

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, dott. A. Sommariva

Udine, 24 settembre 2002

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Descrivi, elencandone le proprietà, l'insieme dei numeri floating-point normalizzati $F(B, t, p_{min}, p_{max})$, dove B, t, p_{min}, p_{max} sono rispettivamente la base di rappresentazione, il numero di cifre per la mantissa, l'esponente massimo e minimo.

Nello standard IEEE quanti sono i numeri floating point in doppia precisione ($t = 53$) compresi tra due qualsiasi numeri floating point adiacenti in singola precisione ($t = 24$)?

Facoltativo: Considera un numero $x \in F(B, t, p_{min}, p_{max})$ non vicino allo zero e sia $y \in F(B, t, p_{min}, p_{max})$ il numero successivo. Verifica che risulta

$$B^{-1}\epsilon_M|x| < |x - y| \leq \epsilon_M|x|,$$

dove $\epsilon_M = B^{1-t}$.

2. Per valutare $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ si può considerare la seguente espressione matematicamente equivalente

$$S_n = \log\left(\prod_{i=1}^n e^{x_i}\right). \quad (1)$$

Analizza l'errore algoritmico del metodo (1) assumendo che $x_i, i = 1, \dots, n$ siano numeri di macchina e che l'errore relativo nella valutazione dell'esponenziale e del logaritmo sia maggiorato dalla precisione di macchina u . Evidenzia le situazioni che limitano l'uso di (1) in pratica.

3. Sia $A \in R^{n \times n}$ una matrice non singolare. Scrivi un algoritmo efficiente, usando il metodo di eliminazione di Gauss con il pivot parziale, per valutare

- $y = c^t A^{-1} b, \quad b, c \in R^n$
-

In particolare descrivi l'algoritmo da te proposto, presenta una pseudocodifica (simile al linguaggio Matlab) SENZA scrivere l'algoritmo di eliminazione di Gauss e stima il numero di operazioni (FLOPS) richieste.

4. Introduci la formula dei trapezi composta per l'approssimazione di $I(f) = \int_b^a f(x)dx$, scrivi la formula dell'errore e analizza l'ordine di convergenza. Si vuole utilizzare tale formula in maniera adattativa: proponi una strategia, una stima dell'errore (motivandola) e scrivi uno pseudocodice dell'algoritmo.

5. Introduci in generale il condizionamento di un problema. In particolare, data una formula di quadratura $I_m(f) = \sum_{i=1}^m w_i f(x_i)$ che approssima l'integrale $I(f) = \int_b^a f(x)dx$, dai una limitazione dell'errore $|I_m(f) - \hat{I}_m(f)|$, assumendo che $\hat{f}(x_i) = f(x_i)(1 + \delta_i)$, $|\delta_i| \leq \delta$, $i = 1, \dots, m$. Che conclusioni puoi trarre per le formule di Newton-Cotes?
6. Assegnati una funzione $f(x) \in C^3([a, b], R)$ e il polinomio quadratico a tratti che la interpola su n (dispari) nodi equidistanti $x_i = a + (i - 1) * h$, $i = 1, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n-1}$, fornisci una stima dell'errore di approssimazione e analizza la convergenza. Determina il numero n di punti che garantiscono un errore minore di 10^{-6} per la funzione $f(x) = e^{x+1}$ con $x \in [0, 1]$.
7. Si vuole determinare una soluzione approssimata dell'equazione $x^2 = \cos(x)$. Dopo aver localizzato la soluzione positiva, analizza la convergenza del metodo da te proposto, scegli il criterio d'arresto e scrivi un programma MATLAB che implementa l'algoritmo.