Introduzione alla Programmazione Lineare

1. Proprietà geometriche

Si definiscono come problemi di Programmazione Lineare (PL) tutti quei problemi di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo è lineare e i vincoli sono tutti espressi da diseguaglianze lineari ed anche, eventualmente, uguaglianze lineari. Per poter parlare di PL devono essere sempre presenti delle diseguaglianze mentre le uguaglianze possono mancare. Un problema con solo vincoli di uguaglianza ha una struttura molto particolare ed è illimitato tranne il caso in cui tutte le soluzioni ammissibili hanno lo stesso valore di funzione obiettivo. È chiaro quindi che un modello lineare di un problema reale avrà sempre vincoli di diseguaglianza (ad esempio il vincolo di non negatività delle variabili).

Consideriamo allora il modo in cui i vincoli di diseguaglianza determinano la struttura del problema. Per semplicità iniziamo da un problema con solo due variabili x_1 e x_2. Un vincolo del tipo

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = b \tag{1}$$

rappresenta una retta R nel piano (cioè l'insieme dei punti che soddisfano la relazione). La retta divide il piano in due parti H_1 e H_2. Si veda in figura 1 il caso $x_1 + 2\, x_2 = 2$. Se valutiamo $(a_1\, x_1 + a_2\, x_2)$ in un punto P_1 qualsiasi di H_1 (figura 2) otteniamo necessariamente un valore diverso da b (altrimenti il punto sarebbe su R). Supponiamo che tale valore sia inferiore a b (come nell'esempio). Possiamo allora dire che per *tutti* i valori di H_1 il valore di $a_1\, x_1 + a_2\, x_2$ è inferiore a b. Infatti se consideriamo un altro punto P_2 di H_1 e supponiamo che il valore di $(a_1\, x_1 + a_2\, x_2)$ sia superiore a b, allora presa una qualsiasi linea congiungente P_1 a P_2 e tutta in H_1, vi sarebbe un punto sulla linea in cui per continuità il valore di $a_1\, x_1 + a_2\, x_2$ sarebbe uguale a b, ma allora tale punto dovrebbe essere su R, mentre abbiamo costruito la linea interamente in H_1

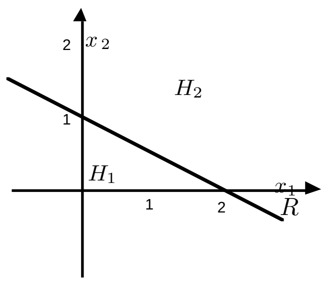


figura 1

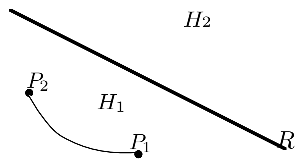


figura 2

Analogamente possiamo concludere che i punti su H_2 sono tutti maggiori di b oppure tutti minori di b. Per capire quale dei due casi si verifichi, notiamo che il vettore formato dai coefficienti di $(a_1\, x_1 + a_2\, x_2)$, ovvero (a_1, a_2) è ortogonale alla retta R (figura 3), come si vede dal fatto che la retta parallela a R e passante per l'origine ha equazione $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = 0$.

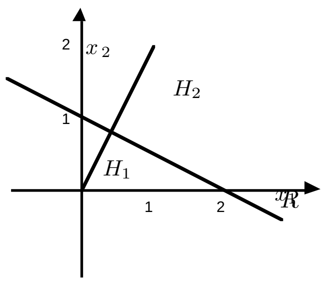


figura 3

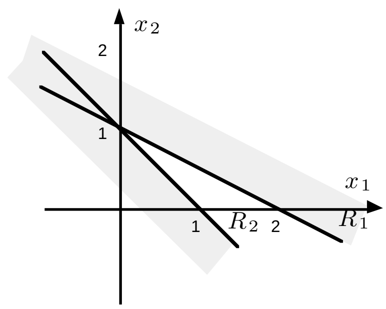


figura 4

Allora i punti del tipo $\alpha\,(a_1, a_2)$, con α scalare qualsiasi rappresentano la retta Q passante per l'origine e ortogonale a R. Se valutiamo $a_1\,x_1 + a_2\,x_2$ su Q otteniamo $\alpha\,(a_1^2 + a_2^2)$, da cui si vede che sono maggiori di b i punti del semipiano verso cui è orientato il vettore dei coefficienti (H_2 nell'esempio) e minori di b i punti dell'altro semipiano. Allora un vincolo del tipo

