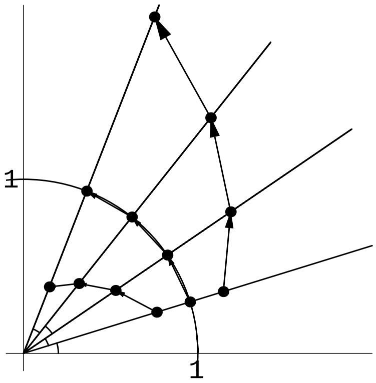
# La potenza ennesima complessa

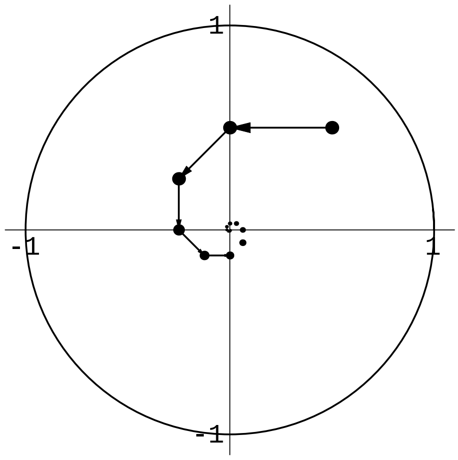
La successione $n \mapsto z^n$ con $z \in \mathbb{C}$ si interpreta facilmente se si scrive $z$ in forma esponenziale (o goniometrica): se $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ allora

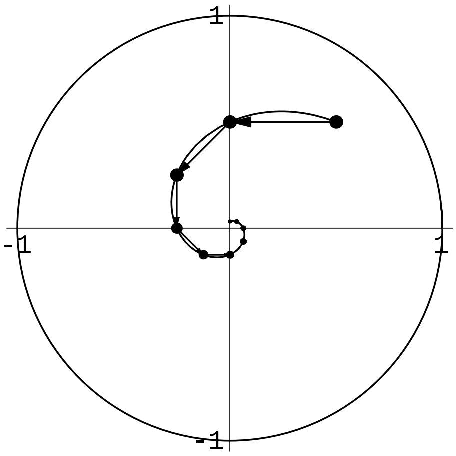



$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho\big(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)\big)\,.$$

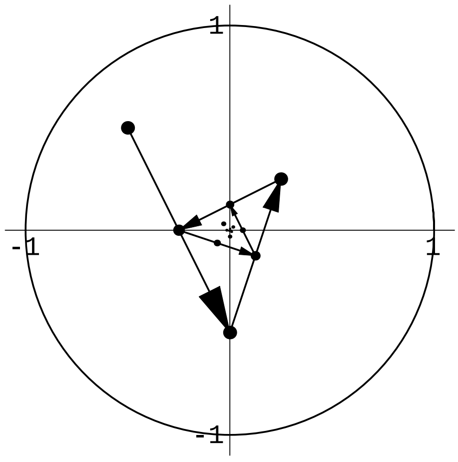
Passare da $z^n$ a $z^{n+1}$ vuol dire ruotare il vettore di un angolo $\theta$ e moltiplicarne il modulo per $\rho$. Se $0 < \rho < 1$ a ogni passo il modulo decresce; per esempio se $\rho = 0,8$ il modulo cala del 20% a ogni passo. Se invece $\rho > 1$ il modulo cresce; se per esempio $\rho = 1,2$ l'aumento è del 20%. Se $\rho = 0$ oppure $\rho = 1$ il modulo di $z^n$ è costante. In figura ci sono i valori di $z, z^2, z^3, z^4$, dove $z = \rho e^{0,3i}$ e i tre casi $\rho = 0,8$, $\rho = 1$ e $\rho = 1,2$. Il cerchio goniometrico è messo in evidenza perché separa l'insieme dei punti $z$ per i quali $|z^n|$ decresce (i punti all'interno del cerchio) da quello per i quali cresce (i punti esterni). Se la successione parte dal cerchio goniometrico ci rimane per sempre.

