Il teorema di Lusin (versione 2008-06-03)

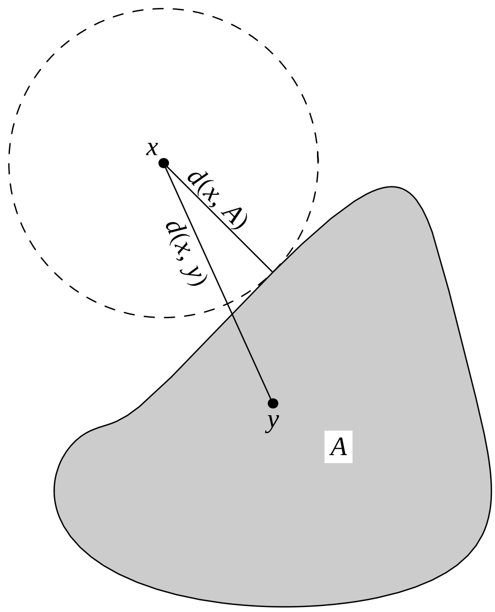
1. Distanza da un insieme

Definizione. *Dato uno spazio metrico (X,d), un sottinsieme non vuoto $A \subset X$ e un punto $x \in X$ definiamo distanza fra x e A il numero*

$$\operatorname{dist}(x,A) := \inf_{y\in A} d(x,y)\,.$$

Dati due sottinsiemi non vuoti $A, B \subset X$, la distanza fra loro è definita da

$$\operatorname{dist}(A,B) := \inf_{x\in A,y\in B} d(x,y)\,.$$



È chiaro che queste distanze sono numeri in $[0,+\infty[$, e che $\operatorname{dist}(x,A) = d(\{x\},A)$. Se poi $x \in A$ allora ovviamente $\operatorname{dist}(x,A) = 0$.

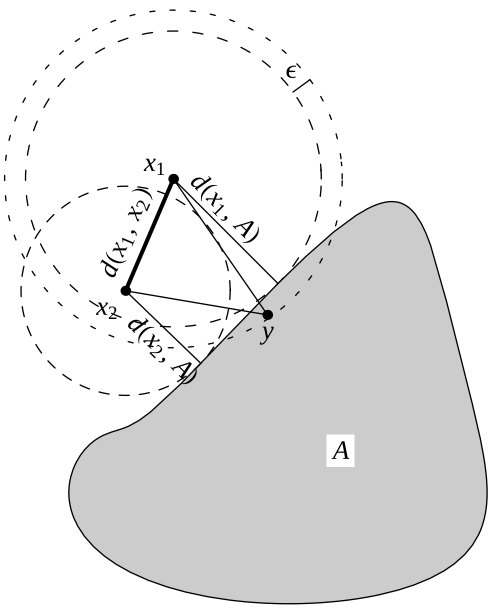
Proposizione. *La funzione*

$$x \mapsto \operatorname{dist}(x,A)$$

è continua, anzi, lipschitziana di costante 1.

Dimostrazione. Siano dati $x_1, x_2 \in X$ e sia $\varepsilon > 0$. Per definizione di estremo inferiore e di distanza da un insieme, esiste $y \in A$ tale che

$$d(x_1,y) \le \operatorname{dist}(x_1,A) + \varepsilon\,, \qquad d(x_2,y) \ge \operatorname{dist}(x_2,A)\,.$$



Per la disuguaglianza triangolare

$$d(x_2,y) \le d(x_2,x_1) + d(x_1,y)\,.$$

Mettendo insieme si ricava che

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x_2,A) - \operatorname{dist}(x_1,A) \le{}&\\ &\le d(x_2,y) - d(x_1,y) + \varepsilon \le\\ &\le d(x_2,x_1) + \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, deduciamo che

$$\operatorname{dist}(x_2,A) - \operatorname{dist}(x_1,A) \le d(x_2,x_1)\,.$$

Scambiando i ruoli fra x_1 e x_2 otteniamo

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x_1,A) - \operatorname{dist}(x_2,A) \le d(x_1,x_2) ={}&\\ &= d(x_1,x_2)\,.\end{aligned}$$

Combinando le ultime due disuguaglianze ricaviamo

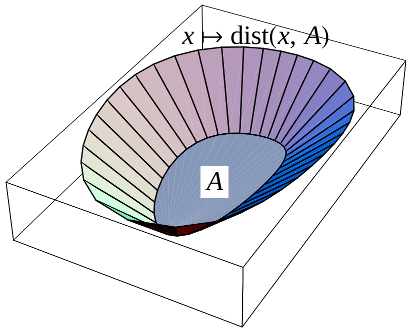
$$\bigl|\operatorname{dist}(x_1,A) - \operatorname{dist}(x_2,A)\bigr| \le d(x_1,x_2)\,,$$

che è la lipschitzianità richiesta. □

Esercizio. Mostrare che $\operatorname{dist}(A,B) = \inf_{x\in A} \operatorname{dist}(x,B)$.

