Continuità uniforme

1. Il modulo di continuità uniforme.

Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, con $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, si dice uniformemente continua se (vedi Gilardi, XI-4)

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x, y \in A \quad |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon\,.$$

L'approccio diretto per dimostrare che una data f è uniformemente continua (o meno) consiste nel fissare un $\varepsilon > 0$ generico e nel trovare in qualche modo un $\delta > 0$ che renda vero il predicato

$$\forall x, y \in A \quad |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon\,.$$

Prendiamo ora invece una via indiretta: studiamo la relazione che c'è fra ε e δ fissando prima δ e trovando di conseguenza ε. Se siamo fortunati otterremo abbastanza informazioni da farci distinguere le funzioni uniformemente continue da quelle che non lo sono.

Dato $\delta \ge 0$ ci chiediamo dunque quali sono i valori di ε che rendono vero il solito predicato

$$\forall x, y \in A \quad |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon\,.$$

La risposta (se mai è una risposta e non una semplice riformulazione del problema) è che tali ε sono precisamente tutti e soli i maggioranti dell'insieme $B_f(\delta)$ definito da

$$B_f(\delta) := \Big\{ |f(x) - f(y)| \;:\; x, y \in A,\ |x-y| \le \delta \Big\}\,.$$

Tra i maggioranti di un insieme ce n'è uno speciale: l'estremo superiore. Poiché $B_f(\delta)$ dipende da f e da δ, anche l'estremo superiore dipende dalle stesse cose: visto come funzione di δ è detto *modulo di continuità uniforme di* f, e in questa dispensa lo indichiamo con

$$\varphi_f(\delta) := \sup B_f(\delta) = \sup\Big\{ |f(x) - f(y)| \;:\; x, y \in A,\ |x-y| \le \delta \Big\} \quad \text{per } \delta \ge 0\,.$$

Le prime proprietà del modulo di continuità uniforme sono le seguenti.

Proposizione. *La funzione $\delta \mapsto \varphi_f(\delta)$ è definita su $[0, +\infty[$ a valori in $[0, +\infty]$ (ultimo estremo compreso!), è debolmente crescente, $\varphi_f(0) = 0$ e vale la relazione*

$$|f(x) - f(y)| \le \varphi_f\big(|x-y|\big) \qquad \forall x, y \in A\,.$$

Dimostrazione. Tutto segue da queste semplici proprietà di inclusione degli insiemi $B_f(\delta)$:

$$\begin{aligned} &0 \le \delta_1 \le \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \{0\} \subset B_f(\delta_1) \subset B_f(\delta_2) \subset [0, +\infty[\,,\\ &B_f(0) = \{0\}, \qquad |f(x) - f(y)| \in B_f(|x-y|)\ \forall x, y \in A\,. \end{aligned}$$

Per dimostrarle, cominciamo col notare che esiste almeno un $x_0 \in A$, perché $A \neq \varnothing$, e poiché $|x_0 - x_0| \le \delta$ $\forall\delta \ge 0$ si ha $0 = |f(x_0) - f(x_0)| \in B_f(\delta)$ per ogni $\delta \ge 0$. Quando poi $\delta = 0$ si ha $|x-y| \le \delta \iff x = y \Rightarrow |f(x) - f(y)| = 0$, da cui $B_f(0) = \{0\}$. Se poi $0 \le \delta_1 \le \delta_2$ si ha $|x-y| \le \delta_1 \Rightarrow |x-y| \le \delta_2$, per cui

$$B_f(\delta_1) = \Big\{ |f(x) - f(y)| \;:\; x, y \in A,\ |x-y| \le \delta_1 \Big\} \subset \Big\{ |f(x) - f(y)| \;:\; x, y \in A,\ |x-y| \le \delta_2 \Big\} = B_f(\delta_2)\,.$$

Inoltre $|f(x) - f(y)| \in [0, +\infty[\ \forall x, y \in A$, da cui segue che $B_f(\delta) \subset [0, +\infty[$ per ogni $\delta \ge 0$. Infine, dati $x, y \in A$ possiamo porre $\delta = |x-y|$, per il quale valore di δ si ha che $|f(x) - f(y)| \in B_f(\delta)$. $\square$

Come promesso, la conoscenza del modulo di continuità uniforme di f permette di stabilire se f è uniformemente continua oppure no.

