Relazioni insiemistiche

1. Coppie ordinate.

Se è vero che un insieme è un elenco di elementi, si può pensare di usarlo come strumento di registrazione. Si parte da $\varnothing$. Se la prima informazione da archiviare è l'elemento a, si costituisce $\varnothing \cup \{a\}$, cioè il singoletto $\{a\}$. La seconda informazione b viene aggiunta unendo il singoletto: $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$. E così via: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}\dots$ Se a un dato istante l'insieme dei dati immagazzinati è A, l'informazione successiva viene fagocitata in $A \cup \{x\}$.

Un metodo come questo sarebbe adeguato per registrare i nomi degli atleti che arrivano al traguardo di una maratona non competitiva. La lista finale ci dice chi ha completato il percorso, e ci servirà eventualmente per sapere se ci sono dei dispersi, ma l'informazione su chi è arrivato primo, o secondo, o terzo, si è persa. Un insieme è una lista *non ordinata*.

Saremmo degli strani scrutatori elettorali se seguissimo quella stessa procedura nel contare i voti, infilando nell'insieme-registro i nomi dei partiti che sono segnati sulle schede che vengono via via lette. Qui l'ordine in cui vengono lette le schede è irrilevante, però l'insieme-registro ci dice solo *quali* partiti hanno ricevuto almeno un voto, senza indicare *quanti* voti hanno ricevuto. Aggiungere un elemento a un insieme che ce l'ha già non lo cambia. Gli insiemi *non riconoscono le ripetizioni*.

Ci sono dunque delle situazioni in cui si vorrebbero annotare dei dati in ordine di arrivo, senza problemi di ripetizione, perché i dati sono intrinsecamente tutti distinti (come gli atleti di una gara individuale). In altri casi l'ordine non interessa ma è cruciale il conteggio delle ripetizioni. Riuscite a immaginare una circostanza intermedia in cui bisogna tener conto dell'ordine in cui ci sono delle ripetizioni?

Fortunatamente, se gli insiemi "semplici" non risolvono il problema della registrazione sequenziale dei dati, gli *insiemi di insiemi* lo fanno. Cominciamo dal caso più semplice, in cui i dati da memorizzare in ordine siano solo due: prima l'elemento a e poi l'elemento b.

Definizione. *Dicesi coppia ordinata di primo elemento a e secondo elemento b, e si indica con (a, b), l'insieme $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$.*

Un concetto così di largo consumo come la coppia ordinata meriterebbe che si escogitasse un simbolo meno affrettato di '(,)', ma ormai la notazione è universalmente accettata e bisogna adeguarsi. Purtroppo alcuni autori usano '(,)' anche per indicare un intervallo aperto, e lasciano al contesto il compito della distinzione.

La coppia ordinata esiste per i postulati del singoletto e dell'unione e non ne ha bisogno di nuovi:

$$(a, b) = \big\{\{a\}\big\} \cup \big\{\{a\} \cup \{b\}\big\}\,.$$

Nel caso della ripetizione, in cui $a = b$, si ha in particolare

$$(a, a) = \big\{\{a\}, \{a, a\}\big\} = \big\{\{a\}, \{a\}\big\} = \big\{\{a\}\big\}\,.$$

Esercizio. Dire se $(a, b) \in \mathcal{P}(\{a, b\})$, $(a, b) \subset \mathcal{P}(\{a, b\})$, $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\}))$. Può essere che $(a, b) = \varnothing$? Calcolare $(\varnothing, \{\varnothing\})$, $\bigcup(a, b)$, $\bigcap(a, b)$.

Enunciamo ora la proprietà fondamentale delle coppie ordinate. Il trucco che rende "ordinata" la coppia ordinata è il fatto che i due elementi a e b vengono immagazzinati in maniera diversa: il primo è lasciato da solo in un singoletto, mentre il secondo deve dividere il posto col primo in una coppia non ordinata.

Teorema. *Siano a, b, c, d elementi. Allora* $(a, b) = (c, d) \iff (a = c) \wedge (b = d)$.

La dimostrazione è abbastanza complicata e tediosa se fatta d'un fiato. Parte di essa viene lasciata come esercizio, nella forma dei due seguenti lemmi.

Lemma primo. $\forall x, a, b$ *elementi:* $\{x\} = \{a, b\} \iff x = a = b$.