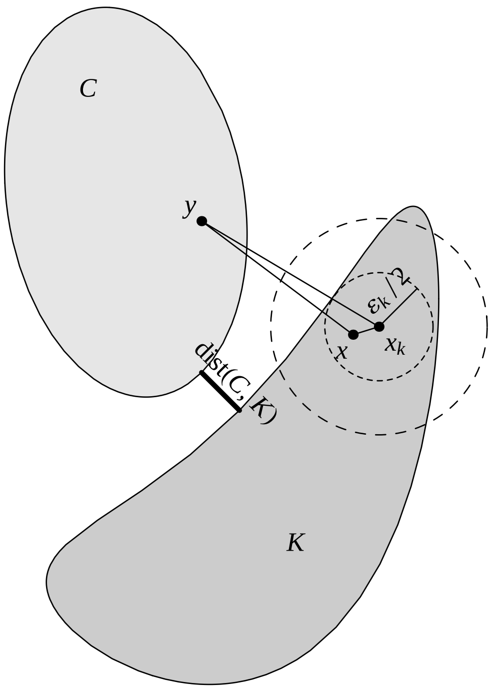
Esercizio. Sia A un insieme non vuoto di indici, e $f_\alpha\colon X \to [0,+\infty[$ una famiglia non vuota di funzioni lipschitziane della stessa costante M. Dimostrare che allora anche la funzione $g(x) := \inf_\alpha f_\alpha(x)$ è lipschitziana di costante M. Dedurre da questo risultato la proposizione precedente. La tesi vale anche se non si richiede che le f_α abbiano valori ≥ 0, ma più in generale abbiano valori reali di segno qualsiasi, purché $g(x)$ abbia valore finito per almeno un punto $x \in X$.

Esercizio. $d(x, A) = 0$ se e solo se x è nella chiusura di A. La chiusura dell'insieme $\{x \ : \ d(x, A) < c\}$ è contenuta, ma non necessariamente coincide, con l'insieme $\{x \ : \ d(x, A) \le c\}$, che è chiuso.



Esercizio. Nel caso $X = \mathbb{R}$ la funzione $x \mapsto \mathrm{dist}(x, A)$ è necessariamente derivabile in ogni punto? È derivabile almeno in tutti i punti esterni ad A?

Proposizione. *Sia (X, d) uno spazio metrico, K, C due sottinsiemi non vuoti disgiunti, con K compatto e C chiuso. Allora* $\mathrm{dist}(K, C) > 0$.



Dimostrazione. Poiché $K \cap C = \varnothing$ e C è chiuso, per ogni punto $x \in K$ esiste un $\varepsilon_x > 0$ tale che la palla aperta $B(x, \varepsilon_x)$ non interseca C. Il compatto K è ricoperto dalle palle aperte $B(x, \varepsilon_x/2)$ al variare di $x \in K$. Quindi esistono $x_1, \ldots, x_n \in K$ tali che

$$K \subset B(x_1, \varepsilon_{x_1}/2) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon_{x_n}/2)\,.$$

Siano ora $x \in K, y \in C$. Esiste un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $d(x, x_k) < \varepsilon_{x_k}/2$ e $d(y, x_k) \ge \varepsilon_{x_k}$. Quindi

$$d(y, x) \ge d(y, x_k) - d(x_k, x) \ge \varepsilon_{x_k} - \frac{\varepsilon_{x_k}}{2} = \frac{\varepsilon_{x_k}}{2} \ge$$
$$\ge \min_{j=1,\ldots,n} \frac{\varepsilon_{x_j}}{2}\,.$$

L'ultimo membro della disuguaglianza è > 0 e non dipende da x, y. Quindi

$$d(K, C) = \inf_{x \in K, y \in C} d(x, y) \ge \min_{j=1,\ldots,n} \frac{\varepsilon_{x_j}}{2} > 0\,.$$

