

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 10 luglio 2003

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Si vuole approssimare il valore della costante $e = 2.7182818284590 \dots$ (numero di Nepero) utilizzando la sua definizione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Calcolando $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ per $n = 10^k, k = 1, 2, \dots, 18$ in aritmetica di macchina secondo lo standard IEEE doppia precisione si ottengono i risultati in tabella, dove *err* rappresenta l'errore relativo. Spiega i risultati. Definisci inoltre la precisione di macchina ed illustra brevemente la sua importanza nel calcolo scientifico.

k	e_n	err
1	2.593742460	4.5815e-02
2	2.704813829	4.9546e-03
3	2.716923932	4.9954e-04
4	2.718145926	4.9995e-05
5	2.718268237	4.9999e-06
6	2.718280469	5.0008e-07
7	2.718281694	4.9416e-08
8	2.718281798	1.1077e-08
9	2.718282052	8.2240e-08
10	2.718282053	8.2690e-08
11	2.718282053	8.2735e-08
12	2.718523496	8.8905e-05
13	2.716110034	7.9896e-04
14	2.716110034	7.9896e-04
15	3.035035206	1.1653e-01
16	1	6.3212e-01
17	1	6.3212e-01
18	1	6.3212e-01

2. Quando un problema si definisce ben o mal condizionato? Fornisci un esempio.

Quando si verifica il fenomeno della cancellazione?

Dovendo valutare $\log(x) - \log(y) = \log(\frac{x}{y})$ per $x \approx y$, quale delle due espressioni useresti? Perché?

3. Siano date due matrici $A, B \in R^{n \times n}$ con A non singolare e due vettori $c, d \in R^{n \times 1}$. Assumendo di aver già calcolato la fattorizzazione LU di A , come la useresti per determinare i due vettori $x, y \in R^{n \times 1}$ che soddisfano entrambe le relazioni

$$Ay + Bx = d \quad A^T x = c,$$

dove A^T è la trasposta della matrice A .

Come cambia l'algoritmo conoscendo la fattorizzazione $PA = LU$ (metodo di eliminazione di Gauss con il pivot parziale)?

Descrivi brevemente la strategia del pivoting parziale per l'algoritmo di eliminazione di Gauss e fornisci due motivi per cui conviene usare tale strategia.

4. Descrivi un algoritmo per risolvere il sistema lineare

$$Lx = b$$

dove $L \in R^{n \times n}$ è una matrice triangolare inferiore e $b \in R^{n \times 1}$ è un vettore dato valutando anche la complessità computazionale dell'algoritmo. Data una matrice di permutazione P , come risolveresti i seguenti sistemi lineari?

- $LPx = b$
- $PLx = b$

5. L'equazione non lineare

$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0$$

ha due radici $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 2$. Per approssimare la radice α_2 , si propongono i seguenti metodi di iterazione funzionale

$$x_{i+1} = g(x_i), i = 0, 1, \dots,$$

con

- (a) $g(x) = x^2 - 2$
- (b) $g(x) = \sqrt{x+2}$
- (c) $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$
- (d) $g(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$

Quali dei metodi è convergente a α_2 ? Dopo aver definito l'ordine di convergenza, analizzalo per ognuno dei metodi proposti che risultano convergenti.

6. Dati i punti $(1, 2), (2, 3), (3, 5)$, determina il polinomio di interpolazione usando

- (a) la formulazione di Lagrange
- (b) la formulazione di Newton

Le due rappresentazioni danno lo stesso polinomio? Perché? Descrivi l'algoritmo di Horner per la valutazione di un polinomio in un punto dato, quando il polinomio è espresso nella forma di Newton.

Determina per gli stessi punti la funzione $\phi(t) = x_1 t + x_2 e^t$ che approssima con il minimo scarto tali dati, ovvero scrivi il sistema $Ax \approx b$ da risolvere nel senso dei minimi quadrati e descrivi e commenta i passi da compiere per arrivare alla soluzione.

7. Introduci l'interpolazione lineare a tratti, fornendo anche la formula dell'errore. Data $f(x) = x^2 e^x$ quanti intervalli sono necessari per ottenere un'approssimazione della funzione in $[0, 1]$ con il polinomio lineare a tratti con un'accuratezza pari a 10^{-4} ?

8.

M1 Scrivi una *function* MATLAB che risolva un sistema lineare triangolare inferiore (vedi esercizio 4) con input la matrice e il vettore dei termini noti e output il vettore soluzione. In particolare prevedi nel codice un test di controllo della struttura triangolare della matrice e un test di controllo della risolubilità del sistema.

M2 Scrivi una codifica (*function*, *script* o serie di istruzioni) MATLAB che risolva l'ultima parte dell'esercizio 6.