La proiezione ortogonale in spazi di Hilbert

(versione 2019-04-08)

Lemma. *Sia H uno spazio di Hilbert, C un convesso non vuoto di H, $x \in H$, $d = \operatorname{dist}(x, C)$ ed $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\Big(y_1, y_2 \in C, \quad \|x - y_1\| < d + \delta, \quad \|x - y_2\| < d + \delta\Big) \quad \Rightarrow \quad \|y_1 - y_2\| < \varepsilon\,.$$

Possiamo prendere per esempio $\delta = \sqrt{d^2 + \varepsilon^2/4} - d$.

Dimostrazione. Si veda la Figura 1 alla pagina seguente. Applichiamo l'identità del parallelogrammo ai due vettori $y_1 - x, y_2 - x$:

$$\begin{aligned} 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 &= \big\|(y_1 - x) - (y_2 - x)\big\|^2 + \big\|(y_1 - x) + (y_2 - x)\big\|^2 = \\ &= \|y_1 - y_2\|^2 + \|y_1 + y_2 - 2x\| = \|y_1 - y_2\|^2 + \left\|2\Big(\frac{y_1 + y_2}{2} - x\Big)\right\|^2 = \\ &= \|y_1 - y_2\|^2 + 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 . \end{aligned}$$

Mettendo in evidenza $\|y_1 - y_2\|^2$:

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 .$$

Il punto $(y_1 + y_2)/2$ è il punto medio fra y_1 e y_2, e si può scrivere della forma $\theta y_1 + (1 - \theta)y_2$ con $\theta = 1/2 \in [0, 1]$. Quindi $(y_1 + y_2)/2 \in C$, perché C è convesso e $y_1, y_2 \in C$. Pertanto per definizione di distanza

$$\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\| \geq \operatorname{dist}(x, C) = d\,.$$

Sia $\delta > 0$ per ora generico e supponiamo che $\|x - y_1\| < d + \delta$ e $\|x - y_2\| < d + \delta$. Risulta

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= 2\underbrace{\|y_1 - x\|}_{<d+\delta}{}^2 + 2\underbrace{\|y_2 - x\|}_{<d+\delta}{}^2 - 4\underbrace{\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|}_{\geq d}{}^2 < \\ &< 2(d + \delta)^2 + 2(d + \delta)^2 - 4d^2 = 4\big((d + \delta)^2 - d^2\big) = 8d\delta + 4\delta^2 . \end{aligned}$$

L'enunciato risulta vero quando $8d\delta + 4\delta^2 \leq \varepsilon^2$, che equivale successivamente a

$$d^2 + 2d\delta + \delta^2 \leq d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \qquad (d + \delta)^2 \leq d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \qquad \text{cioè} \qquad \delta \leq \sqrt{d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}} - d\,.$$

Poiché $\sqrt{d^2 + \varepsilon^2/4} - d > 0$ esistono certamente $\delta > 0$ con la proprietà richiesta, e $\delta = \sqrt{d^2 + \varepsilon^2/4} - d$ è uno di questi. □

La scelta $\delta = \sqrt{d^2 + \varepsilon^2/4} - d$ non è ingrandibile, come si può intuire anche ragionando sui triangoli della figura.

Proposizione. *Sia H uno spazio di Hilbert, $\{u_\lambda \;:\; \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortonormale, M la chiusura del sottospazio vettoriale generato dagli u_λ, ed $x \in H$. Allora la proiezione ortogonale di x su M è data dalla somma (sommabile)*

$$P_M x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, u_\lambda \rangle u_\lambda\,.$$

Dimostrazione. Si veda la Figura 2. Sia $\varepsilon > 0$, $d = \operatorname{dist}(x, M)$, e sia $\delta > 0$ dato dalla proposizione precedente. Dato che $P_M x$ è un elemento di M, esiste una combinazione lineare finita z di vettori del sistema ortonormale che si avvicina a $P_M x$ meno di δ:

$$\big\|P_M x - \underbrace{(a_1 u_{\lambda_1} + \cdots + a_n u_{\lambda_n})}_{=:z}\big\| < \delta.$$