□

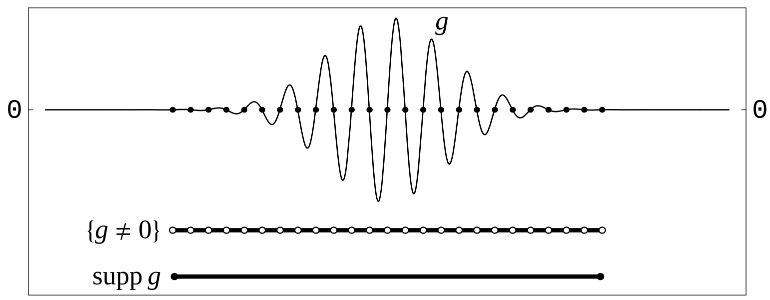
Esercizio. Si può dimostrare che un compatto e un chiuso non vuoti e disgiunti hanno distanza > 0 anche usando la compattezza per successioni: dati $x_n \in K$, $y_n \in C$ tali che $d(x_n, y_n) \to \mathrm{dist}(K, C)$ estrarre sottosuccessioni convergenti... Oppure usando il fatto che la funzione $x \mapsto \mathrm{dist}(x, C)$ è continua ed ha valori > 0 sul compatto K...

Esercizio. Due chiusi disgiunti in uno spazio metrico possono avere distanza nulla.

2. Lemma di Urysohn

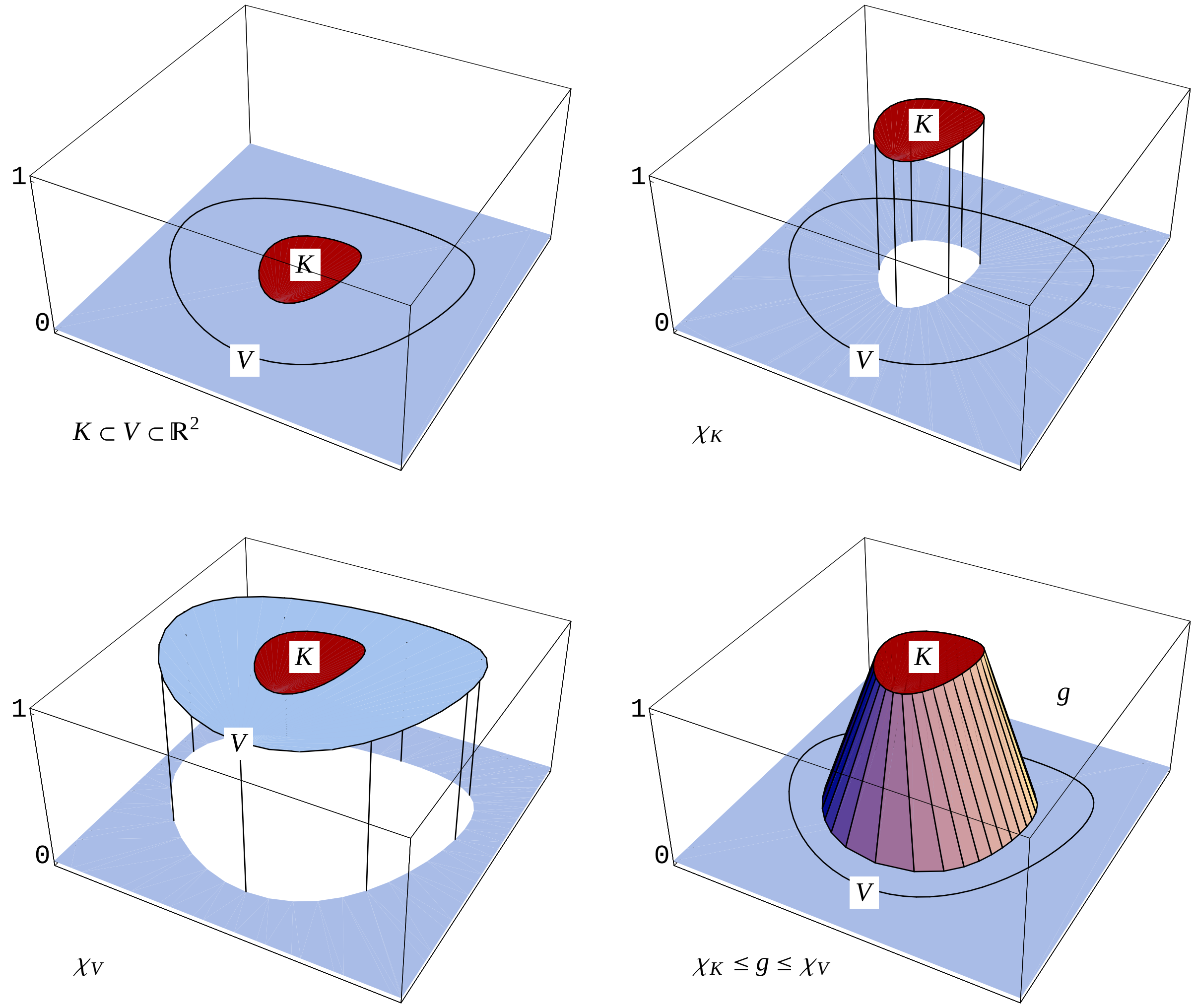
Definizione. *Dato uno spazio topologico X e una funzione $g\colon X \to \mathbb{R}$, diremo supporto di g l'insieme*