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 \le b \tag{2}$$

rappresenta un semipiano. Si noti che la frontiera dell'insieme ammissibile è data dalla retta R. Su tali punti, per i quali la diseguaglianza viene soddisfatta come eguaglianza, si dice che la diseguaglianza è *attiva*. Ogni altro punto, che soddisfa (2) come diseguaglianza stretta (diseguaglianza non attiva), non può che essere un punto interno. Se ora aggiungiamo un'altra diseguaglianza lineare (che supponiamo linearmente indipendente dalla prima, cioè definita da una retta non parallela alla prima), cioè

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 &\le b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 &\le b_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Si veda in figura 4 il caso in cui la seconda diseguaglianza, definita dalla retta R_2, è $x_1 + x_2 \ge 1$, per cui (3) diventa

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &\le 2 \\ -\,x_1 - \,x_2 &\le -1 \end{aligned} \tag{4}$$

L'insieme ammissibile di (4) è raffigurato in figura 4. Si tratta di un insieme particolare: si noti che il punto d'incrocio delle due rette (il punto $(0, 1)$ nell'esempio) è ammissibile e, se si trasla l'insieme ammissibile in modo che tale punto si trovi nell'origine, ogni punto ammissibile (x_1, x_2) può essere moltiplicato per uno scalare positivo α (ottenendo quindi il punto $(\alpha, x_1, \alpha, x_2)$) e il nuovo punto è ancora ammissibile. Insiemi con la proprietà che ogni punto dell'insieme può essere moltiplicato per uno scalare positivo rimanendo ancora nell'insieme vengono chiamati *coni*.

Si noti ancora che il punto $(0, 1)$, intersezione delle due rette ha la particolarità di non essere contenuto all'interno di nessun segmento interamente ammissibile (ciò è vero invece per tutti gli altri punti ammissibili). Punti con questa proprietà vengono detti *vertici*.

La frontiera dell'insieme ammissibile è costituita, oltre che dal vertice, dai punti ammissibili delle due rette. Quindi per ogni punto della frontiera almeno una delle due diseguaglianze è attiva. Tutti i punti per cui entrambe le diseguaglianze sono non attive sono punti interni.

Ora aggiungiamo una terza diseguaglianza lineare, ottenendo

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 &\le b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 &\le b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 &\le b_3 \end{aligned} \tag{5}$$

Si veda in figura 5 il caso in cui la terza diseguaglianza, definita dalla retta R_3, è $x_1 - x_2 \le 1$, per cui (5) diventa

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &\le 2 \\ -\,x_1 - \,x_2 &\le -1 \\ x_1 - \,x_2 &\le 1 \end{aligned} \tag{6}$$

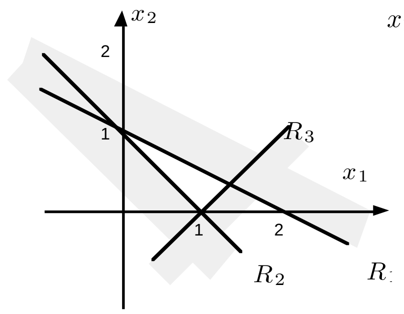


figura 5

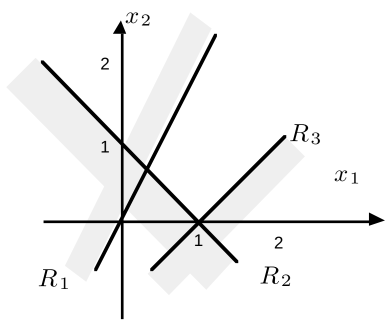


figura 6

Vi sono ora tre punti d'intersezione, dati da tutte le possibili scelte di due rette su tre. In questo semplice esempio avviene che i tre punti calcolati risolvendo i tre sistemi lineari

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 2 \\ -\,x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -\,x_1 - x_2 &= -1 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

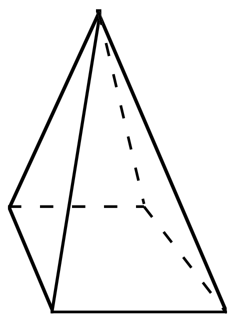
(e cioè rispettivamente i punti $(0,1)$, $(4/3,1/3)$, $(1,0)$) siano ammissibili anche rispetto alla diseguaglianza che non interviene nel sistema lineare che determina il punto stesso. Questa circostanza però è del tutto particolare. Se ad esempio la retta R_1 fosse quella indicata in figura 6 e quindi (6) fosse

$$\begin{aligned} -\,2\,x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -\,x_1 - x_2 &\leq -1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \end{aligned} \tag{7}$$

si vede che il punto $(-1,-2)$ intersezione della retta R_1 con R_3 è inammissibile rispetto alla rimanente diseguaglianza. Come si vede l'insieme ammissibile in due dimensioni è un poligono (non necessariamente limitato).