Proposizione. *Sia $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è uniformemente continua se e solo se $\varphi_f(\delta) \to 0$ per $\delta \to 0^+$.*

Dimostrazione. Per definizione di estremo superiore si ha, per $\varepsilon, \delta_0 > 0$:

$$\Big(\forall x, y \in A \quad |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \varepsilon\Big) \iff \varphi_f(\delta) \le \varepsilon\,.$$

Quindi la proposizione (definizione di continuità uniforme)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in A \quad |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \varepsilon$$

equivale a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \varphi_f(\delta) \le \varepsilon\,.$$

Poiché la funzione $\eta \mapsto \varphi_f(\eta)$ è nonnegativa e debolmente crescente, questo equivale ancora a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R} \quad 0 < \eta \le \delta \Rightarrow |\varphi_f(\eta)| \le \varepsilon\,.$$

Quest'ultima formula non è altro che la definizione di

$$\lim_{\eta \to 0^+} \varphi_f(\eta) = 0\,.$$

□

Proposizione. *Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è lipschitziana di costante $L \ge 0$ se e solo se $\varphi_f(\delta) \le L\delta$ per ogni $\delta \ge 0$, ed è hölderiana di esponente $\alpha \in [0,1]$ e costante $M \ge 0$ (cioè $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|^\alpha$ $\forall x, y \in A$) se e solo se si ha che $\varphi_f(\delta) \le M\delta^\alpha$ per ogni $\delta \ge 0$.*

Dimostrazione. Il caso lipschitziano rientra in quello hölderiano con esponente 1, quindi basta considerare il caso hölderiano. Supponiamo dunque che $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|^\alpha$ $\forall x, y \in A$. Allora

$$\forall x, y \in A \qquad |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le M|x-y|^\alpha \le M\delta^\alpha\,.$$

Perciò $M\delta^\alpha$ è un maggiorante di $B_f(\delta)$, e da questo segue che $\varphi_f(\delta) = \sup B_f(\delta) \le M\delta^\alpha$.
Viceversa, se $\varphi_f(\delta) \le M\delta^\alpha$ per ogni $\delta \ge 0$, abbiamo che

$$\forall x, y \in A \qquad |f(x)-f(y)| \le \varphi_f(|x-y|) \le M|x-y|^\alpha\,,$$

cioè f è hölderiana di esponente α e costante M. □

2. Interpretazioni geometriche.

Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, cosa vuol dire che è uniformemente continua? La risposta è meno facile che nel caso della continuità in un punto, perché nella definizione di "continuità in x" la f viene calcolata in x e in y, ma di queste *la x è fissa e solo la y è variabile*:

$$f \text{ è continua in } x \iff \Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in A\ \ |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \varepsilon\Big)\,.$$

Invece nella definizione di continuità uniforme *sia la x che la y sono variabili*:

$$f \text{ è uniformemente continua} \iff \Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in A\ \ |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \varepsilon\Big)\,.$$

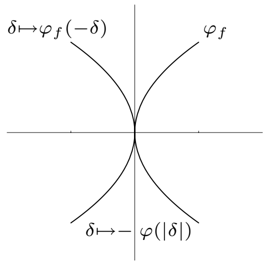
Il salto di dimensione richiede un maggior sforzo di comprensione, ma la cosa è fattibile. Ci sono in genere due approcci ai problemi con funzioni reali di due variabili indipendenti: quello *dinamico*, in cui una delle due variabili è interpretata come temporale e l'altra spaziale, così da avere un film in cui ogni fotogramma ha una sola variabile indipendente, e quello *statico*, nel quale si lavora con funzioni reali delle due variabili spaziali x, y, i cui grafici saranno superfici nello spazio tridimensionale. Proveremo a illustrare l'uniforme continuità in entrambi i modi.

