PROVA MATLAB - Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

`Udine, 1 dicembre 2006`

Ciascun candidato (singolo o in coppia) dovrà scrivere sul foglio allegato per le risposte il **cognome**, il **nome**, il **numero di matricola** e l'**anno di corso** a cui risulta iscritto.

Le risposte ai quesiti vanno inserite negli appositi spazi nel foglio allegato per le risposte. I codici MATLAB e gli eventuali grafici prodotti **NON** vanno allegati in forma cartacea a tale foglio (**NON** si deve quindi stampare), bensì **vanno OBBLIGATORIAMENTE salvati nella propria home directory sotto la cartella PROVA_MATLAB** (o sotto la stessa cartella nella penna USB del docente per chi utilizza il portatile creando una sotto-cartella con i propri cognomi).

1. Siano assegnati i seguenti dati sulla popolazione degli Stati Uniti:

i	anno t_i	popolazione y_i
1	1900	76,212,168
2	1910	92,228,496
3	1920	106,021,537
4	1930	123,202,624
5	1940	132,164,569
6	1950	151,325,798
7	1960	179,323,175
8	1970	203,302,031
9	1980	226,542,199

Esiste un unico polinomio di grado 8 interpolante i 9 valori assegnati, ma la sua rappresentazione

$$p(t) = x_1\varphi_1(t) + x_2\varphi_2(t) + \cdots + x_9\varphi_9(t)$$

varia al variare della base di funzioni $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_9\}$ scelta.

Per ognuna delle basi di funzioni

$$\varphi_j(t) = t^{j-1},\ j = 1, \ldots, 9, \tag{1}$$

$$\varphi_j(t) = \left(\frac{t-1940}{40}\right)^{j-1},\ j = 1, \ldots, 9, \tag{2}$$

scrivi una function MATLAB che genera la relativa matrice di Vandermonde, ovvero la matrice V di elementi

$$v_{ij} = \varphi_j(t_i),\ i, j = 1, \ldots, 9,$$

e ne calcola il numero di condizionamento $\mathrm{cond}_2(V)$ con l'istruzione predefinita di MATLAB.

Scelta la base che fornisce la matrice meglio condizionata, calcola i coefficienti $x = (x_1, x_2, \ldots, x_9)^T$ del polinomio p che interpola i dati assegnati risolvendo il sistema lineare

$$Vx = y$$

dove $y = (y_1, y_2, \ldots, y_9)^T$ è il vettore dei valori di popolazione riportati in tabella.

Scrivi, per la stessa scelta della base, una function MATLAB che calcola il polinomio p con il metodo di Horner (o con una sua variante) e che lo disegna nei punti $t = 1900, 1901, 1902, \ldots, 1979, 1980$ e, sullo stesso grafico, disegna anche i valori assegnati in tabella.

Il valore della popolazione secondo il censimento dell'anno $\bar{t} = 1990$ è $\bar{y} = 248,709,873$. Estrapola il valore $p(\bar{t})$ con il polinomio calcolato in precedenza e valuta l'errore relativo

$$\varepsilon_{\bar{y}} = \left|\frac{\bar{y} - p(\bar{t})}{\bar{y}}\right|$$

commesso rispetto al valore censito.

NOTA: i vettori $t = (t_1, t_2, \ldots, t_9)^T$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_9)^T$ corrispondenti ai valori assegnati in tabella sono contenuti nel file **es1.mat** scaricabile da

`http://www.dimi.uniud.it/rossana/`

sotto "Courses and Exams" oppure da

http://www.dimi.uniud.it/dbreda/teaching.html

(oppure dalla penna USB del docente per chi utilizza il portatile).

2. Assegnati sul piano cartesiano i punti P_i di coordinate (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, scrivi una function MATLAB che ricostruisce la curva risultante dall'interpolazione dei punti con le spline parametriche e successivamente la disegna. Per la costruzione utilizza la tecnica della lunghezza cumulativa che definisce i valori di campionamento del parametro t come

$$t_1 = 0 \quad \text{e} \quad t_i = \sum_{k=2}^{i} l_k, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

dove

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

è la lunghezza del segmento $\overline{P_{k-1}P_k}$. Il parametro di descrizione della curva varia perciò in $[0, T] = [t_1, t_n]$.

Testa la tua function ricostruendo e disegnando il profilo della tua mano. Per ottenere i vettori $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ delle coordinate dei punti puoi procedere come segue:

- appoggia la tua mano sullo schermo del computer;
- scegli con il mouse n punti ($n \geq 30$) lungo il profilo della mano con i seguenti comandi:

```
figure('position',get(0,'screensize'))
axes('position',[0 0 1 1])
[x,y]=ginput
close
```

Il comando *ginput* serve par raccogliere le coordinate di un punto identificato con il click del mouse sulla finestra grafica. Ad ogni click corrisponde un punto e la raccolta dei punti viene terminata premendo il tasto *invio.*

3. Sia $A \in I\!R^{n \times n}$ non singolare. Data la matrice

$$X_1 = \frac{A^T}{\|A\|_1 \|A\|_\infty},$$

il metodo di iterazione

$$X_{k+1} = X_k + X_k(I - AX_k), \; k = 1, 2, \ldots,$$

fornisce una successione di matrici $X_k \in I\!R^{n \times n}$ che converge alla matrice inversa A^{-1} di A.

Definendo l'errore assoluto al passo k-esimo come

$$e_k = \|A^{-1} - X_k\|_\infty, \; k = 1, 2, \ldots,$$

implementa il metodo in una function MATLAB che prevede come criterio d'arresto

$$e_k < \text{TOL}$$

dove TOL è una tolleranza fissata a piacere in input e la matrice A^{-1} in e_k viene calcolata con l'istruzione predefinita di MATLAB per il calcolo dell'inversa.

Testa la tua function con la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

per i valori di tolleranza TOL $= 10^{-1}$, 10^{-2}, 10^{-4} e 10^{-8} calcolando il numero minimo di iterazioni K necessario a soddisfare il criterio di arresto e l'errore finale e_K.

Sei in grado di stimare l'ordine di convergenza del metodo, cioè il numero positivo p per cui vale

$$\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

con C costante?

RISPOSTE PROVA MATLAB - Esame di Calcolo Scientifico

Prof.ssa R. Vermiglio, Dott. D. Breda

`Udine, 1 dicembre 2006`

	1° candidato	2° candidato
Cognome:		
Nome:		
n° matricola:		
anno di corso:		

1. Inserisci le risposte negli appositi spazi:

	prima base	seconda base
$\mathrm{cond}_2(V) =$		

base scelta:

$x_1 =$
$x_2 =$
$x_3 =$
$x_4 =$
$x_5 =$
$x_6 =$
$x_7 =$
$x_8 =$
$x_9 =$

popolazione $p(\bar{t}) =$
errore relativo $\varepsilon_{\bar{y}} =$

2. Verifica diretta al calcolatore: l'esercizio sarà ritenuto valido solamente se l'm-file prodotto funziona correttamente.

3. Inserisci le risposte negli appositi spazi:

$$A^{-1} = \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)$$

tolleranza TOL	n° minimo di iterazioni K	errore finale e_K
10^{-1}		
10^{-2}		
10^{-4}		
10^{-8}		

ordine di convergenza $p =$