

# PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 19 dicembre 2005

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. Gli studenti che hanno ottenuto una valutazione positiva degli esercizi assegnati come homework, possono svolgere solamente gli esercizi 1, 2, 3 e 6.

1. Defisci errore inerente, algoritmico ed analitico nel calcolo di una funzione  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ . Parla del condizionamento di un problema e della stabilità di un algoritmo. Per calcolare i punti  $x_i, i = 0, \dots, n$ , di una suddivisione uniforme di un intervallo  $[a, b], a > 0$  con passo  $h = \frac{b-a}{n}$  possiamo usare i seguenti algoritmi

algoritmo 1  $x_i = x_{i-1} + h, i = 1, \dots, n, x_0 = a;$

algoritmo 2  $x_i = a(1 - \frac{i}{n}) + b\frac{i}{n}, i = 0, \dots, n.$

Confronta e commenta l'errore nel calcolo dei punti  $x_i, i = 1, \dots, n$ , secondo i due algoritmi, supponendo che  $a, b$  siano numeri di macchina.

2. Determina, quando possibile, le matrici elementari di Gauss  $G_i, i = 1, 2, 3$ , che annullano rispettivamente le componenti  $x_k, k = i + 1, \dots, 4$  del vettore  $x = (5, -1, 0, 3)^T$ . Scrivi inoltre la loro inversa.

Come trovano applicazione tali matrici nella fattorizzazione  $LU$  di una matrice  $A$  quadrata di dimensione  $n$  non singolare?

Quali ipotesi sulla matrice  $A$  ci garantiscono l'esistenza della fattorizzazione  $A = LU$ ?

Nota la fattorizzazione  $LU$  di  $A$ , come determini la soluzione del sistema lineare  $Ax = b$ ? Qual è il costo computazionale complessivo di tale metodo?

Descrivi la tecnica del pivot parziale e spiega i motivi per cui viene introdotta.

Se la matrice  $A$  è singolare ma il sistema  $Ax = b$  è consistente, come si può determinare una sua soluzione?

3. Definisci in generale un metodo di iterazione funzionale, parla della sua convergenza e del concetto di ordine di convergenza e descrivi e commenta un criterio d'arresto. Analizza il metodo di iterazione funzionale  $x_{i+1} = g(x_i), i = 0, 1, \dots$  con  $g(x) = \frac{2x(x^2+2x+1)}{x^2+3x+4}$ , studiando

(a) i suoi punti fissi;

(b) la convergenza locale e l'ordine di convergenza per ogni punto fisso.

4. Si vuole interpolare una funzione  $f(x)$  nell'intervallo  $[a, b]$  con un polinomio lineare a tratti  $S_1(x)$  su nodi equidistanti. Supponendo che  $f$  sia continua con derivate continue fino all'ordine due, fornisci una maggiorazione dell'errore  $E_n(f) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - S_1(x)|$ , analizza la convergenza e determina il numero  $n$  di punti che garantiscono un errore minore di una precisione prefissata  $TOL$ . Applica i risultati alla funzione  $f(x) = e^{\sin(x)}, x \in [0, \pi]$  e  $TOL = 10^{-6}$ .

5. Si vogliono approssimare nel senso dei minimi quadrati i dati  $(t_i, y_i), i = 1, \dots, m$  con la funzione  $\Phi(t) = x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + \dots + x_n\phi_n(t)$  con  $n \ll m$ . Scrivi il sistema  $Ax \approx b$  sovradimensionato (cioè  $A \in R^{m \times n}, b \in R^m, x \in R^n$ ) che descrive il problema. Introduci le equazioni normali, spiega il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica. Scrivi il sistema sovradimensionato che si ottiene scegliendo la funzione  $\Phi(t) = x_1 + x_2t + x_3e^{-t}$  ed i dati  $(-2, 5), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (5, 0)$ .

6. Si vuole approssimare  $\int_a^b f(x)dx$  con la formula di quadratura dei trapezi. Scrivi la formula, spiega il suo significato geometrico, fornisci la formula dell'errore nelle ipotesi che  $f \in C^2([a, b])$ . Che ordine polinomiale ha la formula? Nel caso particolare di  $f(x) = x^3 \sin(x) + 2x^2 + 10x - 4$ , trova una maggiorazione dell'errore della formula dei trapezi nell'intervallo  $[0, 1]$ . In generale, come puoi costruire una stima empirica dell'errore commesso con la formula dei trapezi?

**MATLAB** Scrivi una funzione MATLAB per approssimare con una precisione assegnata  $Tol$  la radice di un'equazione non lineare  $f(x) = 0$  localizzata in un intervallo  $[a, b]$  con il metodo di bisezione.