

## Capitolo 12

# Combinatorica poliedrale

Nella ricerca di una soluzione ottima è essenziale poter disporre di un meccanismo che garantisca l'ottimalità di una soluzione generata dall'algoritmo risolutore. La teoria della dualità, quando valga la dualità forte, costituisce appunto un efficiente meccanismo di verifica, nel senso che si riesce a generare una soluzione ottima e a verificarne l'ottimalità in tempo polinomiale. Tuttavia possiamo ragionevolmente dubitare che ciò sia possibile per i problemi NP-difficili, altrimenti  $\text{NP-c} \cap \text{co-NP-c} \neq \emptyset$ , e questa circostanza è altamente improbabile, come sottolineato nel capitolo 3.

In questi casi la verifica dell'ottimalità non si riesce ad ottenere in tempo polinomiale. Però si possono trovare dei meccanismi che accelerino, nei limiti del possibile, il meccanismo di verifica. In particolare si tratta di generare durante l'algoritmo delle limitazioni inferiori alla soluzione ottima, nella speranza che, prima o dopo, avendo trovato una limitazione inferiore il cui valore è uguale a quello di una soluzione disponibile, si abbia anche la garanzia dell'ottimalità. Oppure, disponendo di una soluzione e di una buona limitazione inferiore all'ottimo si è in grado di valutare la bontà della soluzione con una discreta precisione e si può eventualmente decidere di interrompere il calcolo, se la soluzione corrente rientra in un'approssimazione accettabile per scopi pratici.

Vi sono vari modi di generare limitazioni inferiori e, accanto ai metodi che sono particolari del problema in esame, sono state sviluppate delle tecniche generali. Particolarmente vantaggiose sul piano algoritmico si sono rivelate quelle tecniche che mirano a descrivere nel modo più esatto possibile l'involuppo convesso delle soluzioni ammissibili, così da generare una limitazione inferiore il più alta possibile. Queste tecniche vengono appunto dette *poliedrali* e possono essere applicate sia a problemi di natura combinatoria, e quindi altamente strutturati, che a generici problemi di programmazione lineare intera. Nel primo caso la teoria e i metodi impiegati vanno sotto il nome di *combinatorica poliedrale* e in questo capitolo ne verranno forniti alcuni esempi. Nel capitolo successivo verranno esaminate alcune tecniche poliedrali per generici problemi di programmazione lineare intera.

La combinatorica poliedrale cerca quindi di fornire una descrizione in termini di faccette dei poliedri determinati dagli involuppi convessi delle soluzioni ammissibili di problemi di ottimizzazione combinatoria. In questi casi le soluzioni ammissibili sono in numero finito, ancorché esponenzialmente grande rispetto alle dimensioni dell'istanza, e quindi l'involuppo convesso è un poliedro. Se la funzione obiettivo è lineare l'ottimo è un vertice, ovvero una soluzione ammissibile. Descrizioni poliedrali di insiemi ammissibili sono già state fornite in questo testo. Si è visto ad esempio come per il problema del cammino minimo, per il problema della minima capacità di taglio e per il problema dell'assegnamento un semplice (e limitato) insieme di disequaglianze descrive esattamente l'involuppo delle soluzioni ammissibili. Anche per il problema dell'accoppiamento (non bipartito) e per un matroide è stato possibile fare una descrizione esaustiva delle disequaglianze lineari definenti l'involuppo convesso. Si è visto come, nonostante il numero esponenziale di disequaglianze, fosse possibile

avere degli algoritmi polinomiali di risoluzione (e anche di separazione). In questo capitolo esamineremo alcuni problemi **NP**-difficili per i quali è nota solo una descrizione parziale delle disequaglianze del poliedro. In quanto parziale, tale descrizione genera limitazioni inferiori senza garanzia di annullare lo scarto fra la limitazione e una soluzione ammissibile. Tuttavia, se la descrizione poliedrale è abbastanza accurata, la limitazione inferiore è alta e il vantaggio computazionale è notevole.

## 12.1. Il problema del commesso viaggiatore

Il problema del commesso viaggiatore (TSP) è già stato descritto a pagina 12 e una sua versione duale è stata presentata nel capitolo 5 a pagina 140. Come già sottolineato, si tratta di un problema per il quale non vale in generale la dualità forte. In ogni caso il valore della funzione duale per un generico valore della variabile duale costituisce una valida limitazione inferiore, tanto migliore quanto più vicina all'ottimo duale è la variabile duale. Esamineremo ora un approccio diverso al problema con la garanzia di generare limitazioni inferiori non peggiori di quelle del problema duale. Sull'argomento si vedano anche Grötschel e Padberg [1985] e Jünger et al [1995].

Sia dato il grafo completo non orientato  $K_n$  (sia  $m := n(n-1)/2$ ) e sia  $H \subset 2^E$  l'insieme di tutti i circuiti hamiltoniani di  $K_n$  (visti come insiemi di archi). Se  $e(x) \in \mathbb{R}^m$  è il vettore d'incidenza del generico sottoinsieme  $x \subset E$  possiamo definire il seguente poliedro del TSP

$$P_{\mathbf{T}} := \text{conv} \{e(x) : x \in H\} \subset \mathbb{R}^m$$

Come già visto, se  $A$  è la matrice d'incidenza nodi archi di un grafo non orientato, ogni circuito hamiltoniano  $x$  soddisfa il vincolo  $Ax = \mathbf{2}$ . Siccome la matrice  $A$  ha rango pieno,  $P_{\mathbf{T}}$  è contenuto in un insieme affine di dimensione  $m - n = n(n-3)/2$ . Si può dimostrare che la dimensione di  $P_{\mathbf{T}}$  è esattamente  $n(n-3)/2$ . Ovviamente  $P_{\mathbf{T}}$  è contenuto nel seguente poliedro:

$$Q_0 := \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = \mathbf{2}, 0 \leq x \leq 1\}$$

e, per piccoli grafi,  $P_{\mathbf{T}}$  coincide con  $Q_0$ .