In generale, date m diseguaglianze in n variabili l'insieme ammissibile è un *poliedro*. Se $n \leq m$ (che è il caso tipico), ogni insieme di n diseguaglianze attive linearmente indipendenti determina un punto. Se inoltre questo punto è ammissibile anche rispetto alle altre $m-n$ diseguaglianze, costituisce un vertice del poliedro. Punti determinati da $n-1$ diseguaglianze attive formano gli *spigoli* mentre punti determinati da un'unica diseguaglianza attiva formano le *faccette*.

Se non esistono punti per cui una diseguaglianza è l'unica diseguaglianza attiva, allora tale diseguaglianza è ridondante e può essere omessa. Può succedere che in un vertice siano attive più di n diseguaglianze (non ridondanti). Tali vertici vengono detti *degeneri*. Si veda in figura un esempio di vertice degenere.



2. Algoritmi

Il metodo del simplesso, inventato da Dantzig nel 1947, è uno degli algoritmi risolutivi della PL. Fino al 1979 è stato l'unico metodo risolutivo noto. È importante notare che il metodo del simplesso non è un algoritmo polinomiale. Tuttavia la complessità computazionale di caso medio è polinomiale e questo spiega il grande successo pratico del metodo del simplesso. Il primo algoritmo polinomiale per la PL (dimostrando quindi l'appartenenza della PL alla classe **P**) è stato l'algoritmo dell'Ellissoide, dovuto a Khacyan. Tuttavia tale algoritmo, pur essendo polinomiale, presenta grandi problemi implementativi e non è stato mai usato in pratica. Nel 1984 fu proposto da Karmarkar un nuovo algoritmo polinomiale che era anche praticamente efficiente. Da tale algoritmo sono stati generati molti algoritmi analoghi, detti ai punti interni, perché generano una successione di punti che tende all'ottimo, tutta all'interno del poliedro.

I moderni pacchetti commerciali di PL usano entrambi i metodi cercando di sfruttare abilmente i rispettivi vantaggi. L'esposizione dei metodi ai punti interni richiederebbe uno spazio eccessivo per questo testo, per cui ci si limita solamente ad una trattazione sintetica del metodo del simplesso.

Se la funzione obiettivo è lineare (come nella PL), ad esempio $\sum_j c_j\, x_j = c\, x$, i punti di equazione $c\, x = K$ costituiscono un piano sul quale la funzione obiettivo è costante con valore K. Punti con valore K' della funzione obiettivo determinano il piano $c\, x = K'$, parallelo al precedente. È abbastanza intuitivo che se il piano $c\, x = K$ non interseca un vertice del poliedro (ma interseca il poliedro), allora esiste un altro piano $c\, x = K'$ che interseca il poliedro con valore $K' < K$ (nonostante la proprietà sia intuitiva, la dimostrazione di questo fatto, che richiede anche l'ipotesi di esistenza di vertici, non è semplice e viene omessa). Quindi i punti del poliedro sulla retta $c\, x = K$ non sono ottimi. Si deduce che, se vi sono ottimi, almeno un vertice è ottimo.

Quindi ha senso "limitare" la ricerca degli ottimi ai vertici del poliedro. La parola 'limitare' è stata posta fra virgolette perché il passaggio da un numero infinito (con potenza del continuo) di punti da esplorare ad un numero finito non deve far pensare che il problema sia facile. Il numero di vertici di un poliedro è generalmente esponenziale nei dati del problema (ad esempio si consideri l'ipercubo $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$, dove $2\, n$ diseguaglianze determinano 2^n vertici) e quindi una enumerazione ingenua dei vertici non può essere considerata una valida strategia di calcolo.

Il metodo del simplesso esplora i vertici cercando però di migliorare ad ogni passo la funzione obiettivo. Questo non garantisce all'algoritmo di sfuggire ad un'eventuale esplorazione di un numero esponenziale di vertici. Però la probabilità che ciò avvenga è trascurabile.

Dovendo esplorare i vertici, bisogna trovare un metodo per rappresentarli. Siccome un vertice è determinato dall'intersezione di n piani, si tratta di specificare quali sono i piani, ovvero quali diseguaglianze sono attive. In altre parole un vertice può venire rappresentato dall'insieme degli indici delle n diseguaglianze attive. Tale insieme prende il nome di *base* (a dire il vero nel metodo del simplesso classico la base è l'insieme complementare, ma per questa breve esposizione la cosa è irrilevante). Quindi sembrerebbe che il passaggio da un vertice ad uno migliore possa essere riprodotto dal passaggio da una base ad una migliore.

