

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, dott. A. Sommariva

Udine, 4 luglio 2002

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Analizza l'errore dell'algoritmo

Algoritmo

$$y_1 = x^2$$

$$y_{i+1} = \sqrt{y_i}, i = 1, \dots, m$$

$$z_1 = y_{m+1}$$

$$z_{i+1} = z_i^2, i = 1, \dots, m - 1$$

e spiega i risultati seguenti ottenuti implementandolo ed eseguendolo in MATLAB (standard IEEE doppia precisione con $B = 2$, $t = 54$)

$x =$	0.2500	0.5000	0.7500	1.2500	1.5000	2.0000
$m =$	50					
$z(m) =$	0.2375	0.4724	0.7316	1.1331	1.4550	1.8682
$\frac{ x-z(m) }{ x } =$	0.0499	0.0553	0.0245	0.0935	0.0300	0.0659

(suggerimento: usa i grafi computazionali in maniera ricorsiva per la prima parte e la formula $\sum_{i=0}^m x^i = (x^{m+1} - 1)/(x - 1)$ e ricorda la definizione di precisione di macchina per la seconda parte)

2. Dopo aver introdotto e spiegato il fenomeno della cancellazione, suggerisci come riscrivere le seguenti espressioni per evitarlo

- $\sqrt{x+1} - 1, x \approx 0$
- $\sin(x) - \sin(y), x \approx y$
- $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}, x \approx 0$

3. Sia $A \in R^{n \times n}$ una matrice non singolare. Risolvi in maniera efficiente, usando l'algoritmo di eliminazione di Gauss con il pivot parziale, il problema seguente

$$A^k x = b,$$

dove k é un intero positivo fissato e $b \in R^n$. In particolare descrivi l'algoritmo da te proposto, presenta una pseudocodifica (simile al linguaggio Matlab) **SENZA** scrivere l'algoritmo di eliminazione di Gauss e stima il numero di operazioni (FLOPS) richieste.

4. Assegnati una funzione $f(x) \in C^2([a, b], R)$ e il polinomio lineare a tratti che la interpola su n nodi equidistanti $x_i = a + (i - 1) * h, i = 1, \dots, n, h = \frac{b-a}{n-1}$, fornisci una stima dell'errore di approssimazione e analizza la convergenza. Determina il numero n di punti che garantiscono un errore minore di 10^{-4} per la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x}$ in $[0, 2]$.
5. Introduci il metodo di Newton per la ricerca degli zeri di una funzione $f(x)$ e applicalo per l'approssimazione dell'unica radice reale α di $f(x) = x^3 - x - 5$. In particolare
 - localizza la radice α ;
 - fornisci i valori iniziali x_0 che garantiscono la convergenza;
 - analizza l'ordine di convergenza.

Il metodo di iterazione funzionale $x_{i+1} = g(x_i)$ definito dalla funzione $g(x) = x^3 - 5$ converge alla radice α in un intorno? Spiega la risposta.

6. Definire l'ordine polinomiale di una formula di quadratura. Calcolare numericamente

$$\int_0^1 (x^3 + 3x^2 + 1) dx$$

mediante la formula di Simpson. Si discuta se tale risultato é esatto, senza calcolare l'integrale. Applicando la formula di Simpson in maniera composta, quale ordine di convergenza risulta? Motiva la tua risposta.

◇◇

Chi non ha svolto la prova pratica, svolga anche il seguente esercizio

7. Scrivi un programma MATLAB che

- calcoli a, b soluzione del problema

$$\min_{a, b} \sum_{i=1}^m (a + bx_i - f(x_i))^2,$$

dove $x_i = 0.25 + (i - 1) * h, i = 1, \dots, m, h = \frac{0.7}{m-1}, m = 5, 10, 20$

- disegni il grafico di $f(x)$ e della retta $y = a + bx$.