben definita. La figura qui sopra si ottiene prendendo $\alpha = 1/10$ a sinistra e $\alpha = 19/10$ a destra. In entrambi i casi risultano scalette, la prima ascendente e la seconda discendente, che si avvicinano tutte al punto $(1, 1)$, in cui il grafico di f interseca la bisettrice $y = x$. Che succede quando $\alpha = 0$ o quando $\alpha = 1$?

La funzione $x \mapsto (x^2 + 5)/2x$.



Una funzione più complicata di cui prendere l'iterata è la

$$f(x) := \frac{x^2 + 5}{2x}\,.$$

Innanzitutto non è definita su tutto $\mathbb{R}$, ma solo su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per fortuna f trasforma il dominio in se stesso (giacché $f(x)$ non è mai nulla), e quindi possiamo sempre considerare la successione iterativa

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \neq 0, \\ a_{n+1} = f(a_n). \end{cases}$$

Il grafico qui accanto prende per punti iniziali $\alpha = -6$ e $\alpha = 3/10$.

Esercizio. Dimostrare che $|f(x)| \geq \sqrt{5}$ per tutti gli $x \neq 0$. Dedurre in particolare che qualunque sia $\alpha \neq 0$ si ha $|a_n| \geq \sqrt{5}$ per ogni $n \geq 1$. Dimostrare inoltre che f è strettamente crescente su $]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$, e che $f(x) < x$ per $x > \sqrt{5}$ e $f(x) > x$ per $x < -\sqrt{5}$.

Teoremi (dimostrazioni per esercizio).

Teorema 1. *Sia A un sottinsieme di $\mathbb{R}$, $f\colon A \to A$ una funzione e α un elemento di A. Supponiamo che la successione iterativa $a_0 = \alpha$, $a_{n+1} = f(a_n)$ converga verso il limite $\ell \in A$ e che f sia continua in ℓ. Allora ℓ verifica la relazione*

$$\ell = f(\ell),$$

ossia ℓ è un "punto fisso" per f.

Teorema 2. *Sia A un sottinsieme di $\mathbb{R}$, $f\colon A \to A$ una funzione debolmente monotona e α un elemento di A. Definiamo la successione iterativa $a_0 = \alpha$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Allora*

1. *se f è debolmente crescente, la successione $n \mapsto a_n$ è debolmente monotona (crescente o decrescente a seconda che $f(\alpha) \geq \alpha$ oppure $f(\alpha) \leq \alpha$);*
2. *se f è debolmente decrescente, la successione $n \mapsto a_n$ è debolmente crescente sugli indici pari e debolmente decrescente sui dispari o viceversa, a seconda che $a_0 \leq a_2$ o $a_0 \geq a_2$.*

Inoltre le successioni o sottosuccessioni dei punti 1 e 2 sono o strettamente monotone o definitivamente costanti. Nel caso 2, se una sottosuccessione converge a un $\ell \in A$ e se f è continua in ℓ, allora si ha $\ell = f(f(\ell))$.

Teorema 3. *Sia A un sottinsieme di $\mathbb{R}$, $f\colon A \to A$ una funzione lipschitziana di costante $L < 1$ e sia α un elemento di A. Definiamo la successione iterativa $a_0 = \alpha$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Allora la successione a_n converge.*

Vediamo che cosa ci dicono questi teoremi sulla prima successione iterativa che abbiamo disegnato: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = f(a_n)$ con $f(x) := 7x/5$. Come insieme A possiamo prendere sia tutto $\mathbb{R}$ che per esempio l'intervallo $[0, +\infty[$, poiché f trasforma questi insiemi in se stessi e il punto iniziale a_0 ci sta dentro. La f è strettamente crescente, per cui la successione $n \mapsto a_n$ è monotona. Visto che $a_0 = 1 < a_1 = 7/5$, la successione è in realtà crescente, e quindi ammette limite, che coincide con $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e che è o un numero reale $\ell \geq a_0 = 1$ oppure $+\infty$. Possiamo escludere il caso del limite finito ℓ in questo modo: passando al limite in entrambi i membri dell'identità $a_{n+1} = (7/5)a_n$ si ha:

$$\underset{\ell}{\underset{\downarrow}{a_{n+1}}} = (7/5) \cdot \underset{\alpha}{\underset{\downarrow}{a_n}} \quad \overset{\substack{\text{passando}\\ \text{al limite}}}{\Longrightarrow} \quad \ell = \frac{7}{5}\ell \quad \overset{\substack{\text{portando al}\\ \text{primo membro}}}{\Longrightarrow} \quad -\frac{2}{5}\ell = 0 \quad \overset{\substack{\text{dividendo}\\ \text{per } -2/5 \neq 0}}{\Longrightarrow} \quad \ell = 0\,.$$

Pertanto, *se* esiste un limite finito ℓ, questo *deve* essere 0. Ma sappiamo che il limite è necessariamente ≥ 1. *Quindi* il limite non può essere finito, e siamo costretti a concludere che il limite (oltre a esistere) è $+\infty$.

Esercizio. Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to A$ sia debolmente crescente, $\ell, \alpha \in A$, $f(\ell) = \ell$ e $a_0 = \alpha$, $a_{n+1} = f(a_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora se $\alpha \leq \ell$ si ha $a_n \leq \ell$ per ogni n, e se $\alpha \geq \ell$ si ha $a_n \geq \ell$ per ogni n.

Esercizio. Studiare le altre successioni iterative delle sezioni precedenti, stabilendo monotonie e limiti, usando i teoremi.

Per affrontare gli esercizi teorici seguenti, conviene aspettare di avere svolto la teoria delle funzioni continue.