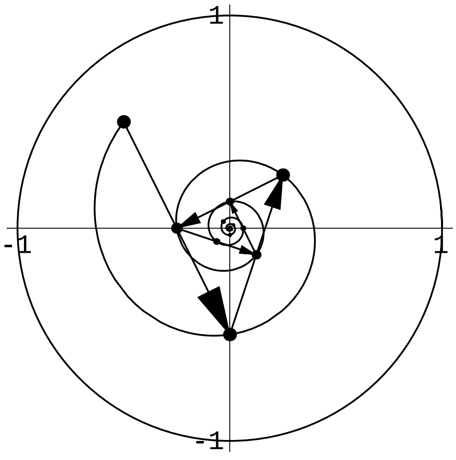
Le figure seguenti mostrano il comportamento della successione $n \mapsto z^n$ più a lungo termine: a sinistra sono mostrati solo i punti della successione, con alcune frecce che ne indicano l'andamento, mentre a destra i punti sono collegati fra loro dal grafico della spirale $t \mapsto z^t$, $t \in \mathbb{R}$. Cominciamo col punto iniziale $z = (1+i)/2$:



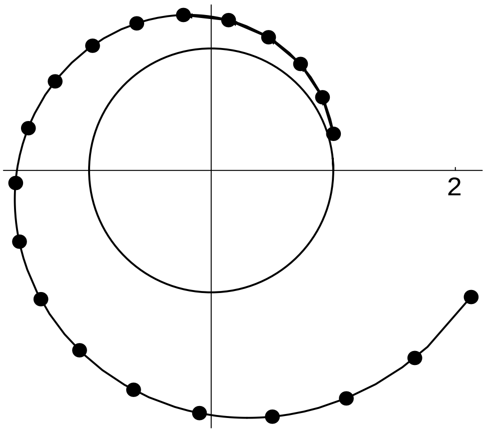

Il caso di $z = (-1+i)/2$ mostra una spirale più aggraziata:

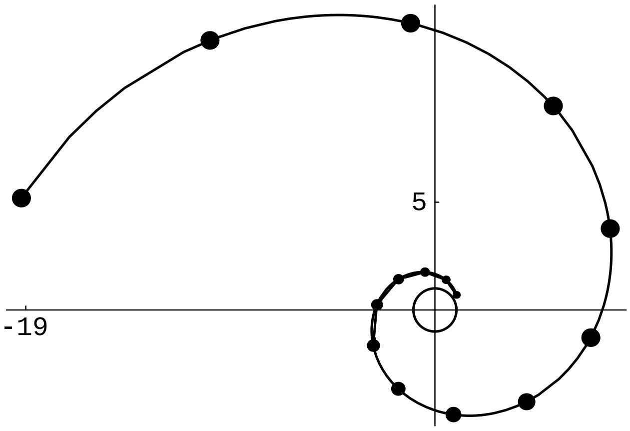



Volendo ci si può rendere ragione del perché alcune frecce del caso $z = (-1+i)/2$ sembrano puntare esattamente a metà di frecce più grandi.

I due grafici seguenti corrispondono a valori iniziali *esterni* al cerchio goniometrico: $z = 1 + 0,3i$ e $z = 0,7i$.




## Studio della convergenza

**I casi $z = 0$ e $z = 1$.**

Se $z = 0$ la successione $z^n$ è costantemente nulla, e quindi converge a 0. Se $z = 1$ è costantemente uguale a 1 e pertanto tende a 1.

**Il caso $0 < |z| < 1$.**

Un modo elementare, anche se non velocissimo, di studiare la convergenza di $z^n$ quando $0 < |z| < 1$ è quello di confrontare $|z^n|$ con la successione "reciproco" $c/n$: in effetti dimostreremo che

$$\text{esistono } c > 0 \text{ e } m_0 \in \mathbb{N} \text{ tali che } |z^n| \leq \frac{c}{n} \text{ per tutti gli } n \geq m_0.$$

Che proprietà devono avere tali $c$ ed $m$? Innanzitutto la disuguaglianza $|z^n| < c/n$ deve valere per $n = m$, e quindi bisogna che

$$|z^{m_0}| < \frac{c}{m_0}\,.$$

Inoltre bisogna che la disuguaglianza sia induttiva almeno da qualche indice in poi, cioè che ogniqualvolta è vera per un $n$ abbastanza grande sia vera anche per $n + 1$:

$$|z^n| \leq \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad |z^{n+1}| \leq \frac{c}{n+1}\,.$$