Cominciamo dall'approccio dinamico. Congeliamo la situazione all'istante $x = x_0$. In termini di modulo di continuità uniforme, abbiamo la seguente informazione:

$$\forall y \in A \qquad |f(x_0) - f(y)| \le \varphi_f(|x_0 - y|)\,,$$

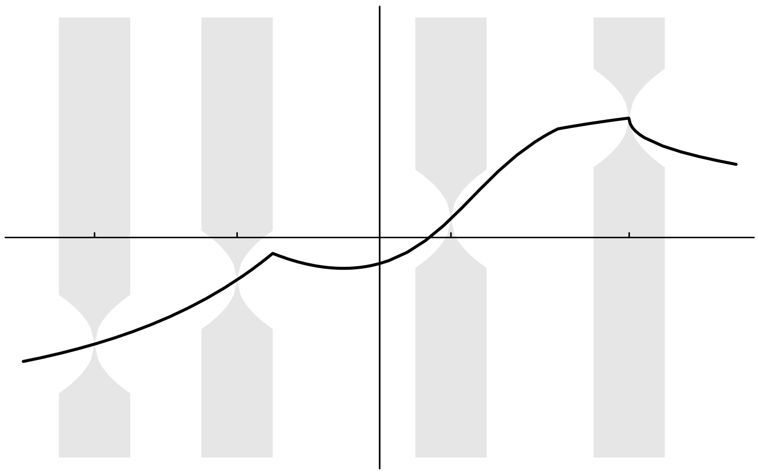
cioè

$$\forall y \in A \qquad f(x_0) - \varphi_f(|x_0 - y|) \le f(y) \le f(x_0) + \varphi_f(|x_0 - y|)\,.$$



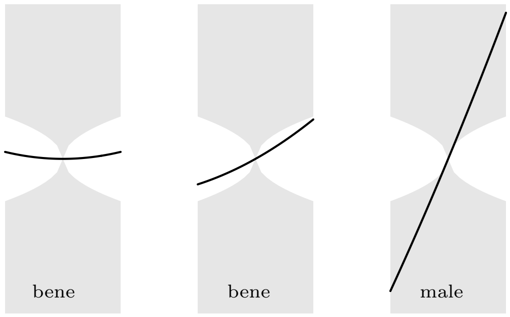
Questa relazione vuol dire che il grafico di f è tutto compreso fra i grafici delle due funzioni $y \mapsto f(x_0) \pm \varphi_f(|x_0 - y|)$. Le due funzioni limitatrici si ottengono dal grafico di $\delta \mapsto \varphi_f(\delta)$ con poca fatica: dapprima si simmetrizza rispetto all'asse delle ordinate, ottenendo $\delta \mapsto \varphi_f(|\delta|)$; poi si simmetrizza rispetto all'asse delle ascisse, producendo le due funzioni $y \mapsto \pm\varphi(|\delta|)$ (questa è la situazione nella figura qui accanto). Infine si trasla il grafico in modo da portare l'origine nel punto $(x_0, f(x_0))$. La zona al di sopra del grafico di $y \mapsto f(x_0) + \varphi_f(|x_0 - y|)$ e la zona al di sotto di quello di $y \mapsto f(x_0) - \varphi_f(|x_0 - y|)$ sono proibite per il grafico di f. Poiché f è uniformemente continua, $\lim_{y\to x_0} f(x_0) \pm \varphi_f(|x_0 - y|) = f(x_0)$, e quindi le regioni proibite formano un imbuto che costringe anche la $f(y)$ a tendere a $f(x_0)$ per $y \to x_0$.

Diamo ora a x_0 diversi valori, disegnando per l'imbuto attorno a ogni punto $(x_0, f(x_0))$:

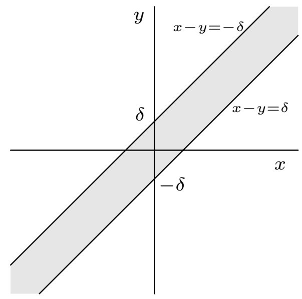


La cosa fondamentale che va osservata è che *per una funzione uniformemente continua gli imbuti sono tutti uguali* (più precisamente: sono congruenti) fra di loro. Sono tutti ottenuti traslando nel punto $(x_0, f(x_0))$ un unico imbuto modello: quello delimitato dalle funzioni $\delta \mapsto \pm\varphi_f(|\delta|)$.

