

Capitolo 13

Programmazione lineare intera: algoritmi poliedrali

Si è già sottolineato ampiamente come la programmazione lineare sia uno dei più importanti strumenti teorici e pratici nella risoluzione di problemi di ottimizzazione. Da un lato la ricchezza di proprietà strutturali e dall'altro l'altissimo numero di applicazioni reali che ricadono in un modello lineare, fanno della programmazione lineare il nucleo centrale dell'ottimizzazione.

Avviene inoltre che una vasta gamma di problemi diversi possano essere modellati con la programmazione lineare, ma con il vincolo aggiuntivo che alcune o tutte le variabili siano intere. Come si è già detto in altre occasioni, questo vincolo trasforma qualitativamente il problema in uno computazionalmente molto difficile. Alcune delle importanti proprietà teoriche vengono perse, quale ad esempio la dualità forte, e quindi non è normalmente disponibile la reinterpretazione del problema secondo l'ottica duale. Ciò che si acquista invece è una straordinaria flessibilità modellistica che permette di trasferire in un modello lineare una enorme varietà di problemi diversi, grazie all'interpretazione delle variabili binarie come indicatori logici di esistenza. Tuttavia, proprio questa grande adattabilità deve rendere molto cauto l'utilizzatore, perché è improbabile che un modello generale possa rispondere adeguatamente in tante svariate circostanze.

Si impone quindi in generale un'analisi approfondita del problema di programmazione lineare intera in esame, soprattutto delle sue caratteristiche strutturali prima di decidere con quali strumenti affrontarne la risoluzione. Si sono incontrati nei capitoli precedenti molti problemi che, naturalmente formulati come problemi combinatori, possono essere riscritti come problemi di programmazione lineare intera. In questi casi si è visto come lo studio delle particolarità dei singoli problemi porti a dei metodi di risoluzione che, anche se non polinomiali, tuttavia offrono buone garanzie di trovare l'ottimo in tempi ragionevoli.

Questo è possibile in misura minore per problemi che non hanno origine da modelli combinatori così fondamentali quali quelli derivati dai grafi o dai matroidi. In questi casi il metodo di risoluzione andrebbe studiato caso per caso e una rassegna dei problemi e dei metodi proposti in letteratura per la loro risoluzione sarebbe sproporzionata per gli scopi di questo testo.

Vi sono comunque delle idee guida di carattere generale che permettono teoricamente di risolvere qualsiasi problema di programmazione lineare intera. Una di queste è dello stesso tipo degli algoritmi di combinatorica poliedrale precedentemente sviluppati, trovare cioè una descrizione in termini di faccette (possibilmente) dell'involuppo convesso delle soluzioni ammissibili. Se la funzione obiettivo è lineare basta la programmazione lineare per trovare l'ottimo. L'altra idea si basa sulla possibilità di decomporre l'insieme ammissibile in sottoinsiemi sempre più piccoli con una tecnica che tende ad enumerare, ma in modo intelligente, le soluzioni. In questo capitolo esamineremo il primo approccio e in quello successivo il

secondo. Preliminarmente però verranno illustrate una serie di tecniche comuni con cui le variabili intere possono modellare situazioni di vincoli disgiuntivi. Per vincolo disgiuntivo s'intende un vincolo composto da una serie di condizioni delle quali almeno una deve essere vera (quindi si tratta di una disgiunzione logica), mentre si parla di vincoli congiuntivi, contrapposti a quelli disgiuntivi, quando tutte le condizioni devono essere soddisfatte (come ad esempio nella programmazione lineare). Espresso nel linguaggio degli insiemi un vincolo disgiuntivo corrisponde all'unione di due insiemi, mentre un vincolo congiuntivo corrisponde all'intersezione.

13.1. Modelli con variabili intere

Si sono finora già visti molti modelli in cui le variabili intere, binarie nella fattispecie, intervengono in modo naturale in tutti quei problemi in cui si tratta di scegliere un elemento all'interno di un insieme, oppure un particolare sottoinsieme all'interno di una famiglia di sottoinsiemi. Non ci soffermeremo ulteriormente su questo aspetto già abbondantemente illustrato.

Variabili intere intervengono inoltre quando la funzione obiettivo presenti delle non convessità (in problemi di minimizzazione). Si supponga di avere approssimato la funzione obiettivo $f(x)$ con una funzione lineare a tratti, come in figura 13.1.

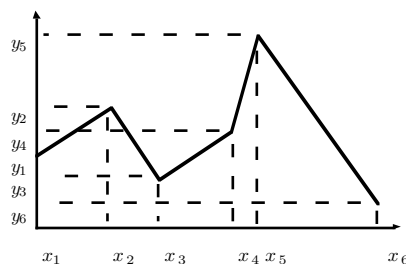


FIGURA 13.1

Per ognuno dei tratti di linearità la coppia di coordinate $(x, f(x))$ si ottiene come combinazione convessa delle coppie di punti (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}) . Si tratta di poter identificare esattamente a quale coppia di punti x si riferisce. A questo punto si immagini che $(x, f(x))$ si ottenga come combinazione convessa di tutti i punti (x_i, y_i) , con la clausola però che solo valori adiacenti abbiano coefficienti non nulli. La prima condizione si esprime facilmente come

$$(x, f(x)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i, y_i)$$

Per la seconda condizione conviene usare un vincolo di assegnamento che identifica l'intervallo in cui si attua la combinazione convessa. Quindi sia

$$z_i := \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i := 1, \dots, n-1$$

da cui $\sum_{i=1}^{n-1} z_i = 1$ e inoltre dobbiamo imporre $\alpha_1 > 0 \implies z_1 = 1$, $\alpha_n > 0 \implies z_{n-1} = 1$ e, per $i := 2, \dots, n-1$, $\alpha_i > 0 \implies z_i = 1 \vee z_{i-1} = 1$, condizione che si realizza con

$$\alpha_1 \leq z_1 \quad \alpha_n \leq z_{n-1} \quad \alpha_i \leq z_i + z_{i-1} \quad i := 2, \dots, n-1$$

Pertanto il problema $\min \{f(x) : x \in F\}$ si può modellare come

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = x & \sum_{i=1}^{n-1} z_i = 1 & \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = 1 \\ & \alpha_1 \leq z_1 & \alpha_n \leq z_{n-1} & \alpha_i \leq z_i + z_{i-1} \quad i := 2, \dots, n-1 \\ & x \in F & \alpha_i \geq 0 & z \in \{0, 1\}^{n-1} \end{aligned}$$

Si tenga presente che per minimizzare una funzione convessa lineare a tratti non serve introdurre variabili intere. Se la funzione è definita come

$$f(x) := \begin{cases} f(a_1) + c_1(x - a_1) & \text{se } a_1 \leq x \leq a_2 \\ f(a_2) + c_2(x - a_2) & \text{se } a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ f(a_n) + c_n(x - a_n) & \text{se } a_n \leq x \leq a_{n+1} \end{cases}$$

e $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ (e quindi f è convessa) basta definire $x = y_1 + y_2 + \dots + y_n$, vincolare $0 \leq y_i \leq a_{i+1} - a_i$, $\forall i$, e minimizzare $\sum_i c_i y_i$. Sarà la natura convessa dell'obiettivo a garantire che in ottimalità si abbia $y_i < a_{i+1} - a_i \implies y_j = 0, \forall j > i$ e $y_i > 0 \implies y_j = a_{j+1} - a_j, \forall j < i$.

In modo analogo si possono modellare discontinuità come in figura 13.2 dove la funzione è inferiormente semicontinua (nei punti di discontinuità la funzione assume il valore più basso dei due limiti).

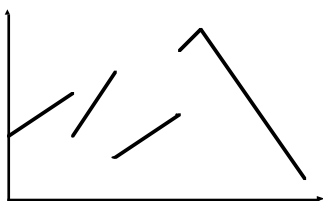


FIGURA 13.2

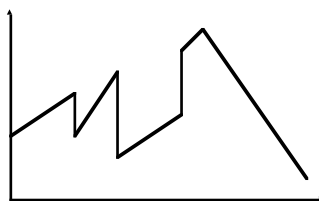


FIGURA 13.3

La funzione può essere assimilata alla linea spezzata di figura 13.3 alla quale si possono allora applicare i risultati delle funzioni lineari a tratti (si prendano anche i segmenti verticali come tratti lineari). Se la funzione non è inferiormente semicontinua è molto probabile che il minimo non esista e quindi non è un modello significativo per le applicazioni. Un caso particolare molto frequente di funzioni discontinue è dato dal cosiddetto modello a *penalità fissata* (*fixed charge*):

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ d + cx & \text{se } 0 < x \leq K \end{cases}$$

che si può modellare come

$$\begin{aligned} \min \quad & dz + cx \\ & x \leq zK \\ & z \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Fare in modo che una variabile x assuma il valore $\min \{y_1, y_2\}$ dove y_1 e y_2 sono altre due variabili del problema è normalmente facile se la funzione obiettivo ‘spinge’ verso l’alto x .