Purtroppo le cose sono un po' più complicate. Se un vertice si trova nell'intersezione di più di n piani (cosiddetta *degenerazione*) sono disponibili rappresentazioni diverse, cioè diverse basi, per lo stesso vertice. La conseguenza di questo fatto è che il passaggio da una base all'altra può avvenire fra basi che rappresentano lo stesso vertice. Quindi in realtà il metodo progredisce solo apparentemente e invece staziona per diverse iterazioni sul medesimo vertice. Inoltre c'è il concreto rischio che la sequenza di basi cicli indefinitamente (mentre se si abbandona un vertice passando ad uno migliore, non si può mai ritornare ad un vertice già esplorato). Stranamente gli esempi di ciclaggio sono stati costruiti a tavolino e in pratica tale fenomeno non si è mai verificato. Comunque esistono delle tecniche che impediscono il ciclaggio. Resta il fatto che la degenerazione provoca normalmente un sensibile rallentamento del calcolo.

Il passaggio fra un vertice ed un altro avviene fra due vertici adiacenti, ovvero connessi da uno spigolo. Se non c'è degenerazione le due basi corrispondenti differiscono solo per un indice. Quindi $n - 1$ diseguaglianze rimangono attive (quelle che determinano lo spigolo), mentre una diseguaglianza attiva della seconda base diventa non attiva (si abbandona il vertice seguendo lo spigolo) e una diseguaglianza non attiva diventa attiva (si è raggiunto l'altro vertice).

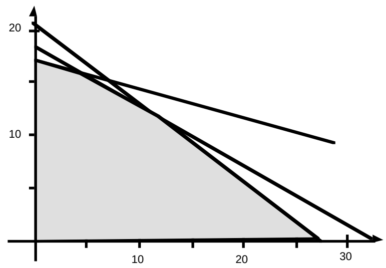
È naturalmente possibile determinare quale diseguaglianza eliminare dalla base per migliorare la funzione obiettivo e anche calcolare quale è la nuova disegualianza che entra in base. Potrebbe avvenire che lo spigolo in questione è illimitato e questo fatto segnala la presenza di un'istanza illimitata.

Infine ad ogni iterazione del metodo è disponibile, oltre alla soluzione, anche la soluzione duale (vedi sezione successiva), che permette di verificare l'ottimalità della soluzione trovata.

3. Dualità

Si consideri il seguente problema: devono essere prodotti due tipi di oggetti i cui prezzi di mercato sono 120 €/pezzo e 180 €/pezzo. Per produrre un pezzo del primo oggetto sono richiesti 15 minuti di una macchina, 35 minuti di un'altra macchina e 60 minuti di lavoro-uomo. Per il secondo oggetto sono invece richiesti 55 minuti della prima macchina, 45 minuti della seconda e 100 minuti di lavoro-uomo. La giornata lavorativa è di 16 ore e sono disponibili 2 operai. Si vuole determinare quanti pezzi produrre al giorno per massimizzare il profitto all'interno dei vincoli di risorsa disponibile. Il problema da risolvere è pertanto:

$$\begin{aligned} \max\ & 120\,x_1 + 180\,x_2 \\ & 15\,x_1 + \ \ 55\,x_2 \le \ \ 960 \\ & 35\,x_1 + \ \ 45\,x_2 \le \ \ 960 \\ & 60\,x_1 + 100\,x_2 \le 1920 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{8}$$



In figura è rappresentato l'insieme ammissibile. I cinque vertici hanno coordinate: $(0,0)$ (entrambi i vincoli di non negatività attivi); $(192/7, 0) \approx (27.42, 0)$ (attivi $x_2 \ge 0$ e secondo vincolo); $(12, 12)$ (attivi secondo e terzo vincolo); $(16/3, 16) \approx (5.33, 16)$ (attivi primo e secondo vincolo); $(0, 192/11) \approx (0, 17.45)$ (attivi $x_1 \ge 0$ e primo vincolo).

La funzione obiettivo vale nei rispettivi vertici 0, 3291.42, 3600, 3520, 3141.80. Quindi l'ottimo vale $\hat{x}_1 = 12$, $\hat{x}_2 = 12$ con profitto ottimo pari a 3600 €/giorno. Si noti che in ottimalità bastano 14 ore al giorno alla prima macchina per produrre i pezzi richiesti. In altre parole la prima macchina rimane inattiva per 2 ore al giorno.

