

# PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

*Prof.ssa R. Vermiglio, dott. A. Sommariva*

Udine, 3 giugno 2001

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Dopo aver definito il significato di condizionamento di un problema, si studi il numero di condizionamento nel calcolo delle seguenti funzioni  $f(x)$ , determinando per quali valori di  $x$  il problema risulta malcondizionato:

- $f(x) = x - 1$
- $f(x) = \exp(x)$
- $f(x) = \ln(x), x > 0$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - |x|$
- $f(x) = f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$  e si applichi il risultato ottenuto nel caso particolare  $f(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+10)$

2. Si studi il condizionamento del problema del calcolo della radice

$$x = f(b, c) = -b + \sqrt{b^2 + c}$$

dell'equazione quadratica

$$x^2 + 2bx - c = 0.$$

Si analizzi e si commenti la stabilità numerica del seguente algoritmo

## Algoritmo

$$t = b^2$$

$$d = t + c$$

$$r = \sqrt{d}$$

$$x = -b + r$$

3. Si definisca il problema dell'interpolazione polinomiale esaminando l'esistenza ed unicità della soluzione, il condizionamento, la convergenza. Si introduca il polinomio interpolante di Newton, evidenziando i vantaggi computazionali di tale formulazione del polinomio interpolante.
4. Si definisca l'ordine di convergenza di una successione definita dallo schema di iterazione funzionale  $x_{i+1} = g(x_i), i = 0, 1, \dots$ , con  $x_0$  dato. Supponiamo di aver scelto il dato iniziale  $x_0$  in modo che la successione definita da

$$x_{i+1} = \frac{x_i(x_i^2 + 3a)}{3x_i^2 + a}, i = 0, 1, \dots$$

converga al punto fisso  $\alpha = \sqrt{a}, a > 0$ . Con quale ordine la successione converge? Si illustrino brevemente i criteri d'arresto che si possono usare fissata una certa precisione  $Tol$ .

5. Date le matrici  $A$  e  $B$  definite da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1+2\epsilon & -1+2\epsilon \\ 1 & -1+2\epsilon & 1+2\epsilon \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & (1+3\epsilon)/8\epsilon & (1-3\epsilon)/8\epsilon \\ -0.25 & (1-3\epsilon)/8\epsilon & (1+3\epsilon)/8\epsilon \end{pmatrix},$$

con  $\epsilon \ll 1$ , si verifichi che  $B = A^{-1}$  e si calcoli il numero di condizionamento di  $A$  in norma infinito e in norma 1. La matrice  $A$  è ben condizionata?

6. Si descriva la strategia del pivot parziale nell' algoritmo di eliminazione di Gauss. Perché viene introdotta? Ottenute le matrici  $P, L, U$  con la seguente istruzione MATLAB

$$[L, U, P] = lu(A)$$

, quali sono i passi da implementare per risolvere il sistema  $Ax = b$  ?

7. Si calcoli la retta che approssima nel senso dei minimi quadrati i seguenti dati sperimentali (regressione lineare)

|       |      |      |      |     |     |
|-------|------|------|------|-----|-----|
| $x_i$ | 1    | 3    | 4    | 6   | 7   |
| $y_i$ | -2.1 | -0.9 | -0.6 | 0.6 | 0.9 |

Si spieghi brevemente quali sono le difficoltà numeriche nell'approccio al problema dei minimi quadrati basato sulla risoluzione delle equazioni normali.

8. Definire l'ordine polinomiale di una formula di quadratura. Calcolare l'ordine polinomiale della seguente formula

$$\frac{1}{8}(f(0) + 3f(\frac{1}{3}) + 3f(\frac{2}{3}) + f(1))$$

che approssima

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

◇◇

Chi non ha svolto la prova pratica, svolga anche il seguente esercizio

9. Si scriva un programma MATLAB per risolvere un sistema lineare  $Ax = b$  con  $A$  matrice tridiagonale. I dati in ingresso sono i vettori che definiscono le tre diagonali ed il termine noto  $b$  mentre in uscita si ha il vettore soluzione  $x$ .