Lemma secondo. $\forall a, b, d$ *elementi:* $\{a, b\} = \{a, d\} \iff b = d$.

Dimostrazione del teorema. L'implicazione '$\Leftarrow$' è ovvia. Per il viceversa, facciamo vedere innanzitutto che $\{x\} \in (a,b) \iff x = a$. Infatti:

$$\begin{array}{cl} \{x\} \in (a,b) = \big\{\{a\},\{a,b\}\big\} & \\ \Updownarrow & \text{definizione di unione e di coppia non ordinata} \\ \big(\{x\} = \{a\}\big) \vee \big(\{x\} = \{a,b\}\big) & \\ \Updownarrow & \text{definizione di singoletto e lemma primo} \\ (x = a) \vee (x = a = b) & \\ \Updownarrow & \text{logica: se } p \Leftarrow q \text{ allora } (p \vee q) \iff p \\ x = a\,. & \end{array}$$

Quindi, poiché $\{a\} \in (a,b)$ e $\{c\} \in (c,d)$, si ha che $(a,b) = (c,d) \Rightarrow a = c$. Scrivendo ora a al posto di c otteniamo

$$\begin{array}{cl} (a,b) = (a,d) & \\ \Updownarrow & \text{definizione di coppia ordinata} \\ \big\{\{a\},\{a,b\}\big\} = \big\{\{a\},\{a,d\}\big\} & \\ \Updownarrow & \text{lemma secondo} \\ \{a,b\} = \{a,d\} & \\ \Updownarrow & \text{lemma secondo} \\ b = d\,. & \end{array}$$

$\square$

Esercizio. (Ipotetica definizione alternativa della coppia ordinata). Varrebbe il teorema precedente se definissimo $(a,b) := \{a, \{b\}\}$? (Ci si riconduce al problema se esistano insiemi che coincidono con il proprio singoletto, cosa che i nostri postulati non escludono).

Esercizio. (Coppia ordinata alternativa). Che ne sarebbe del teorema se (a,b) fosse definito come $\{\{a\},\{b,\varnothing\}\}$? (I conti tornano, ma c'è una pecca "estetica": questa definizione richiede un postulato in più per garantire l'esistenza. . .)

La coppia ordinata è un *chip* di memoria '(,)' che imbraca due elementi in modo da restituirli, a richiesta, nell'ordine in cui sono stati infilati. La coppia non ordinata '{ , }' invece li mescolava irrimediabilmente. Se ci servisse una *terna ordinata* '(a,b,c)' non abbiamo che l'imbarazzo della scelta fra diverse definizioni:

$$\Big\{\big\{\{a\},\{a,b\}\big\},\big\{\{b,c\}\big\}\Big\}, \quad \text{oppure} \quad \big((a,b),c\big), \quad \text{oppure} \quad \big(a,(b,c)\big)$$

(o persino qualcosa come $((a,c),b)$ o $(a,(c,b))$ se ci ricordiamo del rimescolamento al momento della restituzione). Queste definizioni sono ugualmente lecite e *sono tutte distinte*. La prima ha il vantaggio di richiedere solo tre livelli di graffe, mentre le altre ne hanno quattro, ma la dimostrazione che si tratta davvero di una terna ordinata è più tediosa. Non sentiamo qui nessun bisogno di adottare ufficialmente una particolare definizione, perché la sola cosa che ci servirà, di solito, sarà che *esista* una struttura '(, ,)' che sia ordinata, ossia che goda della seguente proprietà:

$$\forall a,b,c,d,e,f \text{ elementi:} \quad (a,b,c) = (d,e,f) \iff (a = d) \wedge (b = e) \wedge (c = f)\,.$$

Non ci impelaghiamo a elencare e discutere possibili definizioni di quaterne ordinate. Si sarà ormai capito il trucco.

Esercizio. Verificare le definizioni di terne ordinate che abbiamo proposto.

Esercizio. La struttura $\big\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\big\}$ distingue l'ordine di a,b,c?

2. Prodotto cartesiano.

Definizione. *Dati due insiemi A, B, si dice prodotto cartesiano fra A e B l'insieme, indicato con $A \times B$, di tutte (e sole) le coppie ordinate (a, b) in cui $a \in A$ e $b \in B$. In formula:*

$$\forall x \text{ elemento:} \quad x \in A \times B \iff \exists a, b \text{ elementi tali che } (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge x = (a, b)\,.$$

Nella definizione abbiamo tralasciato il "se esiste" di rito, ma ci facciamo perdonare dimostrando subito che il prodotto cartesiano esiste sempre.

