Insiemi Icaro ed immersioni elementari

Vincenzo Dimonte

Kurt Gödel Research Center

XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana

ZF è ormai considerato il sistema assiomatico standard (almeno per i teorici degli insiemi),

ZF è ormai considerato il sistema assiomatico standard (almeno per i teorici degli insiemi),
ma è troppo debole.

ZF è ormai considerato il sistema assiomatico standard (almeno per i teorici degli insiemi),
ma è troppo debole. È totalmente inadeguato a maneggiare l'infinito.

ZF è ormai considerato il sistema assiomatico standard (almeno per i teorici degli insiemi),
ma è troppo debole. È totalmente inadeguato a maneggiare l'infinito.
Anche aggiungendo AC i problemi permangono:

ZF è ormai considerato il sistema assiomatico standard (almeno per i teorici degli insiemi),
ma è troppo debole. È totalmente inadeguato a maneggiare l'infinito.
Anche aggiungendo AC i problemi permangono:
basti pensare a CH, o all'esponenziazione cardinale in generale.
Nel corso degli anni sono stati proposti diversi assiomi per descrivere l'universo oltre V_ω.

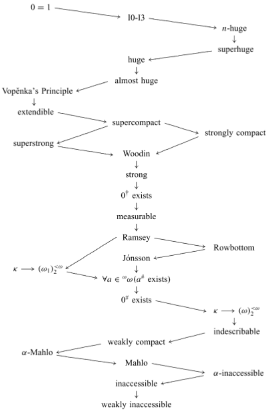
ZF è ormai considerato il sistema assiomatico standard (almeno per i teorici degli insiemi),
ma è troppo debole. È totalmente inadeguato a maneggiare l'infinito.
Anche aggiungendo AC i problemi permangono:
basti pensare a CH, o all'esponenziazione cardinale in generale.
Nel corso degli anni sono stati proposti diversi assiomi per descrivere l'universo oltre V_ω.
Alcune di queste sono riunite sotto il nome di *Large Cardinal Hypothesis*.

ZF è ormai considerato il sistema assiomatico standard (almeno per i teorici degli insiemi),
ma è troppo debole. È totalmente inadeguato a maneggiare l'infinito.
Anche aggiungendo AC i problemi permangono:
basti pensare a CH, o all'esponenziazione cardinale in generale.
Nel corso degli anni sono stati proposti diversi assiomi per descrivere l'universo oltre V_ω.
Alcune di queste sono riunite sotto il nome di *Large Cardinal Hypothesis*.
Vale a dire una serie di assiomi eterogenei che segnano la percezione dell'universo, hanno conseguenze anche su altri ambiti della Teoria degli Insiemi (e della Matematica)...

ZF è ormai considerato il sistema assiomatico standard (almeno per i teorici degli insiemi),
ma è troppo debole. È totalmente inadeguato a maneggiare l'infinito.
Anche aggiungendo AC i problemi permangono:
basti pensare a CH, o all'esponenziazione cardinale in generale.
Nel corso degli anni sono stati proposti diversi assiomi per descrivere l'universo oltre V_ω.
Alcune di queste sono riunite sotto il nome di *Large Cardinal Hypothesis*.
Vale a dire una serie di assiomi eterogenei che segnano la percezione dell'universo, hanno conseguenze anche su altri ambiti della Teoria degli Insiemi (e della Matematica)...
...e incredibilmente sono ordinati in maniera (quasi) lineare, ovvero ciascuno implica o è implicato da un altro.

Chart of Cardinals

The arrows indicates direct implications or relative consistency implications, often both.



Teorema

L'esistenza di un cardinale inaccessibile è equiconsistente con la misurabilità degli insiemi proiettivi in $\mathbb{R}$.

Teorema

L'esistenza di un cardinale inaccessibile è equiconsistente con la misurabilità degli insiemi proiettivi in $\mathbb{R}$.

Teorema (Solovay)

L'esistenza di un cardinale misurabile è equiconsistente con "'Ogni misura Boreliana su $\mathcal{B}([0,1])$ può essere estesa ad una misura su $\mathcal{P}([0,1])$"'.