Allora (come si è già fatto frequentemente in questo testo) basta porre $x \leq y_1$ e $x \leq y_2$. Se però x può fluttuare in modo imprevedibile bisogna trovare il modo di ancorarla al valore $\min\{y_1, y_2\}$. È necessario aggiungere il vincolo disgiuntivo $(x \geq y_1) \vee (x \geq y_2)$. Questo è un caso particolare di una situazione più generale che può essere espressa come segue. Siano dati m poliedri P^1, P^2, \dots, P^m definiti da $P^i := \{x \in \mathbb{R}_+^n : A^i x \leq b^i\}$. Si supponga che vengano definiti come ammissibili punti che appartengono ad almeno k poliedri (si veda in figura 13.4 un esempio con $m = 5$ e $k = 3$; le aree tratteggiate rappresentano i punti ammissibili)

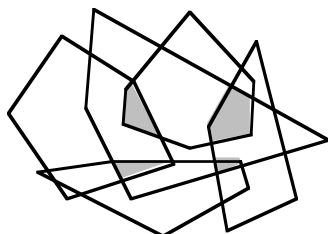


FIGURA 13.4

Per modellare questo vincolo disgiuntivo bisogna introdurre una costante sufficientemente elevata che indichiamo con M . Dopodiché ogni poliedro viene ridefinito come

$$A^i x \leq b^i + \mathbf{1}(1 - z_i)M \quad (13.1)$$

Se $z_i = 0$ allora i vincoli (13.1) diventano ridondanti (M è stata scelta proprio con questo scopo). Se invece $z_i = 1$, (13.1) rappresenta il poliedro P^i . Basta allora aggiungere il vincolo $\sum_i z_i \geq k$, $z_i \in \{0, 1\}$.

Si tenga presente che la formulazione di questi problemi con variabili intere non è unica. Ad esempio, se nel caso precedente si ha $k = 1$, il vincolo può essere modellato come

$$\begin{aligned} A^i y^i &\leq z_i b^i \\ y^i &\leq M z_i \mathbf{1} \\ \sum_i y^i &= x \quad \sum_i z_i = 1 \\ y^i &\geq 0, \quad x \geq 0, \quad z_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Il caso più frequente (ma non l'unico) è quello in cui si deve minimizzare una funzione lineare e allora $\bigcup_i P^i$ può essere sostituita da $\text{conv} \bigcup_i P^i$ (vedi figura 13.5). Di questo ci occuperemo nella prossima sezione.

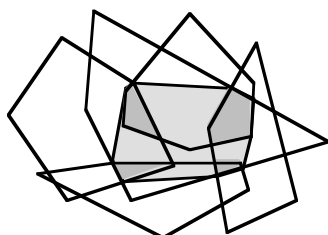


FIGURA 13.5

Infine accenniamo alla possibilità di modellare vincoli logici con variabili binarie (che qui identifichiamo nella notazione con le variabili logiche). Ad esempio l'implicazione logica

$x \rightarrow y$ può essere semplicemente realizzata tramite la disequaglianza per le variabili binarie $x \leq y$. Per vincoli logici più complessi conviene trovare quelle disequaglianze che definiscono l'involuppo convesso dei valori ammissibili delle variabili binarie. Se ad esempio dobbiamo rappresentare il vincolo $x \rightarrow (\neg y \vee \neg z)$ notiamo che di tutti valori binari che può assumere la terna (x, y, z) solo il valore $(1, 1, 1)$ non è ammesso (identificando come di consueto il valore logico vero con il valore binario 1) e quindi il vincolo logico si modella con $x + y + z \leq 2$ (vedi figura 13.6). Si noti che in generale un vincolo logico può essere modellato in modi alternativi. Ad esempio $(x \vee y) \rightarrow \neg z$ si può rendere sia come $x + y \leq 2(1 - z)$ (figura 13.7) che come la coppia di vincoli $x \leq 1 - z$ e $y \leq 1 - z$ (figura 13.8). Dei due modi il secondo, anche se richiede due disequaglianze al posto di una, è preferibile al primo perché corrisponde esattamente all'involuppo convesso dei valori ammissibili.

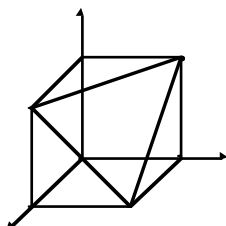


FIGURA 13.6

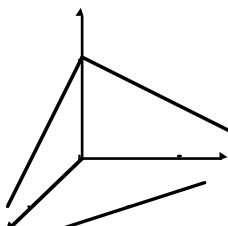


FIGURA 13.7

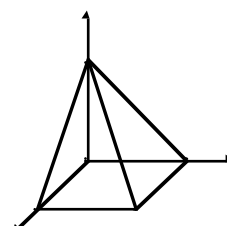


FIGURA 13.8

13.1 ESERCIZIO. Come modellare $x \wedge y \leftrightarrow \neg z$? ■

13.2. Involuppi convessi di unioni

Siano dati i due poliedri

$$P^1 := \{x \in \mathbb{R}^n : A^1 x \leq b^1\} \quad P^2 := \{x \in \mathbb{R}^n : A^2 x \leq b^2\}$$

che assumiamo non vuoti. Siamo interessati a trovare disequaglianze valide per il poliedro

$$P := \overline{\text{conv}}(P^1, P^2)$$

Si noti che $\overline{\text{conv}}(P^1, P^2)$ è anche esprimibile come $\text{conv}(P^1, P^2) + C^1 + C^2$ dove i coni C^i sono definiti da $C^i := \{x : A^i x \leq 0\}$. Per definizione di involuppo convesso, per ogni punto $x \in \text{conv}(P^1, P^2)$ esistono punti $y^1 \in P^1, y^2 \in P^2$, e coefficienti $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ tali che

$$x = \alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2$$

e P è la chiusura della proiezione canonica su \mathbb{R}^n dell'insieme in \mathbb{R}^{3n+2} costituito dai valori $(x, y^1, y^2, \alpha_1, \alpha_2)$ ammissibili per il sistema:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2 \\ A^1 y^1 &\leq b^1 \\ A^2 y^2 &\leq b^2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 &\geq 0 \\ \alpha_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{13.2}$$

Il sistema (13.2) non è lineare, tuttavia è linearizzabile definendo $x^i := \alpha_i y^i$. Si consideri allora:

$$\begin{array}{rcl}
 & \alpha_1 + & \alpha_2 = 1 \\
 x - & x^1 - & x^2 & = 0 \\
 & A^1 x^1 & - b^1 \alpha_1 & \leq 0 \\
 & & A^2 x^2 & - b^2 \alpha_2 \leq 0 \\
 & \alpha_1 & & \geq 0 \\
 & & \alpha_2 & \geq 0
 \end{array} \tag{13.3}$$

Sia \tilde{P} il poliedro in \mathbb{R}^{3n+2} definito da (13.3). Si indichi con Π_x la proiezione canonica sul sottospazio delle variabili x . Allora si ha:

13.2 TEOREMA. $P = \Pi_x \tilde{P}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\alpha_i > 0$, ad ogni soluzione di (13.3) corrisponde una soluzione di (13.2) e viceversa. Se invece $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1$ allora ogni x ammissibile in (13.3) è dato dalla somma di un elemento di P^2 e di un elemento del cono C^1 e quindi $x \in P$. Analogamente si ragiona se $\alpha_1 = 1$. ■

Per determinare le disequaglianze che descrivono P possiamo applicare i risultati della Sezione 4.7, pag. 102. Riscriviamo (13.3) come

$$\begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} & & 1 & 1 \\ -I & -I & & \\ A^1 & & -b^1 & \\ & A^2 & & -b^2 \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} = \\ = \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13.4}$$

e quindi P è definito dalle disequaglianze $u x \leq u_0$ per tutti i valori u e u_0 che corrispondono ai generatori del cono poliedrico

$$\tilde{C} := \{(u_0, u, v^1, v^2) : u = v^i A^i, u_0 \geq v^i b^i, v^i \geq 0, i := 1, 2\} \tag{13.5}$$

o, più esattamente, ai valori (u_0, u) generatori del cono C , proiezione di \tilde{C} sul sottospazio delle variabili (u_0, u) (è chiaro che i vincoli di uguaglianza in (13.4) comportano la mancanza del vincolo di non negatività per u_0 e u ; inoltre le variabili duali dei vincoli di non negatività di α_i sono state eliminate e trasformate nei vincoli di disequaglianza $u_0 \geq v^i b^i$).