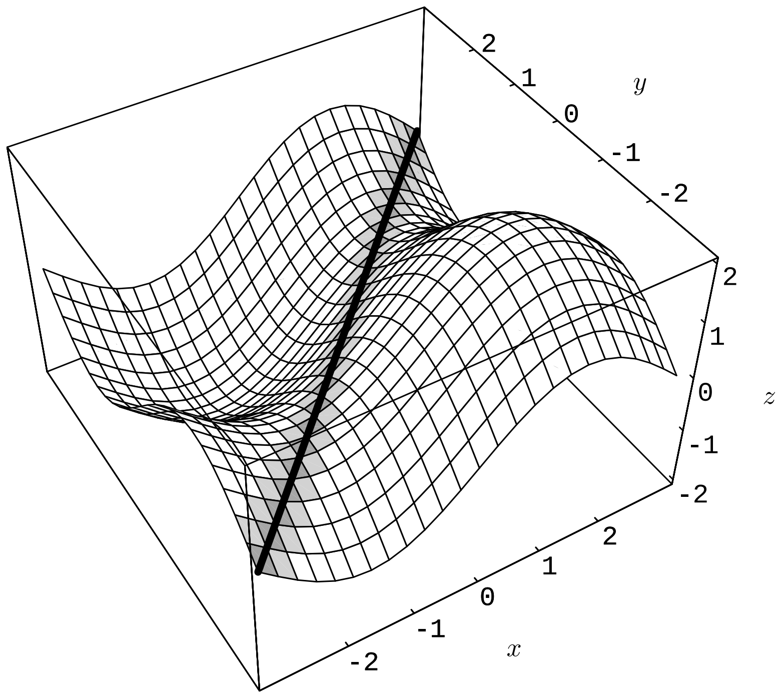
Quello che vedete qui accanto è un campionario forme tipiche di imbuti. I primi tre sono di tipo angoloso, quello che ci aspettiamo dalle funzioni lipschitziane. Le successive tre sono imbuti non lipschitziani: li abbiamo costruiti come hölderiani di esponenti 1/2, 1/3 e 1/4 e diversi coefficienti, ma ad occhio sono indistinguibili da imbuti non hölderiani, come $\delta \mapsto 1/\ln\delta$. L'ultimo a destra è un esempio cattivo: quello che si può temere che succeda se si prende il modulo di continuità uniforme di una funzione f non uniformemente continua, perché in tal caso $\varphi_f(\delta)$ non tende a 0 per $\delta \to 0^+$.



Se si prende una funzione non uniformemente continua e si cerca di imbracarla nell'imbuto di una uniformemente continua, la cosa riuscirà forse in alcuni punti x_0 ma non in tutti. Si pensi all'esempio della funzione $f(x) := x^2$ su $A = \mathbb{R}$: fissato un qualsiasi imbuto, come quello hölderiano del disegno, potrò sempre trovare un x_0 così grande che il grafico di f attorno a x_0 è abbastanza ripido da trabordare nella zona proibita. Se la funzione è continua in ogni punto, esisterà un imbuto su misura per ogni punto dato, ma questi imbuti dovranno essere sempre più aperti via via che il grafico diventa ripido.



Veniamo ora all'approccio statico, che magari non sarà particolarmente più illuminante di quello dinamico, ma è di sicuro spettacolare. Interpretiamo entrambe le variabili x, y come variabili spaziali, dando loro la stessa dignità. Allora dire che $|x - y| \leq \delta$ vuol dire che il punto (x, y) appartiene alla striscia del piano compresa fra le due rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante e che attraversano l'asse delle ordinate nei punti $(0, \pm\delta)$. La relazione $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ dice che quando il punto (x, y) è nella striscia, il valore assoluto della funzione $(x, y) \mapsto f(x) - f(y)$ non supera ε. Ora, una funzione di due variabili reali ha come grafico un sottinsieme di $\mathbb{R}^3$. Ad esempio, nel caso della funzione “seno” il grafico è la superficie seguente (con ascissa e ordinata ristrette a $[-\pi, \pi]$):