Teorema

L'esistenza di un cardinale inaccessibile è equiconsistente con la misurabilità degli insiemi proiettivi in $\mathbb{R}$.

Teorema (Solovay)

L'esistenza di un cardinale misurabile è equiconsistente con "'Ogni misura Boreliana su $\mathcal{B}([0,1])$ può essere estesa ad una misura su $\mathcal{P}([0,1])$"'.

Teorema

Esiste un cardinale misurabile se e soltanto se esiste un cardinale κ ed esiste un omomorfismo non banale $h : \mathbb{Z}^\kappa / \mathbb{Z}^{<\kappa} \to \mathbb{Z}$.

Teorema

L'esistenza di un cardinale inaccessibile è equiconsistente con la misurabilità degli insiemi proiettivi in $\mathbb{R}$.

Teorema (Solovay)

L'esistenza di un cardinale misurabile è equiconsistente con "'Ogni misura Boreliana su $\mathcal{B}([0,1])$ può essere estesa ad una misura su $\mathcal{P}([0,1])$"'.

Teorema

Esiste un cardinale misurabile se e soltanto se esiste un cardinale κ ed esiste un omomorfismo non banale $h : \mathbb{Z}^\kappa/\mathbb{Z}^{<\kappa} \to \mathbb{Z}$.

Teorema (Martin-Steel)

"'Tutti i giochi infiniti su $\{0,1\}$ sono determinati"' è equiconsistente con l'esistenza di ω cardinali di Woodin.

Chart of Cardinals

The arrows indicates direct implications or relative consistency implications, often both.

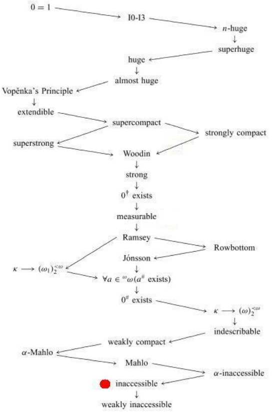


Chart of Cardinals

The arrows indicates direct implications or relative consistency implications, often both.

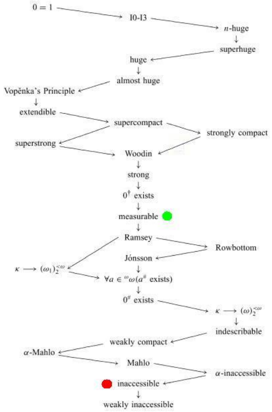
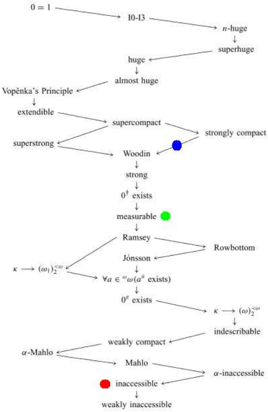


Chart of Cardinals

The arrows indicates direct implications or relative consistency implications, often both.



La "parte alta" della gerarchia si basa sulle immersioni elementari.

Definizione

Siano M, N insiemi o classi.

La "parte alta" della gerarchia si basa sulle immersioni elementari.

Definizione

Siano M, N insiemi o classi. $j : M \prec N$ è un'immersione elementare se:

- è iniettiva;

La "parte alta" della gerarchia si basa sulle immersioni elementari.

Definizione

Siano M, N insiemi o classi. $j : M \prec N$ è un'immersione elementare se:

- è iniettiva;
- per ogni formula $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ e $a_1, \dots, a_n$

$$M \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ sse } N \models \varphi(j(a_1), \dots, j(a_n))$$

La "parte alta" della gerarchia si basa sulle immersioni elementari.

Definizione

Siano M, N insiemi o classi. $j : M \prec N$ è un'immersione elementare se:

- è iniettiva;
- per ogni formula $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ e $a_1, \ldots, a_n$

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ sse } N \models \varphi(j(a_1), \ldots, j(a_n))$$

Se un'immersione elementare non sposta alcun ordinale, allora è l'identità.

