

# PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 15 luglio 2005

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Per calcolare in aritmetica di macchina gli  $N + 1$  punti equispaziati nell'intervallo  $[a, b]$ ,  $a \geq 0, b > 0$ , si possono proporre i seguenti algoritmi

(a)  $x_0 = a, \quad x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, \dots, N;$

(b)  $x_i = a + i * h, \quad i = 0, \dots, N;$

con  $h = (b - a)/N$ . Quale risulta migliore dal punto di vista della stabilità? Giustifica le tue affermazioni.

2. Dato il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

scrivi (quando possibile) le matrici di eliminazione di Gauss  $G_i, i = 1, 2, 3$  che annullano le componenti  $v_j, j = i + 1, \dots, 4, i = 1, 2, 3$  del vettore  $v$ . Scrivi la loro inversa.

Come trovano applicazione tali matrici nella fattorizzazione  $LU$  di una matrice  $A$  quadrata di dimensione  $n$  non singolare?

Quali ipotesi sulla matrice  $A$  ci garantiscono l'esistenza della fattorizzazione  $A = LU$ ?

3. Definisci il concetto di stabilità di un algoritmo. Nel caso particolare della risoluzione di un sistema lineare, come stimi la stabilità dell'algoritmo di eliminazione di Gauss? Descrivi una strategia per migliorarne la stabilità?
4. Introduci il problema dell'interpolazione polinomiale, analizza l'esistenza ed unicità del polinomio interpolante e fornisci la formula per l'errore dell'interpolazione. Quali sono i vantaggi computazionali della rappresentazione del polinomio interpolante nella forma di Newton? Proponi un algoritmo efficiente per valutare il polinomio interpolante nella forma di Newton in un punto assegnato e scrivi una pseudocodifica.
5. Si vogliono approssimare nel senso dei minimi quadrati i dati  $(t_i, y_i), i = 1, \dots, m$  con la funzione  $\Phi(t) = x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + \dots + x_n\phi_n(t)$  con  $n \ll m$ . Scrivi il sistema  $Ax \approx b$  sovradimensionato (cioè  $A \in R^{m \times n}, b \in R^m, x \in R^n$ ) che descrive il problema. Introduci le equazioni normali, spiega il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica. Scrivi il sistema sovradimensionato e le risultanti equazioni normali per la funzione  $\Phi(t) = x_1 + x_2e^{-t} + x_3e^{-2t}$  ed i dati  $(-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1)$ .

6. Definisci in generale un metodo di iterazione funzionale

$$x_{i+1} = g(x_i), i = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

con  $x_0$  assegnato, per la ricerca della radici di un'equazione  $f(x) = 0$ . Parla del suo significato geometrico, della convergenza e dell'ordine di convergenza.

Considera la funzione  $f(x) = x^2 - 2 * e^{-x}$ . Dopo aver localizzato la radice, analizza la convergenza del metodo di iterazione funzionale (??) con  $g(x) = x^2 + x - 2 * e^{-x}$ . Infine, dopo aver introdotto il metodo iterativo a pendenza costante, proponi un valore della pendenza, che ne garantisca la convergenza locale alla radice per la funzione  $f$  sopra definita.

**MATLAB** Scrivi una funzione MATLAB che implementa il metodo a pendenza costante per la funzione dell'esercizio 6, fornendo in uscita il valore approssimato della radice. Introduci un criterio d'arresto con una precisione prefissata  $tol$  inserita tra i parametri in ingresso della funzione MATLAB.