12.1 TEOREMA.  $P_{\mathbf{T}} = Q_0$  se  $n \leq 5$ .

DIMOSTRAZIONE. Dai risultati del capitolo 2, ad ogni base  $B$  di  $Q_0$  corrisponde una quasi foresta dispari  $G(B)$ . Inoltre gli archi in base possono assumere solo i valori 0, 1 oppure 1/2. Gli archi fuori base possono assumere i valori 0 o 1. È immediato vedere che il valore 1/2 può essere assunto solo dai circuiti (dispari) dei quasi alberi. Siccome  $\sum_e x_e$  è un numero intero, ogni  $G(B)$  deve avere un numero pari di circuiti dispari, cosa impossibile per  $n \leq 5$ , quindi gli archi in base hanno valori 0 o 1. I vertici di  $Q_0$  corrispondono pertanto a sottografi regolari di  $K_n$  di grado 2, cioè ad insiemi di circuiti disgiunti nei nodi. Se  $n \leq 5$  tali sottografi sono circuiti hamiltoniani. ■

Se  $n \geq 6$  invece l'inclusione  $P_{\mathbf{T}} \subset Q_0$  è stretta. Ad esempio basta prendere due circuiti disgiunti nei nodi, il cui vettore d'incidenza è contenuto in  $Q_0$  ma non in  $P_{\mathbf{T}}$  (figura 12.1). Come ulteriori esempi di vertici di  $Q_0$  non contenuti in  $P_{\mathbf{T}}$ , si considerino le soluzioni delle figure 12.2 e 12.3 ( $x_e = 1$  per gli archi continui e  $x_e = 1/2$  per gli archi tratteggiati).

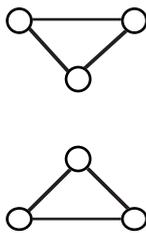


FIGURA 12.1

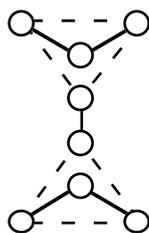


FIGURA 12.2

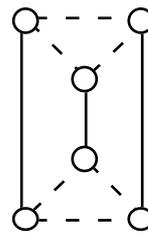


FIGURA 12.3

Per eliminare i vertici di  $Q_0$  che, pur avendo valori interi, non sono circuiti hamiltoniani, si noti che, per ogni circuito hamiltoniano  $C$ , la somma delle componenti di  $e(C)$  ristrette ad una cricca di  $p < n$  nodi non può superare il valore  $p - 1$ . Quindi le disequaglianze

$$x(S) := \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \tag{12.1}$$

sono valide per  $P_{\mathbf{T}}$ . Queste disequaglianze prendono il nome di *disequaglianze di sottocircuito* (*subtour inequalities*). Possiamo allora definire il poliedro

$$Q_1 := \{x \in Q_0 : x(S) \leq |S| - 1, \forall S \subset N, S \neq N, |S| \geq 3\}$$

Le soluzioni delle figure 12.1 e 12.2 non appartengono a  $Q_1$ , mentre quella della figura 12.3 vi appartiene, come si può verificare calcolando (12.1) per tutti i sottoinsiemi propri di almeno 3 nodi. Quindi l'inclusione  $P_{\mathbf{T}} \subset Q_1$  è stretta (anche per  $n = 6$ ). Tuttavia  $Q_1$  costituisce una buona approssimazione di  $P_{\mathbf{T}}$ . Infatti tutte le disequaglianze di  $Q_1$  definiscono faccette di  $P_{\mathbf{T}}$ . Tuttavia, non essendo piena la dimensione di  $P_{\mathbf{T}}$ , alcune disequaglianze sono ridondanti perché definiscono la medesima faccetta. Ragionando in modo del tutto simile al lemma 10.20 si ha:

**12.2 LEMMA.** *Sia  $\bar{x} \in Q_0$ . Allora  $\bar{x}(S) = |S| - k$  se e solo se  $\bar{x}(Q(S)) = 2k$ . Quindi  $\bar{x}(S) \leq |S| - 1$  se e solo se  $\bar{x}(Q(S)) \geq 2$ . Quindi anche  $\bar{x}(S) \leq |S| - 1$  se e solo se  $\bar{x}(N \setminus S) \leq |N \setminus S| - 1$ .* ■

Allora metà delle disequaglianze  $x(S) \leq |S| - 1$  possono essere omesse. In particolare possiamo scegliere di considerare solo quei sottoinsiemi che contengono un nodo assegnato  $\bar{k}$ , ovvero:

$$x(S) \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset N : 3 \leq |S| \leq n - 3, \bar{k} \in S \tag{12.2}$$

Si noti che in (12.2) si potrebbe anche estendere  $S$  ai casi  $|S| = 2$  e  $|S| = n - 2$ . Si potrebbe allora tener conto del vincolo  $x_e \leq 1$  direttamente in (12.2). Tuttavia è preferibile mantenere esplicito il vincolo  $x_e \leq 1$  perché dal punto di vista computazionale è proprio così che si opera. Il lemma permette inoltre di sostituire nella descrizione di  $Q_1$  le disequaglianze (12.2) con le seguenti:

$$x(Q(S)) \geq 2 \quad \forall S \subset N : 3 \leq |S| \leq n - 3, \bar{k} \in S \tag{12.3}$$

**12.3 TEOREMA.** *Se  $n \geq 5$  le disequaglianze  $x_e \geq 0, x_e \leq 1$  definiscono faccette di  $P_{\mathbf{T}}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Useremo la tecnica di produrre un soluzione  $y$  tale che  $y_{\bar{e}} = 0$  e  $y_e > 0$  per ogni  $e \neq \bar{e}$ ,  $y_e < 1$  per ogni  $e$  e  $y(S) < |S| - 1$  per ogni  $S$  come in (12.2). L'esistenza di una tale soluzione garantisce che la disequaglianza  $x_{\bar{e}} \geq 0$  genera una faccetta. Analogamente

si ragiona per le disequaglianze  $x_e \leq 1$ . Nelle dimostrazioni che seguiranno si produrranno circuiti hamiltoniani obbligati ad attraversare insiemi limitati di nodi secondo una fissata sequenza. La possibilità di inserire nel circuito gli altri nodi del grafo sarà garantita dalla completezza del grafo.

Si consideri un arco particolare  $\bar{e}$ , e si considerino tutti i circuiti hamiltoniani che non contengono  $\bar{e}$  e sia  $y$  una loro combinazione convessa stretta. Ovviamente  $y_{\bar{e}} = 0$ . Sia  $\bar{e} = (h, k)$  e sia  $e = (i, j)$  un arco qualsiasi. Si consideri il circuito  $i \rightsquigarrow h \rightsquigarrow l \rightsquigarrow k \rightsquigarrow j \rightarrow i$ . Quindi per ogni altro arco  $e$  esiste un circuito hamiltoniano che passa per  $e$  e non per  $\bar{e}$  da cui  $y_e > 0$  per ogni  $e \neq \bar{e}$ .