La "parte alta" della gerarchia si basa sulle immersioni elementari.

Definizione

Siano M, N insiemi o classi. $j : M \prec N$ è un'immersione elementare se:

- è iniettiva;
- per ogni formula $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ e $a_1, \ldots, a_n$

$$M \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ sse } N \vDash \varphi(j(a_1), \ldots, j(a_n))$$

Se un'immersione elementare non sposta alcun ordinale, allora è l'identità.
Il più piccolo ordinale che viene spostato si chiama *punto critico*.

Esiste un cardinale misurabile

Esiste un cardinale misurabile sse esiste M modello di ZF ed esiste $j : V \prec M$.

Esiste un cardinale misurabile sse esiste M modello di ZF ed esiste $j : V \prec M$.
κ è un cardinale γ-strong

Esiste un cardinale misurabile sse esiste M modello di ZF ed esiste $j : V \prec M$.
κ è un cardinale γ-strong sse esiste M modello di ZF tale che $V_{\kappa+\gamma} \subseteq M$ ed esiste $j : V \prec M$.

Esiste un cardinale misurabile sse esiste M modello di ZF ed esiste $j : V \prec M$.
κ è un cardinale γ-strong sse esiste M modello di ZF tale che $V_{\kappa+\gamma} \subseteq M$ ed esiste $j : V \prec M$.
κ è un cardinale γ-supercompatto

Esiste un cardinale misurabile sse esiste M modello di ZF ed esiste $j : V \prec M$.
κ è un cardinale γ-strong sse esiste M modello di ZF tale che $V_{\kappa+\gamma} \subseteq M$ ed esiste $j : V \prec M$.
κ è un cardinale γ-supercompatto sse esiste M modello di ZF tale che ${}^{\gamma}M \subseteq M$ ed esiste $j : V \prec M$.

Esiste un cardinale misurabile sse esiste M modello di ZF ed esiste $j : V \prec M$.
κ è un cardinale γ-strong sse esiste M modello di ZF tale che $V_{\kappa+\gamma} \subseteq M$ ed esiste $j : V \prec M$.
κ è un cardinale γ-supercompatto sse esiste M modello di ZF tale che ${}^{\gamma}M \subseteq M$ ed esiste $j : V \prec M$.
Più è completo M, più il cardinale è forte.

Esiste un cardinale misurabile sse esiste M modello di ZF ed esiste $j : V \prec M$.
κ è un cardinale γ-strong sse esiste M modello di ZF tale che $V_{\kappa+\gamma} \subseteq M$ ed esiste $j : V \prec M$.
κ è un cardinale γ-supercompatto sse esiste M modello di ZF tale che ${}^{\gamma}M \subseteq M$ ed esiste $j : V \prec M$.
Più è completo M, più il cardinale è forte.
Domanda (Reinhardt,1970): E se esistesse $j : V \prec V$?

Risposta (Kunen, 1971): No.

Risposta (Kunen, 1971): No.

Teorema (Kunen, 1971)

Se $j : V \prec M$, allora $M \neq V$.

Risposta (Kunen, 1971): No.

Teorema (Kunen, 1971)

Se $j : V \prec M$, allora $M \neq V$.

Corollario

Se $j : V_\eta \prec V_\eta$, allora $\eta < \lambda + 2$, dove λ è l'estremo superiore della sequenza critica di j, definita come $\kappa_0 = \mathrm{crt}(j)$, $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$.

Risposta (Kunen, 1971): No.

Teorema (Kunen, 1971)

Se $j : V \prec M$, allora $M \neq V$.

Corollario

Se $j : V_\eta \prec V_\eta$, allora $\eta < \lambda + 2$, dove λ è l'estremo superiore della sequenza critica di j, definita come $\kappa_0 = \mathrm{crt}(j)$, $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$.

Dopo questa battuta d'arresto, si sono profilati all'orizzonte due possibili sentieri:

Dopo questa battuta d'arresto, si sono profilati all'orizzonte due possibili sentieri:

Sentiero di Dedalo Meglio volare basso ed analizzare cardinali più deboli dei supercompatti (strong, Woodin, ecc.).

