

Calcolo Scientifico - a.a. 2004/05

Esercizi di laboratorio

prof.ssa Rossana Vermiglio, dott. Dimitri Breda
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Udine
vermiglio,dbreda@dimi.uniud.it
<http://www.dimi.uniud.it/~rossana,dbreda>

Esercizio 1. Convergenza del polinomio interpolante: il fenomeno di Runge

Considera la seguente funzione razionale

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in I = [-5, 5],$$

nota in letteratura come *funzione di Runge*. Ci proponiamo di studiare la convergenza alla funzione di Runge del polinomio $p_n(x)$ che la interpola sia sui nodi equidistanti $x_i^{(n)} = -5 + \frac{10i}{n}$, $i = 0, \dots, n$, che sui nodi di Chebyshev $x_i^{(n)} = 5 \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi)$, $i = 0, \dots, n$.

Scrivi un programma MATLAB che costruisca il polinomio interpolante $p_n(x)$ sui nodi di interpolazione assegnati, disegni i grafici di $p_n(x)$ e della funzione errore $e_n(x) = f(x) - p_n(x)$ per $x \in I$ e stimi

$$E_n = \max_{x \in I} |e_n(x)|.$$

Analizzando i risultati numerici ottenuti al variare di n sia per i nodi equidistanti che per i nodi di Chebyshev, commenta le seguenti frasi:

- il polinomio interpolante sui nodi equidistanti non converge;
- il polinomio interpolante sui nodi di Chebyshev converge;
- le oscillazioni dell'errore $e_n(x)$ nel caso dei nodi equidistanti sono più ampie agli estremi dell'intervallo rispetto alla parte interna;
- il polinomio interpolante sui nodi equidistanti converge in un opportuno intervallo $[-b, b]$, $b < 5$.

Dati i nodi equidistanti $x_i^{(n)} = -5 + \frac{10i}{n}$, $i = 0, \dots, n$, siano $S_1(x)$ e $S_3(x)$ rispettivamente il polinomio lineare a tratti e la spline cubica $S_3(x)$ *not-a-knot*.

Scrivi un programma MATLAB che costruisca sia la funzione S_1 che la funzione S_3 per la funzione di Runge, disegni i loro grafici e quelli dell'errore e stimi il massimo modulo dell'errore nell'intervallo. In entrambi i casi si studi l'andamento dell'errore al crescere di n .

Esercizio 2. Interpolazione di dati sperimentali 1

Si vuole ricostruire la traiettoria compiuta da un pedone in movimento in un parcheggio, sulla base dei dati sperimentali ottenuti da una telecamera fissa. Ogni riga del file *nodi.m* fornisce la posizione della persona del parcheggio rispetto ad un sistema di riferimento fissato. Utilizza il programma MATLAB dell'esercizio precedente per costruire sia il polinomio lineare a tratti che la spline cubica interpolanti. Analizza inoltre l'errore commesso nella ricostruzione rispetto alle ulteriori osservazioni sperimentali contenute nel file *test.m*.

Esercizio 3. Interpolazione di dati sperimentali 2

Si vuole ricostruire la traiettoria di un'automobile che si muove in un parcheggio sulla base dei dati sperimentali ottenuti da una telecamera fissa che riprende la posizione ad intervalli di tempo costanti. I dati contenuti nel file *auto.m* forniscono la posizione dell'auto in movimento nel parcheggio rispetto ad un sistema di riferimento fissato, in particolare nella riga i -esima troviamo la posizione (x_i, y_i) corrispondente all'istante i -esimo.

Scrivi un programma MATLAB che interpoli i dati con una spline cubica *not-a-knot* parametrica e ricostruisce la traiettoria.

Esercizio 4. Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Assegnati i punti (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$, si vuole costruire la spline cubica $S_3(x)$, $x \in [x_0, x_n]$, approssimante nel senso dei minimi quadrati tali dati. Sia Δ una suddivisione dell'intervallo $[x_0, x_n]$ ottenuta con $m < n$ punti t_j , $j = 0, 1, \dots, m$:

$$\Delta = \{t_0 < \dots < t_m\}.$$

Lo spazio delle spline cubiche *not-a-knot* relative a tale partizione ha dimensione $m+1$. Una base per tale spazio può essere ottenuta considerando le spline *not-a-knot* $\sigma_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m$, definite come i polinomi di Lagrange: $\sigma_k(t_j) = 1$ se $k = j$ e $\sigma_k(t_j) = 0$ se $k \neq j$, per $k, j = 0, \dots, m$. La generica spline cubica *not-a-knot* $S_3(x)$ si può scrivere come segue $S_3(x) = \sum_{k=0}^m a_k \sigma_k(x)$ e vale $S_3(t_j) = a_j$.

Scrivi un programma MATLAB che legge in ingresso i vettori X, Y dei dati, determina la spline cubica *not-a-knot* che approssima nel senso dei minimi quadrati tali dati, calcola i valori YY corrispondenti alle nuove ascisse XX e ne disegna il grafico. Confronta graficamente i risultati ottenuti con quelli forniti dal polinomio algebrico di terzo grado che approssima gli stessi dati nel senso dei minimi quadrati.

Testa il programma sui dati del file *nodi.m*.

Esercizio 5. Derivazione numerica

Sia data una funzione $f \in C^1([-1, 1], \mathbb{R})$ e siano x_i , $i = 0, \dots, n$, i nodi di Chebyshev. Un'approssimazione dei valori $f'(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, può essere ottenuta mediante le quantità $p'_n(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, dove $p_n(x)$ è il polinomio interpolante la funzione f sui nodi assegnati.

Scrivi un programma MATLAB che legge in ingresso il vettore X dei nodi, la funzione f e la sua derivata f' , calcola il vettore delle approssimazioni delle derivate Df e l'errore E e ne disegna il grafico. Analizza il comportamento della norma dell'errore con $n = 5, 10, 20, 40$ per le funzioni $f(x) = e^x \sin(5x)$, $f(x) = x^8$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

File MATLAB. I file *nodim*, *testm* e *autom* si possono scaricare dalle pagine web della prof.ssa R. Vermiglio e del dott. D. Breda.

Ringraziamento. Si ringrazia il prof. G. Foresti e il dott. L. Snidaro per aver fornito i dati sperimentali contenuti nei file *nodim*, *testm* e *autom*.