Teorema. *Se A, B sono insiemi, esiste il prodotto cartesiano $A \times B$.*

Dimostrazione. Se $a \in A$ e $b \in B$ si ha $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(\{a, b\})$. Per i postulati dell'unione e quello dell'insieme delle parti, esiste $\mathcal{P}(A \cup B)$. Poiché $\{a, b\} \subset A \cup B$, si ha $\mathcal{P}(\{a, b\}) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. Quindi (a, b), essendo sottinsieme di $\mathcal{P}(A \cup B)$, appartiene a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, che esiste per il postulato dell'insieme delle parti. Infine $A \times B$ esiste in quanto sottinsieme di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ definito da una proprietà. □

Teorema. *Per qualsiasi insieme A si ha $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$.*

Dimostrazione. Il predicato $(a \in A) \wedge (b \in \varnothing)$ è falso qualunque siano gli elementi a, b. Quindi per ogni elemento x sono falsi entrambi i membri dell'equivalenza

$$x \in A \times \varnothing \iff \exists a, b \text{ elementi tali che } (a \in A) \wedge (b \in \varnothing) \wedge x = (a, b)\,.$$

In particolare, nessun elemento x appartiene ad $A \times \varnothing$, ossia $A \times \varnothing = \varnothing$. In maniera analoga si dimostra che $\varnothing \times A = \varnothing$. Attenzione: abbiamo dimostrato che $A \times \varnothing$ è vuoto, *non* abbiamo dimostrato che non esiste (infatti esiste). Il paradosso di Russell e le sue varie conseguenze dimostrano che certi insiemi *non esistono*, non che sono vuoti. □

Esercizio. Dimostrare che se A, B sono insiemi *non vuoti* si ha $A \times B = B \times A \iff A = B$.

Esercizio. Dimostrare che $\bigcup(\bigcup A \times B) = A \cup B$.

Esercizio. Non esiste l'insieme di tutte le coppie ordinate. (Se esistesse, sarebbe una famiglia di famiglie di insiemi; considerarne l'unione dell'unione).

3. Insiemi di coppie ordinate (relazioni).

Un predicato insiemistico di una variabile, come "x è un insieme", è una proprietà che per certi elementi X sarà verificata e per altri x no. Sappiamo che non per tutti i predicati esiste l'insieme degli elementi per i quali il predicato è vero.

Nella teoria degli insiemi ci sono anche predicati di due variabili, quali l'appartenenza o l'inclusione. Un tale predicato può anche essere visto come una proprietà delle coppie ordinate. Basta introdurre un nuovo predicato $\tilde{P}$ di una variabile, definito sulle coppie ordinate:

$$\tilde{P}\big(\,(a, b)\,\big) := P(x, y)\,.$$

Notare che le parentesi tonde dell'espressione (x, y) hanno significati diversi nei due membri dell'equazione precedente. Nel membro di sinistra individuano una coppia ordinata, cioè un insieme, che diventa l'argomento del predicato $\tilde{P}(\,\cdot\,)$. A destra invece le tonde sono semplicemente le parentesi che racchiudono gli argomenti del predicato $P(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, e non creano nessun insieme.

Non per ogni predicato di due variabili P esiste l'insieme delle coppie ordinate per le quali $\tilde{P}$ è vero. Ad esempio non esiste l'insieme di *tutte* le coppie ordinate (corrispondente al predicato sempre vero). Se però ci si restringe alle coppie ordinate prese da un prodotto cartesiano fra due insiemi A, B, grazie al postulato del sottinsieme a ogni predicato di due variabili $P(x, y)$ che abbia senso per ogni $x \in A$ e $y \in B$ possiamo associare il sottinsieme di $A \times B$ sul quale $\tilde{P}$ è vero, e viceversa.

Il termine “relazione” si usa genericamente come sinonimo di “predicato di due variabili”, ma in contesti ristretti gli si dà il significato più tecnico che segue.

Definizione. *Dati due insiemi A, B, dicesi relazione (insiemistica) fra gli elementi di A e quelli di B un qualsiasi sottinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Quando $A = B$ si dice anche che la relazione è in A.*

Esercizio. Se R è un insieme di coppie ordinate, allora esiste un insieme A tale che R è una relazione in A. (Considerare $\bigcup(\bigcup R)$).