Dopo questa battuta d'arresto, si sono profilati all'orizzonte due possibili sentieri:

Sentiero di Dedalo Meglio volare basso ed analizzare cardinali più deboli dei supercompatti (strong, Woodin, ecc.).

Sentiero di Icaro Vediamo quanto in alto possiamo volare prima di bruciarci le ali.

Dopo questa battuta d'arresto, si sono profilati all'orizzonte due possibili sentieri:

Sentiero di Dedalo Meglio volare basso ed analizzare cardinali più deboli dei supercompatti (strong, Woodin, ecc.).

Sentiero di Icaro Vediamo quanto in alto possiamo volare prima di bruciarci le ali.

Seguiamo dunque il secondo sentiero.
I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.

Dopo questa battuta d'arresto, si sono profilati all'orizzonte due possibili sentieri:

Sentiero di Dedalo Meglio volare basso ed analizzare cardinali più deboli dei supercompatti (strong, Woodin, ecc.).

Sentiero di Icaro Vediamo quanto in alto possiamo volare prima di bruciarci le ali.

Seguiamo dunque il secondo sentiero.

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.

I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Dopo questa battuta d'arresto, si sono profilati all'orizzonte due possibili sentieri:

Sentiero di Dedalo Meglio volare basso ed analizzare cardinali più deboli dei supercompatti (strong, Woodin, ecc.).

Sentiero di Icaro Vediamo quanto in alto possiamo volare prima di bruciarci le ali.

Seguiamo dunque il secondo sentiero.

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.

I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Woodin propose un'assioma ancora più forte:

Dopo questa battuta d'arresto, si sono profilati all'orizzonte due possibili sentieri:

Sentiero di Dedalo Meglio volare basso ed analizzare cardinali più deboli dei supercompatti (strong, Woodin, ecc.).

Sentiero di Icaro Vediamo quanto in alto possiamo volare prima di bruciarci le ali.

Seguiamo dunque il secondo sentiero.
I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.
I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Woodin propone un'assioma ancora più forte:

Definizione (Woodin, 1984)

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$,

Dopo questa battuta d'arresto, si sono profilati all'orizzonte due possibili sentieri:

Sentiero di Dedalo Meglio volare basso ed analizzare cardinali più deboli dei supercompatti (strong, Woodin, ecc.).

Sentiero di Icaro Vediamo quanto in alto possiamo volare prima di bruciarci le ali.

Seguiamo dunque il secondo sentiero.
I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.
I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Woodin propose un'assioma ancora più forte:

Definizione (Woodin, 1984)

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$,

dove $L(V_{\lambda+1})$ è il più piccolo modello di ZF contenente gli ordinali e $V_{\lambda+1}$.

Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$

Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$ (è possibile definirvi una teoria descrittiva, comprese caratterizzazioni con alberi).

Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$ (è possibile definirvi una teoria descrittiva, comprese caratterizzazioni con alberi).
Quindi $L(V_{\lambda+1})$ è molto simile ad $L(\mathbb{R})$.

Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$ (è possibile definirvi una teoria descrittiva, comprese caratterizzazioni con alberi).
Quindi $L(V_{\lambda+1})$ è molto simile ad $L(\mathbb{R})$.
Incredibilmente, $L(V_{\lambda+1})$ sotto I0 è molto simile a $L(\mathbb{R})$ sotto AD.

Definizione

$X \subseteq V_{\lambda+1}$ è un *insieme Icaro*

Definizione

$X \subseteq V_{\lambda+1}$ è un *insieme Icaro* se esiste un'immersione elementare $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$ con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$.

Definizione

$X \subseteq V_{\lambda+1}$ è un *insieme Icaro* se esiste un'immersione elementare $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$ con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$.

Esempi:

Definizione

$X \subseteq V_{\lambda+1}$ è un *insieme Icaro* se esiste un'immersione elementare $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$ con $\operatorname{crt}(j) < \lambda$.