***Esercizio.** Sia A un sottinsieme di $\mathbb{R}$, $f\colon A \to A$ una funzione tale che $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ per ogni $x, y \in A$, sia ℓ un elemento di A tale che $\ell = f(\ell)$, e sia infine α un elemento di A. Definiamo la successione iterativa $a_0 = \alpha$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Allora ℓ è unico e la successione a_n converge ad ℓ. (Nota: la dimostrazione si semplifica molto se si suppone che f sia anche monotona.)

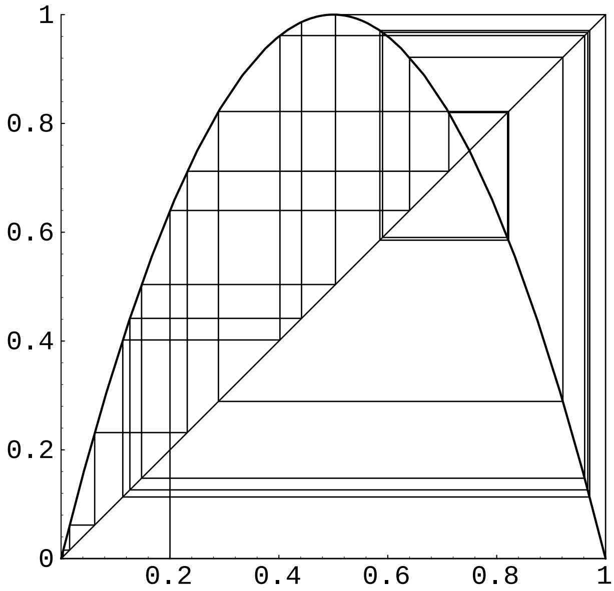
Esercizio. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) > x$ per ogni x. Allora la successione iterativa $a_0 = \alpha$, $a_{n+1} = f(a_n)$ è strettamente crescente. Inoltre se f è anche continua, allora $a_n \to +\infty$.

Esercizio. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e sia α un elemento di A. Definiamo la successione iterativa $a_0 = \alpha$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Se non esiste un $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $\ell = f(\ell)$, allora la successione a_n diverge a $+\infty$ o a $-\infty$.

Esercizio. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua per la quale esiste $L > 1$ tale che $|f(x) - f(y)| \geq L|x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e sia α un elemento di A. Definiamo la successione iterativa $a_0 = \alpha$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Allora la successione a_n diverge a ∞. (La f è automaticamente anche monotona; la dimostrazione si semplifica se lo si suppone in partenza).

***Esercizio.** Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $|f(x) - f(y)| > |x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e sia α un elemento di A. Definiamo la successione iterativa $a_0 = \alpha$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Allora la successione a_n è o costante (se $f(\alpha) = \alpha$), o divergente a ∞ (negli altri casi). Che succede se $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$? (Pensare a $f(x) := -x$). (La f è automaticamente anche monotona; la dimostrazione si semplifica se lo si suppone in partenza).

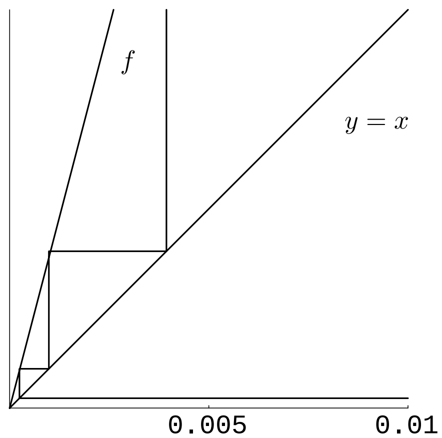
Successioni iterative "caotiche".

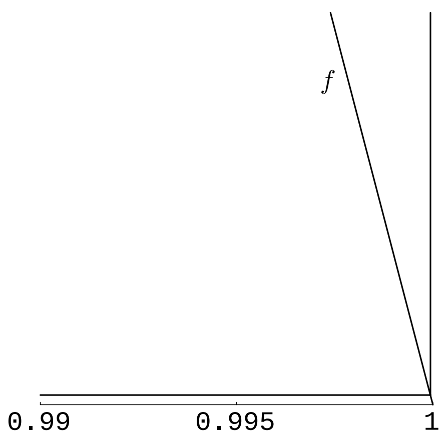


La funzione

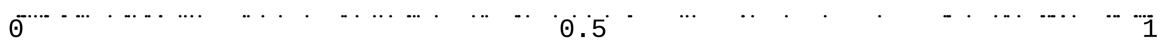
$$f(x) := 4x(1-x)$$

ha le seguenti proprietà: trasforma l'intervallo $[0,1]$ in se stesso, e i suoi punti fissi (che sono lo 0 e $3/4$) sono del tipo "repulsivo", cioè le successioni iterative $a_{n+1} = f(a_n)$ che càpitano su uno dei due punti fissi ci restano per sempre, però se ci cadono vicino ma non esattamente allora se ne allontanano. Di conseguenza una successione iterativa che parta in un punto dell'intervallo $[0,1]$ può convergere solo se per un certo indice n si ha $a_n = 0$ o $a_n = 3/4$ (i punti iniziali α per cui questo può succedere formano al più un insieme numerabile). In tutti gli altri casi la successione è condannata a errare in eterno senza meta nell'intervallo $[0,1]$. La figura accanto mostra l'andamento della successione quando il punto iniziale è $\alpha = 1/5$. Le due figure seguenti sono degli ingrandimenti delle regioni attorno all'origine e attorno al punto $(1,0)$, per non far pensare che la successione prenda esattamente il valore 1 o 0.





E questo è l'insieme dei primi duecento punti della successione:



Esercizio. Esistono punti iniziali α per i quali la successione iterativa è ciclica di minimo periodo 2? Quanti? E ciclica di minimo periodo 3?