

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 11 gennaio 2006

Il candidato deve scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Definisci l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(B, t, e_{min}, e_{max})$, dove B è la base di rappresentazione, t sono le cifre della mantissa, e_{min}, e_{max} definiscono rispettivamente la limitazione inferiore e superiore dell'esponente e , i.e. $-e_{min} \leq e \leq e_{max}$. Quanti sono i numeri di macchina? Sono equispaziati? Quali sono i numeri di macchina positivi rispettivamente massimo e minimo? Definisci i numeri denormalizzati e spiega il motivo per cui, in alcuni sistemi, vengono introdotti. Quanti sono i numeri denormalizzati? Come viene approssimato un numero reale con un numero di macchina? Che errore si commette in tale approssimazione? Definisci la precisione di macchina. Considera $B = 2, t = 2, e_{min} = 1, e_{max} = 1$ e costruisci tutti numeri di macchina $\mathcal{F}(B, t, e_{min}, e_{max})$.

2. Definisci l'errore inerente ed algoritmico relativo al problema $y = f(x_1, \dots, x_n)$, con $y, x_i \in R, i = 1, \dots, n$ e f razionale. Parla del condizionamento del problema e della stabilità in avanti e all'indietro di un algoritmo. Considera la funzione $y = x_1(x_2 + x_3), x_i \in R, i = 1, 2, 3$. Valuta l'errore inerente e gli errori algoritmici rispettivamente per

algoritmo 1 $y = x_1 * (x_2 + x_3)$;

algoritmo 2 $y = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$.

Commenta i risultati.

3. Descrivi l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare $Ax = b$ con A matrice quadrata non singolare. In particolare
 - scrivi una pseudocodifica;
 - analizza la sua complessità computazionale;
 - descrivi la tecnica di pivoting, elencando due motivi per applicarla e soffermandoti sugli aspetti implementativi.
4. Introduci il metodo di Newton per la ricerca degli zeri di una funzione $f(x)$, descrivi il suo significato geometrico, parla della sua convergenza e dell'ordine di convergenza. Applica il metodo di Newton per l'approssimazione della radice α di $f(x) = e^{-\frac{x}{4}} - x$. In particolare
 - localizza la radice α ;
 - fornisci i valori iniziali x_0 che garantiscono la convergenza;
 - analizza l'ordine di convergenza;
 - proponi un criterio d'arresto.

5. Definisci la spline cubica $S_{3,n}(t)$ e parla della sua applicazione al problema dell'interpolazione di dati o funzioni. Siano assegnati nel piano n punti $P_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, n$. Introduci il problema dell'interpolazione parametrica, scrivi una pseudocodifica per un algoritmo che ricostruisce la curva parametrica interpolante assegnate in ingresso le coordinate dei punti $P_i, i = 1, \dots, n$. Supponi di avere a disposizione sia una funzione *spline* che riceve in ingresso i dati da interpolare ed un valore t assegnato e valuta il valore $S_{3,n}(t)$ sia una funzione *grafico* che disegna il grafico approssimato di una funzione assegnato in ingresso un suo campionamento.
6. Sia data una serie temporale $y(n) \in R, n = 0, \dots, N$. Si vogliono stimare nel senso dei minimi quadrati i valori x_1, x_2 che descrivono l'evoluzione della serie secondo il seguente modello

$$y(n+1) = x_1 y(n) + x_2 y(n-1), n = 1, \dots, N-1.$$

Scrivi la matrice A e il termine noto b del sistema sovradeterminato da risolvere. Introduci le equazioni normali, spiega il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica. Quali sono gli aspetti che possono essere causa di risultati numerici poco accurati in tale approccio? Conosci un metodo alternativo?

MATLAB Scrivi una funzione MATLAB per il problema dell'esercizio 5.