Si consideri il circuito  $i \rightsquigarrow h \rightsquigarrow j \rightsquigarrow l \rightsquigarrow k \rightsquigarrow i$ . Quindi per ogni altro arco  $e$  esiste un circuito hamiltoniano che non contiene  $e$  da cui  $y_e < 1$  per ogni  $e \neq \bar{e}$ .

Sia  $S$  un generico insieme. Consideriamo il caso  $h, k \notin S$ . Siano allora  $i, j$ , due nodi di  $S$ . Il circuito  $h \rightsquigarrow i \rightsquigarrow k \rightsquigarrow j \rightsquigarrow h$  entra ed esce da  $S$  due volte, quindi soddisfa il vincolo  $x(Q(S)) \geq 2$  in modo stretto, per cui  $y(Q(S)) > 2$ . Sia ora  $h \in S$  e  $k \notin S$ . Siano  $i$  un altro nodo di  $S$  e sia  $j \neq k$  un nodo non in  $S$ . Siccome  $|S| \leq n - 3$  un tale nodo esiste. Si consideri il circuito  $k \rightsquigarrow i \rightsquigarrow h \rightarrow j \rightsquigarrow k$ . Come nel caso precedente  $y(Q(S)) > 2$ . Infine sia  $h, k \in S$ . Siano  $i, j \notin S$  (esistenza garantita da  $|S| \leq n - 3$ ). Dal circuito  $h \rightsquigarrow i \rightsquigarrow k \rightsquigarrow j \rightsquigarrow h$  si ha ancora  $y(Q(S)) > 2$ . Quindi  $x_{\bar{e}} \geq 0$  è una faccetta. In modo analogo si può dimostrare l'asserto per la disequaglianza  $x_e \leq 1$  (lo si faccia per esercizio). ■

12.4 TEOREMA. Se  $n \geq 6$  le disequaglianze (12.2) definiscono faccette di  $P_{\mathbf{T}}$ .

DIMOSTRAZIONE. Si consideri un particolare insieme  $S$  e tutti i circuiti hamiltoniani per cui  $x(S) = |S| - 1$ . Sia  $H(S)$  questo insieme di circuiti e sia  $y$  una combinazione convessa stretta dei loro vettori d'incidenza. Si noti che ogni circuito in  $H(S)$  ristretto ad  $S$  è un cammino hamiltoniano e attraversa il taglio  $Q(S)$  una volta in entrata e una in uscita. Sia  $T$  un altro insieme delle disequaglianze (12.2). Faremo vedere che per ogni caso considerato esiste un circuito  $\bar{x} \in H(S)$  per il quale  $\bar{x}(T) < |T| - 1$ , ovvero  $\bar{x}(Q(T)) > 2$ , e quindi anche  $y(T) < |T| - 1$ .

Si supponga inizialmente  $T \subset S$ .  $T$  contiene almeno due nodi  $i$  e  $j$ . Esiste almeno un nodo  $h \in S \setminus T$  e un nodo  $k \notin S$ . Sia  $\bar{x}$  il circuito  $k \rightsquigarrow i \rightsquigarrow h \rightsquigarrow j \rightsquigarrow k$ . Si vede che  $\bar{x} \in H(S)$  e che  $\bar{x}(Q(T)) = 4 > 2$ .

Sia ora  $S \subset T$ . Siccome  $|T| \leq n - 3$  esistono almeno due nodi  $h$  e  $k$  non in  $T$ . Sia  $i \in S$  e  $j \in T \setminus S$ . Sia  $\bar{x}$  il circuito  $k \rightsquigarrow i \rightsquigarrow h \rightsquigarrow j \rightsquigarrow k$ . Allora  $\bar{x} \in H(S)$  e  $\bar{x}(Q(T)) = 4 > 2$ .

Sia ora  $T \not\subset S$  e  $S \not\subset T$ . Si noti che in base a (12.2)  $S \cap T \supset \{\bar{k}\} \neq \emptyset$ . Esiste almeno un altro nodo  $i \in S \setminus T$  e  $h \in T \setminus S$ . Inoltre, siccome  $|T| \leq n - 3$  esistono almeno due nodi non in  $T$ , di cui uno sia  $i$  e l'altro sia un nodo  $j$ . Si consideri il circuito  $\bar{x} \in H(S)$ :  $h \rightsquigarrow i \rightsquigarrow \bar{k} \rightsquigarrow j \rightsquigarrow h$  (si noti che è indifferente se  $j \in S$  oppure  $j \notin S$ ). Si ha nuovamente  $\bar{x}(Q(T)) = 4 > 2$ .

Non è difficile far vedere inoltre che per ogni arco esiste un circuito di  $H(S)$  che contiene l'arco ed uno che non lo contiene e quindi  $0 < y_e < 1$ . ■

Per descrivere  $P_{\mathbf{T}}$  sono necessarie quindi altre disequaglianze oltre a quelle che definiscono  $Q_1$ . Ad esempio sono necessarie delle disequaglianze che siano in grado di escludere soluzioni del tipo di quella di figura 12.3. Si consideri in particolare uno dei due circuiti con archi di valore  $1/2$ . Ad ognuno dei tre nodi del circuito è attaccato un arco di valore 1. Intuitivamente è come se la soluzione volesse percorrere questi tre archi e, per poterlo fare rispettando il vincolo di grado, trovasse un 'aggiustamento' con il circuito dispari a valori frazionari.

Prendendo spunto da questa osservazione consideriamo il sottoinsieme di archi in figura 12.4. Il massimo numero di archi che possono appartenere ad un circuito hamiltoniano è 4, come indicato in figura, mentre i valori della soluzione di figura 12.3 danno come somma 4.5. Quindi un'opportuna disequaglianza potrebbe 'tagliare' questa soluzione frazionaria. Un po'

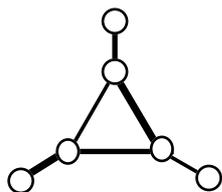


FIGURA 12.4

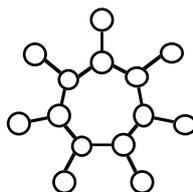


FIGURA 12.5

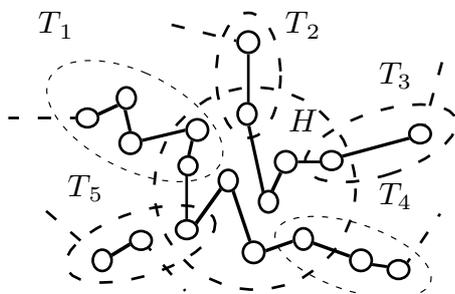


FIGURA 12.6

più in generale, dato un circuito dispari di  $2k + 1$  nodi a ciascuno dei quali è incidente un altro arco (si veda un esempio in figura 12.5 con  $k = 3$ ), di questi  $4k + 2$  archi non più di  $3k + 1$  possono appartenere ad un circuito hamiltoniano, mentre una soluzione frazionaria di valore  $1/2$  lungo il circuito darebbe come somma, sugli stessi archi,  $3k + 3/2$ .

