Cardinalità Infinite

"Contare" un insieme finito vuol dire passarne in rivista gli elementi, uno ad uno, (badando che quelli già contati non si rimescolino agli altri), mentre si mormora una filastrocca: "uno, due, tre…" L'ultima parola pronunciata è il risultato. Quando si sono contati due insiemi, i numeri ci dicono qual è il più grande. Talvolta però non è necessario il conteggio separato per *confrontare* i numeri. È quando gli elementi dell'uno vanno in coppia con quelli dell'altro. Ad esempio, davanti ad un uditorio tutto comodamente seduto, non piove sul fatto che il numero di sedie è maggiore o uguale al numero degli spettatori, mentre il loro numero preciso importerà solo al botteghino. Se A è l'insieme degli uditori e B quello delle sedie, vediamo definita davanti ai nostri occhi l'applicazione *iniettiva* $f\colon A \to B$ che associa ad ogni persona la sedia su cui poggia (chi ha un bambino in braccio è "comodamente" seduto?). Se poi c'è il tutto esaurito, A e B hanno la stessa numerosità (f è suriettiva oltre che iniettiva).

Definizione. *Dati due insiemi A e B, si dice che A è equipotente a B (o che ha la stessa "cardinalità", o la stessa "numerosità") se esiste una $f\colon A \to B$ biiettiva. Useremo in tal caso la notazione $|A| = |B|$. Scriveremo invece $|A| \le |B|$ se esiste una applicazione $g\colon A \to B$ iniettiva (ossia se A è equipotente ad un sottinsieme di B).*

Esercizio. Verificare formalmente l'ultima affermazione fra parentesi.

Nella teoria delle cardinalità è fondamentale il seguente teorema, per la cui dimostrazione chi è interessato può vedere ad esempio il libro di Prodi, *Analisi Matematica*, pag. 64.

Teorema di Bernstein. *Se $|A| \le |B|$ e $|B| \le |A|$, allora $|A| = |B|$.*

(L'implicazione inversa è pure vera, banalmente).

Il teorema è provvidenziale perché, come vedremo, può essere facile trovare una $f\colon A \to B$ e una $g\colon B \to A$ entrambe iniettive, ma non suriettive, e quindi tantomeno una l'inversa dell'altra. Siamo sollevati dall'urgenza di trovare una biiezione.

L'equipotenza è pacifica nel caso di insiemi finiti. Dopo tutto, contando un insieme appaiamo i suoi elementi con quelli di una sequenza campione di numeri naturali, che medierà l'eventuale confronto con altri insiemi. È quando passiamo agli insiemi *infiniti* che entriamo in un mondo incantato, popolato di fatti che fanno a pugni con il senso comune.

Il paradosso più facile è quello che se togliamo ad $\mathbb{N}$ un elemento, la cardinalità non cambia. C'è una corrispondenza biunivoca (non unica) fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}\setminus\{1\}$:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & & \cdots \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

che è data dalla semplice formula $f(n) = n + 1$. (Qualcuno sa scrivere altre biiezioni?).

Un albergo ha infinite stanze, numerate con 1, 2, 3, …, e tutte occupate. Arriva un cliente "eccellente". Ci tocca respingerlo?

Possiamo persino togliere ad $\mathbb{N}$ *infiniti* elementi senza cambiarne la potenza. $\mathbb{N}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri pari:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \cdots \end{array}$$

La formula della biiezione è $f(n) = 2n$.

Se all'albergo arrivano infiniti altri clienti?

Esercizio. Trovare, se c'è, una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

Esercizio. Verificare che la funzione $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ stabilisce una corrispondenza biunivoca fra $]-1, 1[$ ed $\mathbb{R}$.

Suggerimento: $\forall y \in \mathbb{R}$ l'equazione $\frac{x}{1-x^2} = y$ ha una e una sola soluzione x compresa fra -1 e 1. Si può anche scrivere una formula per f^{-1}. Il problema si può risolvere tramite equazioni/disequazioni, o con la "discussione dei problemi di secondo grado", o con lo studio di funzione. I pigri possono rimandare la risoluzione a quando avremo trattato quest'ultimo argomento.

Esercizio. $\mathbb{N}$ si può spezzare in *infiniti* sottinsiemi *disgiunti*, ognuno dei quali a sua volta *infinito*!
Suggerimento: prendere i numeri primi 2,3,5,7,11... e considerare {potenze di 2}, {potenze di 3}, ecc.