Per trovare i generatori di C si può risolvere un problema di programmazione lineare previa normalizzazione delle direzioni di C . Considereremo due tipi di normalizzazione. Il primo, teoricamente più interessante perché non introduce disequaglianze ridondanti, richiede però la conoscenza a priori di un punto interno di P (equivalente alla conoscenza di un elemento di C^*). Il secondo, una semplice limitazione in norma $\|\cdot\|_\infty$, è invece applicabile sempre, però può generare disequaglianze ridondanti.

Sia x^0 un punto interno di P (stiamo quindi supponendo che P sia un corpo convesso, altrimenti bisognerebbe ragionare sulla topologia relativa di P , ma ciò complicherebbe la trattazione). Quindi per ogni $(u_0, u) \in C$ si ha $u x^0 < u_0$. Si operi ora una traslazione dell'origine dello spazio delle x nel punto x^0 e sia $\xi := x - x^0$. Allora $u(\xi + x^0) \leq u_0$ per ogni $\xi \in P - x^0$. Quindi $u\xi \leq u_0 - u x^0$. Siccome $u_0 - u x^0 > 0$ si ha

$$\frac{1}{u_0 - u x^0} u \xi \leq 1 \quad \forall \xi \in P - x^0 \quad \forall (u, u_0) \in C$$

L'insieme $\{u' : u' \xi \leq 1, \forall \xi \in P - x^0\}$ è per definizione il polare di $P - x^0$ e quindi i vertici dell'insieme polare definiscono le faccette di $P - x^0$. Basta allora imporre $u_0 - u x^0 = 1$ e massimizzare $u c$ per un arbitrario vettore di costi c . Quindi una faccetta si ottiene risolvendo il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & u c \\
 & u - v^1 A^1 = 0 \\
 & u - v^2 A^2 = 0 \\
 -u_0 \quad & + v^1 b^1 \leq 0 \\
 -u_0 \quad & + v^2 b^2 \leq 0 \\
 & u_0 - u x^0 = 1 \\
 & v^i \geq 0 \quad i := 1, 2
 \end{aligned} \tag{13.6}$$

In particolare, la faccetta che viene calcolata è la faccetta che ha intersezione non vuota con la semiretta $x^0 + \alpha c$.

Alternativamente si può imporre la normalizzazione $\|u\|_\infty \leq 1$ che porta alla risoluzione di

$$\begin{aligned}
 \max \quad & u c \\
 & u - v^1 A^1 = 0 \\
 & u - v^2 A^2 = 0 \\
 -u_0 \quad & + v^1 b^1 \leq 0 \\
 -u_0 \quad & + v^2 b^2 \leq 0 \\
 & u \leq 1 \\
 & -u \leq 1 \\
 & v^i \geq 0 \quad i := 1, 2
 \end{aligned} \tag{13.7}$$

Come si vede dalla figura 13.9 questa normalizzazione può introdurre vertici che non corrispondono a generatori di C .

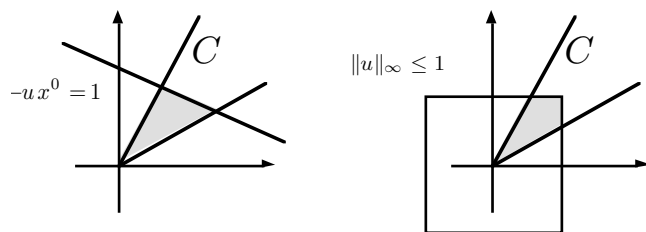


FIGURA 13.9

13.3 ESEMPIO. Si considerino i due poliedri in figura 13.10 (a) dove

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e $x^0 = (1, 1)$.

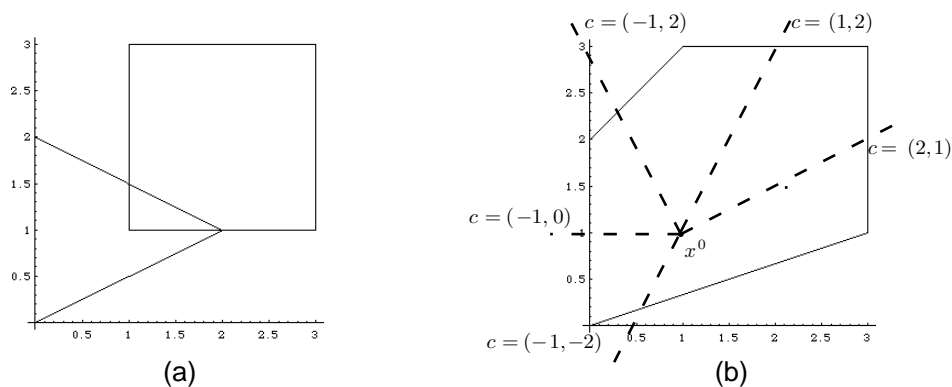


FIGURA 13.10

Il problema (13.6) diventa

$$\begin{aligned}
 \max \quad & c_1 u_1 + c_2 u_2 \\
 & u_1 + v_1^1 - v_2^1 - v_3^1 = 0 \\
 & u_2 + 2v_2^1 - 2v_3^1 = 0 \\
 & u_1 - v_1^2 + v_2^2 = 0 \\
 & u_2 - v_3^2 + v_4^2 = 0 \quad (13.8) \\
 -u_0 \quad & + 4v_3^1 \leq 0 \\
 -u_0 \quad & + 3v_1^2 - v_2^2 + 3v_3^2 - v_4^2 \leq 0 \\
 u_0 - u_1 - u_2 & = 1 \\
 & v_i^j \geq 0
 \end{aligned}$$

Risolviendo (13.8) per vari valori di c (indicati in figura 13.10 (b)) si ottengono i seguenti risultati, dove le disequazioni definiscono appunto le faccette dell'involuppo convesso del poliedro disegnato in figura 13.10 (b).

c	u	u_0	disequaglianza
(2,1)	(0.5,0)	1.5	$x_1 \leq 3$
(1,2)	(0,0.5)	1.5	$x_2 \leq 3$
(-1,2)	(-0.5,0.5)	1	$-x_1 + x_2 \leq 2$
(-1,0)	(-1,0)	0	$x_1 \geq 0$
(-1,-2)	(0.5,-1.5)	0	$x_1 - 3x_2 \leq 0$

Se invece si risolve (13.7), sostituendo in (13.8) il vincolo $u_0 - u_1 - u_2 = 1$ con il vincolo $-1 \leq u_i \leq 1$, si ottengono, per gli stessi valori di c , le seguenti disequaglianze:

c	u	u_0	diseguaglianza
(2,1)	(1,1)	6	$x_1 + x_2 \leq 6$
(1,2)	(1,1)	6	$x_1 + x_2 \leq 6$
(-1,2)	(-1,1)	2	$-x_1 + x_2 \leq 2$
(-1,0)	(-1,0)	0	$x_1 \geq 0$
(-1,-2)	(-1,-1)	0	$x_1 + x_2 \geq 0$

Come si vede, alcune disequaglianze, pur essendo valide e anche di supporto, non definiscono però faccette. ■

Se, come avviene frequentemente, i poliedri P^1 e P^2 sono definiti negli ortanti non negativi, cioè $P^i := \{x \in \mathbb{R}^n : A^i x \leq b^i, x \geq 0\}$, è più semplice considerare il vincolo di non negatività separatamente dagli altri vincoli, anziché considerarlo implicitamente definito nel vincolo $A^i x \leq b^i$. Questo comporta la seguente ridefinizione di \tilde{C} :

$$\tilde{C} := \{(u_0, u, v^1, v^2) : u \leq v^i A^i, u_0 \geq v^i b^i, v^i \geq 0, i := 1, 2\} \quad (13.9)$$

e l'analoga sostituzione di $u = v^i A^i$ con $u \leq v^i A^i$ in (13.6) e (13.7). In modo analogo, se nella definizione di un poliedro è presente un vincolo di uguaglianza $A_i x = b_i$, la corrispondente variabile duale u_i non è soggetta al vincolo di non negatività in (13.6) e (13.7). Nel seguito verrà usata la variante più appropriata a seconda del problema in esame.

