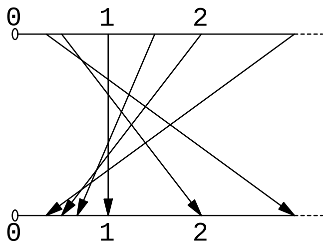
Patologia dei limiti

1. Il seno di “uno su ics”.

La funzione

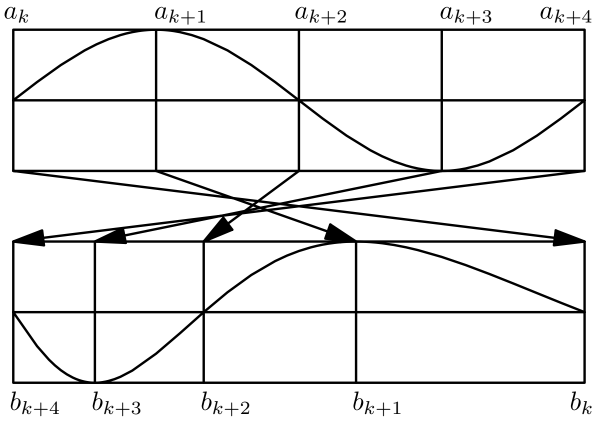
$$f(x) := \operatorname{sen}\frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0$$

è la più classica funzione “patologica” nel suo comportamento per $x \to 0^+$. Vediamo di studiarla brevemente.

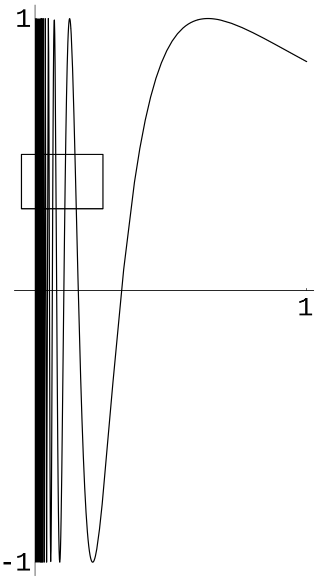


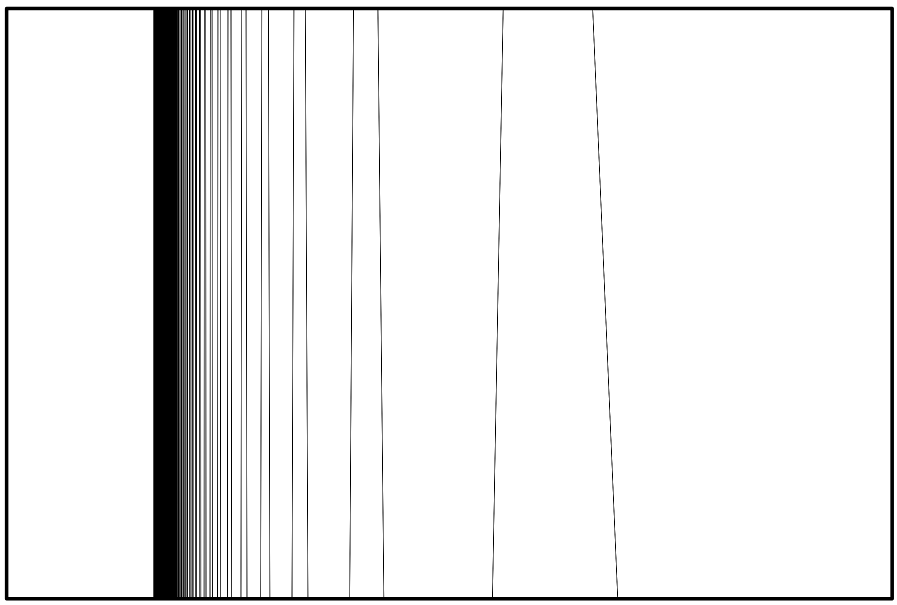
Una prima osservazione che viene gratis è che la f è composizione di due funzioni (la $x \mapsto 1/x$ per $x > 0$ e la $y \mapsto \operatorname{sen} y$ per $y \in \mathbb{R}$) entrambe le quali sono continue sul loro dominio e anche derivabili infinite volte. Quindi anche la funzione f è continua e derivabile sul suo dominio.

