

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 2 dicembre 2004

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Definisci l'errore inerente e parla del condizionamento del problema. Calcola il numero di condizionamento per le funzioni x^3 e $x^{\frac{1}{3}}$. Dall'esecuzione in MATLAB (standard IEEE doppia precisione con $B = 2$, $t = 54$) del seguente codice con diversi valori di n

```
x=2;
y=x^3;
for i=1:n
y=y^(1/3);
end
for i=1:n-1
y=(y)^3;
end
err=abs(x-y)/abs(x)
```

si ottengono i seguenti risultati numerici

$n =$	5	10	20	30	40
$err =$	2.5535e-15	1.3587e-12	5.2697e-08	7.3647e-03	5.0000e-01

Fornisci una spiegazione di tali risultati.

2. Siano A , B due matrici quadrate di dimensione n con A non singolare. Si vuole calcolare la matrice X quadrata di dimensione n che verifica $A^T X = B$. Proponi un algoritmo ed analizza la sua complessità computazionale, supponendo di conoscere una fattorizzazione LU di A , i.e. $A = LU$. Quali ipotesi sulla matrice A ci garantiscono l'esistenza della fattorizzazione $A = LU$? Come cambia l'algoritmo per il calcolo di X nel caso in cui siano note P , L , U tali che $PA = LU$?
3. Descrivi la tecnica del pivot parziale per l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare $Ax = b$ con A matrice quadrata non singolare di dimensione n . Spiega i motivi per cui viene introdotta e come viene implementata in maniera efficiente, fornisci una pseudocodifica ed analizza il costo computazionale aggiuntivo che la sua applicazione richiede.
4. Definisci in generale un metodo di iterazione funzionale, parla della sua convergenza e definisci il concetto di ordine di convergenza. Analizza il metodo di iterazione funzionale $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, \dots$ con $g(x) = \frac{x^3+3x}{3x^2+1}$, studiando

(a) i suoi punti fissi;

(b) la convergenza locale e l'ordine di convergenza.

5. Si vuole interpolare una funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ con un polinomio lineare a tratti $S_1(x)$ su nodi equidistanti. Supponendo che f sia continua con derivate continue fino all'ordine due, fornisci una maggiorazione dell'errore $E_n(f) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - S_1(x)|$, analizza la convergenza e determina il numero n di punti che garantiscono un errore minore di una precisione prefissata TOL . Applica i risultati alla funzione $f(x) = e^{\cos(x)}$, $x \in [0, \pi]$ e $TOL = 10^{-6}$.
6. Si vogliono approssimare nel senso dei minimi quadrati i dati (t_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, con la funzione $\Phi(t) = x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + \dots + x_n\phi_n(t)$ con $n \ll m$. Scrivi il sistema $Ax \approx b$ sovradimensionato (cioè $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$) che descrive il problema. Introduci le equazioni normali, spiega il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica. Scrivi le equazioni normali per la funzione $\Phi(t) = x_1 + x_2t + x_3e^{-t}$ ed i dati $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, -2)$, $(3, -4)$, $(5, -5)$.

MATLAB Assegnati i dati (t_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, il calcolo dei coefficienti x_i del polinomio interpolante può essere ricondotto alla soluzione di un sistema lineare $Ax = y$, dove A dipende dalla scelta della base di rappresentazione del polinomio. Scrivi una funzione MATLAB per calcolare in maniera efficiente la matrice A quando il polinomio interpolante è rappresentato nella base di Newton.