

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

24 luglio 2003

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Definisci l'insieme dei numeri di macchina normalizzati (numeri floating point) $F(B, t, p_{min}, p_{max})$, elencandone le principali caratteristiche e proprietà. Descrivi la tecnica di arrotondamento e definisci la precisione di macchina. Sia $x \in F(B, t, p_{min}, p_{max})$ un numero di macchina sufficientemente grande da verificare $x + 10 = x$. Sommando in aritmetica di macchina i seguenti numeri $1, 2, 3, 4, x, -x$ con diversi ordinamenti (per esempio: $1+2+3+4+x-x$, $1+2+x-x+3+4$, $2+3+x+1-x+4$, ...) che risultati ottieni? Commenta e giustifica la risposta. Nello standard IEEE doppia precisione i parametri che definiscono l'insieme dei numeri floating-point sono $B = 2, t = 53, p_{min} = -1021, p_{max} = 1024$. Sai dare una limitazione inferiore per l'esponente p tale che $x = B^p$ soddisfi alle condizioni sopra?
2. Sia data una matrice non singolare $A \in R^{n \times n}$ ed un vettore $b \in R^{n \times 1}$. Assumendo di aver già calcolato la fattorizzazione LU di A , come la useresti per calcolare in maniera efficiente la soluzione $x \in R^{n \times 1}$ del sistema

$$(A^k)^T x = b,$$

dove $k \geq 1$ è un prefissato intero e M^T indica la trasposta di una matrice M ? Analizza la complessità computazionale dell'algoritmo da te proposto.

Come cambia l'algoritmo conoscendo la fattorizzazione $PA = LU$?

3. Quando un problema si definisce ben o mal condizionato? Parla del condizionamento della risoluzione di un sistema lineare.
4. Per calcolare le radici dell'equazione $f(x) = 0$, si considera il seguente metodo iterativo

$$x_{i+1} = (x_i) - \frac{f(x_i)^2}{f(x_i + f(x_i)) - f(x_i)}, i = 0, 1, \dots$$

Studia la convergenza e l'ordine di convergenza di tale metodo per la funzione $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Proponi ed analizza dei criteri d'arresto per uno schema iterativo.

5. Dati i punti $(-1, 2), (0, 1), (2, -3), (3, -5)$ determina il polinomio di interpolazione usando
 - (a) la formulazione di Lagrange
 - (b) la formulazione di Newton

Le due rappresentazioni danno lo stesso polinomio? Perché? Esamina e confronta gli aspetti computazionali delle due rappresentazioni.

6. Determina per gli stessi punti dell'esercizio precedente la funzione $\phi(t) = x_1 t + x_2 e^{-t} + x_3 t e^{-t}$ che approssima con il minimo scarto tali dati, ovvero scrivi il sistema $Ax \approx b$ da risolvere nel senso dei minimi quadrati. Descrivi e commenta i passi da compiere per arrivare alla soluzione.
7. Introduci la formula dei trapezi composta, fornendo anche la formula dell'errore. Data $f(x) = \cos(x)e^x$ quanti intervalli sono necessari per ottenere un'approssimazione dell'integrale della funzione in $[0, \pi]$ con la formula dei trapezi composta con un'accuratezza pari a 10^{-4} ?

8. (a) Scrivi una *function* MATLAB che calcoli la norma infinito di una matrice assegnata.
- (b) Scrivi una codifica (*function*, *script* o serie di istruzioni) MATLAB che implementi l'algoritmo di Horner per la valutazione di un polinomio $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ in un piu' punti $x_i, i = 1, \dots, m$.