Esempi:

- $\emptyset$, $V_{\lambda+1}$ sono insiemi Icaro sse vale I0.

Definizione

$X \subseteq V_{\lambda+1}$ è un *insieme Icaro* se esiste un'immersione elementare $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$ con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$.

Esempi:

- $\emptyset$, $V_{\lambda+1}$ sono insiemi Icaro sse vale I0.
- qualunque buon ordine di $V_{\lambda+1}$ non può essere un insieme Icaro.

Definizione

$X \subseteq V_{\lambda+1}$ è un *insieme Icaro* se esiste un'immersione elementare $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$ con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$.

Esempi:

- $\emptyset$, $V_{\lambda+1}$ sono insiemi Icaro sse vale I0.
- qualunque buon ordine di $V_{\lambda+1}$ non può essere un insieme Icaro.

Definiamo $\Theta^{L(X, V_{\lambda+1})}$ come l'estremo superiore degli α tali che in $L(X, V_{\lambda+1})$ esiste una suriezione $\pi : V_{\lambda+1} \twoheadrightarrow \alpha$.

Definizione

$X \subseteq V_{\lambda+1}$ è un *insieme Icaro* se esiste un'immersione elementare $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$ con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$.

Esempi:

- $\emptyset$, $V_{\lambda+1}$ sono insiemi Icaro sse vale I0.
- qualunque buon ordine di $V_{\lambda+1}$ non può essere un insieme Icaro.

Definiamo $\Theta^{L(X,V_{\lambda+1})}$ come l'estremo superiore degli α tali che in $L(X, V_{\lambda+1})$ esiste una suriezione $\pi : V_{\lambda+1} \twoheadrightarrow \alpha$.Si può dire che "misura la compessità" di X,

Definizione

$X \subseteq V_{\lambda+1}$ è un *insieme Icaro* se esiste un'immersione elementare $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$ con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$.

Esempi:

- $\emptyset$, $V_{\lambda+1}$ sono insiemi Icaro sse vale I0.
- qualunque buon ordine di $V_{\lambda+1}$ non può essere un insieme Icaro.

Definiamo $\Theta^{L(X,V_{\lambda+1})}$ come l'estremo superiore degli α tali che in $L(X, V_{\lambda+1})$ esiste una suriezione $\pi : V_{\lambda+1} \twoheadrightarrow \alpha$.Si può dire che "misura la compessità" di X, nel senso che se $\Theta^{L(Y,V_{\lambda+1})} < \Theta^{L(X,V_{\lambda+1})}$ allora consideriamo "X è un insieme Icaro" come un'ipotesi più forte di "Y è un insieme Icaro".

Definizione

$X \subseteq V_{\lambda+1}$ è un *insieme Icaro* se esiste un'immersione elementare $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$ con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$.

Esempi:

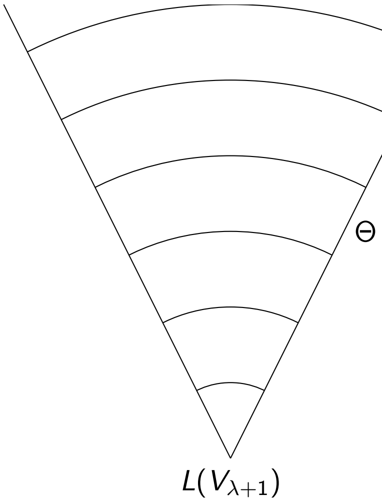
- $\emptyset$, $V_{\lambda+1}$ sono insiemi Icaro sse vale I0.
- qualunque buon ordine di $V_{\lambda+1}$ non può essere un insieme Icaro.

