

# PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 4 luglio 2006

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome e il numero di matricola.

1. Definisci l'errore inerente ed algoritmico nel calcolo di una funzione razionale  $y = f(x)$ ,  $x, y \in R$ , spiegando il significato di condizionamento di un problema e di stabilità di un algoritmo.

Calcola tali errori nel caso particolare della somma di due numeri reali, i.e.  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ ,  $x_1, x_2 \in R$ , parlando del fenomeno della cancellazione.

Definisci la precisione di macchina  $u$  e spiega perchè risulta  $1 + u = 1$  in aritmetica di macchina.

Siano dati due numeri complessi  $x = x_1 + ix_2$ ,  $y = y_1 + iy_2$ ,  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ . Ricordando che per un numero complesso  $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ , fornisci una maggiorazione dell'errore inerente. Inoltre definendo la loro somma di macchina come segue

$$xfl(+)y = (x_1fl(+)y_1) + i(x_2fl(+)y_2)$$

verifica che

$$\frac{|(xfl(+)y) - (x + y)|}{|(x + y)|} \leq u.$$

2. Descrivi dettagliatamente l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare  $Ax = b$  con  $A$  matrice quadrata non singolare. In particolare

- scrivi una pseudocodifica;
- analizza la sua complessità computazionale;
- descrivi la tecnica di pivoting, elencando due motivi per applicarla e soffermandoti sugli aspetti implementativi.

3. Quali ipotesi sulla matrice quadrata  $A$  di dimensione  $n$  garantiscono l'esistenza della fattorizzazione  $A = LU$ ? Supponi di conoscere la fattorizzazione  $LU$  di una matrice  $A$ , proponi un algoritmo efficiente per calcolare la matrice  $X$  di dimensione  $n$  che verifica

$$AXB = I,$$

dove  $B$  è una matrice nota di dimensione  $n$  ortogonale, i.e.  $B^T B = BB^T = I$  ed  $I$  è la matrice identica. Come cambia l'algoritmo per la risoluzione dello stesso problema, conoscendo la fattorizzazione  $PA = LU$ ?

4. Si vuole determinare il valore  $x$  per cui vale

$$\int_1^x f(s)ds = -\frac{11}{2}$$

dove  $f(s) = 6s^2 + 13s + 2$ .

Proponi un metodo efficiente per risolvere il problema motivando la tua scelta. Descrivi tutte le proprietà del metodo da te proposto (significato geometrico, risultati di convergenza locale e ordine di convergenza). Fornisci un valore iniziale  $x_0$  che assicuri la convergenza del metodo.

5. Sia  $p_n(x)$  il polinomio che interpola una funzione  $f \in C^{n+1}([a, b])$  nell'intervallo  $[a, b]$  su  $n + 1$  nodi.

Scrivi la formula dell'errore di interpolazione, trova una maggiorazione di  $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)|$  e parla della convergenza. Si può concludere che il polinomio interpolante converge per la funzione  $f(x) = 2(1 - e^{-x}) + 3e^{-x}$  in  $[0, 10]$ ? Quanti nodi di interpolazione sono necessari per ottenere un errore minore di una precisione prefissata  $TOL = 10^{-4}$ ?

6. Siano assegnati i seguenti dati  $x(i), y(i) \in R, i = 1, \dots, n$ . Si vuole ottenere una stima nel senso dei minimi quadrati dei parametri  $y_\infty, y_0$  della seguente funzione scelta per rappresentare il fenomeno

$$y = y_\infty(1 - e^{-x}) + y_0e^{-x}.$$

Scrivi la matrice  $A$  e il termine noto  $b$  del sistema sovradeterminato da risolvere.

Introduci le equazioni normali, spiega il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica. Quali sono gli aspetti che possono essere causa di risultati numerici poco accurati in tale approccio? Conosci un metodo alternativo?

MATLAB Scrivi una funzione MATLAB che risolva il problema presentato nell'esercizio 6.