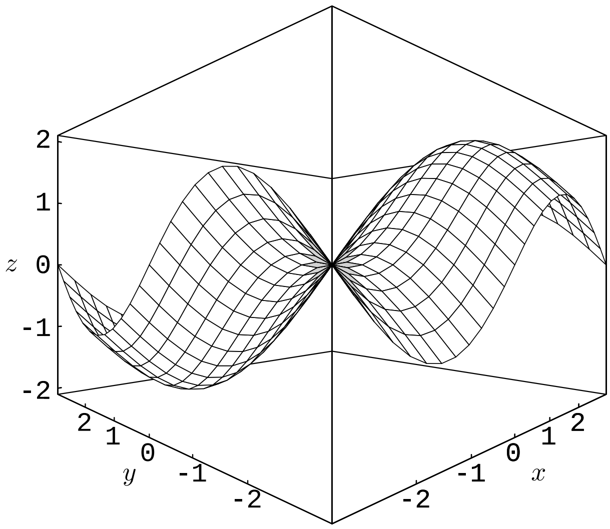


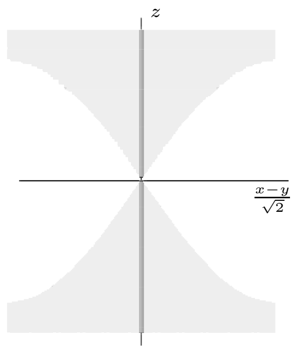
La funzione $(x, y) \mapsto f(x) - f(y)$ non è una qualsiasi funzione di due variabili: se ne tagliamo il grafico con un piano parallelo al piano xz, cioè se teniamo y costante, l'intersezione è il grafico di $x \mapsto f(x) -$ costante, e quindi è semplicemente una copia del grafico di f, traslata verticalmente della costante $-f(y)$. Se invece si taglia con un piano parallelo al piano yz si ottiene una traslazione verticale del grafico di $-f$. Un'occhiata all'illustrazione renderà più chiari questi fatti.

Quando $x = y$, la funzione $(x, y) \mapsto f(x) - f(y)$ si annulla, e quindi la retta di equazione $x - y = z = 0$ (che chiameremo “bisettrice”) in $\mathbb{R}^3$ è tutta contenuta nel grafico della funzione. La bisettrice è evidenziata nella figura.

La porzione che ci interessa della superficie, cioè quella che sta nella regione $|x-y| \leq \delta$, è dipinta in grigio (il bordo della fascia grigia idealmente non dovrebbe essere frastagliato, ma purtroppo la discretizzazione non è molto fine ed è parallela agli assi, e quindi rende male le curve trasversali). Ma limitarsi a guardare la superficie dall'alto vorrebbe dire non accorgersi che c'è *un punto di vista privilegiato* per il nostro problema: precisamente, conviene fotografare col teleobiettivo la superficie da un punto infinitamente lontano lungo la bisettrice $x-y=z=0$. In altre parole, consideriamo la proiezione della superficie su un piano ortogonale alla retta. Così facendo, la bisettrice viene schiacciata in un punto, i piani $x-y=$ costante vengono visti di taglio, e il punto $(x,y,f(x)-f(y))$ della superficie diventa il punto $((x-y)/\sqrt{2}, f(x)-f(y))$, smistando i valori di $f(x)-f(y)$ a seconda del valore di $x-y$.

Orbene, *la proiezione della superficie sul piano ortogonale alla bisettrice contiene tutte le informazioni che ci servono per decidere se la funzione è uniformemente continua*: bisogna e basta che la proiezione sia tutta contenuta in un imbuto di tipo buono (dove $\varphi(\delta) \to 0$ per $\delta \to 0^+$), centrato nella proiezione dell'origine. Nel caso del seno, la proiezione sta in un imbuto di tipo lipschitziano, come c'era da aspettarsi.





(In verità il punto di vista di questa figura non è infinitamente lontano, anzi, è piuttosto vicino, ma questo piccolo imbroglio aggiunge un tocco di profondità prospettica senza alterare in modo sensibile le conclusioni che vogliamo trarre).

Si sarebbe tentati di pensare che il profilo della proiezione della superficie sia precisamente il grafico di $\pm\varphi_f$, ma non è esattamente così. Innanzitutto,avendo proiettato su un piano che sta a 45° con gli assi x e y la scala orizzontale e verticale non sono le stesse; ad esempio la striscia $|x-y| \leq \delta$ viene proiettata sul segmento $[-\delta/\sqrt{2}, +\delta/\sqrt{2}]$. (Notare che il profilo non si incrocia ad angolo retto, come dovrebbe nel caso del seno). Quand'anche riscalassimo le coordinate, però, il profilo corrisponderebbe non alla funzione $\varphi_f(\delta)$, ma a una sua variante, che contiene un segno '$=$' al posto di un '$\leq$'

$$\varphi_{f,=}(\delta) := \sup\{0\} \cup \Big\{ |f(x)-f(y)| \ :\ x,y \in A,\ |x-y| = \delta \Big\}.$$