Fatti come questi sono così tipici degli insiemi infiniti che si può addirittura *definire* un insieme infinito (scusate il bisticcio) come un insieme equipotente ad un suo sottinsieme *proprio*.

*** Esercizio.** Dimostrare che un insieme infinito (secondo la definizione appena data) contiene sempre un sottinsieme equipotente ad $\mathbb{N}$.
Suggerimento: sia $a \in A$ e sia $f: A \to A \setminus \{a\}$ iniettiva. Definire $g: \mathbb{N} \to A$ ricorsivamente come $g(1)=a$, $g(n+1)=f(g(n))$. Si tratta di mostrare che g è iniettiva.

Qualcuno si sentirebbe già pronto a scommettere che l'unica cosa che si può dire sulla numerosità di un insieme infinito è che è infinita. In effetti prima di Georg Cantor (1845–1918) nessuno si era dato pena di esplorare più a fondo questo terreno inquietante. Persino molti matematici contemporanei di Cantor rigettarono in blocco le sue ardite idee sull'infinito.

La prima scoperta di Cantor riguardava i numeri razionali. Sappiamo che sulla retta numerica i razionali sono disposti densamente: fra due qualsiasi di loro ce ne sono infiniti altri. I numeri naturali sono invece isolati l'uno dall'altro. Eppure Cantor dimostra che $\mathbb{Q}$ è equipotente a $\mathbb{N}$.

Cominciamo col dimenticarci che i razionali sono sulla retta, e pensiamoli invece come coppie di numeri interi separati da una sbarra: $1/2$, $3/4\ldots$ Soprassediamo per ora al problema delle frazioni equivalenti $1/2 = 2/4\ldots$ e pensiamole come tutte distinte. Scordiamoci anche dei numeri negativi. In definitiva, prendiamo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ al posto di $\mathbb{Q}$. L'idea è di "sparpagliare" queste frazioni n/m a distanze fisse fra loro. Procederemo a costruire $f: \mathbb{N} \to \{\text{frazioni}\}$ associando ad 1 una frazione a scelta, a 2 una vicina e procedendo con qualche tipo di spirale. Dovremo infine essere assolutamente sicuri che *ogni* frazione viene "contata" dopo un numero *finito* di passi.

Presentiamo qui di seguito una disposizione che fa al caso nostro. Piazziamo n/m all'intersezione fra l'n-esima colonna e l'm-esima riga di una tabella rettangolare (infinita, ovviamente). Il conteggio avviene per "diagonali" successive:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1/1 & & 2/1 & & 3/1 & & 4/1 & & 5/1 & & 6/1 & & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & & 5/2 & & \cdots & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 & & 5/3 & & \cdots & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
1/4 & & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 & & 5/4 & & \cdots & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
1/5 & & 2/5 & & 3/5 & & 4/5 & & 5/5 & & \cdots & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
1/6 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \\
\vdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

producendo le coppie

$$\begin{array}{rcllllllllll}
\mathbb{N} & = & \{ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \quad \} \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} & = & \{ & 1/1 & 1/2 & 2/1 & 1/3 & 2/2 & 3/1 & 1/4 & 2/3 & \ldots \quad \} \quad .
\end{array}$$

Esercizio. Si può scrivere esplicitamente la biiezione $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (è un polinomio).
Suggerimento: la frazione n/m si trova sulla ...-esima "diagonale". Nelle diagonali precedenti ci sono ... frazioni (ricordare la formula per $1+2+3+\cdots+k$). Sulla diagonale attuale, n/m è la ...-esima frazione. Totale: $f(n/m)=\ldots$

Si può usare la f dell'esercizio precedente per costruire una $g: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$ iniettiva. Basta, dato $r \in \mathbb{Q}^+$, dapprima ridurlo ai minimi termini $r = n/m$ e poi porre $g(r) = f(n/m)$.

Esercizio. La g è suriettiva? È così grave la risposta? Qualcuno è capace di scrivere una $h: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ iniettiva?

Esercizio. Data una $F:\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$ biiettiva, costruire una $G:\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ biiettiva.

Morale: gli elementi di $\mathbb{Q}$ si possono disporre sulla retta a distanze fisse. Gli elementi di $\mathbb{N}$ si possono disporre sulla retta in modo denso.