13.3. Convessificazione sequenziale

Nella precedente sezione si è visto come calcolare il poliedro generato dall'involuppo convesso di due poliedri. Il metodo è ovviamente estendibile all'unione di un numero generico di poliedri e questo sembra immediatamente applicabile alla programmazione lineare intera dove l'interesse ricade proprio sull'involuppo convesso delle soluzioni ammissibili. Tuttavia il numero di questi poliedri, di cui si vuole descrivere l'involuppo convesso, è talmente elevato nei casi d'interesse da precludere ogni approccio diretto. Si usa allora un metodo indiretto che genera l'involuppo convesso considerando in sequenza ogni volta coppie di poliedri e mirando la generazione di faccette solo a quelle che risultino utili per tagliare soluzioni frazionarie. Queste tecniche hanno origine nel lavoro di Balas [1975] e, con successive elaborazioni, hanno trovato una formulazione estremamente efficace dal punto di vista computazionale in Balas et al [1993].

Sia dato allora il seguente problema di programmazione lineare 0-1 mista:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ & Ax \leq b \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, p \\ & x_j \geq 0 \quad j = p+1, \dots, n \end{aligned} \quad (13.10)$$

il cui rilassamento d'interrezza è il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ & Ax \leq b \\ & 0 \leq x_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, p \\ & x_j \geq 0 \quad j = p+1, \dots, n \end{aligned} \quad (13.11)$$

Sia Q^0 il poliedro delle soluzioni ammissibili in (13.11) e sia P l'involuppo convesso delle soluzioni ammissibili di (13.10). Si considerino ora i seguenti due poliedri:

$$Q_0^0 := Q^0 \cap \{x : x_1 = 0\} \quad Q_1^0 := Q^0 \cap \{x : x_1 = 1\}$$

e sia $Q^1 = \text{conv}(Q_0^0, Q_1^0)$. Per costruzione quindi Q^1 è l'involuppo convesso delle soluzioni ammissibili di:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x_1 &\in \{0, 1\} \\ 0 \leq x_j &\leq 1 \quad j = 2, \dots, p \\ x_j &\geq 0 \quad j = p+1, \dots, n \end{aligned}$$

e vale la seguente proprietà:

13.4 TEOREMA. *Nessun vertice di Q^1 ha un valore di x_1 frazionario.*

DIMOSTRAZIONE. Ogni punto di Q^1 con componente x_1 frazionaria è necessariamente generato come combinazione convessa stretta di un punto di Q_0^0 e di un punto di Q_1^0 . Siccome $Q_0^0 \subset Q^1$, $Q_1^0 \subset Q^1$ e $Q_0^0 \cap Q_1^0 = \emptyset$, tale punto è generato come combinazione convessa stretta di due punti distinti di Q^1 e quindi non può essere un vertice. ■

13.5 COROLLARIO. *Un vertice di Q^0 con componente x_1 frazionaria non appartiene a Q^1 .*

DIMOSTRAZIONE. Si noti che, in generale, dati due poliedri S e T con $S \subset T$, i vertici di T che siano anche punti di S sono necessariamente vertici di S . Quindi dato che $Q^1 \subset Q^0$ la tesi discende direttamente dal teorema 13.4. ■

Definiamo ora:

$$Q_0^1 := Q^1 \cap \{x : x_2 = 0\} \quad Q_1^1 := Q^1 \cap \{x : x_2 = 1\} \quad Q^2 = \text{conv}(Q_0^1, Q_1^1)$$

13.6 TEOREMA. *Q^2 è l'involuppo convesso delle soluzioni ammissibili di*

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x_j &\in \{0, 1\} \quad j = 1, 2 \\ 0 \leq x_j &\leq 1 \quad j = 3, \dots, p \\ x_j &\geq 0 \quad j = p+1, \dots, n \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. I punti $x \in Q_0^1$ si possono quindi esprimere come $x = \alpha x^0 + (1 - \alpha) x^1$ con $x_2 = 0$, $x_1^0 = 0$, $x_1^1 = 1$, $x^0 \in Q^0$, $x^1 \in Q^0$. Se $0 < \alpha < 1$ allora $x_2 = 0$ implica $x_2^0 = 0$, $x_2^1 = 0$. Se invece $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$, $x \in Q^1$ oppure $x \in Q^0$ con $x_2 = 0$. Quindi i punti di Q_0^1 sono esprimibili come combinazione convessa di punti $x \in Q^0$ per cui $x_1 \in \{0, 1\}$ e $x_2 = 0$. Ragionando analogamente su Q_1^1 si perviene alla conclusione che i punti di Q_1^1 sono esprimibili come combinazione convessa di punti x per cui $x_1 \in \{0, 1\}$ e $x_2 = 1$. ■

13.7 TEOREMA. *Nessun vertice di Q^2 ha valori di x_1 e di x_2 frazionari.*

DIMOSTRAZIONE. Si ragiona come nel teorema 13.4. ■

Continuando in modo sequenziale si ottiene un poliedro $Q^p = P$.

13.8 ESEMPIO. Si consideri il poliedro

$$Q^0 = \{x \in [0, 1]^3 : 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3; x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3\}$$

raffigurato in figura 13.11 (a). I vertici di Q^0 sono $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2/3, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1/2, 1/2, 1)$, $(3/4, 3/4, 0)$, $(1, 1/2, 0)$. Applicando le formule che forniscono l'involuppo convesso di due poliedri si determinano le faccette di Q^1 , rappresentato in figura 13.11 (b). Si trova

$$Q^1 = \{x \in [0, 1]^3 : 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 7; 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6\}$$

(in realtà $x_2 \leq 1$ è ridondante) i cui vertici sono $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2/3, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1/2, 0)$. Si noti che sono stati eliminati i vertici con componente x_1 frazionaria. Applicando ancora le formule si determinano le faccette di Q^2 , rappresentato in figura 13.11 (c). Si trova

$$Q^2 = \{x \geq 0 : x_1 + x_2 \leq 1; x_2 + x_3 \leq 1\}$$

i cui vertici sono $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$. In questo caso $Q^2 = Q^3 = P$. ■

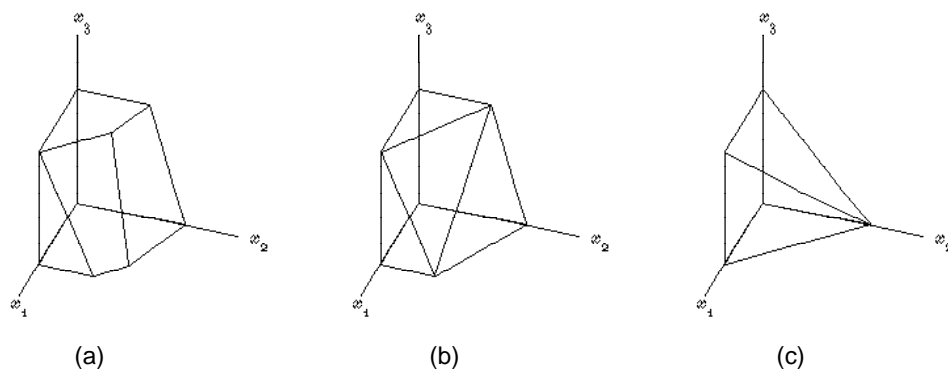


FIGURA 13.11

Naturalmente la procedura di generazione dei poliedri Q^1, Q^2, \dots , è solo teorica. I poliedri Q^j sono sempre più complessi e sarebbe necessario generare un numero esponenziale di disequazioni per arrivare ad una descrizione esplicita di P . Tuttavia non sono necessarie tutte le faccette di P . Bastano quelle che definiscono l'ottimo. A questo fine si risolve (13.11) e si fa uso dell'eventuale soluzione frazionaria per generare un piano di taglio con la tecnica esposta nella sezione precedente.