Nel caso del seno questa funzione si può calcolare esplicitamente $\varphi_{\mathrm{sen},=}(\delta) = 2|\operatorname{sen}(\delta/2)|$. (Notare che $\varphi_{\mathrm{sen},=}$ non è monotona). Si parte dalle formule di prostaferesi e ci si ricorda che $|\cos\alpha| \leq 1\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$:

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = \left| 2\cos\frac{x+y}{2} \operatorname{sen}\frac{x-y}{2} \right| \leq 2\cdot 1 \cdot \left| \operatorname{sen}\frac{x-y}{2} \right|.$$

Dunque

$$\varphi_{\mathrm{sen},=}(\delta) = \sup\{0\} \cup \Big\{ |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \ :\ x,y \in A,\ |x-y| = \delta \Big\} \leq 2 \cdot \left| \operatorname{sen}\frac{\delta}{2} \right|.$$

In realtà l'ultima disuguaglianza è un'uguaglianza, perché dato δ si possono sempre trovare x, y tali che $|x-y| = \delta$ e che $\cos\frac{x-y}{2} = 1$, ad esempio $x = \delta/2$, $y = -\delta/2$, di modo che

$$\varphi_{\mathrm{sen},=}(\delta) \geq \big|\operatorname{sen}(\delta/2) - \operatorname{sen}(-\delta/2)\big| = 2 \cdot \left| \cos 0 \operatorname{sen}\frac{\delta}{2} \right| = 2 \cdot \left| \operatorname{sen}\frac{\delta}{2} \right|.$$

3. Esercizi.

Esercizio. Dimostrare che

$$\varphi_{\mathrm{sen}}(\delta) = \begin{cases} 2\,\mathrm{sen}(\delta/2) & \text{se } 0 \le \delta \le \pi, \\ 2 & \text{se } \delta > \pi. \end{cases}$$

Esercizio. Calcolare il modulo di continuità uniforme delle funzioni $x \mapsto \mathrm{sen}(1/x)$ per $x > 0$, $x \mapsto \mathrm{sen}\, x^2$ per $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio. Dimostrare che il modulo di continuità uniforme della funzione $x \mapsto \sqrt{x}$, per $x \ge 0$, è $\delta \mapsto \sqrt{\delta}$. Avvio: dimostrare la disuguaglianza $\sqrt{x} - \sqrt{y} \le \sqrt{x-y}$ se $x \ge y \ge 0$.

Esercizio. Nelle figure abbiamo disegnato la funzione $\delta \mapsto \varphi_f(\delta)$ come se fosse continua. Dimostrare che la funzione $f(x) := \mathrm{segno}\, x$ su $A := [-2,-1] \cup [1,2]$ è uniformemente continua ma che il suo modulo di continuità uniforme è discontinuo.

Esercizio. Il modulo di continuità uniforme di una funzione è sempre necessariamente continuo da sinistra, o continuo da destra?

***Esercizio.** Data una funzione $\varphi\colon [0,\delta_0] \to [0,+\infty[$ debolmente crescente, dimostrare che esiste una funzione *continua* $\tilde{\varphi}\colon [0,\delta_0] \to [0,+\infty[$, pure debolmente crescente, tale che $\varphi \le \tilde{\varphi}$ e che $\lim_{\delta\to 0^+} \tilde{\varphi}(\delta) = \lim_{\delta\to 0^+} \varphi(\delta)$. In altre parole, possiamo leggermente ingrandire il modulo di continuità uniforme in modo da renderlo continuo vicino all'origine, senza perdere le proprietà essenziali. Avvio: interpolare linearmente i punti $(\delta_0/(n+1), \varphi(\delta_0/n))$, per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Esercizio. Sia I un intervallo illimitato e $f\colon I \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi_f(\delta_0) < +\infty$ per almeno un $\delta_0 > 0$. Dimostrare che allora esistono $a, b \ge 0$ tali che $|f(x)| \le a|x| + b$ per ogni $x \in I$ ("crescenza al più lineare all'infinito"). La conclusione non è vera se I non è un intervallo, anche se f fosse uniformemente continua. Conseguenza: se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x)/x$ è illimitato in ogni intorno di ∞, allora $\varphi_f(\delta) = +\infty$ per ogni $\delta > 0$. Questo fra l'altro dimostra che le funzioni $x \mapsto x^n$ non sono uniformemente continue su $\mathbb{R}$ quando $n > 1$. Avvio: per semplicità sia I illimitato a destra di $0 \in I$ e stimare $f(x)$ successivamente su $[0,\delta_0]$, su $[\delta_0, 2\delta_0]$, $[2\delta_0, 3\delta_0]$... Per il controesempio, si prenda $x \mapsto x^2$ con $A = \mathbb{Z}$.