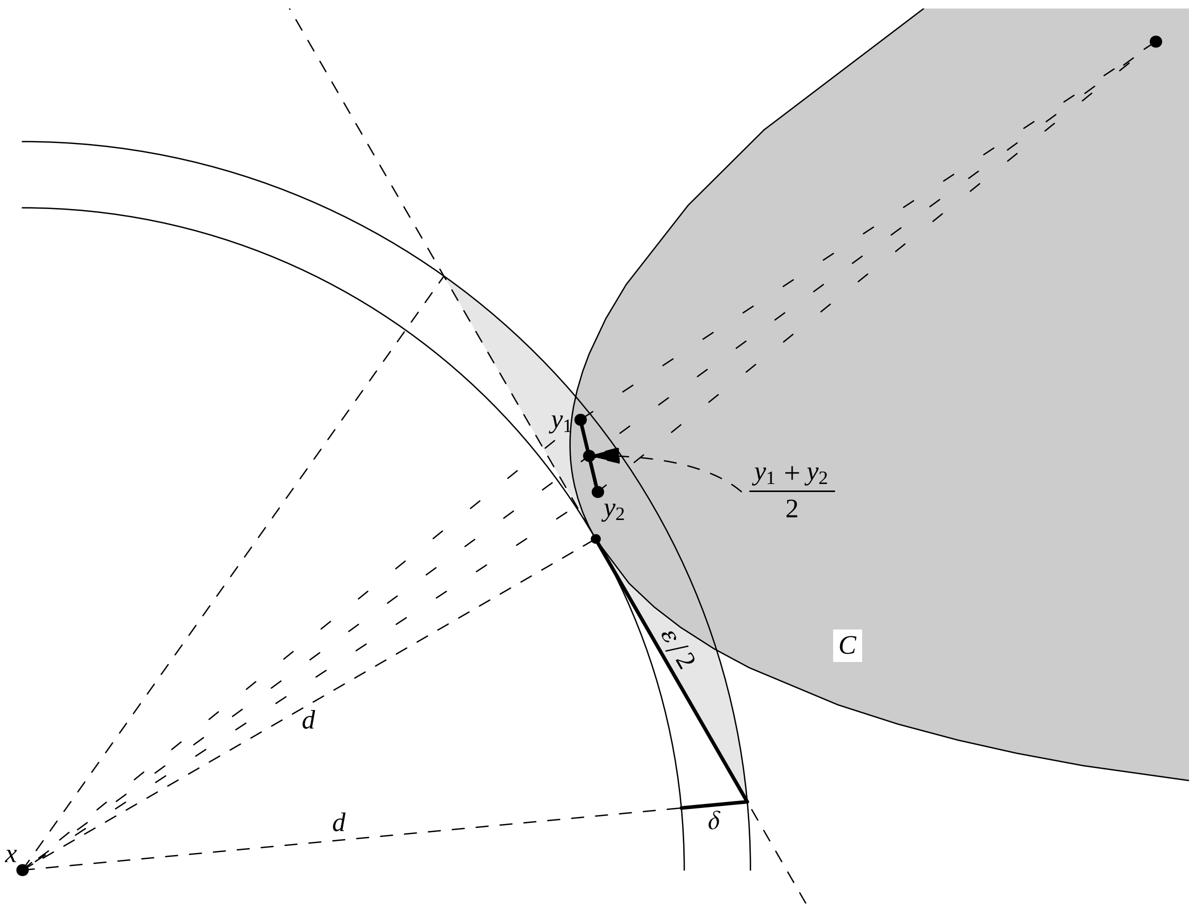

Fig. 1: Lemma sulla distanza da un convesso

Per la disuguaglianza triangolare

$$\|x - z\| \le \|x - P_M x\| + \|P_M x - z\| < d + \delta \,.$$

Poniamo $F_\varepsilon := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, e sia F un insieme finito tale che $F_\varepsilon \subseteq F \subseteq \Lambda$. Sia M_F il sottospazio vettoriale generato da $\{u_\lambda \,:\, \lambda \in F\}$. In particolare $z \in M_F$. La proiezione ortogonale di x su M_F per definizione dista da x non più di quanto ne disti z:

$$\|x - P_{M_F} x\| \le \|x - z\| < d + \delta \,.$$

D'altra parte $\|x - P_M x\| = d < d + \delta$. Per la proposizione precedente allora

$$\|P_M x - P_{M_F} x\| < \varepsilon \,.$$

Essendo $\{u_\lambda \,:\, \lambda \in F\}$ una base ortonormale di M_F, vale la formula della proiezione ortogonale su un sottospazio a dimensione finita:

$$P_{M_F} x = \sum_{\lambda \in F} \langle x, u_\lambda \rangle u_\lambda \,.$$

Abbiamo dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un F_ε finito $\subset \Lambda$ tale che per ogni F finito $\supset F_\varepsilon$ si ha che

$$\left\| P_M x - \sum_{\lambda \in F} \langle x, u_\lambda \rangle u_\lambda \right\| < \varepsilon \,.$$

Per definizione di sommabilità concludiamo che

$$P_M x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, u_\lambda \rangle u_\lambda \,. \qquad \square$$

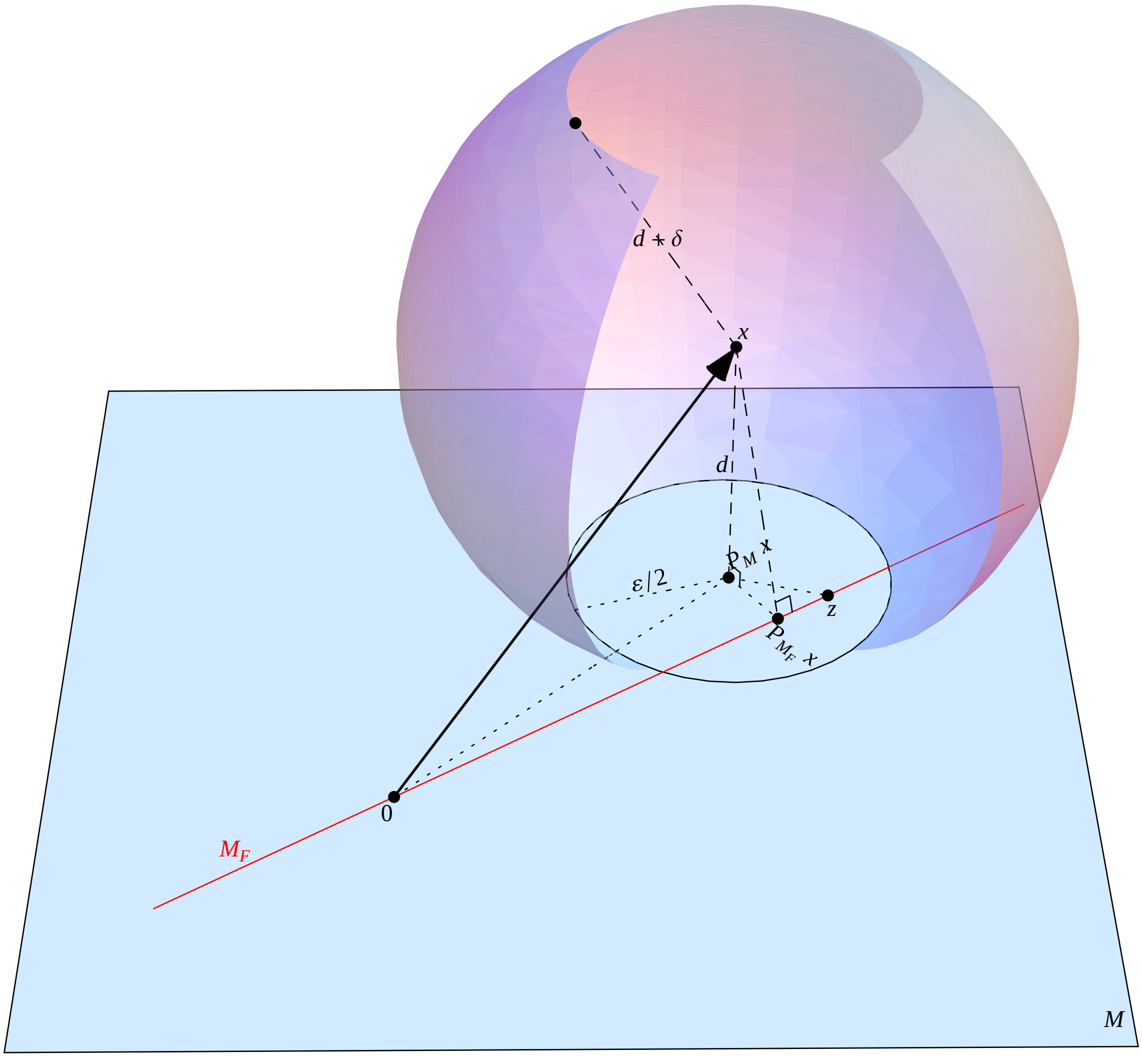

Fig. 2: Proiezione ortogonale di x su M.

Proposizione. *Sia H uno spazio di Hilbert, $\{u_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortonormale, $a \in \ell^2(\Lambda)$. Allora la somma*

$$x := \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda u_\lambda$$

è sommabile e per ogni λ si ha $a_\lambda = \langle x, u_\lambda\rangle$.

Dimostrazione. La somma è sommabile perché i vettori sono a due a due ortogonali e

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda u_\lambda\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda|^2 = \int_\Lambda |a|^2 \, d\# = \|a\|^2_{\ell^2} < +\infty \,.$$

Sia x la somma e $\lambda_0 \in \Lambda$. L'applicazione $A\colon H \to \mathbb{C}$ definita da $Az = \langle z, u_{\lambda_0}\rangle$ è lineare e continua. Quindi conserva la sommabilità:

$$\langle x, u_{\lambda_0}\rangle = Ax = A \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda u_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda A u_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \langle u_\lambda, u_{\lambda_0}\rangle \,.$$