Si supponga ad esempio che, risolvendo (13.11), si ottenga una soluzione \hat{x} con $0 < \hat{x}_q < 1$ per un certo q , $1 \leq q \leq p$. Sia e^j un vettore riga con tutti gli elementi nulli tranne il j -esimo che vale 1 e sia I^p la matrice formata dalle righe e^1, e^2, \dots, e^p . Allora possiamo definire

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A \\ I^p \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $Q^0 = \{x : \tilde{A}x \leq \tilde{b}, x \geq 0\}$. Definiamo ora i poliedri

$$Q_0^0 = \{x : \tilde{A}x \leq \tilde{b}, x_q = 0, x \geq 0\} \quad Q_1^0 = \{x : \tilde{A}x \leq \tilde{b}, x_q = 1, x \geq 0\}$$

Applicando i risultati della sezione precedente il cono \tilde{C} definito da (13.9) è in questo caso:

$$\tilde{C} := \left\{ (u_0, u, v^0, w^0, v^1, w^1) : \begin{array}{l} u \leq v^0 \tilde{A} + w^0 e^q \\ u \leq v^1 \tilde{A} + w^1 e^q \\ u_0 \geq v^0 \tilde{b} \\ u_0 \geq v^1 \tilde{b} + w^1 \\ v^0 \geq 0, v^1 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (13.12)$$

e i valori (u, u_0) ammissibili in (13.12) costituiscono disequaglianze valide per Q^1 . In base al teorema 13.5, $\hat{x} \notin Q^1$, e quindi tra tali disequaglianze valide ci sono per costruzione anche quelle che separano \hat{x} da Q^1 e permettono di tagliare la soluzione frazionaria.

Per trovare tali disequaglianze si possono seguire due approcci. Se è noto un punto interno x^0 si può massimizzare $u(\hat{x} - x^0)$ normalizzando (u, u_0) come $u_0 - u x^0 = 1$. Come già detto, questa massimizzazione genera la faccetta che interseca il segmento $[x^0, \hat{x}]$. A seguito della normalizzazione la funzione obiettivo può essere equivalentemente espressa come $u \hat{x} - u_0$.

Altrimenti si può cercare quella disequaglianza che massimizza la distanza del piano corrispondente da \hat{x} . È noto che la distanza di un punto \hat{x} da un piano $u x \leq u_0$ si esprime come $|u \hat{x} - u_0| / \|u\|$. La scelta naturale della norma è $\max_i |u_i| \leq 1$, dato che permette di avere un problema di programmazione lineare con un numero polinomiale di vincoli.

Siamo perciò interessati a risolvere in un caso il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \max & -u_0 + u \hat{x} \\ & -u + v^0 \tilde{A} + w^0 e^q \geq 0 \\ & -u + v^1 \tilde{A} + w^1 e^q \geq 0 \\ u_0 & - v^0 \tilde{b} \geq 0 \\ u_0 & - v^1 \tilde{b} - w^1 \geq 0 \\ u_0 - u x^0 & = 1 \\ & v^0 \geq 0 \quad v^1 \geq 0 \end{array} \quad (13.13)$$

oppure il medesimo con il vincolo $u_0 - u x^0 = 1$ sostituito da $-1 \leq u_i \leq 1$.

La disequaglianza $u x \leq u_0$ che si ottiene viene aggiunta a (13.11), che viene risolto nuovamente. Se la soluzione che si ottiene è intera nelle variabili x_1, \dots, x_p il problema (13.10) è risolto, altrimenti si procede sequenzialmente come nel caso precedente. Questa procedura termina in un numero finito (anche se esponenziale nel caso peggiore) di passi in base ai risultati della convessificazione sequenziale esposti precedentemente.

13.9 ESEMPIO. Applichiamo la tecnica al problema di knapsack considerato precedentemente (esempi 1.72 e 5.15), di cui riscriviamo la versione con il vincolo d'interezza rilassato:

$$\begin{array}{ll} \max & 24 x_1 + 5 x_2 + 26 x_3 + 28 x_4 \\ & 8 x_1 + 5 x_2 + 13 x_3 + 7 x_4 \leq 26 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \end{array} \quad (13.14)$$

Per un problema di knapsack con vincolo $\sum_i w_i x_i \leq K$ un punto interno al poliedro delle soluzioni intere ammissibili è facilmente disponibile. Basta prendere un qualsiasi valore $x_i^0 := \alpha$ con $0 < \alpha < 1/n$. Nell'esempio si può prendere $\alpha := 0.2$.

Inizialmente si risolve (13.14) e si ottiene come ottimo $\hat{x} = (1, 0, 11/13, 1)$. Da questa soluzione (13.13) diventa

$$\max \quad u_1 + (11/13)u_3 + u_4 - u_0$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \\ v_4^0 \\ v_5^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} w^0$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \\ v_4^1 \\ v_5^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} w^1$$

$$u_0 \geq 26v_1^0 + v_2^0 + v_3^0 + v_4^0 + v_5^0$$

$$u_0 \geq 26v_1^1 + v_2^1 + v_3^1 + v_4^1 + v_5^1 + w^1$$

$$u_0 = 0.2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + 1$$

$$v^i \geq 0$$

che fornisce come ottimo

$$u_0 = 1.293 \quad u_1 = 0.689 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0.172 \quad u_4 = 0.603$$

Da questi valori si riconosce la disuguaglianza a valori interi

$$8x_1 + 2x_3 + 7x_4 \leq 15 \quad (13.15)$$

Si aggiunge la disuguaglianza in (13.14) e si risolve

$$\begin{aligned} \max \quad & 24x_1 + 5x_2 + 26x_3 + 28x_4 \\ & 8x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 7x_4 \leq 26 \\ & 8x_1 + 2x_3 + 7x_4 \leq 15 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \end{aligned} \quad (13.16)$$

il cui ottimo è $\hat{x} = (3/4, 0, 1, 1)$. Da questa soluzione si riscrive (13.13) introducendo anche il vincolo (13.15) e si ottiene

$$u_0 = 1.323 \quad u_1 = 0.294 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0.294 \quad u_4 = 1.029$$

da cui si ottiene la disuguaglianza

$$2x_1 + 2x_3 + 7x_4 \leq 9 \quad (13.17)$$

Si aggiunge la disuguaglianza in (13.16) e si risolve

$$\begin{aligned} \max \quad & 24x_1 + 5x_2 + 26x_3 + 28x_4 \\ & 8x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 7x_4 \leq 26 \\ & 8x_1 + 2x_3 + 7x_4 \leq 15 \\ & 2x_1 + 2x_3 + 7x_4 \leq 9 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \end{aligned}$$

il cui ottimo è $\hat{x} = (1, 0, 1, 5/7)$. Risolvendo (13.13) si ottiene

$$u_0 = 1.418 \quad u_1 = 0.714 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0.714 \quad u_4 = 0.714$$

cioè

$$x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$$

e infine si risolve

$$\begin{aligned} \max \quad & 24x_1 + 5x_2 + 26x_3 + 28x_4 \\ & 8x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 7x_4 \leq 26 \\ & 8x_1 + 2x_3 + 7x_4 \leq 15 \\ & 2x_1 + 2x_3 + 7x_4 \leq 9 \\ & x_1 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \end{aligned}$$

ottenendo l'ottimo intero $\hat{x} = (0, 1, 1, 1)$. Delle disequaglianze generate solo l'ultima è una faccetta dell'involuppo convesso P delle soluzioni ammissibili. Le precedenti sono faccette dei poliedri intermedi. Un calcolo esaustivo porta a determinare che le faccette di P sono date dalle disequaglianze $0 \leq x_i \leq 1, \forall i$, e $x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$.