Esercizio. Sia $\varnothing \ne A \subset \mathbb{R}$ limitato e $f\colon A \to \mathbb{R}$. Allora f è limitata se e solo se $\varphi_f(\delta_0) < +\infty$ per almeno un $\delta_0 > 0$.

Esercizio. Sia $\varnothing \ne A \subset \mathbb{R}$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$. Allora f è limitata se e solo se $\delta \mapsto \varphi_f(\delta)$ è limitata.

Esercizio. Sia $\psi\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty]$ tale che $|f(x) - f(y)| \le \psi(|x-y|)$ $\forall x, y \in A$. Dimostrare che $\varphi_f(\delta) \le \sup \psi([0,\delta])$ per ogni $\delta \ge 0$. Se ψ è debolmente crescente, si ha più semplicemente $\varphi_f(\delta) \le \psi(\delta)$ per ogni $\delta \ge 0$. Dimostrare che se $\psi(\delta) \to 0$ per $\delta \to 0^+$ allora f è uniformemente continua. (Le funzioni lipschitziane e quelle hölderiane si ottengono prendendo $\psi(\delta) = M\delta$ o rispettivamente $\psi(\delta) = M\delta^\alpha$).

Esercizio. Dimostrare che $\varphi_f(\delta) = \sup\{\varphi_{f,=}(\delta') \;:\; 0 \le \delta' \le \delta\}$, che $|f(x) - f(y)| \le \varphi_{f,=}(|x-y|)$ $\forall x, y \in A$, e che f è uniformemente continua se e solo se $\delta_{f,=}(\delta) \to 0$ per $\delta \to 0^+$. La funzione $\varphi_{f,=}$ è sempre necessariamente continua da destra, o da sinistra?

***Esercizio.** Definiamo $B_{f,<}(\delta) := \{0\} \cup \{|f(x) - f(y)| \;:\; x, y \in A, |x-y| < \delta\}$ e $\varphi_{f,<}(\delta) := \sup B_{f,<}(\delta)$. Dimostrare che $\varphi_{f,<}$ vale 0 in 0, è nonnegativa, debolmente crescente e *continua da sinistra* in ogni punto in cui è finita. Inoltre f è uniformemente continua se e solo se $\varphi_{f,<}(\delta) \to 0$ per $\delta \to 0^+$. Però non vale necessariamente la relazione $|f(x) - f(y)| \le \varphi_{f,<}(|x-y|)$, e $\varphi_{f,<}$ non è necessariamente continua anche da destra. Avvio: per la continuità da sinistra notare che $B_{f,<}(\delta_0) = \bigcup_{\delta<\delta_0} B_{f,<}(\delta)$, e ricordare che l'estremo superiore dell'unione di insiemi è uguale a...

Esercizio. Definiamo $B_{f,x_0}(\delta) := \{|f(x_0) - f(y)| \;:\; y \in A, |x_0 - y| \le \delta\}$ e $\varphi_{f,x_0} := \sup B_{f,x_0}(\delta)$ ("modulo di continuità semplice in x_0") per $x_0 \in A$, $\delta \ge 0$. Dimostrare che $\delta \mapsto \varphi_{f,x_0}(\delta)$ è debolmente crescente, che $|f(x_0) - f(y)| \le \varphi_{f,x_0}(|x_0 - y|)$ per ogni $y \in A$, che f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{\delta\to 0^+} \varphi_{f,x_0}(\delta) = 0$. Quando f è continua in x_0, le funzioni $y \mapsto f(x_0) \pm \varphi_{f,x_0}(|x_0 - y|)$ fanno da imbuto per f attorno al punto $(x_0, f(x_0))$. Dimostrare infine che $\varphi_f(\delta) = \sup\{\varphi_{f,x_0}(\delta) \;:\; x_0 \in A\}$ per ogni $\delta \ge 0$.