

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio

Udine, 24 marzo 2003

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Calcolando in aritmetica di macchina standard IEEE doppia precisione le seguenti espressioni matematicamente equivalenti

$$\frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))}$$

per valori di x positivi, $|x| \ll 1$, si ottengono i risultati in tabella. Spiega i risultati. Definisci inoltre la precisione di macchina illustrando brevemente la sua importanza nel calcolo numerico.

x	$\frac{1 - \cos(x)}{x}$	$\frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))}$
0	<i>NaN</i>	<i>NaN</i>
1.2e-08	9.2519e-09	6.0000e-09
1.6e-08	6.9389e-09	8.0000e-09
2.0e-08	1.1102e-08	1.0000e-08
2.4e-08	1.3878e-08	1.2000e-08
2.8e-08	1.5860e-08	1.4000e-08
3.2e-08	1.7347e-08	1.6000e-08
3.6e-08	1.8504e-08	1.8000e-08
4.0e-08	1.9429e-08	2.0000e-08
4.4e-08	2.2709e-08	2.2000e-08
4.8e-08	2.3130e-08	2.4000e-08
5.0e-08	2.4425e-08	2.5000e-08

*

2. Date due matrici $A, B \in R^{n \times n}$ con A non singolare e due vettori $c, d \in R^{n \times 1}$, proponi un algoritmo efficiente per determinare i vettori $x, y \in R^{n \times 1}$ che soddisfano entrambe le relazioni

$$A^t y + Bx = d, \quad Ax = c$$

supponendo di poter calcolare $A = LU$ con l'algoritmo di eliminazione di Gauss. In particolare descrivi l'algoritmo da te proposto, presenta una pseudocodifica (simile al linguaggio Matlab) SENZA scrivere l'algoritmo di eliminazione di Gauss e stima il numero di operazioni (FLOPS) richieste. Come cambia l'algoritmo se la matrice A è fattorizzabile in $PA = LU$ (metodo di eliminazione di Gauss con il pivot parziale)?

3. Dati i punti $(-1, 1), (0, 0), (1, 1)$ determina il polinomio di interpolazione usando

- (a) la formulazione di Lagrange
- (b) la formulazione di Newton

Le due rappresentazioni danno lo stesso polinomio? Perché? Descrivi l'algoritmo di Horner per la valutazione di un polinomio in un punto dato, quando il polinomio è espresso nella forma di Newton.

4. È vera la seguente proposizione: “il polinomio interpolante una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ su nodi equidistanti converge sempre uniformemente alla funzione aumentando il numero di nodi”? Quali sono i tuoi commenti riguardo la convergenza del polinomio interpolante?
5. Determina la soluzione x nel senso dei minimi quadrati del sistema $Ax \approx b$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6. Introduci le formule di quadratura composite. In particolare descrivi la formula dei Trapezi composta e di Simpson composta, scrivendo per esse anche la formula dell'errore. Data $f(x) = x^2 e^x$ quanti intervalli sono necessari per ottenere un'approssimazione dell'integrale di f su $[0, 1]$ con la formula dei Trapezi composta con un'accuratezza pari a 10^{-4} ? E se si usasse la formula di Simpson composta quanti intervalli sarebbero necessari per ottenere la stessa accuratezza?
7. Introduci il metodo di Newton per la ricerca degli zeri di una funzione $f(x)$ e applicalo per l'approssimazione della radice α di $f(x) = e^{-ax} - x$, $0 < a \leq 1$. In particolare
 - localizza la radice α ;
 - fornisci i valori iniziali x_0 che garantiscono la convergenza;
 - analizza l'ordine di convergenza
 - proponi un criterio d'arresto.

Il metodo di iterazione funzionale $x_{i+1} = g(x_i)$ definito dalla funzione $g(x) = e^{-ax}$ converge alla radice α in un intorno? Motiva la risposta. Scrivi un programma MATLAB che implementi il metodo di Newton con una precisione TOL assegnata dall'utente.