Proviamo ora a ricalcolare l'ottimo usando la normalizzazione $\|u\|_\infty \leq 1$. Dalla prima soluzione $\hat{x} = (1, 0, 11/13, 1)$ e dal problema di programmazione lineare (13.13) (con il vincolo $u_0 - u x^0 = 1$ sostituito da $-1 \leq u_i \leq 1$) si ottiene la soluzione

$$u_0 = 1.875 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = -1 \quad u_3 = 0.25 \quad u_4 = 0.875$$

cioè

$$8x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 15$$

Prima di procedere si può notare come il coefficiente negativo possa essere innalzato al valore 0 senza perdere la validità della disequaglianza. Si tenga presente che nel problema del knapsack ogni sottoinsieme di un insieme ammissibile è ammissibile. Allora se $x_2 = 0$, gli altri valori devono soddisfare $8x_1 + 2x_3 + 7x_4 \leq 15$, mentre se $x_2 = 1$ la disequaglianza $8x_1 - 8 + 2x_3 + 7x_4 \leq 15$ è implicata dalla precedente. Quindi si può usare direttamente

$$8x_1 + 2x_3 + 7x_4 \leq 15$$

Come nel caso precedente si ottiene $\hat{x} = (3/4, 0, 1, 1)$. I valori del piano di separazione sono

$$u_0 = 1.2857143 \quad u_1 = 0.2857143 \quad u_2 = -1 \quad u_3 = 0.2857143 \quad u_4 = 1$$

cioè $2x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 9$ ovvero

$$2x_1 + 2x_3 + 7x_4 \leq 9$$

Successivamente si ottiene il risultato $\hat{x} = (1, 0, 1, 5/7)$ da cui $u_0 = 2, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = -1, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = 1$ e cioè

$$x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$$

Si noti che sono le medesime disequaglianze di prima. ■

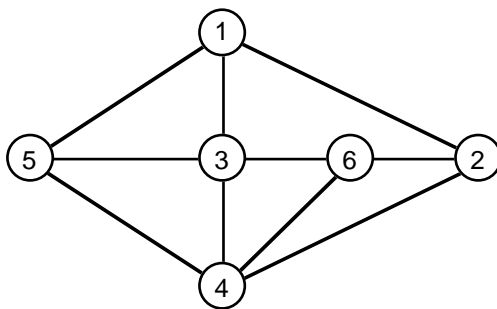


FIGURA 13.12

13.10 ESEMPIO. Si supponga di dover trovare un massimo insieme indipendente per il grafo in figura 13.12. Il problema (13.10) è in questo caso

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^6 x_i \\ & x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i := 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (13.18)$$

mentre il problema (13.11) è (13.18) con il vincolo $x_i \in \{0, 1\}$ rilassato a $x_i \geq 0$ (il vincolo $x_i \leq 1$ è già implicato dalle disuguaglianze in (13.18)). Risolvendo il problema rilassato si ottiene $\hat{x}_i = 1/2, \forall i$. Si risolve allora (13.13), con normalizzazione data dal punto interno $x_i^0 := 0.1 < 1/n, \forall i$, scegliendo l'indice $q = 1$. Si ottiene la disuguaglianza

$$x_1 + x_3 + x_5 \leq 1 \quad (13.19)$$

che corrisponde ad una faccetta in quanto si ottiene dalla cricca $\{1, 3, 5\}$. Aggiungendo (13.19) al problema rilassato si ottiene $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = \hat{x}_6 = 1/2, \hat{x}_3 = 0$. Continuando ad usare l'indice $q = 1$ si ottiene da (13.13) la disuguaglianza

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 2 \quad (13.20)$$

In questo caso il taglio non corrisponde ad una faccetta, perché si ottiene come somma delle cricche $\{2, 4, 6\}$ e $\{1, 5\}$. Aggiungendo anche (13.20) al problema rilassato si ottiene $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_6 = 1/2, \hat{x}_5 = 0$ e risolvendo (13.13) con indice $q = 1$ si ottiene la disuguaglianza

$$x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 \leq 2 \quad (13.21)$$

che corrisponde alla somma delle cricche $\{2, 4, 6\}$ e $\{1, 2\}$. Aggiungendo (13.21) e risolvendo si ottiene $\hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = \hat{x}_6 = 1/2, \hat{x}_1 = 0$. Da questa soluzione ($q = 2$) si ricava

$$x_2 + x_4 + x_6 \leq 1 \quad (13.22)$$

corrispondente alla cricca $\{2, 4, 6\}$. Aggiungendo (13.22) si ottiene la soluzione intera e quindi ottima $\hat{x}_1 = \hat{x}_6 = 1, \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = 0$. ■

13.11 ESEMPIO. Come ulteriore esempio si applichi la procedura all'esempio 13.8, aggiungendo la funzione obiettivo

$$\max x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

La soluzione che si ottiene in Q^0 è $(1/2, 1/2, 1)$. Si usi il punto interno $x_i^0 := 0.1, \forall i$. Da questa si ottiene il taglio $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 7$ (non si determinano altre facce di Q^1) e quindi si risolve

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3 \\ & 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \end{aligned} \tag{13.23}$$

che dà come ottimo $(0, 2/3, 1)$. Ponendo $q = 2$ si ottiene il taglio $x_2 + x_3 \leq 1$ (faccetta di Q^2), che aggiunto in (13.23) fornisce l'ottimo $(1, 0, 1)$. Si vedano in figura 13.13 il poliedro iniziale e i due poliedri che si ottengono aggiungendo i tagli. Si confronti con la figura 13.11. ■

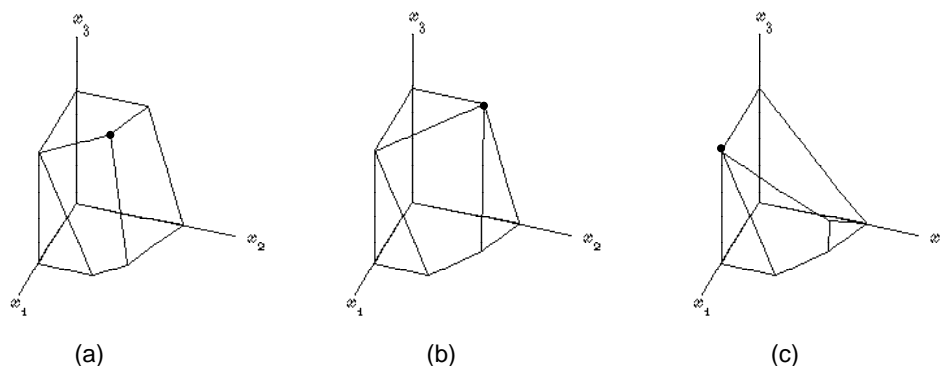


FIGURA 13.13

Per problemi con molte variabili è più conveniente affrontare il problema in un sottospazio, tipicamente uno determinato dalle variabili frazionarie. In questo modo il problema di programmazione lineare che determina il taglio è di dimensioni limitate e può essere risolto velocemente. Tale taglio viene poi innalzato nello spazio originario dando luogo ad una disuguaglianza valida per il problema globale. La procedura d'innalzamento in questo caso viene eseguita in modo abbastanza rapido. Si veda a proposito Balas et al. [1993].

13.4. Tagli di Gomory-Chvátal

Vi sono molti altri metodi per generare piani di taglio di problemi generali di programmazione lineare intera. Uno dei metodi più antichi, essenzialmente dovuto a Gomory [1958, 1960] e poi sviluppato ulteriormente da Chvátal [1973], consiste nello sfruttamento delle proprietà algebriche delle soluzioni intere. L'idea di base del metodo si basa sulla possibilità di scrivere un'equazione del seguente tipo:

$$\sum_j \alpha_j x_j \equiv \beta \pmod{\delta} \tag{13.24}$$

dove $\alpha_j, \forall j, \beta$ e δ sono interi e $x_j \geq 0, \forall j$, sono variabili intere. Senza perdita di generalità possiamo assumere che $0 \leq \alpha_j < \delta, \forall j$, e $0 \leq \beta < \delta$. Si può scrivere (13.24) in modo equivalente come :

$$\sum_j \alpha_j x_j = \beta + z \delta \tag{13.25}$$

con z variabile intera. Tuttavia, dato che tutti i coefficienti α_j sono non negativi e $\beta < \delta$, solo valori $z \geq 0$ sono ammissibili. Quindi possiamo ricavare da (13.25):

$$\sum_j \alpha_j x_j = \beta + z \delta \geq \beta + z \beta \geq \beta \tag{13.26}$$

La disequaglianza (13.26) è valida per tutti le soluzioni ammissibili di (13.24). Dobbiamo a questo punto vedere come si ottengono relazioni del tipo (13.24) da un problema di programmazione lineare intera. Sia allora dato

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B x_B + c_N x_N \\ & B x_B + N x_N = b \\ & x \in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned} \tag{13.27}$$

dove le variabili sono già ripartite secondo la base ottima del rilassamento d'interezza e supponiamo anche tutti i dati del problema siano interi. Allora si ha

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \tag{13.28}$$

e l'ottimo è dato da $\hat{x}_B := B^{-1} b, \hat{x}_N := 0$. Se \hat{x}_B ha tutte le componenti intere, si tratta ovviamente dell'ottimo anche del problema con variabili intere. Sia allora q l'indice della componente in base frazionaria e sia $d := |\det B|$. Da (13.28) otteniamo

$$d x_q = d e_q B^{-1} b - d e_q B^{-1} N x_N \tag{13.29}$$

In (13.29) tutti i coefficienti sono interi, a seguito della moltiplicazione per d . Indichiamo $\beta' := d e_q B^{-1} b$, e $\alpha' := d e_q B^{-1} N$. Siccome x_q deve essere intero, ogni soluzione ammissibile di (13.29) deve soddisfare

$$\beta' - \alpha' x_N \equiv 0 \pmod{d}$$

Basta ora definire $\beta := \beta' \pmod{d}$ e $\alpha'_j := \alpha_j \pmod{d}$ e otteniamo (13.24). Si noti ora che ponendo $x_N := 0$ la disequaglianza (13.26) non è soddisfatta e quindi aggiungendo (13.26) al sistema si taglia la soluzione frazionaria.