$$\operatorname{supp} g := \overline{\{x \in X \ : \ g(x) \neq 0\}}$$



(La linea indica la chiusura nella topologia di X). La funzione g si dice a supporto compatto se $\operatorname{supp} g$ è compatto. Indicheremo con $C_c(X)$ l'insieme delle funzioni $g\colon X \to \mathbb{R}$ che sono continue e a supporto compatto.

Esercizi. Se $g \in C_c(X)$ allora g è limitata. Se $g_1, g_2 \in C_c(X)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ allora anche $c_1 g_1 + c_2 g_2$, $g_1 \cdot g_2$, $|g_1|$, g_1^2, $\max\{g_1, g_2\}$, $\min\{g_1, g_2\}$ sono in $C_c(X)$; in particolare, $C_c(X)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Se X è compatto tutte le funzioni reali sono a supporto compatto. Se X non è compatto, una funzione a supporto compatto si annulla necessariamente da qualche parte. Se X è connesso e non compatto una $g \in C_c(X)$ si annulla necessariamente in un punto del supporto (precisamente, in tutti i punti di frontiera del supporto). Una funzione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha supporto compatto se e solo se è nulla al di fuori di un insieme limitato. Nessun polinomio, o più in generale nessuna funzione analitica su $\mathbb{R}$ è a supporto compatto, con l'unica eccezione della funzione costante 0. Dire se la funzione $g(x) := \max\{1 - x^4, 0\}$ è in $C_c(\mathbb{R})$ e trovarne il supporto. Una $g \in C_c(\mathbb{R})$ è necessariamente $\neq 0$ nei punti interni del supporto?



Proposizione (Lemma di Urysohn in $\mathbb{R}^n$). *In $\mathbb{R}^n$ siano K un compatto e V un aperto tali che $K \subset V$. Allora esiste una funzione $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che $\operatorname{supp} g \subset V$ e*

$$g(x) \begin{cases} \in [0,1] & \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}^n, \\ = 1 & \textit{per ogni } x \in K, \\ = 0 & \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \setminus V. \end{cases}$$

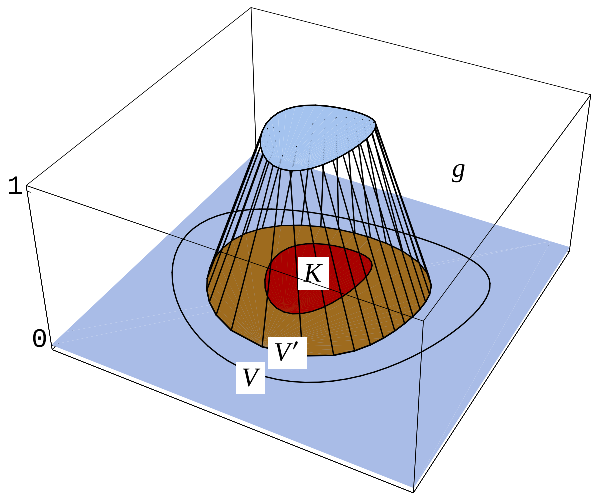
Pavel Samuilovich Urysohn (Urysòn), matematico russo (1898–1924).