Riavutasi dalla sorpresa, una potrebbe sentirsi confermata nella supposizione che tutti gli infiniti siano equivalenti. E qui arriva la seconda scoperta di Cantor: $\mathbb{R}$ *non* è equipotente ad $\mathbb{N}$.

Va dimostrato che non esiste alcuna $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biiettiva. Prendiamo allora una *qualsiasi* $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e dimostriamo che non è suriettiva.

Disponiamo in fila indiana verticale i numeri $f(1)$, $f(2)$, $f(3)\ldots$. Ricordiamoci che ogni numero reale si può scrivere come un allineamento decimale infinito (in cui *non* compaiono infiniti 9 *consecutivi*). È meglio scriverli con la virgola incolonnata:

$$
\begin{array}{lcccccccccccl}
f(1) = & & - & 1 & 2 & , & \boxed{3} & 5 & 1 & 6 & 4 & 1 & \ldots\ldots \\
f(2) = & & & + & 0 & , & 0 & \boxed{0} & 1 & 4 & 0 & 1 & \ldots\ldots \\
f(3) = & - & 3 & 4 & 0 & , & 1 & 0 & \boxed{3} & 0 & 4 & 1 & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
f(n) = & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & , & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \boxed{\alpha_n} & \ldots & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Indichiamo con α_n l'n-esima cifra dopo la virgola del numero reale $f(n)$, ossia la cifra che sta sulla "diagonale principale". Ad esempio, nel nostro caso, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 3$. Possiamo disporre le α_n in un allineamento decimale

$$+0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots$$

ma la cosa non interessa (potrebbero essere tutte 9?). Quello che va fatto è *cambiarle tutte* sistematicamente in maniera da produrre un nuovo allineamento

$$+0,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\ldots$$

che differisca dal precedente in *tutte* le cifre dopo la virgola, e con l'accortezza di non farlo terminare in infiniti 9 di seguito. Ad esempio possiamo porre

$$\beta_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha_n \neq 0 \\ 1 & \text{se } \alpha_n = 0\,. \end{cases}$$

Nel nostro caso $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0$.

Esiste allora un numero reale x che ha precisamente $+0,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\ldots$ come allineamento decimale. Ebbene, questo x non sta nell'immagine di f! Infatti

$$
\begin{array}{ccc}
x \neq f(1) & \text{perché} & \beta_1 \neq \alpha_1 \\
x \neq f(2) & \text{perché} & \beta_2 \neq \alpha_2 \\
 & \ldots & \\
x \neq f(n) & \text{perché} & \beta_n \neq \alpha_n \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

Come annunciato, f non è suriettiva.

Esercizio. La dimostrazione filerebbe liscia se invece degli allineamenti decimali avessimo usato quelli binari? Occorrerebbe una lieve modifica?

*** Esercizio.** Dimostrare che il quadrato $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1\}$ è equipotente al segmento $[0,1[$.

Per produrre una $f:A \to [0,1[$ iniettiva, "intercalate" gli allineamenti...

Esercizio. Dimostrare dapprima che $\mathbb{R}$ è equipotente a $[0,1[$, e poi che $\mathbb{R}^2$ è equipotente a $\mathbb{R}$.

La scoperta era sensazionale: esistono almeno due cardinalità infinite. Quella di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{Q}$, che sarà chiamata *numerabile* e quella, più grande, di $\mathbb{R}$, o di $\mathbb{R}^2$, che sarà detta *continua*. Dobbiamo aggiornare la nostra visione intuitiva della retta e del piano! Con $\mathbb{N}$ potremo coprire la retta in maniera densa ma *mai* esaustiva. Lasceremo sempre fuori infiniti più punti di quanti ne prendiamo. Viceversa, non potremo mai sparpagliare i punti della retta in modo che abbiano distanze fisse l'uno dal vicino. Possiamo invece ridistribuirli in modo da coprire tutto il piano! (In realtà possiamo coprire con $\mathbb{R}$ uno spazio a qualsiasi dimensione finita).

Sorge spontanea la domanda: esistono cardinalità ancora più grandi di quella di $\mathbb{R}$? La risposta è sì, e la dimostrazione è davvero semplice.