13.12 ESEMPIO. Sia dato

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ & x \in \mathbb{Z}_+^2 \end{array} \quad \implies \quad \begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + 3x_2 + s_1 = 9 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_2 = 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x \in \mathbb{Z}_+^2, s \in \mathbb{Z}_+^3 \end{array}$$

Risolvendo il rilassamento d'interezza si ottiene:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 12 & 7 & -11 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scegliamo l'indice $q := 2$. Quindi

$$de_q B^{-1} = (3 \quad 0 \quad -1); \quad \beta' = de_q B^{-1} b = 18; \quad \alpha' = de_q B^{-1} N = (3 \quad -1)$$

$$\beta = \beta' \bmod 7 = 4; \quad \alpha = \alpha' \bmod 7 = (3 \quad 6)$$

Quindi si ottiene la disuguaglianza

$$3s_1 + 6s_3 \geq 4$$

che possiamo esprimere in funzione di x_1 e x_2 sostituendo i valori di s_1 e s_3 :

$$3(9 - x_1 - 3x_2) + 6(9 - 3x_1 - 2x_2) \geq 4 \implies 3x_1 + 3x_2 \leq 11$$

Si può a questo punto ripetere il ragionamento e notare che

$$x_1 + x_2 \leq \frac{11}{3} \implies x_1 + x_2 \leq \left\lfloor \frac{11}{3} \right\rfloor = 3 \quad (13.30)$$

a causa dell'interezza delle variabili. Aggiungendo (13.30) alle altre disuguaglianze si ottiene l'ottimo intero $\hat{x}_1 = 0, \hat{x}_2 = 3$.

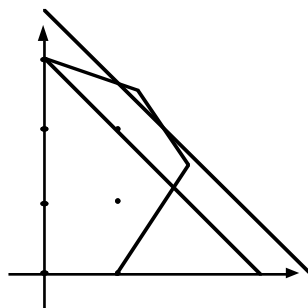


FIGURA 13.14

Come si vede dalla figura 13.14, la disuguaglianza $3x_1 + 3x_2 \leq 11$ taglia il vertice ottimo rilassato, ma di poco. È il successivo arrotondamento che migliora in modo sostanziale la risoluzione (in figura sono evidenziati entrambi i tagli). ■

13.13 ESEMPIO. Risolviamo in modo alternativo l'istanza di knapsack dell'esempio 13.9.

$$\begin{aligned} \max \quad & 24x_1 + 5x_2 + 26x_3 + 28x_4 \\ & 8x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 7x_4 \leq 26 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \end{aligned}$$

Si può affrontare il problema come in (13.27) e quindi introdurre esplicitamente i vincoli $x_i \leq 1$ nella matrice. Tuttavia è più semplice computazionalmente usare le basi estese. Ricordiamo che la soluzione ottima rilassata è $\hat{x} = (1, 0, 11/13, 1)$. Allora la matrice di base ottima è data dal singolo coefficiente 13. Siccome nell'ottimo (rilassato) alcune variabili fuori base sono poste al valore di limitazione superiore, introduciamo una variabile ausiliaria definita come

$$y_j := \begin{cases} x_j & \text{se } \hat{x}_j < 1 \\ 1 - x_j & \text{se } \hat{x}_j = 1 \end{cases}$$

così l'ottimo rilassato corrisponde alla scelta $y_j := 0$. Allora otteniamo direttamente dal vincolo

$$8(1 - y_1) + 5y_2 + 13y_3 + 7(1 - y_4) + s = 26$$

ovvero

$$13y_3 = 8y_1 - 5y_2 + 7y_4 - s + 11 \implies -8y_1 + 5y_2 - 7y_4 + s \equiv 11 \pmod{13}$$

e quindi

$$5y_1 + 5y_2 + 6y_4 + s \equiv 11 \pmod{13}$$

da cui la diseuguaglianza

$$5y_1 + 5y_2 + 6y_4 + s \geq 11$$

che, ripristinando i valori di x e sostituendo la variabile s fornisce

$$5(1 - x_1) + 5x_2 + 6(1 - x_4) + (26 - 8x_1 - 5x_2 - 13x_3 - 7x_4) \geq 11$$

$$13x_1 + 13x_3 + 13x_4 \leq 26 \implies x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$$

13.14 ESERCIZIO. Si generalizzi il risultato precedente ad una generica istanza di knapsack

$$\max \left\{ \sum_j c_j x_j : \sum_j a_j x_j \leq K, x_j \in \{0, 1\} \right\}$$

in cui supponiamo che gli indici siano già ordinati secondo rapporti c_j/a_j decrescenti. Quindi la soluzione ottima rilassata vale $\hat{x}_j = 1$ se $j := 1, \dots, q-1$, $\hat{x}_j = 0$ se $j := q+1, \dots, n$ e $\hat{x}_q = (K - \sum_{j=1}^{q-1} a_j)/a_q$. Sia ora k_j tale che $0 \leq k_j a_q - a_j < a_q$ se $1 \leq j \leq q-1$ e $0 \leq a_j - k_j a_q < a_q$ se $q+1 \leq j \leq n$ e sia infine $k_q := 1$. Si dimostri che si ottiene dalla procedura precedente la seguente diseuguaglianza

$$\sum_{j=1}^n k_j x_j \leq \sum_{j=1}^{q-1} k_j$$

Si noti anche che per la descrizione poliedrale del problema di knapsack andrebbe considerato ogni ordine degli indici. Si noti ancora che, fissato un ordine e quindi fissato l'insieme degli indici per cui la corrispondente \hat{x}_j è positiva si può arbitrariamente assegnare all'indice in posizione q quello più elevato fra i primi q . A questo punto si ritrovi la diseuguaglianza faccettale dell'esercizio 12.15. ■

Facciamo notare che il metodo delineato, che fa espressamente uso del determinante della matrice di base può essere equivalentemente sostituito da un metodo analogo che arrotonda i valori frazionari. Allora se riscriviamo (13.29) senza la moltiplicazione per il determinante

$$x_q = e_q B^{-1} b - e_q B^{-1} N x_N \quad (13.31)$$

definiamo $\varphi := e_q B^{-1} b$, $\gamma := e_q B^{-1} N$, abbiamo che $\sum_{j \in \eta} \gamma_j x_j \equiv \varphi \pmod{1}$, ovvero

$$\sum_{j \in \eta} \gamma_j x_j - \left\lfloor \sum_{j \in \eta} \gamma_j x_j \right\rfloor = \varphi - \lfloor \varphi \rfloor$$

e, siccome è sempre vero che $\lfloor \sum_j a_j \rfloor \geq \sum_j \lfloor a_j \rfloor$ e, analogamente per b intero positivo $\lfloor ab \rfloor \geq \lfloor a \rfloor b$, ricaviamo

$$\sum_{j \in \eta} (\gamma_j - \lfloor \gamma_j \rfloor) x_j \geq \varphi - \lfloor \varphi \rfloor$$

che è esattamente (13.26) (a meno di una costante moltiplicativa positiva).

Il risultato teorico notevole è che questa procedura iterata per la ricerca dell'ottimo, taglia ogni volta l'ultima soluzione frazionaria generata, e termina in un numero finito di passi fornendo l'ottimo intero. Il numero di passi può tuttavia, ancorché finito, essere talmente grande da rendere impraticabile il metodo. Anche in questo caso, il metodo può essere vantaggiosamente associato a tecniche di enumerazione implicita.