La prossima cosa che conviene notare è che la funzione $x \mapsto 1/x$ dalla semiretta $\mathbb{R}_+$ in sé è strettamente decrescente, cioè è invertibile e rovescia l'ordine sulla semiretta. I punti x molto grandi vengono trasformati in punti $1/x$ molto piccoli e viceversa. La prima figura vuole visualizzare l'azione della $x \mapsto 1/x$ per $0 < x < 3$.



La seconda figura fa vedere come la composizione con la funzione $x \mapsto 1/x$ deforma il grafico del seno: oltre al ribaltamento dell'ordine, c'è uno stiramento non uniforme in direzione orizzontale, mentre le distanze verticali rimangono invariate. (Le scale sopra e sotto sono diverse: un intervallo che cominci a destra di 1 viene compresso, come vedremo). I punti cruciali del grafico del seno $a_k := k\pi/2$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vengono trasformati nei loro reciproci $b_k := 1/a_k = 2/k\pi$. Trasportando le conoscenze che abbiamo sul grafico del seno possiamo dire che f si annulla nei punti b_k con k pari, vale 1 in b_k con $k \equiv 1 \pmod 4$, vale -1 quando $k \equiv 3 \pmod 4$, è strettamente decrescente negli intervalli del tipo $[b_{k+1}, b_{k-1}]$ ed è strettamente crescente negli intervalli del tipo $[b_{k+3}, b_{k+1}]$ con $k \equiv 0 \pmod 4$. Le infinite oscillazioni che il seno ha fra $\pi/2$ e $+\infty$ vengono schiacciate in modo da farle stare fra 0 e $2/\pi$. La prima delle due figure seguenti mostra il grafico di f su $[0, 1]$ e la seconda è uno zoom del rettangolino.





A scanso di equivoci, le righe verticali che si vedono nell'ingrandimento non sono esattamente verticali, anzi, non sono a rigore neanche delle linee rette, anche se agli effetti dell'occhio la differenza non si nota. La zona nera va immaginata come composta da infinite fittissime righe quasi verticali, non separabili una dall'altra se non con microscopi sempre più potenti via via che ci si avvicina all'asse delle ordinate.

Che cos'ha di patologico la funzione $x \mapsto \operatorname{sen}(1/x)$? Beh, solo il fatto che non ha limite per $x \to 0^+$, e quindi, pur essendo limitata (compresa fra -1 e 1), non si può estendere a una funzione continua definita su $[0, +\infty[$. Di certo ci sono molte altre funzioni con questa proprietà, ma questa ha il vantaggio storico di essere una "funzione elementare" e di essere la più semplice fra queste ad esibire la patologia.

Verifichiamo per scrupolo che il limite non esiste: poiché lo 0 è punto di accumulazione per il dominio, se il limite esiste, è necessariamente unico. D'altra parte le due sottosuccessioni $k \mapsto b_{4k+1}$ e $k \mapsto b_{4k+3}$ tendono entrambe a 0^+ per $k \to +\infty$ ma lungo di esse la funzione ha limiti diversi:

$$b_{4k+1} = \frac{2}{(4k+1)\pi} \to 0^+ \qquad \text{e} \qquad f(b_{4k+1}) = \operatorname{sen}\frac{1}{b_{4k+1}} = \operatorname{sen}\Bigl(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\Bigr) \equiv +1 \to +1\,,$$

$$b_{4k+3} = \frac{2}{(4k+3)\pi} \to 0^+ \qquad \text{e} \qquad f(b_{4k+3}) = \operatorname{sen}\frac{1}{b_{4k+3}} = \operatorname{sen}\Bigl(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\Bigr) \equiv -1 \to -1\,.$$

