

PROVA SCRITTA Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

Udine, 11 dicembre 2006

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome e il numero di matricola e se accetta il risultato della prova di laboratorio, nel caso l'abbia sostenuta.

1 Prima parte

1. Definisci la precisione di macchina u . Spiega i seguenti risultati ottenuti in Matlab

```
>>u=eps/2
u =
1.1102e-16
>>1 + u > 1
ans =
0
>>0.5 + u > 0.5
ans =
1
```

2. Sia data una successione $x_k, k = 0, 1, 2, \dots$, convergente ad α per $k \rightarrow \infty$. Definisci l'ordine di convergenza. Per ognuna delle seguenti successioni dell'errore in iterazioni successive, scrivi l'ordine di convergenza e l'eventuale fattore di riduzione nel caso di ordine di convergenza lineare

(a) $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \dots$

(b) $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, \dots$

(c) $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}, \dots$

3. Sia $F = F(B, t, p_{min}, p_{max})$ un sistema di numeri di macchina normalizzati. Dato $x_1 \in F$ ed indicato con $x_2 \in F$ il numero di macchina normalizzato successivo, scrivi qual è la distanza minima e massima tra x_1 e x_2 .

4. Dato Il vettore

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

scrivi, quando possibile, le matrici elementari di Gauss, $G_i, i = 1, 2, 3$, per cui risulta che il vettore trasformato $G_i v$ ha componenti nulle da $i + 1, \dots, 4$.

5. Sia dato il metodo di iterazione funzionale $x_{k+1} = \frac{2x_k^2 + x_k}{x_k + 2}, k = 0, 1, 2, \dots$, per l'approssimazione delle radici dell'equazione $x^2 - x = 0$. I punti fissi coincidono con le radici? Il metodo converge localmente ad entrambe le radici dell'equazione?
6. Considera la formula composta dei trapezi per approssimare l'integrale definito di una funzione f sull'intervallo $[a, b]$. Scrivi la formula dell'errore, supponendo che $f \in C^2[a, b]$. Dimezzando l'ampiezza h degli intervallini della suddivisione, qual è il fattore di riduzione dell'errore?
7. Scrivi una function di Matlab che riceve in ingresso un vettore x e fornisce in uscita la sua norma infinito (senza usare norm).
8. Assegnati i vettori dei dati x, y , calcola con Matlab la retta di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati, disegna i punti e la retta.
9. Come viene rappresentato in Matlab un polinomio? Qual è la funzione Matlab che calcola il valore di un polinomio assegnato in un punto o in un vettore e qual è la sua sintassi?

2 Seconda Parte

- 1 Siano dati una matrice quadrata triangolare superiore U , una matrice quadrata di permutazione P ed un vettore b . Illustra i passi computazionali da compiere per risolvere i seguenti sistemi lineari

- $UPx = b$,
- $PUx = b$.

Descrivi un algoritmo per la risoluzione di un sistema lineare con matrice quadrata triangolare superiore ed analizza la sua complessità computazionale.

Scrivi un codice Matlab per la risoluzione di un sistema con matrice quadrata triangolare superiore, che riceve in ingresso la matrice U e il termine noto b e fornisce in uscita la soluzione del sistema $Ux = b$.

- 2 Definisci le formule di quadratura del punto medio $M(f)$ e dei trapezi $T(f)$ per approssimare l'integrale definito di una funzione f sull'intervallo $[a, b]$. Illustra il loro significato geometrico, fornisci per entrambe la formula dell'errore se $f \in C^2[a, b]$ e l'ordine polinomiale. Se $f^{(2)}(x) \geq 0, x \in [a, b]$, verifica che vale

$$M(f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq T(f).$$

- 3 Introduci il problema dell'interpolazione polinomiale di una funzione continua $f(x), x \in [a, b]$, definisci il polinomio di Lagrange e di Newton, elenca i vantaggi computazionali della formulazione di Newton e fornisci la formula dell'errore per funzioni sufficientemente regolari. Valuta l'errore di interpolazione della funzione $f(x) = x^{n+1}, x \in [a, b]$ con un polinomio di grado n e fornisci una sua maggiorazione. Cosa accade per $n \rightarrow \infty$?
- 4 Siano assegnati i seguenti dati $x(i), y(i) \in R, i = 1, \dots, n$. Si vuole ottenere una stima nel senso dei minimi quadrati dei parametri $a_1, a_2, \dots, a_m, m \ll n$, della seguente funzione scelta per rappresentare il fenomeno

$$f(x) = \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x)$$

Scrivi la matrice A e il termine noto b del sistema sovradeterminato da risolvere.

Introduci le equazioni normali, spiega il loro significato geometrico ed i passi da compiere per calcolare la soluzione numerica.

Scrivi un codice Matlab per risolvere tale problema con $\varphi_k(x) = \cos((k-1)x), k = 1, \dots, m$. Il codice riceve in ingresso i vettori dei dati $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ e l'intero m e fornisce in uscita il vettore $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$.