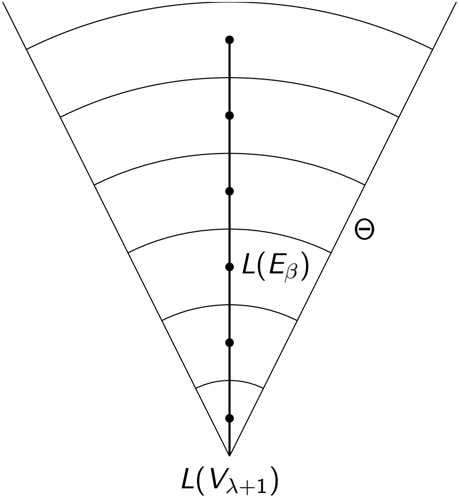
Definiamo $\Theta^{L(X,V_{\lambda+1})}$ come l'estremo superiore degli α tali che in $L(X, V_{\lambda+1})$ esiste una suriezione $\pi : V_{\lambda+1} \twoheadrightarrow \alpha$.Si può dire che "misura la compessità" di X, nel senso che se $\Theta^{L(Y,V_{\lambda+1})} < \Theta^{L(X,V_{\lambda+1})}$ allora consideriamo "X è un insieme Icaro" come un'ipotesi più forte di "Y è un insieme Icaro". Tutti i tentativi di dimostrare le analogie più profonde con $\mathrm{AD}^{L(X,\mathbb{R})}$ sono falliti, senza aggiungere nuove ipotesi.

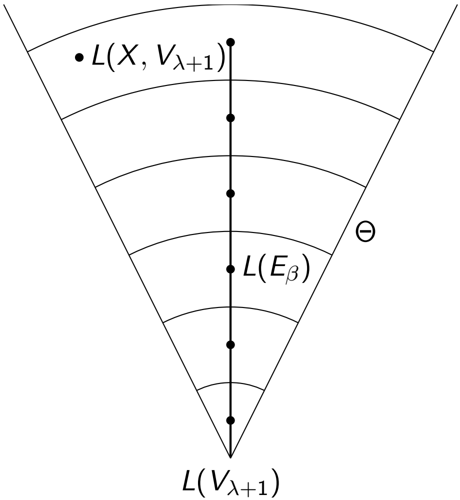
Teorema (Woodin)

E' possibile definire una sequenza $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$ tale che:

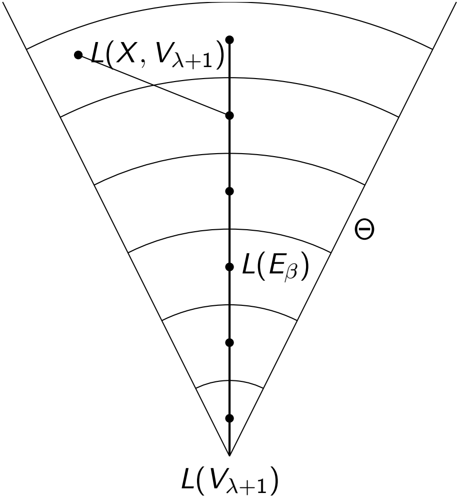
- se X è un insieme Icaro e $\Theta^{L(E_\alpha)} < \Theta^{L(X, V_{\lambda+1})}$, allora $E_\alpha \subset L(X, V_{\lambda+1})$;
- se α è successore, allora esiste un insieme Icaro X tale che $L(E_\alpha) = L(X, V_{\lambda+1})$;
- se α è limite, allora $L(E_\alpha) = L(\bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta)$.


Θ
$L(V_{\lambda+1})$


Θ
$L(E_\beta)$
$L(V_{\lambda+1})$



$L(X, V_{\lambda+1})$
Θ
$L(E_\beta)$
$L(V_{\lambda+1})$


$L(X, V_{\lambda+1})$
Θ
$L(E_\beta)$
$L(V_{\lambda+1})$

Dicevamo: le analogie più profonde necessitano di ulteriori ipotesi.

Dicevamo: le analogie più profonde necessitano di ulteriori ipotesi. Le definiamo nel contesto più generale di $j : L(N) \prec L(N)$, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$.

Dicevamo: le analogie più profonde necessitano di ulteriori ipotesi. Le definiamo nel contesto più generale di $j : L(N) \prec L(N)$, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$.

Definizione

j è *proprio* sse per ogni $X \in L(N) \cap V_{\lambda+2}$ $\langle X, j(X), j(j(X)), \ldots \rangle \in L(N)$.