Per rendere più generale quest'idea si noti dapprima che, se la restrizione di un cammino hamiltoniano ad un opportuno insieme di archi  $E' \subset E(S)$  è formata da  $p$  componenti, includendo in queste anche singoli nodi, il numero di archi del circuito hamiltoniano in  $E'$  è  $|S| - p$  (sono infatti  $p$  alberi). Allora si tratta di definire un insieme di nodi  $S$  ed un insieme di archi  $E' \subset E(S)$  in cui necessariamente il numero di componenti sia più di uno (altrimenti ritroveremmo le disuguaglianze (12.2)). Si consideri pertanto un insieme  $S$  di nodi che sia l'unione di un insieme  $H$  e di  $2k + 1$  insiemi  $T_i$ , con il vincolo che

$$T_i \cap T_j = \emptyset \quad i \neq j \quad |H \cap T_i| \geq 1 \quad T_i \setminus H \neq \emptyset \quad \forall i \quad (12.4)$$

(si veda la figura 12.6). Sia  $E' := E(H) \cup E(T_1) \cup \dots \cup E(T_{2k+1})$ . In questo modo il circuito ristretto a  $E'$  ha almeno  $k + 1$  componenti connesse. Quindi

$$x(H) + \sum_{i=1}^{2k+1} x(T_i) \leq |S| - (k + 1) \leq |H| + \sum_{i=1}^{2k+1} (|T_i| - 1) - (k + 1) \quad (12.5)$$

è una disuguaglianza valida per  $P_T$ . Queste prendono il nome di *disuguaglianze a pettine* (*comb inequalities*). L'insieme  $H$  prende il nome di *manico* (*handle*) e gli insiemi  $T_i$  quello di *denti* (*teeth*).

12.5 ESERCIZIO. Si faccia vedere che il valore di  $k$  in (12.5) può anche essere uguale a 0 (cioè si ha un unico dente) e che, se una disuguaglianza a pettine con  $k = 0$  è violata, è violata anche una disuguaglianza di sottocircuito con  $0 < x(Q(S)) < 2$  (ma non si ha viceversa, cioè disuguaglianze di sottocircuito per cui  $x(Q(S)) = 0$  non corrispondono a disuguaglianze a pettine violate). ■

Per comodità di notazione si indichi un ‘pettine’ con il simbolo  $(H, T_i)$  e

$$\sigma(H, T_i) := |H| + \sum_{i=1}^{2k+1} (|T_i| - 1) - (k + 1)$$

Se in particolare  $|H \cap T_i| = 1$  e  $|T_i| = 2, \forall i$ , si parla di *diseguaglianze a pettine semplici* o anche di *diseguaglianze a germoglio*. Si noti che in questo caso il pettine consiste semplicemente di un insieme di nodi  $H$  e di un accoppiamento dispari in  $Q(H)$ . Sia  $E_T \subset Q(H)$  tale insieme di archi. In questo caso  $\sigma(H, T_i) = |H| + k$ .

Possiamo ora definire il poliedro:

$$Q_2 := \left\{ x \in Q_1 : x(H) + \sum_{i=1}^{2k+1} x(T_i) \leq \sigma(H, T_i), \quad \forall (H, T_i) \right\}$$

12.6 TEOREMA.  $P_T = Q_2$  se  $n = 6$ .

DIMOSTRAZIONE. Si è già visto come vertici frazionari di  $Q_1$  hanno necessariamente i valori frazionari su un numero pari di circuiti dispari. Quindi per  $n = 6$  le uniche possibili soluzioni frazionari solo quelle come in figura 12.3 che non sono ammissibili in  $Q_2$ . ■

Si può dimostrare (Edmonds e Johnson [1970]) che l’involuppo convesso di tutti i sottografi consistenti di insiemi di circuiti (detti anche *2-accoppiamenti*) è uguale al poliedro definito da  $Ax = \mathbf{2}, 0 \leq x \leq 1$  e dalle disequaglianze a pettine semplici (con  $k \geq 0$ ).

12.7 ESERCIZIO. La soluzione di figura 12.2, come si può immediatamente verificare, non può essere ottenuta come combinazione convessa di 2-accoppiamenti e quindi, in base al risultato appena citato, deve violare anche una disequaglianza a pettine semplice ( $Ax = \mathbf{2}, 0 \leq x \leq 1$  sono soddisfatte). Quale? ■

Le disequaglianze a pettine possono essere generalizzate in modo da ottenere una classe più ampia di faccette per  $P_T$ . Sono le cosiddette *diseguaglianze ad albero di cricche (clique tree inequalities)* di cui si può trovare la descrizione in Nemhauser e Wolsey [1988], Pulleyblank [1989], Jünger et al. [1995]. In quest’ultima rassegna in particolare si trovano descritte altre classi di disequaglianze valide.

È chiaro che, se indichiamo con  $v$  il valore ottimo di un TSP e con  $v_0 := \min \{cx : x \in Q_0\}$ ,  $v_1 := \min \{cx : x \in Q_1\}$ ,  $v_2 := \min \{cx : x \in Q_2\}$  abbiamo a disposizione delle limitazioni inferiori crescenti

$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq v$$

Le tre limitazioni inferiori si ottengono risolvendo tre problemi di programmazione lineare. Il problema è che due di questi sono definiti da un numero esponenziale di disequaglianze. Naturalmente non verranno generate tutte le disequaglianze ma solo quelle che servono, con un approccio del tutto simile a quello usato per la generazione di colonne (di fatto vengono generate proprio le colonne del duale). Tutta la difficoltà sta nel poter trovare facilmente una disequaglianza violata da una soluzione frazionaria. Ciò è possibile per le disequaglianze di sottocircuito e per le disequaglianze a pettine semplici.