Dimostrazione. Se $K = \varnothing$ basta prendere $g \equiv 0$. Supponiamo quindi che K non sia vuoto. Dico che esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $d(x, K) \le \varepsilon$ allora $x \in V$. Questo è vero ovviamente se $V = \mathbb{R}^n$. Altrimenti, $\mathbb{R}^n \setminus V$ è un chiuso non vuoto disgiunto dal compatto K, e quindi $\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus V) > 0$. Basta prendere $\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus V)$, giacché

$$\begin{aligned} d(x, K) \le \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad \exists \bar{x} \in K \text{ t.c. } d(x, \bar{x}) < 2\varepsilon = \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus V) = \inf\{d(z, w) \ : \ z \in K, w \in \mathbb{R}^n \setminus V\} \\ &\Rightarrow \quad x \notin \mathbb{R}^n \setminus V \quad \Rightarrow \quad x \in V\,. \end{aligned}$$

Possiamo porre
$$g(x) := \max\{0,\ 1 - \operatorname{dist}(x, K)/\varepsilon\}\,.$$
Verifichiamo che g ha le proprietà richieste. Innanzitutto g è continua perché composta di funzioni continue. È ovviamente compresa fra 0 e 1, e su K vale 1. Inoltre
$$\{x\ :\ g(x) \neq 0\} = \{x\ :\ \operatorname{dist}(x,K)/\varepsilon < 1\} = \{x\ :\ \operatorname{dist}(x,K) < \varepsilon\} \subset \{x\ :\ \operatorname{dist}(x,K) \leq \varepsilon\}\,.$$
L'insieme $\{x\ :\ \operatorname{dist}(x,K) \leq \varepsilon\}$ è chiuso perché la funzione $x \mapsto \operatorname{dist}(x,K)$ è continua. Quindi il supporto di g è contenuto in V:
$$\operatorname{supp} g = \overline{\{x\ :\ g(x) \neq 0\}} \subset \{x\ :\ \operatorname{dist}(x,K) \leq \varepsilon\} \subset V\,.$$
L'insieme $\{x\ :\ \operatorname{dist}(x,K) \leq \varepsilon\}$ è anche limitato (perché K è limitato in quanto compatto), e quindi è compatto. Il supporto di g è sottinsieme chiuso di un compatto e quindi è compatto. Dal fatto che $\operatorname{supp} g \subset V$ segue infine che g è nulla fuori da V. $\square$

Le proprietà della g del lemma di Urysohn si possono anche scrivere così:
$$g \in C_c(\mathbb{R}^n)\,, \quad \operatorname{supp} g \subset V\,, \quad \chi_K \leq g \leq \chi_V\,.$$
In particolare la g può essere vista come un'approssimante per eccesso di χ_K e per difetto di χ_V. Il lemma di Urysohn vale anche se al posto di $\mathbb{R}^n$ si mette uno spazio topologico (non necessariamente metrico) di Hausdorff e localmente compatto. La dimostrazione è tutta diversa in tal caso, e sensibilmente più complicata.