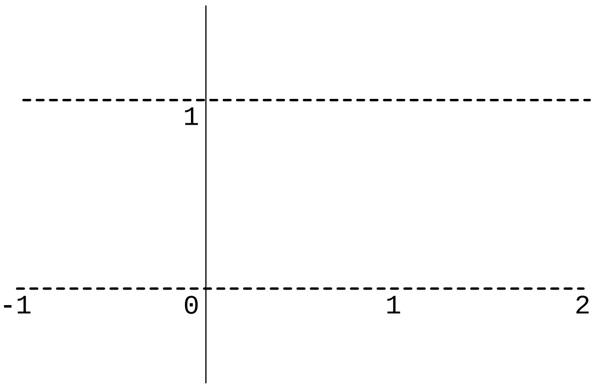
A ben guardare, la non esistenza del $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(1/x)$ si ottiene semplicemente dalla non esistenza del $\lim_{y\to+\infty} \operatorname{sen} y$ col cambio di variabile $y = 1/x$, che trasforma $y \to +\infty$ in $x \to 0^+$. Fra tutti i cambi di variabile che hanno tale effetto, questo sembra il più elementare, ma ce ne sono altri, come per esempio $y = -\ln x$.

Esercizio. La composizione con $x \mapsto 1/x$ come deforma la parte del grafico del seno su $]0, 2\pi]$? Com'è il limite di $\operatorname{sen}(1/x)$ per $x \to +\infty$?

Esercizio. Com'è il limite di $(1/x)\operatorname{sen}(1/x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$?

Esercizio. Studiare i limiti in 0^+ e a $+\infty$ della funzione $g\colon x \mapsto \operatorname{sen}\ln x$, $x > 0$. Notare che se poniamo $\lambda = e^{2\pi}$ si ha $g(\lambda x) = g(x)$ per ogni $x > 0$. Questo vuol dire che esiste un cambiamento di scala sull'asse x che manda il grafico di g in se stesso. Esiste un λ con questa proprietà per la funzione $x \mapsto \operatorname{sen}(1/x)$?

2. La funzione di Dirichlet.



Un'altra funzione "malata" che è di rigore presentare quando si trattano i limiti è la funzione che prende il nome dal matematico tedesco Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) (in Italia il nome è pronunciato alla francese). La definizione è la seguente:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(È irrilevante ai nostri fini che i valori siano proprio 0 e 1; basta che siano diversi fra loro). Giacché sia i razionali che gli irrazionali sono densi fra i reali, il grafico di f contiene infiniti punti densi sull'asse x e infiniti punti densi sulla retta $y = 1$. Ogni rappresentazione grafica di quest'idea è inadeguata, ma ci abbiamo provato disegnando le due rette tratteggiate, facendo il possibile che i trattini su una delle due rette corrispondano in verticale a interstizi dell'altra.

La peculiarità della funzione di Dirichlet è che non ammette limite in nessun punto x_0 di $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Infatti esistono sempre una successione $n \mapsto a_n$ di numeri razionali e una successione $n \mapsto b_n$ di irrazionali che entrambe tendono a x_0, però $f(a_n)$ è costantemente 1 e $f(b_n)$ è costantemente 0.

Esercizio. La funzione di Dirichlet non ha nemmeno limiti destri e sinistri.

Esercizio. Discutere l'esistenza dei limiti delle funzioni

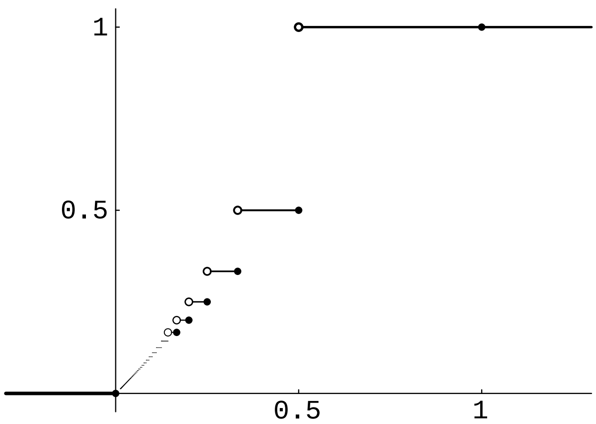
$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad h(x) := \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad k(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1/x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

3. Una gradinata infinita.

Dovrebbe essere ben noto che la funzione "parte intera" $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ha un grafico a scalinata, con discontinuità di tipo salto in ogni punto di ascissa intera. Componendo a sinistra o a destra, o da entrambe le parti, con altre funzioni possiamo produrre scalinate di forme bizzarre. L'esempio che illustriamo qui è

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & \text{se } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{se } x \le 0, \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Notare che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ perché $\lfloor 1/x \rfloor$ esiste ed è diverso da 0 quando $1/x$ è o < 0 o ≥ 1, cioè quando o $x < 0$ o $0 < x \le 1$. Lasciamo alle lettrici scoprire cosa succederebbe se definissimo la $f(x)$ come $1/\lfloor 1/x \rfloor$ anche per $x < 0$.