Supponiamo dunque che $|z^n| \leq c/n$. Possiamo scrivere, usando le proprietà del valore assoluto dei numeri complessi e l'ipotesi induttiva:

$$|z^{n+1}| = |z^n| \cdot |z| \leq \frac{c}{n} \cdot |z|\,.$$

Se l'ultimo membro fosse minore o uguale a $c/(n+1)$ lo sarebbe anche il primo (non è detto il viceversa, ma non importa). La condizione perché questo succeda è che

$$\frac{c}{n} \cdot |z| \leq \frac{c}{n+1}\,.$$

Questa è una disequazione in $c$ ed $n$ che si risolve subito, ricordando che $c > 0$ e che $|z| < 1$ e quindi $1 - |z| > 0$:

$$\frac{c}{n} \cdot |z| \leq \frac{c}{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad n|z| + |z| \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad |z| \leq n(1 - |z|) \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{|z|}{1 - |z|}\,.$$

Dunque la nostra disuguaglianza è induttiva dal valore $|z|/(1-|z|)$ in poi. Mettendo insieme questo risultato con la condizione già trovata prima, otteniamo che la proposizione da dimostrare è vera se prendiamo

$$m_0 = \left\lceil \frac{|z|}{1-|z|} \right\rceil \qquad \text{e} \qquad c = m_0 |z^{m_0}| \,.$$

Verifichiamo infine che $z^n \to 0$ usando la definizione:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m(\varepsilon) := \max\Bigl\{m_0, \frac{c}{\varepsilon}\Bigr\} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m(\varepsilon) \qquad |z^n| \leq \frac{c}{n} \leq \frac{c}{c/\varepsilon} = \varepsilon \,.$$

**Il caso $|z| > 1$.**

Quando $|z| > 1$ ci si riporta subito al caso interno al cerchio goniometrico notando che $z^n = 1/(1/z^n)$ e che $1/|z| < 1$. Poiché sappiamo che $1/z^n = (1/z)^n \to 0$, cioè che

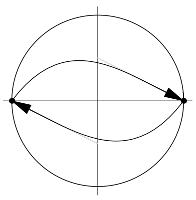
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m(\varepsilon) \qquad \left|\frac{1}{z^n}\right| \leq \varepsilon \,,$$

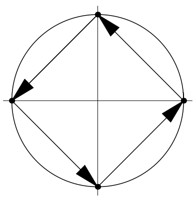
possiamo dimostrare che $z^n \to \infty$ usando la definizione di limite infinito:

$$\forall M > 0 \quad \exists \tilde{m}(M) := m(1/M) \quad \forall n \geq \tilde{m}(M) \qquad |z^n| = \frac{1}{|1/z^n|} \geq \frac{1}{1/M} = M \,.$$

È comunque un fatto generale che se $a_n \neq 0$ definitivamente e $a_n \to 0$, allora $1/a_n \to \infty$.

**Il caso $|z| = 1$, $z \neq 1$.**





Il caso spinoso è quello della successione che parte (e resta) sul cerchio goniometrico, con l'unica eccezione di $z = 1$, quando la successione è costante. Alcuni esempi facili sono $z = -1$ e $z = i$:

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari;} \end{cases} \qquad i^n = \begin{cases} i & \text{se } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1 & \text{se } n \equiv 2 \pmod 4, \\ -i & \text{se } n \equiv 3 \pmod 4, \\ 1 & \text{se } n \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Qui la successione è *ciclica*, o *periodica*, e non è difficile dimostrare che una successione che assuma infinite volte un valore e infinite volte un altro diverso non può né convergere né divergere, cioè la successione è *oscillante*. Con questo ragionamento si mostra che sono oscillanti tutte le successioni del tipo $n \to z^n$ se $z = e^{2\pi r i}$ dove $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Ma questo non esaurisce tutti i possibili casi di $z$ sul cerchio goniometrico: mancano i $z$ della forma $z = e^{i\theta}$ con $\theta$ un multiplo irrazionale di $\pi$.