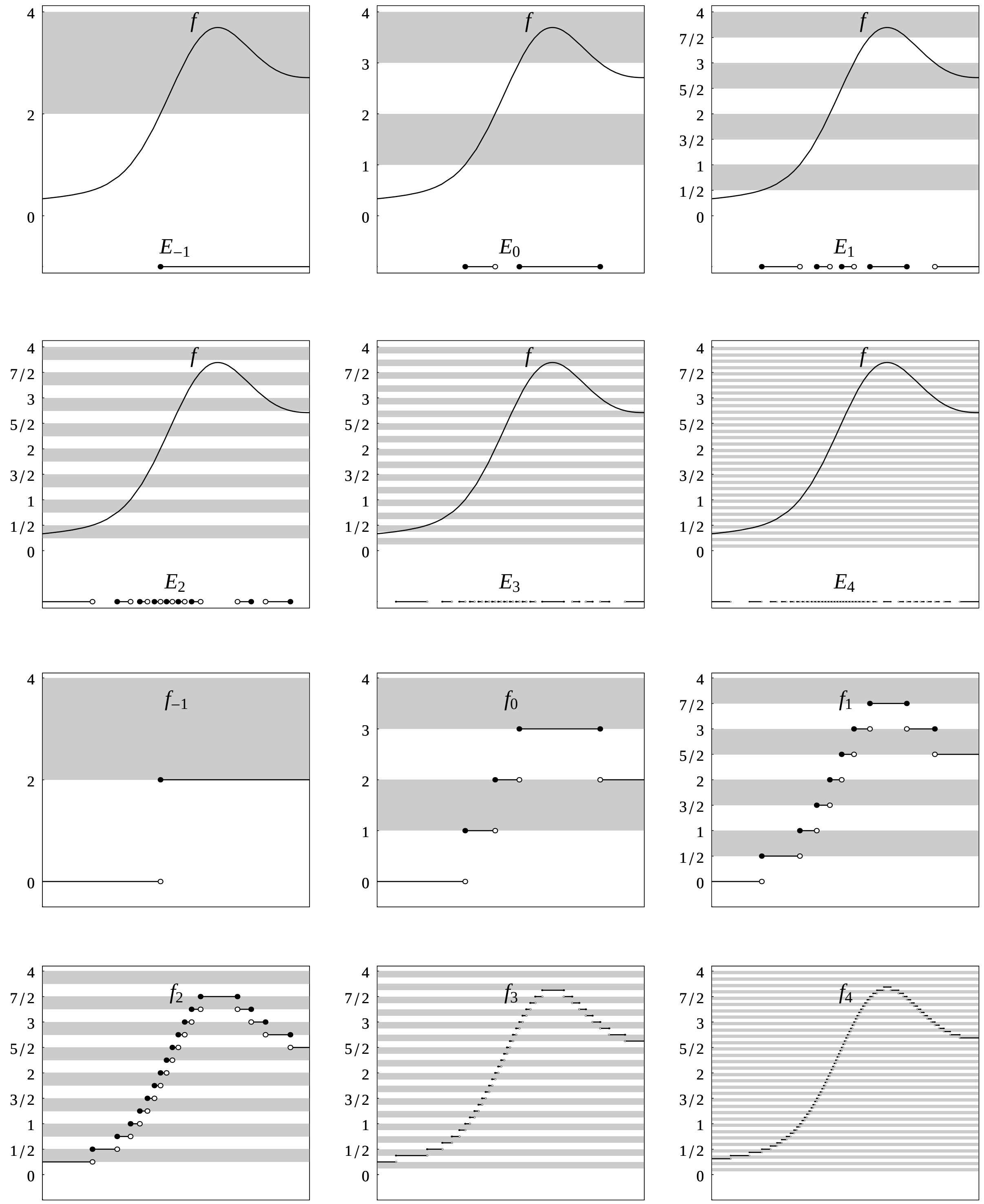
Proposizione. In $\mathbb{R}^N$ sia K un compatto e V un aperto tali che $K \subset V \subset \mathbb{R}^N$. Allora esiste un aperto V' la cui chiusura $\overline{V'}$ è compatta e tale che $K \subset V \subset \overline{V'} \subset V$.

Dimostrazione. Sia $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ come nel lemma di Urysohn, e poniamo
$$V' := g^{-1}\big(]0, +\infty[\big)\,.$$
V' è aperto perché g è continua. Inoltre V' è contenuto in $\operatorname{supp} g$, che è compatto ed è contenuto in V. Quindi la chiusura di V' è compatta e contenuta in V. $\square$

3. Il teorema di Lusin

Proposizione. *Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $f\colon S \to [0, +\infty[$ una funzione misurabile. Allora esistono degli insiemi $E_n \in \mathcal{M}$ tali che*
$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^n}\chi_{E_n}\,,$$
dove la serie converge puntualmente. Inoltre se f è limitata superiormente allora $E_n = \varnothing$ per ogni $n < -\log_2 \sup f$.

Dimostrazione. Dato un $t \in [0, +\infty[$ e $n \in \mathbb{Z}$ sia $d_n(x)$ l'n-esima cifra dell'espansione binaria di t, a destra della virgola se $n \geq 1$ e a sinistra se $n \leq 0$. Sappiamo che
$$t = \cdots + 2^2 d_{-2}(t) + 2^1 d_{-1}(t) + 2^0 d_0(t) + \frac{d_1(t)}{2} + \frac{d_2(t)}{2^2} + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d_n(t)}{2^n}$$
e che
$$\begin{aligned} d_n(t) &= \lfloor 2^n t\rfloor - 2\lfloor 2^{n-1} t\rfloor = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } 2^n t \text{ cade fra un numero pari (compreso) e l'intero successivo (escluso)},\\ 1 & \text{se } 2^n t \text{ cade fra un numero dispari (compreso) e l'intero successivo (escluso).}\end{cases}\end{aligned}$$



