

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 13 luglio 2004

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Considera l'insieme F dei numeri floating-point con $B = 2$, $t = 4$, $p_{min} = -2$, $p_{max} = 3$, che contiene anche i numeri denormalizzati per un underflow graduale. Calcola
 - il più piccolo numero floating point positivo in F normalizzato;
 - il più grande numero floating point positivo in F normalizzato;
 - il più piccolo numero floating point positivo in F denormalizzato;
 - la precisione di macchina u per l'arrotondamento.

Dati $x, y \in F$ positivi, quali sono la minima e la massima distanza possibile tra x e y ?

2. Descrivi dettagliatamente l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare $Ax = b$ con A matrice quadrata non singolare di dimensione n . In particolare
 - scrivi una pseudocodifica;
 - analizza la sua complessità computazionale;
 - descrivi la tecnica di pivoting, elencando due motivi per applicarla.

Il costo computazionale ci permette di stimare il tempo di esecuzione di un algoritmo. Rispetto ad un sistema di dimensione n , di quanto stimi l'aumento del tempo di esecuzione dell'algoritmo di eliminazione di Gauss per un sistema di dimensione $10 * n$? Dovendo risolvere in modo efficiente dieci volte un sistema di dimensione n con la stessa matrice A ma con termini noti b diversi, quale è la stima del costo computazionale?

3. Sia data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -12 & 8 & -12 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver verificato che

$$B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

è la sua inversa, fornisci una limitazione dell'errore inerente della soluzione del sistema $Ax = b$, supponendo di introdurre un'errore relativo nel termine noto b per cui vale la seguente limitazione:

$$\frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} \leq 10^{-4}.$$

4. Per approssimare la radice $\alpha = 2$ dell'equazione

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 8 = 0,$$

si vuole utilizzare un metodo di iterazione funzionale $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, \dots$. Studia i metodi definiti dalle seguenti funzioni

- (a) $g(x) = \frac{-8}{x(x-4)}$;
- (b) $g(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 - 8}{x(3x-8)}$;
- (c) $g(x) = \frac{4x^2 - 8}{x^2}$;
- (d) $g(x) = x^3 - 4x^2 + x + 8$;

analizzandone la convergenza, l'eventuale ordine di convergenza e proponendo, per i metodi convergenti, un'opportuna scelta del valore iniziale x_0 . Quale dei metodi indicati è il metodo di Newton? Perché?

5. Assegnati i dati (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, il calcolo dei coefficienti α_i del polinomio interpolante può essere ricondotto alla soluzione di un sistema lineare $A\alpha = y$, dove A dipende dalla scelta della base di rappresentazione del polinomio. Fornisci un'espressione degli elementi della matrice A quando il polinomio interpolante è rappresentato

- nella base dei monomi $1, x, x^2, \dots$;
- nella base di Newton;
- nella base di Lagrange.

In quale caso la matrice risulta fortemente malcondizionata al crescere di m ? Proponi un algoritmo per la risoluzione del sistema nel caso della base di Newton. Scrivi una pseudocodifica e fornisci una stima del suo costo computazionale.

6. L' interpolazione è un approccio appropriato per la ricostruzione di funzioni quando i dati (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, sono affetti da errori? Motiva la tua risposta e, nel caso sia negativa, descrivi un approccio alternativo.
7. Si vogliono approssimare nel senso dei minimi quadrati i dati (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, con la funzione $\Phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$ con $n \ll m$. Scrivi il sistema $Aa \approx b$ sovradimensionato (cioè $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $a \in R^n$) che descrive il problema. Introduci le equazioni normali, spiega il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica. Quali sono gli aspetti che possono essere causa di risultati numerici poco accurati in tale approccio? Conosci un metodo alternativo?
8. Un metodo iterativo per la ricerca degli zeri di una funzione $f(x)$ può essere costruito con la tecnica dell'interpolazione inversa. Noti i valori delle iterate $(x_i, y_i = f(x_i))$, $(x_{i+1}, y_{i+1} = f(x_{i+1}))$, $(x_{i+2}, y_{i+2} = f(x_{i+2}))$, $i \geq 0$, si cerca il polinomio $p(y)$ che interpola i valori x_i, x_{i+1}, x_{i+2} nei nodi y_i, y_{i+1}, y_{i+2} . L'iterata successiva x_{i+3} è fornita dal valore $p(0)$. Fornisci un'espressione di tale metodo iterativo, i.e. $x_{i+3} = g(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$, $i \geq 0$.

PROVA MATLAB Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 13 luglio 2004

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

Scrivi una funzione MATLAB per calcolare un polinomio in un punto assegnato usando l'algoritmo di Horner per

- un polinomio espresso nella base di monomi;
- un polinomio espresso nella forma di Newton.