

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 10 dicembre 2003

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Un'approssimazione della derivata seconda di una funzione $f : R \rightarrow R$ in un punto x dato si può ottenere con la seguente formula

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2},$$

che risulta convergente per h che tende a zero. Utilizzando MATLAB, che implementa l'aritmetica di macchina secondo lo standard IEEE doppia precisione, si ottengono, per la funzione $f(x) = e^x$ con $x = 2$, i risultati in tabella. L'errore err è stimato rispetto al valore $exp(2) = 7.389056098930650$ fornito dal MATLAB. Analizza i risultati spiegando l'andamento dell'errore. In particolare stima anche l'ordine rispetto ad h dell'errore osservando le prime iterazioni. Infine definisci in generale la precisione di macchina sottolineando il suo ruolo nella risoluzione numerica di un problema matematico.

h	$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$	err
1	8.025706553785412	6.3665e-01
1e-01	7.395215698561939	6.1596e-03
1e-02	7.389117674598822	6.1576e-05
1e-03	7.389056715823017	6.1689e-07
1e-04	7.389056122519833	2.3589e-08
1e-05	7.389040490579645	1.5608e-05
1e-06	7.389644451905042	5.8835e-04
1e-07	7.105427357601003	2.8363e-01
1e-08	0	7.3891e+00
1e-09	0	7.3891e+00

2. Descrivi dettagliatamente un algoritmo per risolvere un sistema lineare $Lx = b$ con L triangolare inferiore, analizzando anche la sua complessità computazionale. Date le matrici $L_1, L_2, B \in R^{n \times n}$ con L_1, L_2 non singolari e triangolari inferiori e due vettori $c, d \in R^{n \times 1}$, descrivi i passi da compiere per determinare i vettori $x, y \in R^{n \times 1}$ che soddisfano entrambe le relazioni

$$Bx + L_2y = d \quad L_1x = c.$$

Fornisci anche una stima del costo computazionale complessivo dell'algoritmo proposto.

3. Descrivi il metodo di Cholesky per la risoluzione di un sistema lineare. Quando si può utilizzare? Quali sono i suoi vantaggi rispetto al metodo di eliminazione di Gauss?

4. Introduci il metodo di Newton per l'approssimazione di radici di equazioni $f(x) = 0$. Descrivi il suo significato geometrico e presenta i risultati sulla convergenza. Dopo aver definito in generale l'ordine di convergenza, analizza l'ordine del metodo di Newton nel caso di radici semplici. Cosa succede nel caso di radici multiple? Studia la convergenza del metodo di Newton nel caso del polinomio $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2(x + 2)$. In base ai risultati ottenuti, valuta se il metodo di Newton converge; quale radice, se convergente, approssima; l'ordine e il tipo (i.e. monotona, ...) di convergenza, in corrispondenza alle seguenti scelte del valore iniziale
 - (a) $x_0 = -2.1$
 - (b) $x_0 = -1.9$
 - (c) $x_0 = 0.4$
 - (d) $x_0 = 0.6$
 - (e) $x_0 = -0.5$
5. Si vuole risolvere un sistema $Ax \approx b$ sovradimensionato (cioè $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$ con $m > n$) nel senso dei minimi quadrati. Scrivi le equazioni normali, descrivi il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica usando tali equazioni. Quali sono gli aspetti che possono essere causa di risultati numerici poco accurati in tale approccio? Scrivi il sistema sovradimensionato da risolvere per approssimare i dati $(0, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 8), (4, 10)$ con la funzione $\phi(x) = a_1 + a_2x + a_3e^x$.
6. Introduci il problema dell'interpolazione polinomiale di dati $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$. In particolare presenta il problema dell'esistenza e dell'unicità del polinomio interpolante e della sua rappresentazione nella forma di Lagrange e di Newton, confrontando gli aspetti computazionali delle due rappresentazioni. Sia $y_i = f(x_i), i = 1, \dots, n$, con f continua e con derivata continua. Quali sono i tuoi commenti riguardo la convergenza del polinomio interpolante in questo caso?
7. Scrivi una funzione MATLAB che usa il metodo di Horner per valutare un polinomio $p_n(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_{n+1}x^n$ di grado n ed il suo derivato $p'_n(x)$ nei punti $x_j, j = 1, \dots, m$.