Inoltre se $n < -\log_2 t$ allora $2^n < 2^{-\log_2 t} = 1/t$, per cui $0 \leq 2^n t < 1$ e $d_n(t) = 0$ La funzione $d_n\colon [0, +\infty[\to \{0, 1\}$ non è continua ma è boreliana. Possiamo porre

$$E_n := \bigl\{x \in X \ : \ d_n\bigl(f(x)\bigr) = 1\bigr\} = (d_n \circ f)^{-1}(\{1\})\,.$$

Infatti $E_n \in \mathcal{M}$ perché d_n è boreliana e f è misurabile. Si ha chiaramente

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d_n\bigl(f(x)\bigr)}{2^n} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ d_n(f(x))=1}} \frac{1}{2^n} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ x\in E_n}} \frac{1}{2^n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^n}\chi_{E_n}(x)\,.$$

Infine, se $n < -\log_2 \sup f$ allora $d_n(f(x)) = 0$ per ogni $x \in X$ e quindi $E_n = \varnothing$. Le figure della pagina precedente mostrano gli insiemi E_n e le somme parziali $f_n := \sum_{k\le n} 2^{-k}\chi_{E_k}$ per una data funzione f. $\square$

Teorema di Lusin. *Sia $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile secondo Lebesgue e a supporto compatto, sia $\varepsilon > 0$ e sia V un aperto contenente il supporto di f. Allora esiste una $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che l'insieme $\{x : f(x) \neq g_\varepsilon(x)\}$ ha misura di Lebesgue minore di ε e il supporto di g_ε è contenuto in V. Inoltre possiamo supporre che* $\sup|g_\varepsilon| \le \sup|f|$.

Nikolai Nikolaevich Luzin (o Lusin), matematico russo (1883–1950).

Dimostrazione. Sia V' un aperto contenente il supporto di f, e la cui chiusura sia compatta e contenuta in V. Distinguiamo diversi casi via via più generali.
Caso 1. La funzione f sia una funzione caratteristica:

$$f(x) := \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus E. \end{cases}$$

con E un insieme misurabile secondo Lebesgue. Se $E = \varnothing$ la tesi vale ponendo banalmente $g_\varepsilon \equiv 0$. Supponiamo quindi $E \neq \varnothing$. Il supporto di f è la chiusura di E, che per ipotesi è compatta e contenuta in V. Quindi E ha misura finita. Dalla teoria della misura sappiamo che esistono un compatto K_ε e un aperto V_ε tali che

$$K_\varepsilon \subset E \subset V_\varepsilon \quad \text{e} \quad \mu(V \setminus K) < \varepsilon\,.$$

Possiamo anche supporre che $V_\varepsilon \subset V'$, eventualmente rimpiazzando V_ε con $V_\varepsilon \cap V'$. Il lemma di Urysohn dice che esiste un $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che $\operatorname{supp} g_\varepsilon \subset V_\varepsilon \subset V$ e $\chi_{K_\varepsilon} \le g_\varepsilon \le \chi_{V_\varepsilon}$. Questa g_ε ha le proprietà richieste. Infatti g_ε è continua e a supporto compatto, e il suo supporto è contenuto in V. Inoltre se $x \in K_\varepsilon$ allora $1 = g_\varepsilon(x) = \chi_{K_\varepsilon}(x) = \chi_E(x)$, mentre se $x \in \mathbb{R}^n \setminus V_\varepsilon$ allora $0 = g_\varepsilon(x) = \chi_{V_\varepsilon}(x) = \chi_E(x)$. Quindi

$$\bigl\{x : g_\varepsilon(x) \neq f(x)\bigr\} \subset V_\varepsilon \setminus K_\varepsilon\,,$$

da cui

$$\mu\bigl(\{x : g_\varepsilon(x) \neq f(x)\}\bigr) \le \mu(V_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon\,.$$

Infine $\sup|g_\varepsilon| \le \sup|\chi_{V_\varepsilon}| = 1 = \sup|f|$.
Caso 2. La funzione f sia reale, misurabile, limitata e ≥ 0. Allora siano $E_n \subset \mathbb{R}^N$ misurabili secondo Lebesgue tali che

$$f = \sum_{n\ge n_0} \frac{1}{2^n}\chi_{E_n} \qquad \text{puntualmente.}$$

Su ognuno degli E_n la f è non nulla. Quindi ognuno degli E_n è contenuto nel supporto di f, e di conseguenza in V. Grazie al caso precedente, per ogni $n \ge n_0$ esiste una funzione $g_{n,\varepsilon} \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tali che

$$0 \le g_{n,\varepsilon} \le 1, \qquad \lambda_N\bigl(\{g_{n,\varepsilon} \neq \chi_{E_n}\}\bigr) \le \frac{\varepsilon}{2^{n-n_0+2}}, \qquad \operatorname{supp} g_{n,\varepsilon} \subset V'\,.$$

