

Laboratorio di Calcolo Scientifico  
a.a. 2002/03  
HOMEWORK #1

Udine, 15 maggio 2003 (consegna 22 maggio 2003)

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. Ing. D. Breda  
Dipartimento di Matematica e Informatica,  
Università degli Studi di Udine  
vermiglio@dimi.uniud.it  
dbreda@dimi.uniud.it  
<http://www.dimi.uniud.it/~rossana>  
<http://www.dimi.uniud.it/~dbreda>

*NOTA: quando sono richieste implementazioni MATLAB che danno come output grafici, questi devono essere stampati e consegnati assieme all'homework, includendo eventualmente anche il testo dell'm-file e dei risultati numerici.*

1. Si considerino le due espressioni matematicamente equivalenti

$$r_1 = \frac{ay + b}{ay + c}, \quad r_2 = \frac{a + b/y}{a + c/y}$$

e si calcolino i loro valori per

$$a = b = \beta^{-p_{min}-t}, \quad c = 2(\beta - 1)\beta^{-p_{min}-t}, \quad y = (\beta - 1)\beta^{-1}$$

utilizzando MATLAB ovvero secondo lo standard IEEE doppia precisione basato sul sistema *floating point*  $\mathcal{F}(\beta, t, p_{min}, p_{max}) = \mathcal{F}(2, 53, 1021, 1024)$  a cui si aggiungono i numeri denormalizzati, cioè con esponente  $p = -p_{min} - 1$  e prima cifra nulla. Si dica quale delle due formule fornisce il risultato esatto confrontando i valori calcolati con MATLAB con il risultato teorico ottenuto analiticamente in aritmetica esatta. Si spieghi la differenza tra i valori computati dando una giustificazione analitica per il risultato errato.

2. Si scriva una *function* MATLAB per il calcolo del valore approssimato della derivata prima di una funzione in un punto usando le differenze finite centrate

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Si testi la *function* per la funzione esponenziale  $f(x) = e^x$  per  $x = 1$ , valutando l'errore assoluto commesso rispetto al valore esatto di  $f'(x)$  per un passo variabile  $h = 10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-16}$ . Si rappresentino su scala bilogarithmica l'andamento dell'errore assoluto e delle maggiorazioni dell'errore analitico e di arrotondamento (assumendo che valutando  $f$  si commette un'errore di arrotondamento maggiorato dalla precisione macchina) in funzione del passo  $h$ . La *function* deve essere del tipo

```
[erass,erana,erarr]=nome_function(x,h)
```

e deve provvedere alla rappresentazione grafica dei risultati. (*Sugg.: per determinare una maggiorazione dell'errore analitico si utilizzi lo sviluppo di Taylor per  $f(x+h)$  e per  $f(x-h)$  arrestandosi al terz'ordine e si faccia la differenza dei due sviluppi ricordando che esiste  $\theta \in [x-h, x+h]$  tale che  $f'''(\theta_+) + f'''(\theta_-) = 2f'''(\theta)$  per qualche  $\theta_+ \in [x, x+h]$  e  $\theta_- \in [x-h, x]$ )*

3. Si calcolino le seguenti espressioni matematicamente equivalenti

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

per  $n = 10, 10^2, \dots, 10^{16}$  con MATLAB ovvero secondo lo standard IEEE doppia precisione. Si spieghino i risultati ottenuti e si analizzi l'errore algoritmico di entrambe le espressioni.

4. Si scrivano e si eseguano tre *function* MATLAB che implementino i metodi di Newton, delle secanti e di punto fisso  $x_{k+1} = g(x_k) = e^{-\frac{1}{2}x_k}$  per approssimare lo zero  $z$  della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - x.$$

In particolare si segua lo standard

```
[x,K,e]=newton(x0,TOL)
[x,K,e]=secanti(x0,x1,TOL)
[x,K,e]=puntofisso(x0,TOL)
```

dove  $x_0 = x_0$  è il valore iniziale scelto (per il metodo delle secanti serve un secondo valore iniziale  $x_1 = x_1$ ),  $TOL$  una certa precisione richiesta,  $x$  il  $K$ -vettore delle iterate  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $K$  il numero di iterazioni necessario per raggiungere la precisione  $TOL$  ed  $e$  il  $K$ -vettore dell'errore  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , commesso alla  $k$ -esima iterazione secondo il criterio d'arresto scelto. Si stimi infine la costante nella definizione di ordine di convergenza per ognuno dei metodi e si dia una giustificazione analitica del valore ottenuto almeno per il metodo di Newton e per quello di punto fisso.

5. Si scriva e si esegua una *function* MATLAB che associ al parametro  $m$ ,  $m \in [0, +\infty)$ , la più piccola radice positiva dell'equazione

$$\sin x = mx$$

utilizzando la *function* predefinita *fzero*. Si studi attentamente la scelta dei valori iniziali affinché *fzero* converga alla radice positiva più piccola per  $m = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.98, 0.99, 1, 2, 3, \dots, 10$ , si rappresenti graficamente tale funzione e si commentino i risultati ottenuti.