13.5. Diseguaglianze quadratiche linearizzate

Un metodo recentemente proposto di generare, attraverso un processo iterativo, l'involuppo convesso delle soluzioni di un problema di programmazione lineare 0-1 si basa su una trasformazione non lineare delle disequaglianze, una loro linearizzazione in uno spazio a maggiore dimensione ed in una proiezione finale nello spazio originario. Per queste caratteristiche il metodo viene anche detto *lift-and-project* (*innalza e proietta*). Vi sono delle analogie molto strette fra questa procedura e la convessificazione sequenziale. Si veda ad esempio Serali e Adams [1990], Lovász e Schrijver [1991], Balas et al. [1993].

Sia dato l'insieme ammissibile

$$\{x \in \{0, 1\}^n : Ax \leq b\} \quad (13.32)$$

Ora si moltiplichino ogni disequaglianza in (13.32) per x_k e per $(1 - x_k)$, per ogni indice k , in modo da ottenere le disequaglianze

$$\sum_{j=1}^n A_i^j x_j x_k \leq b_i x_k \quad \sum_{j=1}^n A_i^j x_j (1 - x_k) \leq b_i (1 - x_k) \quad i := 1, \dots, m \quad k := 1, \dots, n \quad (13.33)$$

L'apparente complicazione introdotta dalla non linearità può essere facilmente rimossa dato che interessano solo soluzioni in $\{0, 1\}$ e quindi anche i monomi $x_j x_k$ assumono valori solo in $\{0, 1\}$. Si introducano nuove variabili $y_{jk} := x_j x_k, \forall j, k$, (ovviamente $y_{jk} = y_{kj}$) e ponendo anche $y_{jj} = x_j$, dato che $x_j = x_j^2$ per $x_j \in \{0, 1\}$. Quindi (13.33) diventa

$$-b_i y_{kk} + \sum_{j=1}^n A_i^j y_{jk} \leq 0 \quad b_i y_{kk} + \sum_{j=1}^n A_i^j (y_{jj} - y_{jk}) \leq b_i \quad i := 1, \dots, m \quad k := 1, \dots, n \quad (13.34)$$

Il sistema (13.34) è lineare. Si indichi (13.34) con $\tilde{A}y \leq \tilde{b}$ e si consideri il poliedro

$$\tilde{P} := \left\{ y \in [0, 1]^{n(n+1)/2} : \tilde{A}y \leq \tilde{b} \right\}$$

e sia \tilde{P}_x la sua proiezione sullo spazio delle variabili y_{11}, \dots, y_{nn} . Sia

$$P := \{x \in [0, 1]^n : Ax \leq b\}$$

Non è difficile vedere che $\tilde{P}_x \subset P$. Infatti, sommando le due disequaglianze in (13.34), per un valore fissato di k e di i , si ottiene $\sum_j A_i^j y_{jj} \leq b_i$. Inoltre l'inclusione è stretta come si può vedere da alcuni semplici casi. Si consideri ad esempio la disequaglianza in \mathbb{R}^1 , $a \leq x$, dove $0 < a < 1$, e x è già vincolata da $0 \leq x \leq 1$. Ovviamente l'unica soluzione intera è $x = 1$. Moltiplicando la disequaglianza per x si ottengono $ax \leq x^2$ e $a(1-x) \leq x(1-x)$. Dalla prima disequaglianza si ha $(1-a)x \geq 0$, cioè $x \geq 0$. Questa disequaglianza è già nota e quindi non si ottiene nulla di nuovo. Ma la seconda produce $a(1-x) \leq 0$, cioè $x \geq 1$!

13.15 ESEMPIO. Come esempio leggermente più complesso ed interessante si consideri

$$P := \{x \in [0, 1]^2 : x_1 + x_2 \leq b\}$$

da cui si ricava

$$\tilde{P} = \left\{ y \in [0, 1]^3 : \begin{array}{l} (1-b)y_{11} + y_{12} \leq 0 \\ by_{11} + y_{22} - y_{12} \leq b \\ (1-b)y_{22} + y_{12} \leq 0 \\ y_{11} + by_{22} - y_{12} \leq b \end{array} \right\} \quad (13.35)$$

e proiettando (utile esercizio di applicazione delle tecniche della sezione 4.7) si ottiene, se $b \geq 1$

$$\tilde{P}_x = \left\{ x \in [0, 1]^2 : \begin{array}{l} (2-b)x_1 + bx_2 \leq b \\ bx_1 + (2-b)x_2 \leq b \end{array} \right\}$$

(si ottengono anche altre disequazioni, che però sono ridondanti), e si ottiene, fatto veramente notevole, $\tilde{P}_x = \{\mathbf{0}\}$, se $b < 1$! Si possono vedere in figura 13.15 i poliedri P e \tilde{P}_x , nel caso $b > 1$, e notare che, anche in questo caso, \tilde{P}_x è contenuto strettamente in P .

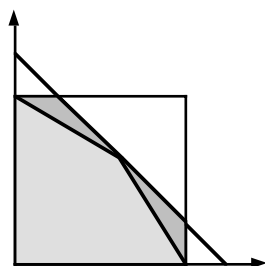


FIGURA 13.15

Quindi si può usare il rilassamento dato da \tilde{P}_x (quindi operando un innalzamento con \tilde{P} e una successiva proiezione) anziché il consueto rilassamento d'interrezza, dato che si ottengono migliori limitazioni inferiori. ■

13.16 ESEMPIO. Sia da risolvere la seguente istanza di copertura minima d'insiemi:

$$\begin{array}{llllllllll} \min & 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 4x_7 + 4x_8 + 3x_9 + 5x_{10} & & & & & & & & & \\ & x_1 & & & + x_5 & & & + x_8 + x_9 & & & \geq 1 \\ & & x_3 & & & + x_6 + x_7 & & & + x_{10} & & \geq 1 \\ & & x_2 + x_3 & & & & & & & & \geq 1 \\ & & & x_4 + x_5 & & & & & + x_{10} & & \geq 1 \\ & x_1 + x_2 & & + x_4 & & & + x_7 + x_8 & & & & \geq 1 \\ & x_i \in \{0, 1\} & & & & & & & & & \end{array}$$

Risolvendo il rilassamento d'interrezza si ottiene la seguente soluzione ottima di valore 10

$$\bar{x} := (0, 0.5, 0.5, 0, 1, 0, 0.5, 0, 0, 0)$$

ma, applicando la procedura d'innalzamento e proiezione, si ottiene la soluzione

$$y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

di valore $11 + 2/3$ e si può notare il netto miglioramento della limitazione inferiore. Si tenga inoltre presente che l'ottimo intero è $\hat{x} := (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ di valore 12. ■

13.17 ESEMPIO. Particolarmente significativa è l'applicazione del metodo al problema del massimo insieme stabile di un grafo $G = (N, E)$. Sia

$$Q := \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i + x_j \leq 1, \forall (ij) \in E\} \quad (13.36)$$

Da (13.36) si ottengono le disequazioni quadratiche

$$x_i x_k + x_j x_k \leq x_k \quad x_i - x_i x_k + x_j - x_j x_k \leq 1 - x_k$$

cioè

$$y_{ik} + y_{jk} \leq y_{kk} \quad y_{ii} - y_{ik} + y_{jj} - y_{jk} \leq 1 - y_{kk} \quad (13.37)$$

Le disequazioni (13.37), nel caso particolare $k = i$, diventano

$$y_{ii} + y_{ji} \leq y_{ii}, \quad y_{ii} - y_{ii} + y_{jj} - y_{ji} \leq 1 - y_{kk} \quad (13.38)$$

La prima delle (13.38) porta a $y_{ij} = 0$, come effettivamente deve essere se esiste l'arco (i, j) . Quindi possiamo imporre $y_{ij} = 0$, per ogni $(i, j) \in E$. Con questa posizione la seconda delle (13.38) corrisponde semplicemente al vincolo in (13.36).

Se $k \neq i$, e se, oltre all'arco (i, j) sono presenti anche gli archi (i, k) e (j, k) (e quindi $y_{ik} = 0$ e $y_{jk} = 0$), la seconda disequazione delle (13.37) diventa

$$y_{ii} + y_{jj} + y_{kk} \leq 1$$

ovvero ritroviamo il vincolo di cricca per la cricca $\{i, j, k\}$. In questo modo si trovano allora le disequazioni di cricca per cricche di tre nodi. Procedendo ulteriormente si trovano le disequazioni di cricca per cricche più grandi. ■