La definizione comprende anche relazioni che sono accozzaglie casuali di coppie ordinate, che non servono a nulla se non a rispettare un qualche postulato che richiede che esistano. Nella pratica però non basta essere un sottinsieme di un prodotto cartesiano per meritarsi seriamente il titolo di “relazione”. Ecco di seguito alcune proprietà che possono rendere dignitosa una relazione in un insieme.

Definizione. *Una relazione R in un insieme A si dice:*

1) *riflessiva se $\forall x \in A:\ (x, x) \in R$;*
2) *simmetrica se $\forall x, y \in A:\ (x, y) \in R \iff (y, x) \in R$;*
3) *transitiva se $\forall x, y, z \in A:\ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$;*
4) *antisimmetrica se $\forall x, y \in A:\ (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$.*

4. Relazioni di equivalenza e partizioni.

Definizione. *Una relazione R in un insieme A si dice relazione di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva.*

Si noterà che le proprietà che chiediamo da una relazione di equivalenza sono le stesse che avevamo attribuito alla relazione di identità. L’identità è ovviamente una relazione di equivalenza: è la relazione che stabilisce quando un elemento *equi-vale* a un altro a *tutti* i fini. Capita però che ci siano degli scopi particolari per i quali basta e avanza solo una parte dell’informazione necessaria a distinguere fra loro gli elementi. Tutti i predicati che usano solo quell’informazione e che valgano per un certo elemento x varranno anche per un altro elemento y che si distingua da x solo per dettagli inessenziali al fine che abbiamo in mente.

Se pensiamo di non usarla mai, certa informazione sarebbe meglio lasciarla fuori fin dall’inizio, escludendola dai predicati che definiscono l’identità stessa. In altre parole, potremmo tranquillamente considerare uguali certi elementi e lavorare con insiemi semplificati. Purtroppo a volte bisogna saper giostrare fra due contesti, in uno dei quali molte informazioni sono superflue, ma non possono essere semplicemente dimenticate, perché ne avremo bisogno appena salteremo all’altro contesto, in cui sono essenziali. Quando sorge un tale problema, la teoria degli insiemi ci aiuta con il trucco del “passaggio al quoziente rispetto a una relazione di equivalenza”, che andiamo a descrivere. Si può infatti fingere di semplificare un insieme nascondendo, invece che cancellando, l’informazione che non serve, salvo recuperarla intatta appena serva. Basta microfilmare tutte le cose fra loro equivalenti e trattare il film come un singolo oggetto, finché ci sta comodo.

Cominciamo col definire il concetto di partizione di un insieme.

Definizione. *Dicesi partizione di un insieme A una famiglia $\mathcal{R}$ di sottinsiemi di A a due a due disgiunti (ossia $\forall X, Y \in \mathcal{F}$: $X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \varnothing$) e che ricopre A (ossia $\bigcup \mathcal{F} = A$).*

Esercizio. Ogni insieme ha almeno una partizione (ad esempio $\mathcal{F}_1 = \{A\}$, oppure $\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, A\}$), ma soltanto l’insieme vuoto ne ha una sola. Ogni partizione di A è un elemento di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Esiste l’insieme di tutte le partizioni di un insieme. Se A ha più di un elemento, l’insieme delle parti di A non è una partizione di A. Trovare tutte le partizioni di $\{a, b, c\}$, dove i tre elementi sono distinti.

Una partizione di un insieme A è una suddivisione dell'insieme in blocchi non sovrapponentesi. Passare dall'insieme a una sua partizione non fa perdere informazione, perché l'insieme originale si recupera facendo l'unione della famiglia di sottinsiemi, però parte di questa informazione è *nascosta* sotto due livelli di parentesi graffe. Se ci asteniamo dal guardare oltre il primo livello, abbiamo una versione semplificata dell'insieme di partenza, in cui tutti gli elementi che appartenevano a uno stesso sottinsieme di A vengono soppiantati da un unico elemento.

Vediamo ora come le relazioni di equivalenza e le partizioni siano essenzialmente la stessa cosa descritta in parole diverse.