Dicevamo: le analogie più profonde necessitano di ulteriori ipotesi. Le definiamo nel contesto più generale di $j : L(N) \prec L(N)$, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$.

Definizione

j è *proprio* sse per ogni $X \in L(N) \cap V_{\lambda+2}$ $\langle X, j(X), j(j(X)), \ldots \rangle \in L(N)$.

Teorema

Dicevamo: le analogie più profonde necessitano di ulteriori ipotesi. Le definiamo nel contesto più generale di $j : L(N) \prec L(N)$, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$.

Definizione

j è *proprio* sse per ogni $X \in L(N) \cap V_{\lambda+2}$ $\langle X, j(X), j(j(X)), \dots \rangle \in L(N)$.

Teorema

Supponiamo che $L(N) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$.

Dicevamo: le analogie più profonde necessitano di ulteriori ipotesi. Le definiamo nel contesto più generale di $j : L(N) \prec L(N)$, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$.

Definizione

j è *proprio* sse per ogni $X \in L(N) \cap V_{\lambda+2}$ $\langle X, j(X), j(j(X)), \dots \rangle \in L(N)$.

Teorema

Supponiamo che $L(N) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$. Allora j è proprio sse l'insieme dei punti fissi di j è cofinale in $\Theta^{L(N)}$.

"Essere propria" è una proprietà ben definita?

"Essere propria" è una proprietà ben definita?

Teorema (Woodin)

Supponiamo che E_α esista. Se

- $\alpha = 0$,

"Essere propria" è una proprietà ben definita?

Teorema (Woodin)

Supponiamo che E_α esista. Se

- $\alpha = 0$, o
- α è successore,

"Essere propria" è una proprietà ben definita?

Teorema (Woodin)

Supponiamo che E_α esista. Se

- $\alpha = 0$, o
- α è successore, o
- α è limite di cofinalità $> \omega$

"Essere propria" è una proprietà ben definita?

Teorema (Woodin)

Supponiamo che E_α esista. Se

- $\alpha = 0$, o
- α è successore, o
- α è limite di cofinalità $> \omega$

allora ogni immersione elementare $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ è propria.

"Essere propria" è una proprietà ben definita?

Teorema (Woodin)

Supponiamo che E_α esista. Se

- $\alpha = 0$, o
- α è successore, o
- α è limite di cofinalità $> \omega$

allora ogni immersione elementare $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ è propria.

Teorema

Supponiamo esista ξ tale che $L(E_\xi) \nvDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$.

"Essere propria" è una proprietà ben definita?

Teorema (Woodin)

Supponiamo che E_α esista. Se

- $\alpha = 0$, o
- α è successore, o
- α è limite di cofinalità $> \omega$

allora ogni immersione elementare $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ è propria.

Teorema

Supponiamo esista ξ tale che $L(E_\xi) \nvDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$. Allora esiste α tale che ogni immersione elementare $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ non è propria.

"Essere propria" è una proprietà ben definita?

Teorema (Woodin)

Supponiamo che E_α esista. Se

- $\alpha = 0$, o
- α è successore, o
- α è limite di cofinalità $> \omega$

allora ogni immersione elementare $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ è propria.

Teorema

Supponiamo esista ξ tale che $L(E_\xi) \nvDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$. Allora esiste α tale che ogni immersione elementare $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ non è propria. Diciamo che α è un *ordinale totalmente non-proprio*.

La possibilità di un'immersione elementare di essere o meno propria dipende dalla struttura sottostante?

La possibilità di un'immersione elementare di essere o meno propria dipende dalla struttura sottostante?
In altre parole, se abbiamo in mano un'immersione elementare propria, siamo sicuri che qualunque tentativo di trovare un'immersione elementare non-propria con lo stesso dominio sia futile?

La possibilità di un'immersione elementare di essere o meno propria dipende dalla struttura sottostante?
In altre parole, se abbiamo in mano un'immersione elementare propria, siamo sicuri che qualunque tentativo di trovare un'immersione elementare non-propria con lo stesso dominio sia futile? No.