Quando $0 < x \le 1$ il reciproco $1/x$ è ≥ 1 e la sua parte intera prende solo valori interi positivi. Vediamo dove li assume:

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \iff$$
$$n \le \frac{1}{x} < n+1 \iff \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}\,.$$

Dunque su ogni intervallo del tipo $]1/(n+1), 1/n]$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la f è costante e vale $1/n$. Nei punti della forma $1/n$ con $n > 1$ c'è una discontinuità di tipo salto: la funzione a destra vale $1/n$ e a sinistra $1/(n+1)$. Per $n = 1$ invece non c'è discontinuità perché sia a sinistra che nel punto che a destra (per come è definita per $x > 1$) la funzione vale 1.

La parziale patologia della f sta nel fatto che *in ogni intorno di 0 ha infiniti punti di discontinuità* (quelli del tipo $1/n$ con $n > 1$), *ma nello* 0 *stesso la funzione è continua.* Possiamo verificare quest'ultima affermazione per esempio usando la disuguaglianza della parte intera $y - 1 < \lfloor y \rfloor \le y$, che, applicata al nostro caso, dà (sempre per $0 < x \le 1$):

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \le \frac{1}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \le f(x) < \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{x}{1-x}\,.$$

(Nonostante quanto parrebbe a occhio, le estremità sinistre dei segmentini della figura *non* sono allineate su una retta, ma sono situate sul grafico di $y = x/(1-x)$). Usando il teorema dei carabinieri abbiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0^+} x/(1-x) = 0 = f(0)$. Il limite da sinistra è ovviamente 0, per cui la f è continua in 0.

Esercizio. La f è monotona ed è continua a sinistra in ogni punto.

Esercizio. Studiare limiti e continuità della funzione $x \mapsto \lfloor \operatorname{sen}(1/x) \rfloor$.

***Esercizio.** Studiare limiti e continuità della funzione $x \mapsto \operatorname{sen}\lfloor 1/x \rfloor$. (Usare quanto si sa della successione $n \mapsto \operatorname{sen} n$).

Esercizio. Disegnare il grafico di una funzione f a caso e ricavarne il grafico di $x \mapsto \lfloor f(x) \rfloor$ e di $x \mapsto f(\lfloor x \rfloor)$.

Esercizio. Sia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e biiettiva. Che cosa si può dire della funzione $x \mapsto g(\lfloor g^{-1}(x) \rfloor)$? (Avvio: porre $x_n := g(n)$ e considerare la funzione sugli intervalli $[x_n, x_{n+1}[$). E se g è decrescente?

4. "Numeratore" e "denominatore" dei numeri razionali.

Prendiamo un numero razionale r, facciamone il valore assoluto $|r|$, che è ancora razionale, e poi scriviamo $|r|$ come frazione ridotta ai minimi termini: $|r| = p/q$ con $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, con p e q primi fra loro. Questi numeri sono individuati univocamente da r e quindi definiamo le funzioni "numeratore" e "denominatore" da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{N}$ come $\operatorname{num} r := p$, $\operatorname{den} r := q$ rispettivamente.

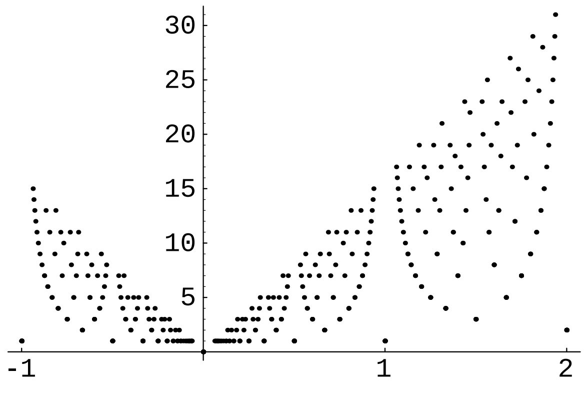
La "morale" della proposizione che segue è che se vogliamo avvicinarci a un numero irrazionale con delle frazioni, necessariamente i numeratori e denominatori tenderanno all'infinito.