Procediamo allora alla dimostrazione generale che *se $|z| = 1$, con $z \neq 1$, allora $n \to z^n$ è oscillante.* Poiché $|z^n| = |z|^n = 1^n = 1$, la successione non può essere né infinitesima né divergente. Dobbiamo dimostrare che non può avere limite finito $L \neq 0$. Poniamo dunque

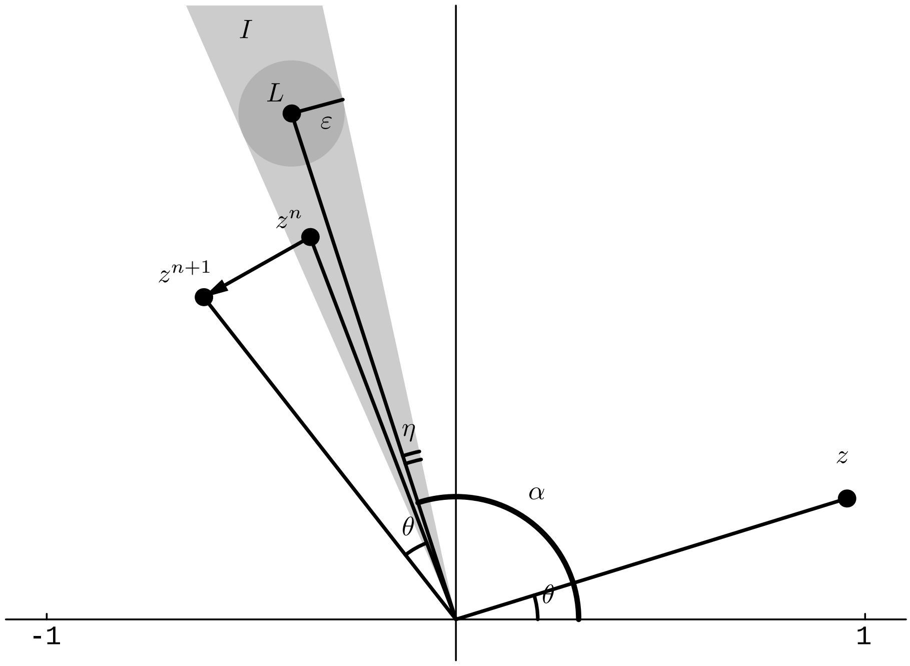
$$z = e^{i\theta} \qquad \text{con } 0 < \theta < 2\pi, \qquad L = |L|e^{i\alpha} \qquad \text{con } |L| > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo intenzione di dimostrare che

$$\text{se } \varepsilon > 0 \text{ è abbastanza piccolo, allora} \qquad |z^n - L| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |z^{n+1} - L| > \varepsilon \,.$$

Questo implica che esistono degli $\varepsilon > 0$ per i quali la proposizione '$|z^n - L| \leq \varepsilon$' non è induttiva, e quindi non può essere definitivamente vera.

Si può seguire l'argomentazione sulla figura della pagina seguente, non dimenticando però che quella mette per esempio $z$ nel primo quadrante ed $L$ nel secondo, mentre i calcoli non devono dipendere da una tale scelta.




Sia dunque $\varepsilon > 0$ e consideriamo il disco di centro $L$ e raggio $\varepsilon > 0$, e supponiamo che non contenga l'origine (cioè $\varepsilon < |L|$). Invece che sul disco stesso, qui conviene ragionare sull'angolo sotto cui l'origine vede il disco: sia $\operatorname{sen}\eta = \varepsilon/|L|$). Consideriamo il settore

$$I := \big\{\rho e^{i\varphi} \ :\ \rho \geq 0,\ \alpha - \eta \leq \varphi \leq \alpha + \eta\big\}\,.$$

Questo $I$ è, fra l'altro, un intorno di $L$. Dimostriamo che

$$\text{se } \eta > 0 \text{ è abbastanza piccolo, allora} \qquad z^n \in I \quad\Rightarrow\quad z^{n+1} \notin I\,.$$

Questo fatto basterà ai nostri fini, perché $|w - L| \leq \varepsilon \Rightarrow w \in I$, e quindi

$$|z^n - L| \leq \varepsilon \quad\Rightarrow\quad z^n \in I \quad\Rightarrow\quad z^{n+1} \notin I \quad\Rightarrow\quad |z^{n+1} - L| > \varepsilon\,.$$