Poniamo

$$g_\varepsilon := \sum_{n\ge n_0} \frac{1}{2^n} g_{\varepsilon,n}\,.$$

La funzione g_ε è a valori finiti e continua, perché la serie di funzioni che definisce g_ε converge totalmente. Inoltre g_ε è nulla al di fuori di V', in quanto ognuno degli addendi lo è. Il supporto di g_ε risulta compatto perché è un chiuso contenuto nella chiusura di V', che è compatta. Pertanto $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e $\operatorname{supp} g_\varepsilon \subset V$. Infine notiamo che

$$f(x) \neq g_\varepsilon(x) \iff \sum_{n\ge n_0} \frac{1}{2^n}\chi_{E_n}(x) \neq \sum_{n\ge n_0} \frac{1}{2^n} g_{\varepsilon,n}(x) \quad \Rightarrow \quad \exists n \ge n_0 \text{ tale che } \chi_{E_n}(x) \neq g_\varepsilon(x)\,,$$

da cui

$$\{f \neq g_\varepsilon\} \subset \bigcup_{n\ge n_0} \{\chi_{E_n} \neq g_{\varepsilon,n}\}\,,$$

e

$$\lambda\bigl(\{f \neq g_\varepsilon\}\bigr) \le \sum_{n\ge n_0} \lambda\bigl(\{\chi_{E_n} \neq g_{\varepsilon,n}\}\bigr) \le \sum_{n\ge n_0} \frac{\varepsilon}{2^{n-n_0+2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$$

che è quello che rimaneva da dimostrare.

Caso 3. La f sia reale, misurabile, positiva, ma non necessariamente limitata. Consideriamo la successione di insiemi $E_n := \{f > n\}$. Questi insiemi sono misurabili, la successione è decrescente e l'intersezione è vuota. Inoltre tutti gli E_n sono contenuti nel supporto di f, che è un compatto, e quindi ha misura finita. Per il passaggio al limite su successioni decrescenti di insiemi, esiste un n_ε tale che $\lambda_N(E_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Consideriamo la funzione $f_\varepsilon := \chi_{E_{n_\varepsilon}} f$. Questa è funzione misurabile positiva, con supporto contenuto nel supporto di f, e inoltre è limitata superiormente da n_ε. Per il caso precedente esiste $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che $\operatorname{supp} g_\varepsilon \subset V$ e $\lambda_N(\{g_\varepsilon \neq f_\varepsilon\}) < \varepsilon/2$. Ma allora

$$\{f \neq g_\varepsilon\} \subset \{f \neq f_\varepsilon\} \cup \{f_\varepsilon \neq g_\varepsilon\} = E_{n_\varepsilon} \cup \{f_\varepsilon \neq g_\varepsilon\}\,,$$

per cui

$$\lambda_N\bigl(\{f \neq g_\varepsilon\}\bigr) \leq \lambda_N(E_{n_\varepsilon}) + \lambda_N\bigl(\{f_\varepsilon \neq g_\varepsilon\}\bigr) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Caso 4. Sia f reale misurabile. Allora le parti positiva e negativa f^+, f^- di f sono reali, misurabili, positive, e il loro supporto è pure contenuto in V. Per il caso precedente esistono $g_{\varepsilon,+}, g_{\varepsilon,-} \in C_c(\mathbb{R}^N)$ con supporto contenuto in V e tali che

$$\lambda_N\bigl(\{f^+ \neq g_{\varepsilon,+}\}\bigr) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \lambda_N\bigl(\{f^- \neq g_{\varepsilon,-}\}\bigr) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Se poniamo $g_\varepsilon := g_{\varepsilon,+} - g_{\varepsilon,-}$, questa g_ε è in $C_c(\mathbb{R}^N)$, il suo supporto è in V, e

$$\lambda_N\bigl(\{f \neq g_\varepsilon\}\bigr) \leq \lambda_N\bigl(\{f^+ \neq g_{\varepsilon,+}\}\bigr) + \lambda_N\bigl(\{f^- \neq g_{\varepsilon,-}\}\bigr) < \varepsilon\,.$$

Caso 5. Sia f complessa misurabile. Allora si spezza in parte reale più parte immaginaria, e si procede come nel caso precedente. □