

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 12 aprile 2005

Il candidato deve scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. 1 Descrivi il sistema dei numeri floating-point normalizzati $F = F(B, t, p_{min}, p_{max})$, dove B è la base di rappresentazione, t è il numero delle cifre significative e p_{min}, p_{max} sono le limitazioni inferiore e superiore dell'esponente.

Quanti sono i numeri reali che appartengono a tale sistema?

Qual è il numero positivo di F più grande?

Qual è il numero positivo di F più piccolo?

Definisci un numero denormalizzato. Quanti sono i numeri denormalizzati? Quale è il numero positivo più piccolo se al sistema F vengono aggiunti i numeri denormalizzati?

Come è definita la precisione di macchina u ? u è necessariamente un numero di macchina?

2. 2 Parla del condizionamento del problema della risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$, con A matrice quadrata non singolare, definisci il numero di condizionamento $\mu(A)$ e fornisci una maggiorazione dell'errore quando si perturba il solo termine noto b . Analizza il condizionamento delle seguenti matrici, calcolando per ognuna il numero di condizionamento ed indicando se sono ben o mal condizionate.

- $A = \begin{pmatrix} 10^5 & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 10^5 & 0 \\ 0 & 10^5 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{pmatrix}$

3. 3 Descrivi l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare $Ax = b$ con A matrice quadrata non singolare. In particolare

- scrivi una pseudocodifica;
- analizza la sua complessità computazionale;
- descrivi della tecnica di pivoting, elencando due motivi per applicarla e soffermandoti sugli aspetti implementativi.

4. 4 Scrivi dettagliatamente un algoritmo per calcolare in maniera efficiente il prodotto di due matrici triangolari inferiori L_1, L_2 di dimensione n . Fornisci anche una stima del costo computazionale dell'algoritmo.

Supponiamo che L_1, L_2 siano non singolari. Proponi un algoritmo per risolvere il sistema lineare

$$L_1 L_2 x = b,$$

con b vettore assegnato di dimensione n , che non calcoli il prodotto delle due matrici. Analizza il suo costo computazionale.

5. 5 Definisci il metodo di Newton per la ricerca della radici di un'equazione $f(x) = 0$. Parla del suo significato geometrico, della convergenza e dell'ordine di convergenza.

Considera poi la funzione $f(x) = x^2 - 2 \sin(x)$. Localizza la radice positiva, analizza la convergenza, l'ordine di convergenza e proponi un valore iniziale per il metodo di Newton che ne assicuri la convergenza.

6. 6 Sia $s_{1,n}(x)$ il polinomio lineare a tratti che interpola la funzione $f(x) = x^2 - 2e^x$ nell'intervallo $[a, b]$, $0 < a < b$ su $n + 1$ nodi distinti.

Scrivi la formula dell'errore di interpolazione, trova una maggiorazione di $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - s_{1,n}(x)|$ ed analizza la convergenza. Quanti nodi di interpolazione sono necessari per ottenere un errore minore di una precisione prefissata TOL ?

MATLAB Siano dati i punti (t_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, $m \gg 3$. Si vuole risolvere il sistema sovradimensionato $Ax \approx b$ che si ottiene approssimando nel senso dei minimi quadrati i dati assegnati con la funzione $\phi(t) = x_1 + x_2 t + x_3 e^{t^2}$.

Scrivi un programma MATLAB che legge in ingresso i dati (t_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$ e fornisce in uscita il vettore $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ soluzione del problema sopra descritto.