Definizione. *Data una relazione di equivalenza R sull'insieme A e dato un elemento x di A, si dice classe di equivalenza di x (rispetto a R) l'insieme, indicato di solito con $[x]_R$, degli elementi di A equivalenti a x tramite R:*

$$[x]_R := \{y \in A \mid (x,y) \in R\}.$$

Teorema. *Data una relazione di equivalenza R sull'insieme A, ogni elemento appartiene alla propria classe di equivalenza ($\forall x \in A : x \in [x]_R$). Inoltre le classi di equivalenza di due elementi coincidono se e solo se i due elementi sono equivalenti, e sono disgiunte se e solo se i due elementi non sono equivalenti ($\forall x, y \in A : [x]_R = [y]_R \iff (x,y) \in R \iff [x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$).*

Dimostrazione. Se $x \in A$, per la proprietà riflessiva si ha $(x,x) \in R$ e quindi $x \in [x]_R$ per definizione di classe di equivalenza.
Siano $x, y \in A$. Dimostriamo l'equivalenza $(x,y) \in R \iff [x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$. Supponiamo che $(x,y) \in R$. Allora, per definizione di classe di equivalenza, si ha che $y \in [x]_R$; ma per quanto già dimostrato si ha anche $y \in [y]_R$. Quindi l'intersezione $[x]_R \cap [y]_R$ è non vuota perché contiene y. Viceversa, se l'intersezione è non vuota, sia z un suo elemento. Per definizione di classi di equivalenza si ha che $(x,z) \in R$ e $(y,z) \in R$. Per la proprietà simmetrica di R applicata alla seconda coppia abbiamo $(x,z) \in R$ e $(z,y) \in R$. Dalla proprietà transitiva segue allora che $(x,y) \in R$.
Passiamo all'equivalenza $[x]_R = [y]_R \iff (x,y) \in R$. Se le due classi $[x]_R$ e $[y]_R$ coincidono, la loro intersezione è non vuota, perché contiene almeno x e y. Da quanto già dimostrato segue che $(x,y) \in R$. Viceversa, se $(x,y) \in R$, per dimostrare l'inclusione $[x]_R \subset [y]_R$ prendiamo un qualsiasi $z \in [x]_R$, cioè un z tale che $(x,z) \in R$. Dalle proprietà simmetrica e transitiva di R deduciamo che $(y,z) \in R$, ossia $z \in [y]_R$, e l'inclusione è verificata. L'inclusione inversa $[x]_R \supset [y]_R$ è analoga. □

Teorema. *Data una relazione di equivalenza R sull'insieme A, la famiglia delle classi di equivalenza secondo R è una partizione di A. Tale partizione si dice anche insieme quoziente di A rispetto a R e si indica con A/R. Se $A \neq \varnothing$ nessuno degli elementi di A/R è vuoto.*

Dimostrazione. L'insieme delle classi di equivalenza è $A/R = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid \exists x \in A : X = [x]_R\}$ e come tale esiste per il postulato del sottinsieme. Le classi di equivalenza sono a due a due disgiunte per il teorema precedente. L'insieme quoziente ricopre A perché per ogni elemento $x \in A$ si ha $x \in [x]_R \subset \bigcup A/R$. Se $A \neq \varnothing$, ogni elemento di A/R è della forma $[x]_R$ con $x \in A$, e quindi non è vuoto perché gli appartiene x. □

Teorema. *Sia A un insieme non vuoto e $\mathcal{F}$ una partizione di A in sottinsiemi, nessuno dei quali vuoto. Allora l'insieme R delle coppie ordinate $(x,y) \in A \times A$ per le quali x e y appartengono a un medesimo elemento della partizione è una relazione di equivalenza su A e $\mathcal{F}$ coincide con l'insieme quoziente A/R.*

Dimostrazione. Per dimostrare che R è riflessiva, sia $x \in A$. Poiché $\mathcal{F}$ ricopre A, esiste $X \in \mathcal{F}$ tale che $x \in X$. Ma allora x e x appartengono entrambi allo stesso elemento della partizione, e quindi $(x,x) \in R$. Per la simmetria, supponiamo che $(x,y) \in R$, ossia che x e y appartengano allo stesso elemento $X \in \mathcal{F}$. Ovviamente allora pure y e x appartengono allo stesso X e per definizione si ha $(y,x) \in R$. La transitività non è più difficile: se x e y appartengono allo stesso $X \in \mathcal{F}$ e y e z appartengono allo stesso $Y \in \mathcal{F}$, i due elementi X, Y della partizione, avendo y in comune, devono coincidere, e quindi x e z appartengono entrambi allo stesso elemento della partizione.