Si supponga ora che il produttore consideri un cambio radicale nella sua strategia, consistente nell'affidare all'esterno i processi produttivi prendendo in affitto le risorse necessarie, anziché produrre in casa con le risorse disponibili. Prima di avviare le trattative vuole valutare quali prezzi offrire ai committenti esterni. Siano allora y_1, y_2 e y_3 i prezzi al minuto delle tre risorse. L'obiettivo è naturalmente quello di ridurre le spese d'affitto ovvero:

$$\min \quad 960\,y_1 + 960\,y_2 + 1920\,y_3$$

Bisogna però tener presente che i prezzi devono essere accettabili e prezzi troppo bassi fanno fallire le trattative. Chi affitta le risorse deve trovare conveniente lavorare per altri, anziché in proprio, per cui, ai prezzi y_1, y_2 e y_3 ogni pezzo del primo oggetto viene ad assumere un valore di $15\,y_1 + 35\,y_2 + 60\,y_3$ e questo non deve essere inferiore al profitto di 120 €. Allora complessivamente il problema da risolvere è

$$\begin{aligned} \min\ & 960\,y_1 + 960\,y_2 + 1920\,y_3 \\ & 15\,y_1 + \ \ 35\,y_2 + \ \ \ 60\,y_3 \ge 120 \\ & 55\,y_1 + \ \ 45\,y_2 + \ 100\,y_3 \ge 180 \\ & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0\ y_3 \ge 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Gli ottimi di (9) sono

$$\hat{y}_1 = 0, \qquad \hat{y}_2 = 1.5, \qquad \hat{y}_3 = 1.125$$

Si tratta di valori espressi in €/minuto, che diventano, espressi in €/ora, $\hat{y}_1 = 0$, $\hat{y}_2 = 90$, $\hat{y}_3 = 67.50$. Si noti che il profitto massimo di 3600 €/giorno è uguale al minimo costo d'affitto $960 \cdot 0 + 960 \cdot 1.5 + 1920 \cdot 1.125 = 3600$. Inoltre, dalle seguenti cosiderazioni:

$$\left\{ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0, \quad \left. \begin{array}{r} 15\,x_1 + \ \ 55\,x_2 \leq \ \ 960 \\ 35\,x_1 + \ \ 45\,x_2 \leq \ \ 960 \\ 60\,x_1 + 100\,x_2 \leq 1920 \end{array} \right\} \right. \implies$$

$$y_1\,(15\,x_1 + 55\,x_2) + y_2\,(35\,x_1 + 45\,x_2) + y_3\,(60\,x_1 + 100\,x_2) \leq 960\,y_1 + 960\,y_2 + 1920\,y_3 \tag{10}$$

e

$$\left\{ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \quad \left. \begin{array}{r} 15\,y_1 + 35\,y_2 + \ \ 60\,y_3 \geq 120 \\ 55\,y_1 + 45\,y_2 + 100\,y_3 \geq 180 \end{array} \right\} \right. \implies$$

$$x_1\,(15\,y_1 + 35\,y_2 + 60\,y_3) + x_2\,(55\,y_1 + 45\,y_2 + 100\,y_3) \geq 120\,x_1 + 180\,x_2 \tag{11}$$

Siccome i termini di sinistra di (10) e (11) sono uguali si ottiene che

$$120\,x_1 + 180\,x_2 \leq 960\,y_1 + 960\,y_2 + 1920\,y_3$$

cioè che in ogni caso il costo d'affitto non può essere inferiore al profitto. L'uguaglianza che si ottiene in ottimalità rappresenta pertanto una condizione d'equilibrio fra domanda e offerta.

Il problema (9) prende il nome di *problema duale* del problema (8) e le variabili ottime duali prendono anche il nome di *prezzi ombra*.

In termini più generali il problema duale viene definito a partire dal problema originale, che a questo punto viene chiamato *problema primale*, semplicemente trasponendo la matrice dei coefficienti dei vincoli e scambiando fra loro i coefficienti dell'obiettivo con quelli dei termini destri delle disequazioni. Inoltre quando in uno dei due problemi l'obiettivo è un massimo, nell'altro problema l'obiettivo è un minimo. Le diseguaglianze sono del tipo $\leq$ se l'obiettivo è un massimo mentre sono del tipo $\geq$ se l'obiettivo è un minimo. Le variabili sono in ogni caso non negative. In base a questo schema il duale del duale è il primale quindi fra i due problemi c'è una perfetta relazione di simmetria.

$$\begin{array}{lll} \min \ \sum_{j=1}^{n} c_j\,x_j & & \\ \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,x_j \geq b_i & i := 1,\dots,m & \\ x_j \geq 0 & j := 1,\dots,n & \end{array} \iff \begin{array}{ll} \max \ \sum_{i=1}^{m} y_i\,b_i & \\ \sum_{i=1}^{m} y_i\,A_{ij} \leq c_j & j := 1,\dots,n \\ y_i \geq 0 & i := 1,\dots,m \end{array} \tag{12}$$

oppure in sintetica notazione matriciale

$$\begin{array}{l} \min \ c\,x \\ \quad A\,x \geq b \\ \quad x \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} \max \ y\,b \\ \quad y\,A \leq c \\ \quad y \geq 0 \end{array}$$

dove c e y sono vettori riga, mentre b e x sono vettori colonna. L'eguaglianza dei valori ottimi riscontrata nell'esempio (cosiddetto principio di *dualità forte*) è un fatto generale che non viene qui dimostrato.

