

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 13 settembre 2005

Il candidato deve scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Considera la seguente relazione di ricorrenza lineare

$$x_{k+1} = \frac{9}{4}x_k - \frac{1}{2}x_{k-1}, k \geq 0, \quad (1)$$

la cui generica soluzione è data da

$$x_k = c_1 \left(\frac{1}{4}\right)^k + c_2 2^k, k \geq 0, \quad (2)$$

con c_1, c_2 opportune costanti. Scegliendo come valori iniziali

$$x_0 = \frac{1}{6}, x_1 = \frac{1}{24}, \quad (3)$$

la soluzione esatta della relazione (1) è data da

$$x_k = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^k, k \geq 0, \quad (4)$$

che risulta una successione decrescente. Implementando in MATLAB le relazione (1) con i dati iniziali (3), si ottengono i risultati della tabella dove \tilde{x}_k , x_k e err_k sono le successioni calcolate rispettivamente con (1)-(3), (4) e la formula $err_k = \frac{|\tilde{x}_k - x_k|}{|x_k|}$. Analizza e commenta tali risultati fornendo una spiegazione.

k	\tilde{x}_k	x_k	err_k
2	1.0417e-02	1.0417e-02	4.9960e-16
3	2.6042e-03	2.6042e-03	4.4964e-15
4	6.5104e-04	6.5104e-04	3.6471e-14
5	1.6276e-04	1.6276e-04	2.9227e-13
6	4.0690e-05	4.0690e-05	2.3386e-12
7	1.0173e-05	1.0173e-05	1.8710e-11
8	2.5431e-06	2.5431e-06	1.4968e-10
9	6.3578e-07	6.3578e-07	1.1974e-09
10	1.5895e-07	1.5895e-07	9.5793e-09
11	3.9736e-08	3.9736e-08	7.6635e-08
12	9.9341e-09	9.9341e-09	6.1308e-07
13	2.4835e-09	2.4835e-09	4.9046e-06
14	6.2091e-10	6.2088e-10	3.9235e-05
15	1.5527e-10	1.5522e-10	3.1380e-04
16	3.8903e-11	3.8805e-11	2.5049e-03
17	9.8962e-12	9.7013e-12	1.9694e-02
18	2.8151e-12	2.4253e-12	1.3846e-01
19	1.3859e-12	6.0633e-13	5.6250e-01
20	1.7107e-12	1.5158e-13	9.1139e-01
21	3.1562e-12	3.7896e-14	9.8799e-01
22	6.2460e-12	9.4739e-15	9.9848e-01
23	1.2475e-11	2.3685e-15	9.9981e-01
24	2.4947e-11	5.9212e-16	9.9998e-01
25	4.9892e-11	1.4803e-16	1.0000e+00
26	9.9785e-11	3.7007e-17	1.0000e+00
27	1.9957e-10	9.2519e-18	1.0000e+00
28	3.9914e-10	2.3130e-18	1.0000e+00
29	7.9828e-10	5.7824e-19	1.0000e+00
30	1.5966e-09	1.4456e-19	1.0000e+00
...
197	2.9867e+41	4.1308e-120	1.0000e+00
198	5.9734e+41	1.0327e-120	1.0000e+00
199	1.1947e+42	2.5817e-121	1.0000e+00

2. Parla dell'errore inerente e del condizionamento di un problema. Analizza poi il condizionamento per i seguenti problemi:

- somma di n numeri: $s_n = x_1 + \dots + x_n$;
- soluzione di sistema lineare: $Ax = b$;
- soluzione di equazioni non lineari: $f(x) = 0$.

3. Quali ipotesi su una matrice quadrata A di dimensione n garantiscono l'esistenza della fattorizzazione $A = LU$? Supponi di conoscere la fattorizzazione LU di una matrice A , proponi un algoritmo efficiente per risolvere il sistema

$$A^T x = b.$$

Come cambia l'algoritmo per la risoluzione dello stesso sistema, conoscendo la fattorizzazione $PA = LU$?

4. Considera il seguente metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m}, k = 0, 1, \dots,$$

per la ricerca della radici di un'equazione $f(x) = 0$. Parla del suo significato geometrico, della convergenza, indicando per quali valori di m risulta localmente convergente e dell'ordine di convergenza.

Considera la funzione $f(x) = e^x + x - 2$ e localizza la radice. Proponi un valore di m ed un valore iniziale x_0 che assicurino la convergenza del metodo proposto alla radice.

5. Sia $S_{1,n}(x)$ il polinomio lineare a tratti che interpola la funzione $f(x) = e^x + x^2 - 2$ nell'intervallo $[0, 1]$ su $n + 1$ nodi distinti.

Scrivi la formula dell'errore di interpolazione, trova una maggiorazione di $\max_{x \in [0,1]} |f(x) - S_{1,n}(x)|$ ed analizza la convergenza. Quanti nodi di interpolazione sono necessari per ottenere un errore minore di una precisione prefissata $TOL = 10^{-6}$?

6. Si vogliono approssimare nel senso dei minimi quadrati i dati $(t_i, y_i), i = 1, \dots, m$ con la funzione $\Phi(t) = x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + \dots + x_n\phi_n(t)$ con $n \ll m$. Scrivi il sistema $Ax \approx b$ sovradimensionato (cioè $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m, a \in R^n$) che descrive il problema. Introduci le equazioni normali, spiega il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica. Quali sono gli aspetti che possono essere causa di risultati numerici poco accurati in tale approccio? Conosci un metodo alternativo?

MATLAB Sia dato il polinomio interpolante nella forma di Newton. Scrivi una funzione MATLAB per calcolare in maniera efficiente i valori che tale polinomio assume in un più punti assegnati e che ne disegni il grafico.