Consideriamo solo il caso delle disequaglianze di sottocircuito nella forma (12.3). In questo caso, data una soluzione  $\bar{x}$ , si tratta di determinare se esiste un taglio  $Q(S)$  tale che  $\bar{x}(Q(S)) < 2$ . Se esiste, allora la disequaglianza violata viene aggiunta ai vincoli e il problema viene risolto con il simplesso duale a partire dalla precedente soluzione ottima (resa inammissibile dal vincolo aggiunto). È naturale considerare il valore  $\bar{x}(Q(S)) < 2$

come una capacità di taglio. Pertanto si costruisca una rete di flusso  $(N, E(x))$  in cui  $E(x) := \{e \in K_n : x_e > 0\}$ , con gli archi orientati arbitrariamente, si assegni ad ogni arco  $e \in E(x)$  un intervallo di capacità  $[-x_e, x_e]$  e si risolvano  $n - 1$  problemi di massimo flusso fra  $k$  e gli altri nodi. Se per uno di essi il massimo flusso è minore di 2, si è trovata la disuguaglianza violata. Per la violazione delle disuguaglianze di germoglio (Padberg e Rao [1982]) si veda anche Cook e al. [1998].

12.8 ESEMPIO. Si consideri il grafo  $G = (N, E)$  in figura 12.7. Gli archi in  $E$  hanno costo 0, mentre quelli complementari in  $K_9 \setminus E$  hanno costo 1. Quindi risolvere un TSP su  $K_9$  con questi costi corrisponde a determinare il minimo numero di archi da aggiungere a  $G$  per renderlo hamiltoniano e  $G$  è hamiltoniano se e solo se il costo ottimo del TSP è 0 (è immediato dimostrare direttamente che  $G$  non è hamiltoniano).

Si risolva inizialmente  $\min \{cx : x \in Q_0\}$ . Si ottiene l'insieme di 3 circuiti disgiunti indicato in figura 12.8 ( $v_0 = 0$ ). Dobbiamo pertanto aggiungere una disuguaglianza di sottocircuito, ad esempio, scegliendo  $S := \{1, 2, 3\}$

$$x(S) = x_{12} + x_{13} + x_{23} \leq 2 \quad (12.6)$$

Aggiungendo a  $Q_0$  il vincolo (12.6) si ottiene la soluzione in figura 12.9, ancora un insieme di circuiti di valore  $v_1 = 0$ . Stavolta si pone  $S := \{7, 8, 9\}$  e si aggiunge

$$x(S) = x_{78} + x_{79} + x_{89} \leq 2 \quad (12.7)$$

La soluzione che si ottiene 'aggiusta le cose' sui due sottoinsiemi indicati, come si vede dalla figura 12.10, ma non sul terzo insieme. Allora  $S := \{4, 5, 6\}$  e si aggiunge

$$x(S) = x_{45} + x_{46} + x_{56} \leq 2 \quad (12.8)$$

Ora i vincoli di  $Q_0$  più (12.6), (12.7) (12.8) generano la soluzione  $\bar{x}$  in figura 12.11 (archi tratteggiati  $x_e = 1/2$ , archi interi  $x_e = 1$ ). Il valore di questa soluzione è  $3/2$  e quindi una limitazione inferiore all'ottimo è data da  $\lceil 3/2 \rceil = 2$ . Siccome una soluzione di costo 2 è facilmente disponibile, potremmo già concludere che tale soluzione è ottima. Tuttavia procediamo come se non avessimo potuto fare questa verifica e notiamo che per la soluzione di figura 12.11 nessuna disuguaglianza di sottocircuito è violata. È violata invece una disuguaglianza a pettine, prendendo il manico e i denti come indicato in figura 12.12, ovvero  $H := \{3, 6, 9\}$ ,  $T_1 := \{1, 2, 3\}$ ,  $T_2 := \{4, 5, 6\}$ ,  $T_3 := \{7, 8, 9\}$ . La disuguaglianza è

$$\begin{aligned} x(H) + x(T_1) + x(T_2) + x(T_3) = \\ x_{36} + x_{69} + x_{39} + x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{78} + x_{79} + x_{89} + x_{45} + x_{46} + x_{56} \leq \end{aligned} \quad (12.9)$$

$$|H| + (|T_1| - 1) + (|T_2| - 1) + (|T_3| - 1) - 2 = 3 + 2 + 2 + 2 - 2 = 7$$

e infatti  $\bar{x}(H) + \bar{x}(T_1) + \bar{x}(T_2) + \bar{x}(T_3) = 4 + 7/2 > 7$ . Infine, aggiungendo (12.9) si ottiene l'ottimo del problema (figura 12.13). ■

12.9 ESEMPIO. Si proceda come nell'esempio precedente per trovare il minimo numero di archi da aggiungere al grafo di Petersen per renderlo hamiltoniano (figura 12.14). L'ottimo in  $Q_0$  è dato da due circuiti disgiunti (figura 12.15). Aggiungendo la relativa disuguaglianza di sottocircuito si ottiene la soluzione frazionaria in figura 12.16 che non viola né le disuguaglianze di sottocircuito né quelle a pettine. Evidentemente si è trovato un vertice di  $Q_2$  non appartenente a  $P_T$ . Che fare in questi casi?