La possibilità di un'immersione elementare di essere o meno propria dipende dalla struttura sottostante?
In altre parole, se abbiamo in mano un'immersione elementare propria, siamo sicuri che qualunque tentativo di trovare un'immersione elementare non-propria con lo stesso dominio sia futile? No.

Teorema

Sia α il più piccolo ordinale tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = L(E_\alpha) \cap V_{\lambda+2}$.

La possibilità di un'immersione elementare di essere o meno propria dipende dalla struttura sottostante?
In altre parole, se abbiamo in mano un'immersione elementare propria, siamo sicuri che qualunque tentativo di trovare un'immersione elementare non-propria con lo stesso dominio sia futile? No.

Teorema

Sia α il più piccolo ordinale tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = L(E_\alpha) \cap V_{\lambda+2}$. Allora esistono $j, k : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$, j propria and k non propria.

La possibilità di un'immersione elementare di essere o meno propria dipende dalla struttura sottostante?
In altre parole, se abbiamo in mano un'immersione elementare propria, siamo sicuri che qualunque tentativo di trovare un'immersione elementare non-propria con lo stesso dominio sia futile? No.

Teorema

Sia α il più piccolo ordinale tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = L(E_\alpha) \cap V_{\lambda+2}$. Allora esistono $j, k : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$, j propria and k non propria. Diciamo che α è un *ordinale parzialmente non-proprio*.

Proposition

Sia β uno degli ordinali totalmente non-propri che conosciamo.

Proposition

Sia β uno degli ordinali totalmente non-propri che conosciamo. Allora se $j, k : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ e $j \restriction V_\lambda = k \restriction V_\lambda$, $j = k$.

Proposition

Sia β uno degli ordinali totalmente non-propri che conosciamo. Allora se $j, k : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ e $j \upharpoonright V_\lambda = k \upharpoonright V_\lambda$, $j = k$.

Proposition

Sia α l'ordinale parzialmente non-proprio di qui sopra, e fissiamo j.

Proposition

Sia β uno degli ordinali totalmente non-propri che conosciamo. Allora se $j, k : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ e $j \restriction V_\lambda = k \restriction V_\lambda$, $j = k$.

Proposition

Sia α l'ordinale parzialmente non-proprio di qui sopra, e fissiamo j. Allora esistono 2^λ proprie e non proprie $k : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ tali che $j \restriction V_\lambda = k \restriction V_\lambda$.

Se j è propria, allora l'insieme C_j dei punti fissi sotto $\Theta^{L(E_\alpha)}$ è un ω-club.

Se j è propria, allora l'insieme C_j dei punti fissi sotto $\Theta^{L(E_\alpha)}$ è un ω-club. Cosa possiamo dire di $C_j \Delta C_k$?

Se j è propria, allora l'insieme C_j dei punti fissi sotto $\Theta^{L(E_\alpha)}$ è un ω-club. Cosa possiamo dire di $C_j \Delta C_k$?

Proposition

Esistono j e k tali che $C_j \Delta C_k$ è illimitato.

- Problemi sull'algebra delle immersioni elementari in $L(E_\alpha)$.

- Problemi sull'algebra delle immersioni elementari in $L(E_\alpha)$.
- Problemi sugli ordinali parzialmente e totalmente non-propri.

- Problemi sull'algebra delle immersioni elementari in $L(E_\alpha)$.
- Problemi sugli ordinali parzialmente e totalmente non-propri.
- Esiste un'immersione elementare non-propria
  $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$?

- Problemi sull'algebra delle immersioni elementari in $L(E_\alpha)$.
- Problemi sugli ordinali parzialmente e totalmente non-propri.
- Esiste un'immersione elementare non-propria $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$?
- Problemi sulla validità degli insiemi Icaro.

Non sono mai stato certo se la morale della storia di Icaro dovesse essere, come generalmente si ritiene, "non cercare di volare troppo alto", o piuttosto "lascia stare la cera e le piume e lavora meglio sulle ali"
Stanley Kubrick