

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 16 settembre 2003

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola.

1. Definisci l'errore inerente e il condizionamento di un problema. In particolare studia e commenta il condizionamento nel calcolo delle seguenti funzioni

- (a) $f(x) = \sqrt{x}$;
- (b) $f(x) = x^2$;
- (c) $f(x) = \cos(x)$;
- (d) $f(x) = e^x - x - 1$ per $x \approx 0$;

2. Dati due numeri di macchina $a, b \in F(B, t, p_{min}, p_{max})$, con $a < b$, il punto medio m dell'intervallo $[a, b]$ può essere calcolato mediante le due formule equivalenti

- (a) $m = \frac{a+b}{2}$
- (b) $m = a + \frac{b-a}{2}$.

Analizza e commenta l'errore algoritmico di entrambe le formule.

Fornisci dei valori a, b per cui la prima formula va in overflow, mentre la seconda no.

Nel caso $B = 10, t = 3$, calcola e commenta i risultati ottenuti scegliendo $a = 0.501, b = 0.503$ e $a = 0.502, b = 0.504$.

3. Siano date le matrici $A, B, C \in R^{n \times n}$ con A, C non singolari ed il vettore $d \in R^{n \times 1}$. Descrivi i passi da compiere per determinare il vettore $x \in R^{n \times 1}$ definito dalla seguente relazione

$$x = A^{-1}(B + I)C^{-1}d,$$

senza calcolare le matrici inverse. Fornisci una valutazione del costo computazionale dell'algoritmo proposto.

La valutazione del residuo $r = b - A\hat{x}$, fornisce sempre una buona stima dell'accuratezza della soluzione \hat{x} del sistema lineare $Ax = b$? Giustifica la risposta.

4. Descrivi il metodo di bisezione per approssimare le radici di un'equazione non lineare $f(x) = 0$. Avendo localizzato la radice in un intervallo $[a, b]$, fornisci una stima dell'errore dopo n iterazioni del metodo di bisezione. Quante iterazioni sono necessarie per raggiungere una precisione prefissata tol ?

Infine definisci l'ordine di convergenza per una successione $x_i, i = 0, 1, 2, \dots$ convergente ad α . Nell'esempio seguente è riportata la riduzione dell'ordine di grandezza dell'errore per due successioni. Caratterizza nei due casi l'ordine di convergenza.

- (a) $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}, \dots$
 - (b) $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, \dots$
5. Il termine a_0 di un polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $n \geq 1$ definisce un'informazione coperta da segreto. Ad ogni persona di un gruppo selezionato, viene assegnata una coppia di valori $(x_i, y_i = p_n(x_i))$ con $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$. Singolarmente nessuno è in grado di scoprire l'informazione segreta. Qual è il numero k minimo di persone che, condividendo le informazioni, può ricostruire il segreto? Descrivi un algoritmo efficiente per determinare a_0 .
 6. Si vuole risolvere un sistema $Ax \approx b$ sovradimensionato (cioè $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$ con $m > n$) nel senso dei minimi quadrati. Descrivi e commenta un algoritmo per determinare tale soluzione.
 7. Siano dati i punti (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ con n grande. In questo caso quale è il vantaggio principale dell'interpolazione con polinomi a tratti rispetto ad un singolo polinomio? Descrivi in particolare l'interpolazione lineare a tratti, scrivendo anche la formula dell'errore. Data $f(x) = e^{x^2+1}$, stima il valore di n necessario per ottenere un'approssimazione della funzione in $[0, 1]$ con il polinomio lineare a tratti con un'accuratezza pari a 10^{-4} ?
 8. Scrivi una funzione MATLAB che prende in input gli estremi a, b , $a < b$ di un intervallo, una funzione f definita nell'intervallo, un punto $x \in [a, b]$ ed un intero positivo n e fornisce in output il valore in x della derivata del polinomio di grado n che interpola la funzione f in $[a, b]$ su punti equidistanti.