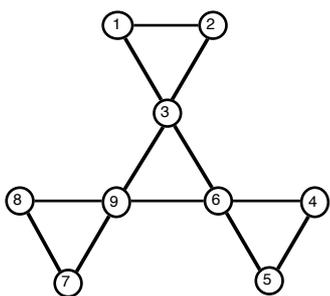


FIGURA 12.7

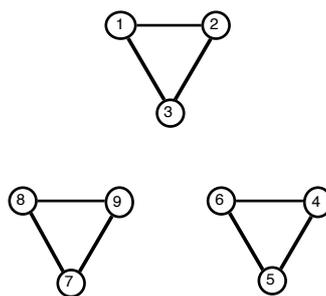


FIGURA 12.8

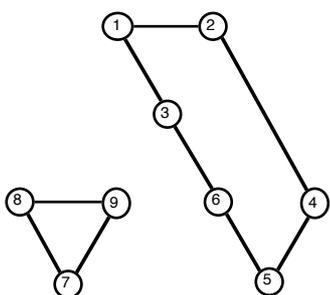


FIGURA 12.9

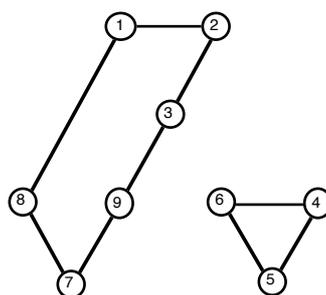


FIGURA 12.10

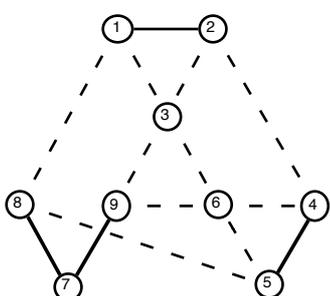


FIGURA 12.11

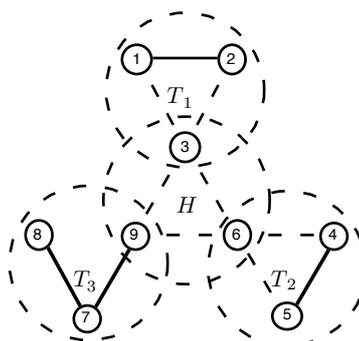


FIGURA 12.12

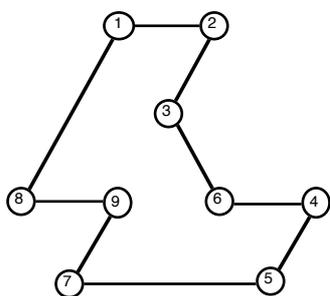


FIGURA 12.13

Si potrebbe pensare di aggiungere disequaglianze violate dalla soluzione, ma non è facile identificarle. In questo caso è stato fatto notare che  $\sum_{e \in E} x_e \leq 9$  (con  $E$  gli archi del grafo di Petersen) rappresenta una disequaglianza valida (addirittura definisce una faccetta) per  $K_{10}$ , visto che il grafo di Petersen non è hamiltoniano, e che tale disequaglianza non è riconducibile né alle disequaglianze di sottocircuito né a quelle a pettine. Se aggiungiamo l'ulteriore disequaglianza  $\sum_{e \in E} x_e \leq 9$  si ottiene la soluzione ottima. ■

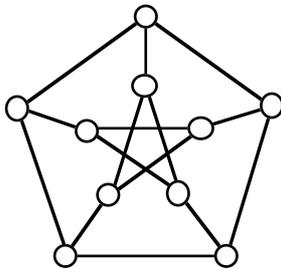


FIGURA 12.14

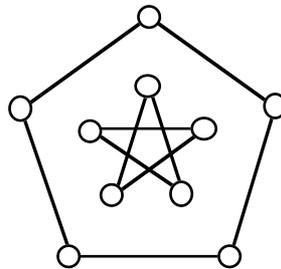


FIGURA 12.15

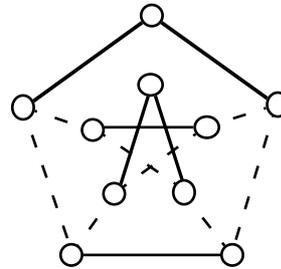


FIGURA 12.16

Vogliamo ora far vedere come sia possibile generare in modo quasi automatico delle disequaglianze violate da una soluzione frazionaria  $\bar{x}$  sfruttando la soluzione frazionaria stessa e una descrizione ‘locale’ di  $P_{\mathbf{T}}$  che si limiti ad un sottografo sufficientemente ‘maneggevole’. Una disequaglianza violata da una soluzione frazionaria potrebbe essere generata da una separazione fra  $\bar{x}$  e l’insieme dei vettori d’incidenza dei circuiti hamiltoniani. Supponendo di avere enumerato tali vettori d’incidenza come  $x^1, \dots, x^k$ , una disequaglianza valida  $\sum_i \alpha_i x_i \leq \gamma$  si ottiene risolvendo il seguente problema di programmazione lineare di separazione:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \delta - \gamma \\
 \delta \leq \quad & \sum_i \alpha_i \bar{x}_i \\
 \gamma \geq \quad & \sum_i \alpha_i x_i^j \quad j := 1, \dots, k \\
 & -1 \leq \alpha_i \leq 1
 \end{aligned}
 \tag{12.10}$$

L’ovvia difficoltà di (12.10) è che non si possono praticamente enumerare tutti i circuiti hamiltoniani. Allora l’idea è di restringere l’attenzione ad un sottografo sul quale l’enumerazione si riduca a pochi termini, anche sfruttando possibili simmetrie presenti nel sottografo.

Le disequaglianze che si considerano quindi sono date da una combinazione lineare di valori di  $x$ , ristretta agli archi del sottografo (sia  $q$  il numero di questi archi) e da un termine costante, che può dipendere da altri parametri, quali ad esempio il numero di nodi e/o il numero di archi del sottografo. Possiamo allora, risolvendo un problema analogo a (12.10) ma più piccolo, operare una separazione in  $\mathbb{R}^q$ , fra  $\bar{x}$  e  $x^j$ ,  $j := 1, \dots, k$ , dove  $\bar{x}$  è la soluzione frazionaria ristretta al sottografo e  $x^j$  è il  $j$ -esimo circuito hamiltoniano dell’enumerazione (ristretto al sottografo). Se il valore ottimo è maggiore di zero si è trovata una disequaglianza valida che taglia la soluzione frazionaria. Altrimenti, se il valore ottimo è zero, significa che la scelta del sottografo non è stata fortunata, perché si è operato in un sottospazio di  $\mathbb{R}^m$  dove la proiezione della soluzione frazionaria appartiene alla proiezione di  $P_{\mathbf{T}}$  e quindi non è separabile.

Ad esempio si riconsideri la soluzione in figura 12.3. Potremmo decidere di considerare come sottografo i tre archi (e i relativi tre nodi) di uno dei circuiti a valori frazionari e

provare a vedere se esiste un piano separatore. Data la simmetria dei tre archi possiamo assumere che i tre coefficienti  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  siano uguali ad un medesimo valore che indichiamo con  $\alpha$ . I circuiti hamiltoniani possono attraversare nessuno, uno o due dei tre archi e quindi l'enumerazione può essere riassunta dalle tre tipologie ammissibili. Il problema (12.10) diventa perciò:

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta - \gamma \\ & \delta \leq 1.5 \alpha \\ & \gamma \geq 0 \alpha \\ & \gamma \geq 1 \alpha \\ & \gamma \geq 2 \alpha \\ & -1 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned} \tag{12.11}$$

Si noti che la disuguaglianza del secondo circuito dell'enumerazione è dominata da quella del terzo se  $\alpha \geq 0$  ed è dominata da quella del primo se  $\alpha \leq 0$  e quindi si sarebbe potuto ometterla. Il massimo di (12.11) è zero e quindi non è possibile separare la soluzione frazionaria con il sottografo scelto.

Aggiungiamo allora al circuito i tre archi di valore 1. Sempre per ragioni di simmetria possiamo assumere che i coefficienti degli archi del circuito  $C$  siano uguali ad un valore  $\alpha_1$  e i tre archi uscenti dal circuito (indichiamoli con  $M$ ) abbiano coefficienti uguali ad un valore  $\alpha_2$ . Nell'enumerazione basta considerare  $x^1$  (nessun arco del circuito percorso),  $x^2$  (un arco del circuito percorso) e  $x^3$  (due archi del circuito percorsi). Si veda la figura 12.17.