La condizione $w \in I$ si traduce goniometricamente in

$$\rho e^{i\varphi} \in I \qquad\Longleftrightarrow\qquad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \varphi \in H_k := \big[\alpha + 2k\pi - \eta, \alpha + 2k\pi + \eta\big]\,.$$

Poiché $z^n = e^{in\theta}$, si ha

$$z^n \in I \qquad\Longleftrightarrow\qquad \exists k_0 \in \mathbb{Z} \quad n\theta \in H_{k_0}\,.$$

Supponiamo dunque che $z^n \in I$, cioè che esista un $k_0 \in \mathbb{Z}$ tale che $n\theta$ stia nell'intervallo $H_{k_0}$. Poiché $H_{k_0}$ è lungo esattamente $2\eta$, non gli possono appartenere contemporaneamente i due punti $n\theta$ e $(n+1)\theta$ qualora $\theta$, che è la distanza fra i due, superi $2\eta$:

$$\theta > 2\eta \quad\Rightarrow\quad (n+1)\theta \notin H_{k_0}\,.$$

D'altra parte, $(n+1)\theta$ non può nemmeno trovarsi in un $H_k$ con $k > k_0$ se $\theta$ è minore della distanza che separa un intervallo dal successivo, distanza che nel nostro caso è $2\pi - 2\eta$:

$$0 < \theta < 2\pi - 2\eta \quad\Rightarrow\quad (n+1)\theta < \alpha + 2(k_0+1)\pi - \eta \quad\Rightarrow\quad (n+1)\theta \notin H_{k_0+1}\,.$$

Quando entrambe le condizioni $\theta > 2\eta$ e $\theta < 2\pi - 2\eta$ sono verificate, allora si ha che $\alpha + 2k_0\pi + \eta < (n+1)\theta < \alpha + 2(k_0+1)\pi - \eta$, e di conseguenza $z^{n+1} \notin I$. Esprimendo le due condizioni in termini di $\eta$ anziché di $\theta$, si ha che

$$\eta < \min\Big\{\frac{\theta}{2}, \pi - \frac{\theta}{2}\Big\} \quad\Rightarrow\quad z^{n+1} \notin I\,,$$

che è quanto ci eravamo proposti di dimostrare.

Le condizioni su $\eta$ che abbiamo trovato vengono perfettamente naturali osservando la figura: chiedere che $\theta > 2\eta$ vuol dire far uscire $z^{n+1}$ dal settore $I$ verso sinistra, e aggiungere che $\theta < 2\pi - 2\eta$ assicura che quello che avevamo cacciato da sinistra non rientri da destra dopo aver fatto quasi un giro.

**Il caso non ciclico di $|z| = 1$.**

Abbiamo visto che la successione $a_n := z^n$ è ciclica quando $z = -1$ e quando $z = i$. In generale la successione è ciclica quando $z = e^{2\pi r i}$, con $r$ un numero *razionale*. Infatti se $r = p/q$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, la successione si ripete ogni $q$ termini:

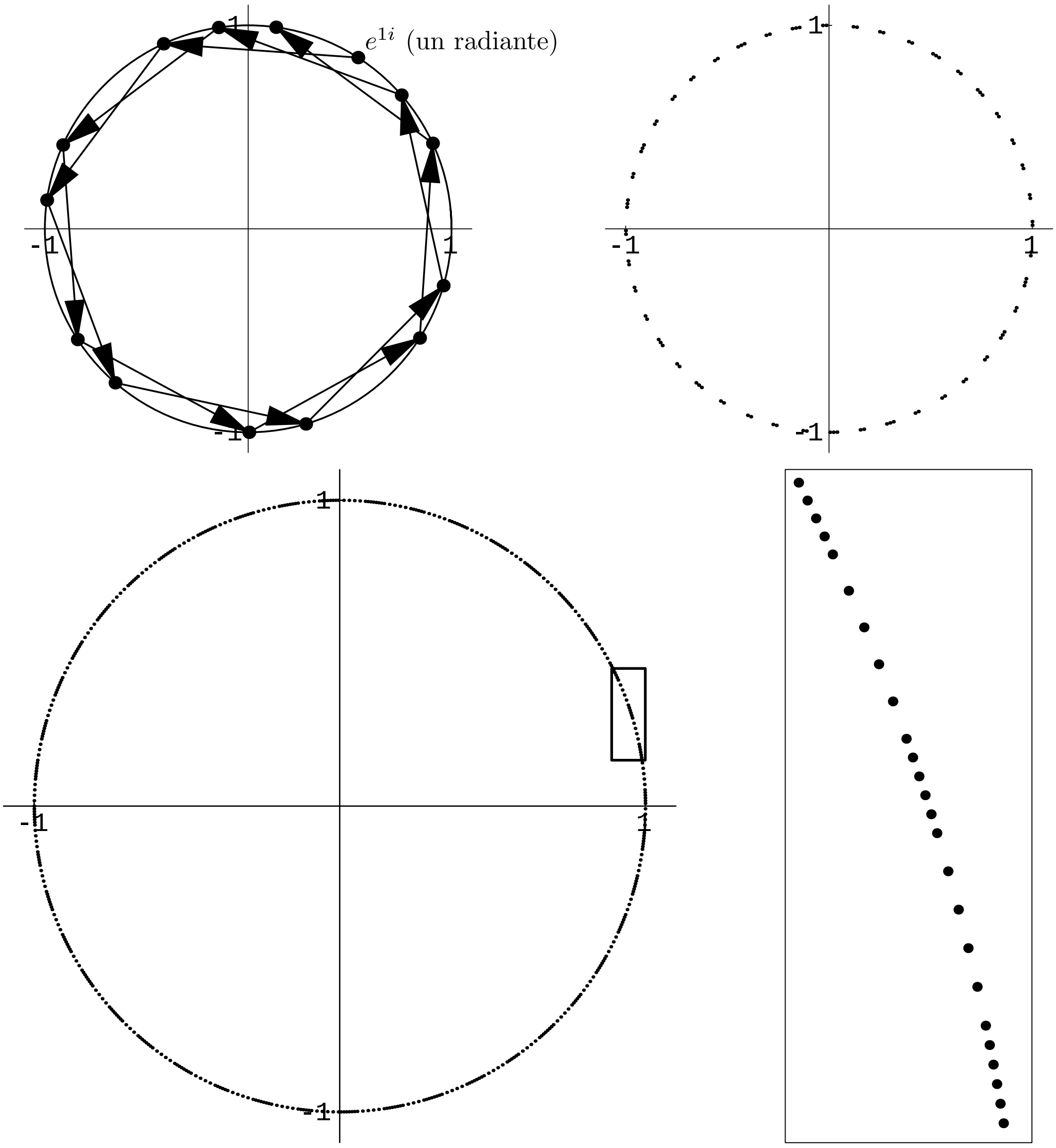
$$a_{n+q} = z^{n+q} = z^n z^q = z^n (e^{2\pi r i})^q = z^n e^{(2\pi p i/q)q} = z^n e^{2\pi p i} = z^n \cdot 1 = z^n = a_n\,.$$

Se invece $z = e^{2\pi r i}$ con $r$ un numero *irrazionale*, allora la successione non prende mai due volte lo stesso valore (è iniettiva). Supponiamo infatti che esistano $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ tali che $z^n = z^m$. Allora:

$$e^{2\pi r n i} = e^{2\pi r m i} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad 2\pi r n - 2\pi r m = 2\pi k \iff r(n-m) = k \iff$$

$$\iff r = \frac{k}{n-m} \in \mathbb{Q}, \text{ contro l'ipotesi che } r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,.$$

Prendiamo l'esempio $z = e^i = e^{2\pi r i}$ con $r = 1/(2\pi)$. Poiché $\pi$ è un numero irrazionale (la dimostrazione di questo fatto non è semplicissima), rientriamo nel caso iniettivo. Delle figure seguenti la prima mostra l'andamento dei primi 14 termini, con indicato l'ordine, la seconda e la terza mostrano rispettivamente i primi cento e i primi cinquecento termini, senza mostrare l'ordine, e la quarta è uno zoom del rettangolino della terza.



Le figure ci mostrano che la successione si sparpaglia abbastanza fittamente sul cerchio. Ci sono zone con maggiore o minore densità di punti, ma parrebbe che, all'aumentare del numero di punti, per notare la disomogeneità bisogna andare a guardare sempre più in dettaglio.