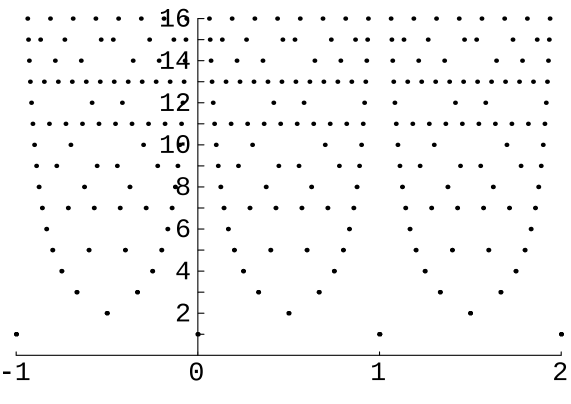
Proposizione. *Se x_0 è un numero irrazionale, allora*

$$\lim_{\substack{r\to\bar{x}\\ r\in\mathbb{Q}}} \operatorname{num} r = \lim_{\substack{r\to\bar{x}\\ r\in\mathbb{Q}}} \operatorname{den} r = +\infty\,.$$

Dimostrazione. (L'indicazione '$r \in \mathbb{Q}$' nel limite non sarebbe indispensabile, ma non guasta ricordare che num e den sono definiti solo su $\mathbb{Q}$). Usiamo il criterio delle successioni: sia $n \mapsto r_n$ una successione di razionali che tende a $\bar{x}$ (rimanendone ovviamente diversa), e dimostriamo che necessariamente $\operatorname{num} r_n \to +\infty$ e $\operatorname{den} r_n \to +\infty$. Ricordiamoci prima di tutto che $(\operatorname{num} r_n)/(\operatorname{den} r_n) = |r_n| \to |\bar{x}|$ per ogni n.
Supponiamo per assurdo che $\operatorname{num} r_n$ non tenda a $+\infty$, ossia che abbia un minimo limite finito ≥ 0 (non può essere negativo perché $\operatorname{num} r_n \geq 0$ per ogni n). Allora esiste una sottosuccessione $k \mapsto \operatorname{num} r_{n_k}$ che ha limite finito $p_0 \geq 0$. Necessariamente p_0 è intero (è un fatto generale che successioni di interi hanno solo interi come punti limite finiti). Possono ora accadere due cose: o $\operatorname{den} r_{n_k}$ tende a $+\infty$, oppure ha un minimo limite finito. Nel primo caso si ha che $|r_{n_k}| = (\operatorname{num} r_{n_k})/(\operatorname{den} r_{n_k}) \to p_0/+\infty = 0$, assurdo perché $|r_{n_k}|$ tende a $|\bar{x}|$ che è irrazionale per ipotesi. Se siamo nel secondo caso, possiamo estrarre una sotto-sottosuccessione $j \mapsto \operatorname{den} r_{n_{k_j}}$ che tende a un numero q_0 intero, finito e ≥ 1. Ma anche questo è assurdo, perché allora $|r_{n_{k_j}}| = (\operatorname{num} r_{n_{k_j}})/(\operatorname{den} r_{n_{k_j}}) \to p_0/q_0 \in \mathbb{Q}$, mentre dall'ipotesi segue che $|r_{n_{k_j}}| \to |\bar{x}| \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Dunque si ha certamente $\operatorname{num} r_n \to +\infty$. Se per assurdo si avesse che $\operatorname{den} r_n$ non tendesse anch'esso a $+\infty$, potremmo estrarre una sottosuccessione $k \mapsto \operatorname{den} r_{n_k}$ che ha limite finito ≥ 1. Ma allora $|r_{n_k}| = (\operatorname{num} r_{n_k})/(\operatorname{den} r_{n_k}) \to +\infty$, assurdo perché $|r_{n_k}| \to |\bar{x}| \in \mathbb{R}$. $\square$

Qui di seguito ci sono i grafici di num e di den, tenendo in conto solo le frazioni con denominatore da 1 a 16. Notare che le scale verticali sono diverse fra loro e da quella orizzontale. In particolare non credere che tutto il grafico del numeratore stia al di sotto delle diagonali del primo e secondo quadrante.