Quest'ultima somma infinita ha addendi tutti nulli tranne forse quello con $\lambda = \lambda_0$, per cui

$$\langle x, u_{\lambda_0}\rangle = a_{\lambda_0} \cdot 1 = a_{\lambda_0} \,.$$

□

Proposizione (Teorema “di Pitagora” per infiniti vettori). *Sia H uno spazio con prodotto scalare, $\{u_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortogonale sommabile con somma $s \in H$. Allora*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \|u_\lambda\|^2 = \|s\|^2.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per definizione di sommabilità, esiste F_ε sottinsieme finito di Λ tale che per ogni F finito tale che $F_\varepsilon \subseteq F \subseteq \Lambda$ abbiamo

$$\Big\| s - \sum_{\lambda\in F} u_\lambda \Big\| < \varepsilon.$$

Poiché gli u_λ sono a due a due ortogonali, vale il teorema di Pitagora in versione finita:

$$\Big\| \sum_{\lambda\in F} u_\lambda \Big\|^2 = \sum_{\lambda\in F} \|u_\lambda\|^2.$$

Usiamo questo, il prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ e la disuguaglianza $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$:

$$\begin{aligned}
\Big| \|s\|^2 - \sum_{\lambda\in F} \|u_\lambda\|^2 \Big| &= \Big| \|s\|^2 - \Big\| \sum_{\lambda\in F} u_\lambda \Big\|^2 \Big| = \\
&= \Big| \|s\| - \Big\| \sum_{\lambda\in F} u_\lambda \Big\| \Big| \cdot \Big(\|s\| + \Big\| \sum_{\lambda\in F} u_\lambda \Big\| \Big) \le \\
&\le \underbrace{\Big| s - \sum_{\lambda\in F} u_\lambda \Big\|}_{<\varepsilon} \cdot \Big(\|s\| + \underbrace{\Big\| \sum_{\lambda\in F} u_\lambda - s \Big\|}_{<\varepsilon} + \|s\| \Big) \le \\
&\le \varepsilon\big(2\|s\| + \varepsilon\big).
\end{aligned}$$

Poiché l’ultimo membro tende a zero per $\varepsilon \to 0^+$, per definizione di sommabilità concludiamo che

$$\|s\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} \|u_\lambda\|^2.$$

□