Sfruttando la dualità forte è possibile caratterizzare ulteriormente le variabili duali. Si supponga di variare i valori b in $b + \Delta b$. Quindi abbiamo la seguente coppia primale-duale

$$\begin{array}{l} \min \ c\,x \\ \quad A\,x \geq b + \Delta b \\ \quad x \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} \max \ y\,(b + \Delta b) \\ \quad y\,A \leq c \\ \quad y \geq 0 \end{array} \tag{13}$$

Siano (x^1, y^1) e (x^2, y^2) i valori ottimi di (12) e (13) rispettivamente. Per la dualità forte si ha $c\,x^1 = y^1\,b$ e $c\,x^2 = y^2\,(b + \Delta b)$. Siamo ora interessati a valutare l'effetto della variazione Δb sulla variazione di valore ottimo $c\,x^2 - c\,x^1$. Si noti che l'insieme ammissibile duale non viene modificato da Δb. Si supponga che l'ottimo duale y^1 sia unico. Questo significa che piccole variazioni Δb non alterano l'ottimalità di y^1. Quindi se Δb è sufficientemente piccolo si ha $y^1 = y^2$ da cui

$$c\,x^2 - c\,x^1 = y^2\,(b + \Delta b) - y^1\,b = y^1\,(b + \Delta b) - y^1\,b = y^1\,\Delta b$$

Quindi, indicando con $v(b)$ il valore ottimo di (13) in funzione di b si ha (ponendo $\Delta b_j := 0$ per ogni $j \neq i$ e facendo tendere Δb_i a 0)

$$y_i = \frac{\partial v(b)}{\partial b_i}$$

ovvero *la variabile duale ottima misura la variazione del valore ottimo rispetto a variazioni dei vincoli.*

Questa interpretazione della variabile duale ne rafforza il significato di prezzo se l'obiettivo è di natura monetaria. In questo caso, con riferimento all'esempio (8), si vede che la variabile duale misura l'aumento di profitto rispetto ad una variazione nella disponibilità delle risorse e quindi ne valuta il prezzo intrinseco rispetto alla loro capacità di produrre profitto.

Il fatto importante che si deve notare è che, almeno nei limiti di un modello di produzione altamente semplificato e nelle ipotesi di flessibilità sottolineate precedentemente, il prezzo di un bene o di una risorsa determinato intrinsecamente dal processo produttivo è uguale a quello determinato dall'equilibrio fra domanda e offerta.

Possiamo estendere facilmente la definizione di problema duale anche al caso di vincoli di eguaglianza. Sia un problema definito da

$$\begin{aligned} \min\ & c\,x \\ & A\,x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{aligned} \min \quad & c\,x \\ A\,x \geq\ & \ b \\ -\,A\,x \geq\ & -b \\ x \geq\ & 0 \end{aligned}$$

A questo punto il problema è nella forma (12) e il suo duale è

$$\begin{aligned} \max\ & y^+\,b - y^-\,b \\ & y^+\,A - y^-\,A \leq c \\ & y^+ \geq 0,\ y^- \geq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & (y^+ - y^-)\,b \\ & (y^+ - y^-)\,A \leq c \\ & y^+ \geq 0,\ y^- \geq 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Ora si noti che in (15) le variabili duali compaiono sempre come differenza $(y_i^+ - y_i^-)$. Quindi data una soluzione ammissibile $(\bar{y}_i^+, \bar{y}_i^-)$ tutte le soluzioni del tipo $(\bar{y}_i^+ + K, \bar{y}_i^- + K)$, con $K \geq \min\left\{y_i^+, \bar{y}_i^-\right\}$, sono tutte equivalenti fra loro sia nel valore della funzione obiettivo sia nel valore dei vincoli. Conviene allora definire come problema duale di (14) il seguente problema dove la variabile y è legata a (y_i^+, y_i^-) da $y := y^+ - y^-$, ovviamente svincolata nel segno

$$\begin{aligned} \max\ & y\,b \\ & y\,A \leq c \end{aligned} \tag{16}$$

Anche per la coppia (14)-(16) vale ovviamente l'eguaglianza dei valori ottimi (purché ammissibili).