Esercizio. Le funzioni num e den sono periodiche? Di che periodi? Dimostrare che $\operatorname{num}(1+x) = \operatorname{num} x + \operatorname{den} x$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$. Anche $\operatorname{num}(2+x) = \operatorname{num} x + 2\operatorname{den} x$. Si può generalizzare? Esistono i limiti di num e den a $+\infty$ e a $-\infty$?

Esercizio. Sia il grafico di num che quello di den, quando ci avviciniamo con l'ascissa a 1, sembrano scappare a $+\infty$, con punti che paiono seguire delle curve. Riuscite a trovare e dimostrare una formula per quelle curve? E a dimostrare di conseguenza che $\operatorname{num} r$ e $\operatorname{den} r$ tendono a $+\infty$ per $r \to 1$?

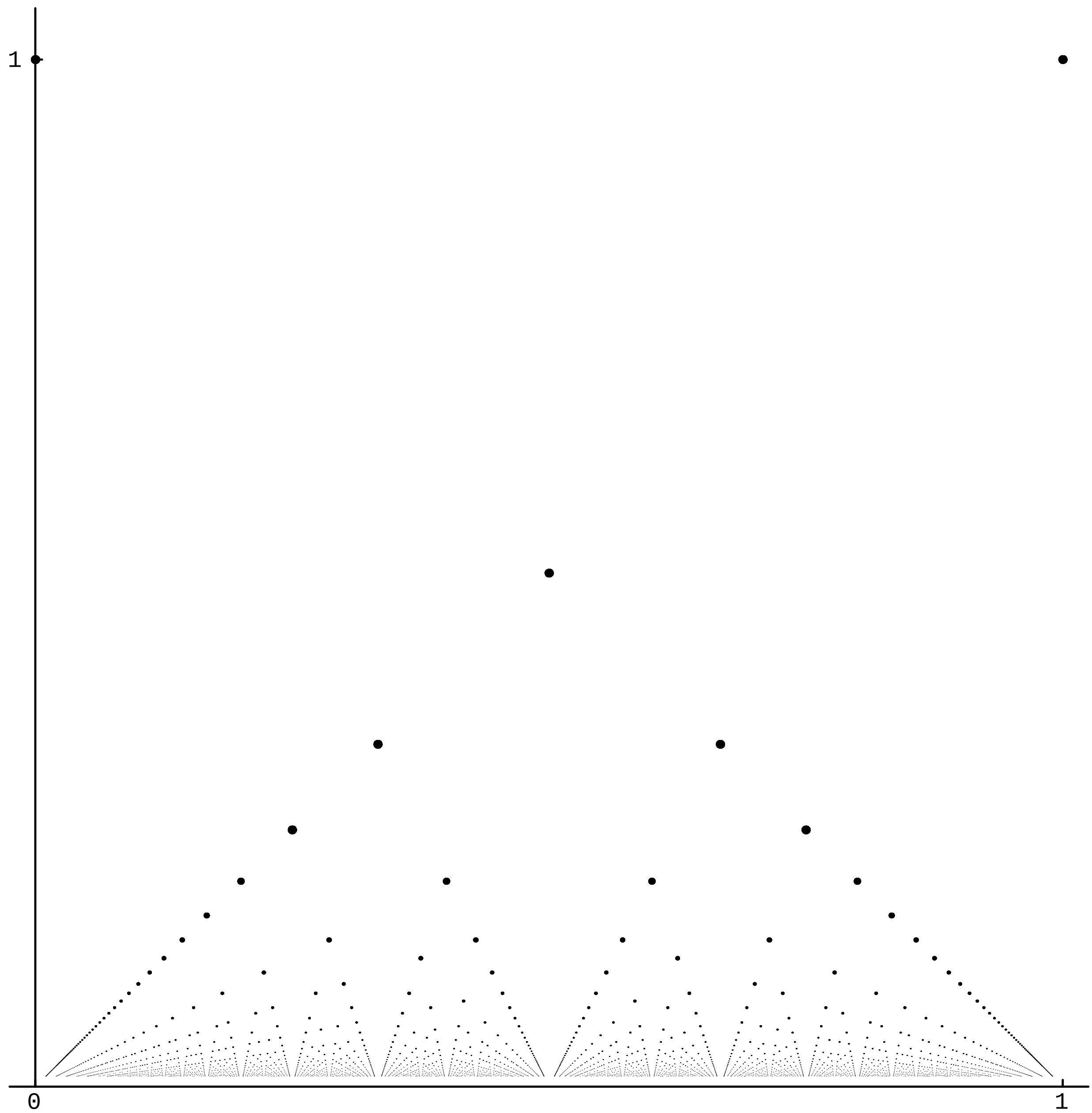
Esercizio. Dimostrare che $\lim_{x\to x_0} \operatorname{num} r = \lim_{x\to x_0} \operatorname{den} r = +\infty$ se $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. E se $x_0 = 0$?

