

# PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

*Prof.ssa R. Vermiglio*

Udine, 9 dicembre 2002

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Calcolando le seguenti espressioni matematicamente equivalenti

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

per diversi valori di  $n$  positivi in aritmentica di macchina secondo lo standard IEEE doppia precisione si ottengono i risultati in tabella. Spiega i risultati e analizza l'errore algoritmico delle due espressioni.

$n$	$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	$1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$
1.e+01	1.543471301870203e-01	1.543471301870205e-01
1.e+02	4.987562112088995e-02	4.987562112089027e-02
1.e+03	1.580743742895763e-02	1.580743742895582e-02
1.e+04	4.999875006248544e-03	4.999875006249609e-03
1.e+05	1.581134877255863e-03	1.581134877256878e-03
1.e+06	4.999998750463419e-04	4.999998750000625e-04
1.e+07	1.581138790243131e-04	1.581138790555721e-04
1.e+08	5.000000055588316e-05	4.999999987500000e-05
1.e+09	1.581139076733962e-05	1.581138829688905e-05
1.e+10	4.999994416721165e-06	4.99999999875000e-06
1.e+11	1.581152901053429e-06	1.581138830080237e-06
1.e+12	5.000038072466850e-07	4.99999999998749e-07
1.e+13	1.578591763973236e-07	1.581138830084150e-07
1.e+14	5.029141902923584e-08	4.99999999999987e-08
1.e+15	1.862645149230957e-08	1.581138830084189e-08
1.e+16	0	5.000000000000000e-09

2. Considera la seguente matrice non singolare

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si puo' applicare l'algoritmo di eliminazione di Gauss per determinare la fattorizzazione  $LU$  di  $A$  ? Perche'? Descrivi la variante del pivot parziale e applicala alla matrice  $A$  calcolando  $P, L, U$ . Infine calcola il determinante di  $A$  usando la fattorizzazione ottenuta.

3. Verifica che, applicando il metodo di Newton per approssimare  $\sqrt{\alpha}$  con  $\alpha$  numero positivo, si ottiene la seguente successione

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right), \quad n \geq 0.$$

Quale valore iniziale  $x_0$  assicura la convergenza della successione a  $\sqrt{\alpha}$ ? Inoltre verifica la seguente relazione

$$x_{n+1}^2 - \alpha = \frac{(x_n^2 - \alpha)^2}{(2x_n)^2}, \quad n \geq 0$$

e fornisci una sua interpretazione.

4. Introduci il problema dell' interpolazione trattando in particolare i seguenti punti

- definizione del polinomio interpolante;
- esistenza ed unicità del polinomio interpolante;
- il polinomio interpolante nella forma di Lagrange e di Newton.

Dati i seguenti punti

$$(x_1, y_1) = (-1, 2), (x_2, y_2) = (1, -4), (x_3, y_3) = (3, 6),$$

determina il polinomio interpolante nella forma di Lagrange e di Newton.

5. Assegnati dei punti  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, m$ , descrivi i passi necessari per determinare il polinomio  $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0, n < m$  dei minimi quadrati. Determina la retta  $p_1(x)$  dei minimi quadrati relativa ai dati dell'esercizio precedente.
6. Introduci la formula dei trapezi composta e fornisci la formula dell'errore. Data la funzione  $f(x) = e^{x^2}$  nell'intervallo  $[0, 1]$  quanti intervalli sono necessari per ottenere il valore dell'integrale  $I(f) = \int_0^1 f(x) dx$  con una precisione  $tol = 10^{-4}$  usando la formula dei trapezi composta?
7. Scrivi una funzione MATLAB che, assegnata una matrice  $A$ , ne calcoli la norma infinito.