Teorema. *Sia A un insieme e sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A (l'insieme di tutti i sottinsiemi di A). Allora $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità strettamente maggiore di quella di A.*

Dimostrazione. È chiaro che $|A| \le |\mathcal{P}(A)|$, perché ad esempio la funzione $a \mapsto \{a\}$ è iniettiva da A in $\mathcal{P}(A)$. Bisogna far vedere che non ci sono biiezioni fra i due insiemi. Sia $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ una funzione. Sia

$$B = \{x \in A \,|\, x \notin f(x)\}\,.$$

L'insieme B è $\subset A$, quindi $B \in \mathcal{P}(A)$, ma B *non* è nell'immagine di f, per cui f non è suriettiva! Supponiamo per assurdo che $B = f(x_0)$. Chiediamoci se x_0 appartiene o no a B. Se sì, allora verifica la proprietà che definisce B, e quindi $x_0 \notin f(x_0) = B$. Se no, allora non la verifica, ossia $x_0 \in f(x_0) = B$. Quindi dall'ipotesi che $B = f(x_0)$ deduciamo una proposizione manifestamente falsa come "$x_0 \in B \iff x_0 \notin B$".

La dimostrazione assomiglia ad un gioco di parole, e forse è opportuno trasformarla in una storiella. A è l'insieme degli abitanti di un villaggio, e la funzione f associa ad ogni individuo l'insieme di tutti coloro che vengono rasati da lui. Ad esempio, se x è un barbiere, $f(x)$ è l'insieme dei suoi clienti. Dopo aver mandato fuori mercato la concorrenza, il barbiere espone un trionfale cartello che dice: io rado tutti coloro che non si radono da sé, e non rado coloro che si radono da sé. Un bel mattino il barbiere si accinge a radere se stesso, e va in tilt: il suo proclama non lo autorizza né a radersi, né a non radersi! Morale: esistono sotto il cielo più possibili insiemi di clienti di quanti possano esistere barbieri.

Esercizio. Dimostrare che non esiste l'insieme di tutti gli insiemi.

Se esiste, chiamiamolo Ω. Risulta $\mathcal{P}(\Omega)\subset\Omega$ e quindi c'è una iniezione $\mathcal{P}(\Omega)\to\Omega$...

Dunque $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ è un insieme di cardinalità maggiore del continuo. E perché fermarci? $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ è ancora più grande, e uno immagina che si può procedere "all'infinito". Rimane un dubbio: $\mathbb{R}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sono entrambi maggiori della potenza numerabile, ma fra di loro come sono? Ebbene, sono uguali.

*** Esercizio.** Dimostrare l'ultima affermazione.

Suggerimento: per produrre una $f{:}\mathbb{R}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ iniettiva, ridursi prima da $\mathbb{R}$ a $[0,1[$, e poi rappresentare i punti di $[0,1[$ in forma binaria. Definire $f(x)=\{n \,|\, x$ ha un 1 al posto n-esimo$\}$. Lasciamo il resto alla fantasia delle lettrici.

Cantor ha introdotto la prima lettera dell'alfabeto ebraico, *alef*: $\aleph$ come simbolo speciale per le cardinalità infinite. La più piccola, quella numerabile, si indica con $\aleph_0$, mentre la cardinalità del continuo con $2^{\aleph_0}$. Il motivo di quest'ultima notazione è chiarito dall'esercizio seguente. La cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ è detta a volte *"funzionale"*, perché è quella dell'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un insieme con quella cardinalità "non può stare" sulla retta o sul piano, perché ha troppi elementi, e i punti del piano non bastano. Ma nella ordinaria amministrazione dell'Analisi Matematica non si incontrano insiemi così spropositatamente grandi.

Esercizio. Sia A un insieme *finito* con n elementi. Allora $\mathcal{P}(A)$ ha esattamente 2^n elementi.

Si può fare per induzione.

*** Esercizio.** Dimostrare che $|\{\text{ funzioni } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}| = 2^{2^{\aleph_0}} = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.

Suggerimento: pensare ad una funzione come ad un insieme di coppie ordinate di numeri, e una coppia di numeri reali si può "codificare" con un unico allineamento decimale, alternando le cifre... Viceversa, ad ogni sottinsieme di $\mathbb{R}$ possiamo associare la sua funzione caratteristica...

Cardinalità infinite di interesse in Analisi Matematica

$\aleph_0$, numerabile	$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$,
$2^{\aleph_0}$, continua	$\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.