5. “Uno su denominatore”.

Prendiamo un numero razionale $r \neq 0$, facciamone il valore assoluto, scriviamo il risultato come frazione ridotta ai minimi termini, e poi mettiamo 1 al posto del numeratore. Se si estende a 0 la definizione per i numeri irrazionali, quello che si ottiene è la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{den} x} & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Qui di seguito c'è un grafico di f ristretta all'intervallo $[0,1]$, ottenuto prendendo solo le frazioni con denominatore non superiore a 100. Questa limitazione produce la striscia bianca spuria di spessore $1/100$ appena sopra l'asse delle ascisse. In realtà la striscia sarebbe infestata da uno sciame di infiniti punti. La metà superiore della figura è bianca, eccetto per i due punti $(0,1)$ e $(1,1)$, che appartengono al grafico. Si noterà che vicino all'asse delle x il grafico contiene delle microstrutture, che i lettori sono invitati a esplorare.



Proposizione. *La funzione f è continua in tutti e soli i punti irrazionali.*

Dimostrazione. Sia x_0 irrazionale. Per ogni successione $n \mapsto u_n$ di irrazionali che tende a x_0 si ha $f(u_n) \equiv 0 \to 0$. Quindi, dalla caratterizzazione del limite tramite successioni, si ha che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall u \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad 0 < |u - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(u) - 0| = |f(u) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

D'altra parte, per ogni successione $n \mapsto v_n$ di numeri razionali si ha $\operatorname{den} v_n \to +\infty$, da cui $f(v_n) = 1/\operatorname{den} v_n \to 0$ pure, e quindi

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0\ \forall v \in \mathbb{Q} \quad 0 < |v - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(v) - 0| = |f(v) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Prendendo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e mettendo insieme i due fatti si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,,$$

cioè la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = f(x_0)$.
Se invece x_0 è razionale, si ha $f(x_0) = 1/\operatorname{den} x_0 \neq 0$, mentre esiste una successione $n \mapsto x_n$ di numeri irrazionali tendente a x_0, e per quella successione si ha $f(x_n) \equiv 0 \to 0 \neq f(x_0)$. □

Esercizio. Siano $\varnothing \neq A, B \subset \mathbb{R}$, $A \cup B = \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se quando $x \to x_0 \in [-\infty, +\infty]$ entrambe le restrizioni $g|_A$ e $g|_B$ tendono a ℓ, allora anche g tende a ℓ.

Esercizio. La funzione f è periodica? Dimostrare che $f(\frac{1}{2} + x) = f(\frac{1}{2} - x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. C'è qualche relazione semplice fra $f(\frac{1}{2} + x)$ ed $f(x)$?

Esercizio. Dimostrare che $f(x) \leq |x|$ se $x \neq 0$. Inoltre che $f(x) \leq 2|x - \frac{1}{2}|$ se $x \neq 1/2$. Ancora $f(x) \leq \ldots$ per $x \neq 1/3$.

Esercizio. Dimostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. E quando $x = \pm\infty$?

Esercizio. Preso un $y > 0$, quanti sono i punti del grafico di f che hanno ascissa in $[0, 1]$ e ordinata $\geq y$?

Esercizio. Supponiamo che $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ sia ≥ 0 e che per ogni $y > 0$ soltanto un numero finito di punti del grafico di g abbiano ascissa $\geq y$. Dimostrare che $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ per ogni $x_0 \in [0, 1]$. Una tale g è continua in tutti e soli i punti in cui è nulla.