Una prima domanda che può venire alla mente è: *forse che tutti i punti del cerchio vengono raggiunti dalla successione?* La risposta a una domanda così ingenua è ovviamente *no*, perché i punti della successione formano un insieme numerabile, mentre quelli del cerchio sono più che numerabili. Risulta vero invece il seguente enunciato un poco più complicato:

**Proposizione.** *Se $z = e^{2\pi ri}$ con $r$ irrazionale, allora l'insieme $\{z^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è denso nel cerchio $C := \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w| = 1\}$, ossia per ogni $w \in C$ e per ogni intorno $I$ di $w$ in $\mathbb{C}$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $z^n \in I$.*

Invece di dare la dimostrazione per disteso della proposizione, e di suoi corollari, daremo solo una traccia, lasciando i dettagli come esercizio.

**Lemma.** *Sia $(G,+)$ un sottogruppo di $(\mathbb{R},+)$, ossia $G \subset \mathbb{R}$, $0 \in G$, $x \in G \Rightarrow -x \in G$, $x,y \in G \Rightarrow x+y \in G$. Allora può capitare uno e uno solo dei due seguenti casi:*

*1) $G$ è discreto: più precisamente è l'insieme di tutti e soli i multipli interi di un certo numero $\rho \in \mathbb{R}$ (si usa scrivere $G = \rho\mathbb{Z}$);*

*2) $G$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè fra qualsiasi due punti distinti di $\mathbb{R}$ c'è almeno un punto di $G$.*

**Avvio.** Il sottogruppo banale $G = \{0\}$ è discreto. Altrimenti considerare $\rho := \inf\{x \in G \ : \ x > 0\}$ e dimostrare che se $\rho = 0$ il sottogruppo è denso e se $\rho > 0$ è discreto.

**Lemma.** *Dato $r \in \mathbb{R}$, l'insieme $G_r := \{2\pi(nr + m) \ : \ n,m \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{R},+)$, ed è discreto se $r$ è razionale e denso se $r$ è irrazionale.*

**Lemma.** *Se $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $p \in \mathbb{Z}$, $p > 0$, $q \in \mathbb{Z}$ tali che $0 \neq |2\pi(pr + q)| < \varepsilon$.*

**Lemma.** *Se $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ tali che $|2\pi(nr + m) - \alpha| < \varepsilon$.*

**Avvio.** Se $\alpha$ e il $2\pi(pr+q)$ del lemma precedente hanno lo stesso segno, basterà prendere per $2\pi(nr+m)$ un opportuno multiplo intero positivo di $2\pi(pr + q)$. Se i segni sono opposti, aggiungere prima ad $\alpha$ un multiplo intero di $2\pi$ in modo da avere lo stesso segno.

**Lemma.** *Sia $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $z = e^{2\pi ri}$. Allora per ogni $w \in \mathbb{C}$ tale che $|w| = 1$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $|w - z^n| < \varepsilon$.*

**Avvio.** Usare il fatto che la funzione $t \mapsto e^{ti}$ è continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ (anzi, è lipschitziana: basta scrivere $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ e ricordare che sen e cos sono lipschitziane).

**Corollario.** *Sia $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $z = e^{2\pi ri}$. Allora per ogni $w \in \mathbb{C}$ tale che $|w| = 1$ possiamo estrarre una sottosuccessione di $n \mapsto z^n$ che converge a $w$.*

**Avvio.** Sapendo già che ci si può avvicinare a piacere a $w$ con termini della successione, bisogna solo fare in modo che gli indici siano crescenti: $n_k < n_{k+1}$.

**Corollario.** *Per ogni $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$, esiste una sottosuccessione di $n \mapsto e^{ni}$ convergente verso $w$. Inoltre per ogni $x \in [-1,1]$ esiste una sottosuccessione di $n \mapsto \operatorname{sen} n$ e una di $n \mapsto \cos n$ convergenti verso $x$.*

La figura qui sotto mostra i primi cinquecento termini della successione $n \mapsto \cos n$, che è la proiezione sull'asse $x$ della successione complessa $n \mapsto e^{ni}$. Come afferma il corollario precedente, la successione $\cos n$ è densa in $[-1,1]$. È anche iniettiva?