4. Complementarità

È conveniente riscrivere (12) introducendo delle variabili, cosiddette *di scarto*, definite da

$$s_i := \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, x_j - b_i, \qquad\qquad t_j := c_j - \sum_{i=1}^{m} y_i\, A_{ij}$$

per cui (12) può essere riscritto come

$$\begin{array}{lcl} \min\ c\,x & & \max\ y\,b \\ \quad A\,x - I\,s = b & \Longleftrightarrow & \quad y\,A + t\,I = c \\ \quad x \geq 0,\ s \geq 0 & & \quad y \geq 0,\ t \geq 0 \end{array}$$

portando tutti i vincoli di non negatività sulle variabili. Vale il seguente risultato: una soluzione $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{y}, \hat{t})$ è ottima se e solo se è ammisibile e vale $\hat{t}_j\, \hat{x}_j = 0$ per ogni j e $\hat{y}_i\, \hat{s}_i = 0$ per ogni i.

Si noti che in un ottimo primale di vertice necessariamente almeno n diseguaglianze primali devono essere soddisfatte come uguaglianza (diseguaglianze *attive*). Quindi al più m diseguaglianze primali devono essere soddisfatte come stretta diseguaglianza (diseguaglianze *non attive*). Se vi sono esattamente m diseguaglianze non attive, le relazioni di complementarità impongono il valore 0 a m variabili duali (includendo le variabili di scarto). Le altre n variabili duali sono determinate da un sistema lineare in n equazioni. Siccome il vertice ottimo è determinato da n diseguaglianze attive, le corrispondenti righe della matrice A sono linearmente indipendenti e quindi il sistema lineare duale è non singolare e fornisce una soluzione unica.

5. Risoluzione di un problema di PL

Sono disponibili molti software per risolvere problemi di PL. Alcuni sono commerciali ed altri liberi. Alcuni sono concepiti puramente per risolvere problemi di PL ed altri permettono di risolvere la PL all'interno di programmi generali. Un elenco del software disponbile per la PL aggiornato al 2003 si può reperire al sito http://lionhrtpub.com/orms/surveys/LP/LP-survey.html.

I dati necessari ad identificare un'istanza di PL sono costituiti dalla matrice dei vincoli e dai vettori dei costi e dei termini noti, più alcuni indicatori sul tipo di vincolo ($\leq$, $=$ oppure $\geq$). Inserire i dati in questo modo può essere abbastanza fastidioso, specie se la matrice è sparsa (come avviene normalmente, soprattutto quando la matrice è molto grande) ed obbedisce ad una struttura particolare. Per questo motivo sono stati sviluppati programmi che permettono di fornire i dati in forma strutturata e poi generano la matrice da passare all'algoritmo risolutore in modo trasparente per l'utente. Uno di questi programmi è il LINGO (http://www.lindo.com/).

Uno dei risolutori più potenti è CPLEX che è un insieme di librerie scritte in C che gestiscono vari aspetti della risoluzione di un problema di PL. Le librerie vanno chiamate all'interno di programmi in C scritti dall'utente, che, nell'ipotesi minimale, si limitano a scrivere la matrice dei dati, ma possono anche risolvere problemi molto complessi che richiedono l'uso ripetuto della PL.

Anche il programma Excel è in grado di risolvere problemi di PL, purché si sia installato il 'Solver' (che normalmente richiede una installazione ad hoc). I dati da passare ad Excel sono in forma di matrice esplicita. Ad esempio per il problema di produzione precedentemente visto i dati, con l'indicazione verbale di quali sono le grandezze a cui si riferiscono, possono essere inseriti come in figura:

	A	B	C	D	E
1		oggetto 1	oggetto 2		
2	numero pezzi			profitto	
3	prezzi	120	180		
4					
5				ore richieste	ore disponibili
6	ore-macchina 1	15	55		960
7	ore-macchina 2	35	45		960
8	ore-uomo	60	100		1920

Nelle celle B2 e C2 andranno indicati i numeri di pezzi, che saranno calcolati dal programma. Tuttavia possiamo sempre indicare dei valori, ad esempio possiamo indicare i valori 10 per il numero di pezzi dell'oggetto 1 e 5 per l'oggetto 2. Noti questi valori possiamo far calcolare ad Excel il profitto indicando nella cella D3 la formula

=SUMPRODUCT(B$2:C$2,B3:C3)

che automaticamente esegue il prodotto scalare del vettore dei numeri dei pezzi per il vettore dei prezzi (l'indirizzo della riga 2 deve essere assoluto dato che ora copieremo la formula per le ore richieste in base al numero di pezzi assegnato). Copiando direttamente la cella D3 sulle celle D6:D8, il foglio si presenta così:

	A	B	C	D	E
1		oggetto 1	oggetto 2		
2	numero pezzi	10	5	profitto	
3	prezzi	120	180	2100	
4					
5				ore richieste	ore disponibili
6	ore-macchina 1	15	55	425	960
7	ore-macchina 2	35	45	575	960
8	ore-uomo	60	100	1100	1920

Si tratta ora di far intervenire il Solver, che si trova nel Menù dei Tools (non è presente con un'installazione standard di Excel; bisogna operare una installazione ad hoc). Compare una finestra con la quale si dichiara quale è il valore da massimizzare (o minimizzare), quali sono le variabili e quali sono i vincoli, nonché alcune opzioni dell'ottimizzatore:

- obiettivo: la cella che contiene il valore della funzione obiettivo è nel nostro esempio la cella D3. Quindi bisogna indicare (direttamente 'cliccando' sul foglio) l'indirizzo \$D\$3 nella finestra 'Set Target Cell' cliccando poi max o min a seconda del caso (max nel nostro caso);
- variabili: ci si posiziona nella finestra 'By changing cells' e si selezionano le due celle dei numeri di pezzi. Nella finestra compare l'indirizzo (multiplo) \$B\$2:\$C\$2. Si possono anche operare selezioni multiple se ad esempio le variabili non sono necessariamente posizionate nel foglio come vettori o matrici.
- vincoli: si clicca su 'Add' e compare una tripla finestra di dialogo in cui i valori di sinistra sono vincolati rispetto a quelli di destra. Nel nostro caso dobbiamo fare in modo che le ore richieste in base ai numeri dei pezzi siano non superiori alle ore disponibili. Quindi nella finestra di sinistra selezioniamo il vettore di ore richieste, in quella centrale selezioniamo l'operatore che ci interessa (nel nostro caso $\leq$) e in quella di destra selezioniamo il vettore di ore disponibili. Cliccando 'done' il vincolo è inserito (direttamente per tutte le righe). Resterebbe da inserire il vincolo di non negatività, ma di questo si tiene conto nel punto successivo;
- opzioni di calcolo: cliccando su 'Options' compare una finestra in cui bisogna selezionare 'Assume Linear Model' e 'Assume Non-Negative'. Poi si clicca 'OK'.

A questo punto ricompare la finestra del Solver. Basta cliccare su 'Solve' e Excel inizia il calcolo, che in questo caso dura pochi istanti. I valori dei numeri dei pezzi nella tabella vengono modificati e compaiono i valori ottimi. Excel chiede se si vogliono dei rapporti. Se si selezionano tutti e tre, vengono creati i rapporti della pagina seguente il cui significato è abbastanza evidente. Dei tre rapporti il più interessante è quello di sensibilità (Sensitivity Report) che fornisce le variabili duali e le relazioni di complementarità.

Notiamo come non sia necessario indicare una soluzione iniziale necessariamente ammissibile (ad esempo la soluzione nulla sarebbe la scelta naturale). Il sistema risolve il problema indipendentemente dalla soluzione iniziale indicata.

Microsoft Excel 11.0 Answer Report
Worksheet: [Workbook1]Sheet1
Report Created: 9/24/2004 4:44:46 PM

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$D$3	prezzi profitto	2100	3600

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$2	numero pezzi oggetto 1	10	12
$C$2	numero pezzi oggetto 2	5	12

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$D$6	ore-macchina 1 ore richieste	840	$D$6<=$E$6	Not Binding	120
$D$7	ore-macchina 2 ore richieste	960	$D$7<=$E$7	Binding	0
$D$8	ore-uomo ore richieste	1920	$D$8<=$E$8	Binding	0

Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Workbook1]Sheet1
Report Created: 9/24/2004 4:44:50 PM

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$2	numero pezzi oggetto 1	12	0	120	20	12
$C$2	numero pezzi oggetto 2	12	0	180	20	25.71428571

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$D$6	ore-macchina 1 ore richieste	840	0	960	1E+30	120
$D$7	ore-macchina 2 ore richieste	960	1.5	960	160	53.33333333
$D$8	ore-uomo ore richieste	1920	1.125	1920	76.8	274.2857143

Microsoft Excel 11.0 Limits Report
Worksheet: [Workbook1]Sheet1
Report Created: 9/24/2004 4:44:53 PM

Cell	Target Name	Value
$D$3	prezzi profitto	3600

Cell	Adjustable Name	Value	Lower Limit	Target Result	Upper Limit	Target Result
$B$2	numero pezzi oggetto 1	12	0	2160	12	3600
$C$2	numero pezzi oggetto 2	12	0	1440	12	3600