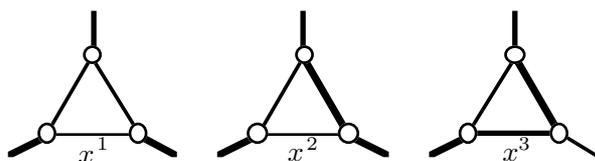


FIGURA 12.17

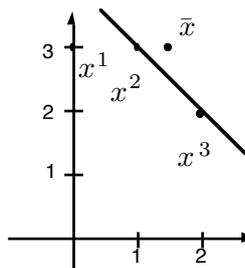


FIGURA 12.18

Allora (12.10) diventa:

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta - \gamma \\ & \delta \leq 1.5 \alpha_1 + 3 \alpha_2 \\ & \gamma \geq 0 \alpha_1 + 3 \alpha_2 \\ & \gamma \geq 1 \alpha_1 + 3 \alpha_2 \\ & \gamma \geq 2 \alpha_1 + 2 \alpha_2 \\ & -1 \leq \alpha_i \leq 1 \end{aligned} \tag{12.12}$$

La soluzione di (12.12) è  $\delta = 4.5, \gamma = 4, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , e il valore ottimo è 0.5. Quindi si è ottenuta la separazione cercata (figura 12.18). La disuguaglianza generata è

$$\sum_{e \in C} x_e + \sum_{e \in M} x_e \leq 4 \tag{12.13}$$

che è proprio una disuguaglianza a pettine. Per ‘riconoscere’ da una espressione come (12.13) un’espressione dipendente in modo parametrizzato da una qualche struttura, ovvero capire l’origine del valore 4, che in questo caso si potrebbe esprimere come  $4 = |C| + |M| - 2$ , è necessario ripetere il calcolo per strutture un po’ più complesse. Se ad esempio si considera la soluzione frazionaria in figura 12.19, possiamo considerare il sottografo dato dagli archi con valore  $x_e > 0$  (quelli visibili in figura, il grafo è infatti completo) al quale aggiungiamo la struttura a pettine indicata. Per motivi di simmetria si possono considerare in modo aggregato gli archi in  $E(H)$  e quelli in ognuno dei tre  $E(T_i)$ . Si definiscano allora i coefficienti come:  $\alpha_0$  per  $x_e, e \in E(H)$ ,  $\alpha_i$  per  $x_e, e \in E(T_i)$ .

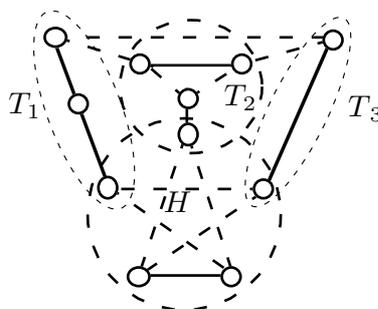


FIGURA 12.19

I casi possibili vengono suddivisi a seconda di quanti archi di  $E(H) \cap Q(T_i)$ ,  $i := 1, 2, 3$ , sono usati da un circuito hamiltoniano. Si indichino questi valori con  $a_i$ ,  $i := 1, 2, 3$ . Per il grafo in esame  $a_i \in \{0, 1, 2\}$  e quindi ci sono 27 casi da esaminare. Per ognuno di questi si determinano quanti archi di  $H$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  possono al più appartenere ad un circuito hamiltoniano. Si indichino questi valori con  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$ . Questi sono i valori che vengono poi usati per calcolare la separazione. Non tutti i 27 casi sono rilevanti. Alcuni forniscono valori uguali, altri sono dominati ai fini della separazione nel senso che se  $b'_i \leq b_i, \forall i$ , allora  $b'$  può essere tralasciato. Rimangono i seguenti 4 casi (si consiglia comunque come esercizio di valutarli tutti):

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
1	1	1	$ H  - 2 = 3$	$ T_1  - 1 = 2$	$ T_2  - 1 = 3$	$ T_3  - 1 = 1$
2	1	1	$ H  - 1 = 4$	$ T_1  - 2 = 1$	$ T_2  - 1 = 3$	$ T_3  - 1 = 1$
1	2	1	$ H  - 1 = 4$	$ T_1  - 1 = 2$	$ T_2  - 2 = 2$	$ T_3  - 1 = 1$
1	1	2	$ H  - 1 = 4$	$ T_1  - 1 = 2$	$ T_2  - 1 = 3$	$ T_3  - 2 = 0$

I valori di  $b_i$  per la soluzione frazionaria sono  $b_0 = 3.5$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 3$ ,  $b_3 = 1$ . Allora la separazione si ottiene risolvendo il problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta - \gamma \\ & \delta \leq 3.5\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ & \gamma \geq 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ & \gamma \geq 4\alpha_0 + \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ & \gamma \geq 4\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ & \gamma \geq 4\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{aligned}$$

la cui soluzione è  $\delta = 9.5$ ,  $\gamma = 9$ ,  $\alpha_i = 1$ ,  $i := 0, \dots, 3$ . La diseuguaglianza valida che si ottiene è quindi

$$x(H) + \sum_i x(T_i) \leq 9 = |H| + \sum_i |T_i| + k - 6$$

che è esattamente (12.5).

Vogliamo ora valutare la qualità della limitazione inferiore data dal poliedro  $Q_1$  rispetto all'ottimo duale dell'approccio già considerato nel capitolo 5. Riscriviamo il problema  $\min \{cx : x \in Q_1\}$  come

$$\begin{aligned} v_1 &= \min cx \\ Ax &= \mathbf{2} \\ x(S) &\leq |S| - 1 \quad \forall S : 2 \leq |S| \leq n - 2, k \notin S \\ x(E(N \setminus k)) &= n - 2 \\ x_e &\geq 0 \end{aligned} \tag{12.14}$$

dove i vincoli di sottocircuito sono scritti, a differenza che in (12.2) imponendo che un prescritto nodo  $k$  non appartenga ad  $S$ , ma ovviamente la condizione è equivalente. Inoltre il vincolo  $x_e \leq 1$  è stato inserito nei vincoli di sottocircuito. L'equazione  $x(E(N \setminus k)) = n - 2$  è ridondante (per il momento) perché equivalente al vincolo sul grado nel nodo  $k$ . Trattandosi di un problema di programmazione lineare l'ottimo duale di (12.14) coincide con l'ottimo primale  $v_1$ . Possiamo costruire il duale di (12.14) con un approccio lagrangiano considerando come vincolo esplicito  $Ax = \mathbf{2}$ . A questo punto il vincolo implicito descrive l'involuppo convesso dei quasi alberi riferiti al nodo  $k$ . Quindi il valore della funzione duale  $L(u)$  per un generico valore duale  $u$  si calcola tramite un minimo quasi albero, come nel caso dell'approccio di Held e Karp. Allora  $v_1 = \max_u L(u)$ .