Per dimostrare che $\mathcal{F} \subset A/R$, sia $X \in \mathcal{F}$. Essendo $X \neq \varnothing$, esiste $x \in X$. Consideriamo $[x]_R$. Questo è l'insieme degli elementi $y \in A$ per i quali $(x, y) \in R$, cioè degli y che appartengono a uno stesso elemento della partizione a cui appartiene x. Ma X è l'unico elemento della partizione a cui appartiene x, perché $\mathcal{F}$ è, appunto, una partizione. Dunque $[x]_R$ è l'insieme degli elementi y che appartengono a X, ossia è X stesso. Viceversa, per quanto riguarda l'inclusione $\mathcal{F} \supset A/R$, sia $x \in A$ e $[x]_R \in A/R$. Sia X l'unico elemento di $\mathcal{F}$ a cui appartiene x. L'insieme $[x]_R$, contenendo tutti e soli gli elementi di A che appartengono a un elemento della partizione in cui sta anche x, deve contenere tutti e soli gli elementi di X, cioè coincide con X. $\square$

Esercizio. Quante relazioni ci sono sull'insieme vuoto? Quante di queste sono relazioni di equivalenza? Quante partizioni ci sono? C'è corrispondenza fra relazioni e partizioni?

Esercizio. Siano A, B due insiemi. Dimostrare che, date due coppie ordinate prese da $A \times B$, l'"avere in comune il primo elemento" o l'"avere in comune il secondo elemento" sono due predicati che definiscono relazioni di equivalenza, che indichiamo con R_1 e R_2, sul prodotto cartesiano $A \times B$ (non lasciarsi spaventare dal fatto che R_1 e R_2 sono insiemi di coppie ordinate di coppie ordinate). Se visualizziamo il prodotto cartesiano $A \times B$ con la classica tabella rettangolare, gli elementi delle partizioni $(A \times B)/R_1$ e $(A \times B)/R_2$ meritano il nome di "insiemi-riga" e di "insiemi-colonna", o viceversa, a seconda di come abbiamo disposto la tabella. Dimostrare che ogni insieme riga interseca ogni insieme colonna in uno e un solo punto (cioè l'intersezione è il singoletto di un elemento di $A \times B$). Passare da $A \times B$ al quoziente $(A \times B)/R_1$ equivale, in termini di informazione, a trascurare completamente il secondo elemento delle coppie ordinate e a guardare solo il primo. Analogamente, se si passa da $A \times B$ al quoziente $(A \times B)/R_1$ ci si dimentica in pratica del primo elemento. In altre parole, è come se in $A \times B$ si ignorasse uno dei due fattori.

Esercizio ("scomposizione in fattori cartesiani" di un insieme). Sia A un insieme non vuoto e siano $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ due partizioni di A tali che l'intersezione fra un elemento di una delle due con un elemento dell'altra è sempre un singoletto. Dimostrare che dato $x \in A$ esiste una e una sola coppia $(X_1, X_2) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ e data una coppia esiste uno e un solo x per i quali $X_1 \cap X_2 = \{x\}$. Quindi, se disponiamo gli elementi del prodotto cartesiano $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ in una tabella a due entrate e poi in ogni casella sostituiamo alla coppia (X_1, X_2) l'elemento x così trovato, abbiamo "scomposto in fattori cartesiani" l'insieme A. In un certo senso, i due insiemi A e $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ contengono esattamente la stessa informazione. Passare da A a $\mathcal{F}_1$ fa tener conto esattamente di quella informazione che viene dimenticata se si passa da A a $\mathcal{F}_2$. La disposizione in forma di prodotto ha il vantaggio di esplicitare la *complementarità* dei due tipi di informazione, a prezzo di una maggiore complicazione strutturale (coppie cartesiane di insiemi di elementi invece di semplici elementi).

Esercizio. Nell'esercizio precedente, supponiamo che l'insieme A abbia un numero finito n di elementi, $\mathcal{F}_1$ abbia p elementi e $\mathcal{F}_2$ ne abbia q. Dimostrare che ogni elemento di $\mathcal{F}_1$ ha q elementi, ogni elemento di $\mathcal{F}_2$ ne ha p e che $n = pq$. Così la scomposizione in fattori cartesiani si particolarizza in scomposizione in fattori numerici. (Esercizio non formale; usare anche argomenti non introdotti rigorosamente in questo corso).