

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 7 gennaio 2004

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Definisci l'errore inerente, analitico ed algoritmico nel calcolo di $y = f(x)$, $f : R^n \rightarrow R$, parlando del condizionamento del problema e della stabilità di un algoritmo. Fornisci una maggiorazione dell'errore inerente nel caso della somma di n numeri, i.e. $f(x) = x_1 + \dots + x_n$, assumendo $|\varepsilon_{x_i}| \leq u$, $i = 1, \dots, n$, con u precisione macchina. Quando il problema sarà malcondizionato? In quale caso invece il problema avrà minimo numero di condizionamento (i.e. uguale a uno)?
2. Dato il vettore $v = [v_1, \dots, v_n] \in R^n$, costruisci la matrice elementare di Gauss che, applicata a v , ne annulla le ultime $n - k$ componenti v_{k+1}, \dots, v_n ($k = 1, \dots, n - 1$). Scrivi in particolare le matrici elementari di Gauss che eliminano, rispettivamente, le ultime una, due e tre componenti del vettore $v = [2, 3, -1, 6]$.
3. Descrivi dettagliatamente l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare $Ax = b$ con $A \in R^{n \times n}$ non singolare, $x, b \in R^n$. In particolare
 - scrivi una pseudocodifica;
 - analizza la complessità computazionale;
 - descrivi la tecnica del pivot parziale, elencando i motivi a sostegno della sua applicazione e soffermandoti sugli aspetti implementativi.
4. Introduci il metodo di Newton per l'approssimazione di radici di equazioni $f(x) = 0$. Descrivi il suo significato geometrico e presenta i risultati sulla convergenza. Dopo aver definito in generale l'ordine di convergenza, analizza l'ordine del metodo di Newton nel caso di radici semplici. Cosa succede nel caso di radici multiple? Conoscendo a priori la molteplicità m della radice che si vuole approssimare, si può definire la seguente variante del metodo di Newton

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \geq 0.$$

Che ordine di convergenza ha tale metodo nel caso della radice multipla?

5. Si vuole risolvere un sistema $Ax \approx b$ sovradimensionato (cioè $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$ con $m > n$) nel senso dei minimi quadrati. Scrivi le equazioni normali, descrivi il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica usando tali equazioni. Quali sono gli aspetti che possono essere causa di risultati numerici poco accurati in tale approccio? Scrivi il sistema sovradimensionato da risolvere per approssimare i dati (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$ con la funzione $\Phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$.

6. Introduci il problema dell'interpolazione con polinomi lineari a tratti di una funzione, fornisci una stima dell'errore e parla della convergenza. In particolare determina il numero n di punti di interpolazione equispaziati necessari per costruire un polinomio lineare a tratti che approssima la funzione $f(x) = \sin(\frac{x}{m})$, m intero, $x \in [0, 2\pi]$, con un errore maggiorato da $tol = 10^{-4}$. Per la stessa funzione, studia la convergenza del polinomio interpolante su n nodi equispaziati.
7. Scrivi una funzione MATLAB che, assegnata una matrice $A \in R^{n \times n}$, calcola $\|A\|_1$ senza utilizzare l'istruzione predefinita `norm` di MATLAB (i.e. `norm(A,1)`).