

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 23 marzo 2004

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Definisci l'errore inerente ed algoritmico nel calcolo di una funzione razionale $y = f(x)$, $x, y \in R$, spiegando il significato di condizionamento di un problema e di stabilità di un algoritmo.

Calcola tali errori nel caso particolare della somma di due numeri, i.e. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, parlando del fenomeno della cancellazione. Definisci la precisione di macchina u e spiega perchè risulta $1 + u = 1$ in aritmetica di macchina. Per $a = B^k$, dove B è la base di rappresentazione dei numeri floating-point e k è un intero positivo, determina una maggiorazione β di $b > 0$ per cui vale $a + b = a$, $0 < b < \beta$ in aritmetica di macchina. Sulla base delle considerazioni sopra esposte, spiega perchè la serie armonica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ può avere un limite finito in aritmetica di macchina.

2. Descrivi dettagliatamente l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare $Ax = b$ con A matrice quadrata non singolare. In particolare

- scrivi una pseudocodifica;
- analizza la sua complessità computazionale;
- descrivi la tecnica di pivoting, elencando due motivi per applicarla e soffermandoti sugli aspetti implementativi.

3. Calcola per la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \\ 0 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

la fattorizzazione $PA = LU$ mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss con pivot parziale. Come useresti tale fattorizzazione per risolvere il sistema $A^T x = b$ per $b = (10, -13, 6)^T$?

4. Introduci il metodo di Newton per l'approssimazione di radici di equazioni $f(x) = 0$. Descrivi il suo significato geometrico e presenta i risultati sulla convergenza. Supponi di volere applicare tale metodo per calcolare la radice quadrata di $a > 0$ resolvendo $f(x) = x^2 - a$. Scrivi lo schema di iterazione funzionale dato dal metodo di Newton e analizza la sua convergenza. Infine studia la convergenza locale alla radice quadrata di a dei seguenti schemi di iterazione funzionale:

- $x_{k+1} = a + x_k - x_k^2$;
- $x_{k+1} = 1 + x_k - \frac{x_k^2}{a}$.

5. Si vogliono approssimare nel senso dei minimi quadrati i dati (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, con la funzione $\Phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$ con $n \ll m$. Scrivi il sistema $Aa \approx b$ sovradimensionato (cioè $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $a \in R^n$) che descrive il problema. Introduci le equazioni normali, spiega il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica. Quali sono gli aspetti che possono essere causa di risultati numerici poco accurati in tale approccio? Conosci un metodo alternativo?
6. Data la discretizzazione $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$, scrivi il polinomio lineare a tratti che interpola $f(x)$, $x \in [a, b]$ sui nodi di Δ . Fornisci una stima dell'errore ed analizza la convergenza. Introduci le funzioni spline cubiche relative a Δ . Quanti sono i parametri liberi di una spline cubica interpolante la funzione $f(x)$ sui nodi di Δ ? Fornisci degli esempi di ulteriori vincoli da imporre per determinare univocamente una spline cubica interpolante. Cosa ricordi della convergenza della spline cubica interpolante?
7. Scrivi una funzione MATLAB per calcolare i coefficienti del polinomio interpolante di Newton per un insieme di dati assegnati.