6. Una funzione con grafico denso nel piano.

Sappiamo che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè che ogni numero reale è limite di una successione di razionali. Ne segue facilmente che se $r \neq 0$ anche l'insieme $r\mathbb{Q}$ dei prodotti di r per i numeri razionali è pure denso in $\mathbb{R}$.

Lemma. *Se prendiamo due numeri primi $p, q > 1$ distinti, i due insiemi $\mathbb{Q}\sqrt{p}$ e $\mathbb{Q}\sqrt{q}$ sono disgiunti, eccetto che nello zero: $\mathbb{Q}\sqrt{p} \cap \mathbb{Q}\sqrt{q} = \{0\}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che esistano $r, s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tali che $r\sqrt{p} = s\sqrt{q}$. Moltiplicando per un denominatore comune fra r ed s possiamo riportarci a un'uguaglianza della forma

$$\tilde{r}\sqrt{p} = \tilde{s}\sqrt{q}\,,$$

dove $\tilde{r}$ e $\tilde{s}$ sono *interi.* Anzi, dividendo per il massimo comun divisore fra $\tilde{r}$ e $\tilde{s}$ possiamo anche supporre che siano *primi fra loro.* Ora eleviamo al quadrato, ottenendo un'uguaglianza fra numeri interi:

$$\tilde{r}^2 p = \tilde{s}^2 q\,.$$

Il secondo membro ora è divisibile per il numero primo q, mentre il fattore p del primo membro non lo è, per cui deve essere l'altro fattore $\tilde{r}^2$ a essere divisibile per q. Ma allora anche $\tilde{r}$ ha q come fattore primo, cioè $\tilde{r}/q \in \mathbb{Z}$. Si può riscrivere l'uguaglianza come $(\tilde{r}/q)^2 qp = \tilde{s}^2 q$, da cui, dividendo per q ambo i membri, abbiamo

$$(\tilde{r}/q)^2 pq = \tilde{s}^2\,,$$

che mostra come $\tilde{s}^2$, e quindi anche $\tilde{s}$, siano divisibili per q. Ma anche $\tilde{r}$ era risultato divisibile per q, e questo va contro l'ipotesi che $\tilde{r}$ e $\tilde{s}$ fossero primi fra loro. □

Ora siamo autorizzati a definire una funzione f nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \text{qualsiasi cosa che dipenda da } p & \text{se esiste } p > 1 \text{ numero primo tale che } x \in \mathbb{Q}\sqrt{p} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{se per ogni } p > 1 \text{ numero primo si ha } x \notin \mathbb{Q}\sqrt{p} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Con quel "qualsiasi cosa" possiamo giocare come segue: dato che l'insieme dei numeri primi è infinito e numerabile, e sapendo che esistono sottinsiemi di $\mathbb{R}$ numerabili e densi in $\mathbb{R}$ (per esempio $\mathbb{Q}$), esiste anche una funzione $\varphi: \{p \in \mathbb{N} \;:\; p \text{ è primo e } > 1\} \to \mathbb{R}$ con *immagine densa in* $\mathbb{R}$. Se prendiamo questa $\varphi(p)$ come il "qualsiasi cosa", il risultato è una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il cui grafico è denso nel piano: per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esiste una successione$(x_n, y_n) \in \operatorname{graf} f$ tale che $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Se volessimo disegnare un grafico di questa f dovremmo pitturare di grigio tutta la figura, con un grigio più intenso sull'asse x, dove sono concentrati un'infinità più che numerabile di punti del grafico.

Esercizio. Dimostrare che se $r \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{r} \in \mathbb{Q}$ allora $r \in \mathbb{N}$.

Esercizio. Nel piano, escluso l'asse x, ci sono un'infinità numerabile di punti del grafico di f.

Esercizio. Dimostrare l'asserzione secondo cui il grafico di f è denso nel piano. Avvio: dato $\varepsilon = 1/n > 0$ esiste un numero primo p_n tale che $|\varphi(p_n) - y| < 1/n$, ed esiste $x_n \in \mathbb{Q}\sqrt{p_n}$ tale che $|x_n - x| < 1/n$...

Esercizio. Se una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha grafico denso nel piano, allora non ha limite in nessun punto. Inoltre non esiste alcun intervallo contenente almeno due punti sul quale la f sia limitata superiormente o inferiormente.