

# PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

*Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda*

Udine, 15 settembre 2004

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Considera la seguente espressione

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x},$$

con  $x \neq \pm 1$ .

- Definisci in generale l'errore inerente. Per quali valori di  $x$ , la valutazione dell'espressione risulta un problema malcondizionato?
  - Definisci in generale l'errore algoritmico. Per quali valori di  $x$  numero di macchina, la valutazione dell'espressione in aritmetica di macchina può fornire risultati non accurati?
  - Proponi un'espressione equivalente che possa fornire risultati accurati nel caso in cui  $x$  numero di macchina assuma i valori trovati al punto precedente.
2. Sia  $A$  una matrice quadrata di dimensione  $n$  e  $x$  un vettore colonna  $n$ -dimensionale. Analizza e spiega quale delle due seguenti espressioni ha minor costo computazionale:
    - $B = (xx^T)A$ ;
    - $B = x(x^T A)$ .

Scrivi una pseudocodifica per l'algoritmo che ritieni avere minor costo.

3. Parla del condizionamento nella risoluzione di un sistema lineare con  $A$  matrice quadrata di dimensione  $n$  non singolare. Dopo aver definito il numero di condizionamento di  $A$ , valuta come cambia per le seguenti matrici :
  - $\alpha A$ , con  $\alpha$  scalare non nullo;
  - $A^{-1}$ ;
  - $PA$ , con  $P$  matrice di permutazione.
4. Descrivi dettagliatamente l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare  $Ax = b$  con  $A$  matrice quadrata non singolare di dimensione  $n$ . In particolare
  - scrivi una pseudocodifica;
  - analizza la sua complessità computazionale;
  - descrivi la tecnica di pivoting, elencando due motivi per applicarla.

5. Per approssimare le radici  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2$  dell'equazione

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 = 0,$$

si vuole utilizzare un metodo di iterazione funzionale  $x_{i+1} = g(x_i), i = 0, 1, \dots$ . Studia i seguenti metodi

- (a)  $g(x) = x^3 - 2x - 2$ ;
- (b) Newton;
- (c) a pendenza costante;

analizzandone la convergenza, l'eventuale ordine di convergenza e proponendo, per i metodi convergenti, un'opportuna scelta del valore iniziale  $x_0$ .

6. Si vuole interpolare la funzione  $f(x) = e^{x^2} + x$  nell'intervallo  $[0, 1]$  con un polinomio lineare a tratti su nodi equidistanti. Dopo aver fornito una stima dell'errore di approssimazione, determina il numero  $n$  di punti che garantiscono un errore uniforme minore di  $10^{-6}$ , per  $x \in [0, 1]$ .
7. Si vogliono approssimare nel senso dei minimi quadrati i dati  $(t_i, y_i), i = 1, \dots, m$  con la funzione  $\Phi(t) = x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + \dots + x_n\phi_n(t)$  con  $n \ll m$ . Scrivi il sistema  $Ax \approx b$  sovradimensionato (cioè  $A \in R^{m \times n}, b \in R^m, x \in R^n$ ) che descrive il problema. Introduci le equazioni normali, spiega il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica. Scrivi le equazioni normali per la funzione  $\Phi(t) = x_1t + x_2e^t$  ed i dati  $(0, 2), (2, 4), (3, 5)$ .

# PROVA MATLAB Esame di Calcolo Scientifico

*Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda*

Udine, 15 settembre 2004

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

Assegnati i dati  $(t_i, y_i), i = 1, \dots, m$ , il calcolo dei coefficienti  $x_i$  del polinomio interpolante può essere ricondotto alla soluzione di un sistema lineare  $Ax = y$ , dove  $A$  dipende dalla scelta della base di rappresentazione del polinomio. Scrivi una funzione MATLAB per calcolare in maniera efficiente la matrice  $A$  quando il polinomio interpolante è rappresentato nella base di Newton.