## 12.2. Insiemi stabili

Un insieme stabile di un grafo  $G = (N, E)$  è un insieme di nodi non adiacenti fra loro. Sia  $\mathcal{I} \subset 2^N$  l'insieme dei sottoinsiemi stabili. Indicando con  $e(S)$  il vettore d'incidenza di un generico sottoinsieme  $S \subset N$  possiamo definire il seguente poliedro

$$P_{\mathbf{1}} := \text{conv} \{e(I) : I \in \mathcal{I}\} \subset \mathbb{R}^n$$

Gli insiemi stabili sono ovviamente tutte e sole le soluzioni ammissibili di

$$\begin{aligned} x_i + x_j &\leq 1 & \forall (i, j) \in E \\ x_i &\in \{0, 1\} & \forall i \in N \end{aligned}$$

Quindi il poliedro

$$Q_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i + x_j \leq 1, \forall (i, j) \in E, x_i \geq 0, \forall i \in N\}$$

certamente contiene  $P_{\mathbf{1}}$  (se si assume il grafo connesso il vincolo  $x_i \leq 1$  è ridondante). Per grafi bipartiti  $Q_0$  e  $P_{\mathbf{1}}$  coincidono.

12.10 TEOREMA.  $Q_0 = P_1$  se e solo se  $G$  è bipartito.

DIMOSTRAZIONE. Il vincolo è dato dalla matrice d'incidenza nodi-archi, che è totalmente unimodulare per grafi bipartiti e quindi i vertici di  $Q_0$  sono interi. Se  $G$  non è bipartito esiste un circuito dispari. Si ponga  $x_i + x_j = 1$  per ogni  $(i, j)$  del circuito e si ponga  $x_i = 0$  per i nodi non appartenenti al circuito. Sono  $n$  equazioni che quindi determinano un vertice (la soluzione è ammissibile) di coordinate  $1/2$  sui nodi del circuito. ■

Sono quindi necessarie ulteriori disequaglianze per definire  $P_1$  per grafi non bipartiti. È chiaro che per ogni cricca vi può essere al più un nodo di un insieme stabile, quindi se  $K$  è l'insieme di nodi di una cricca la disequaglianza

$$\sum_{i \in K} x_i \leq 1 \quad (12.15)$$

è valida. È anche chiaro che (12.15) implica le analoghe disequaglianze per le sottocricche di  $K$  (che includono i singoli archi come cricca di due elementi). Quindi è sufficiente limitarsi a considerare (12.15) dato da cricche massimali. Sia  $\mathcal{K}$  l'insieme delle cricche massimali e si definisca

$$Q_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in K} x_i \leq 1, \forall K \in \mathcal{K}, x_i \geq 0, \forall i \in N \right\} \quad (12.16)$$

Ovviamente  $P_1 \subset Q_1 \subset Q_0$ . I poliedri  $Q_1$  e  $P_1$  coincidono per grafi perfetti (definizione 2.16).

12.11 TEOREMA.  $Q_1 = P_1$  se e solo se  $G$  è perfetto.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo  $Q_1 = P_1$ . Quindi ogni vertice di  $Q_1$  è intero e per ogni sottoinsieme  $S \subset N$  (e corrispondente vettore d'incidenza  $e(S)$ ) il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in N} e_i(S) x_i \\ & \sum_{i \in K} x_i \leq 1 \quad \forall K \in \mathcal{K} \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in N \end{aligned} \quad (12.17)$$

dà come risultato il vettore d'incidenza del massimo insieme stabile nel sottografo indotto da  $S$ . Il duale di (12.17) è

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{K \in \mathcal{K}} u_K \\ & \sum_{K \ni i} u_K \geq e_i(S) \quad \forall i \in N \\ & u_K \geq 0 \quad \forall K \in \mathcal{K} \end{aligned} \quad (12.18)$$

Vogliamo dimostrare che la soluzione ottima di (12.18) è 0-1 e rappresenta una partizione di  $S$  in cricche. La dimostrazione è per induzione sui sottoinsiemi  $S$ . Per  $S = \emptyset$ , (12.18) ha come ottimo  $\hat{u}_K = 0$  per ogni  $K$ . Sia ora  $S \neq \emptyset$  e si supponga che per ogni  $T \subset S$ ,  $T \neq S$ , (12.18) fornisca un ottimo intero  $\hat{u}$ . Sia  $H$  una cricca per cui  $\hat{u}_H > 0$ . Quindi per complementarità l'ottimo primale  $\hat{x}$  soddisfa

$$\sum_{i \in H} \hat{x}_i = 1 \quad (12.19)$$

Se  $H = S$ , allora l'ottimo duale è  $\hat{u}_K := 1$  per  $K := S$  e  $\hat{u}_K := 0$  per ogni sottoinsieme proprio  $K \subset S$ . Se invece  $H$  è un sottoinsieme proprio  $H \subset S$ , sia  $H' := S \setminus H$ . Per l'ipotesi induttiva il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{K \in \mathcal{K}} u_K \\ & \sum_{K \ni i} u_K \geq e_i(H') \quad \forall i \in N \\ & u_K \geq 0 \quad \forall K \in \mathcal{K} \end{aligned} \tag{12.20}$$

ha soluzione ottima  $\hat{u}_K \in \{0, 1\}$  che rappresenta una ripartizione in cricche di  $H'$ . Sia  $\delta(H) \in \{0, 1\}^{|\mathcal{K}|}$  tale che  $\delta_K(H) = 1$  se  $K = H$  e  $\delta_K(H) = 0$  se  $K \neq H$ . Vogliamo far vedere che  $\hat{u} + \delta(H)$  è ammissibile duale in (12.18). Se  $i \in H'$  l'ammissibilità è fornita da (12.20). Se  $i \in H$  allora nella somma  $\sum_{K \ni i} \hat{u}_K + \delta_K(H)$  compare anche la cricca  $H$  e quindi il termine  $\delta_K(H)$  garantisce l'ammissibilità. Si noti che  $\hat{u}_H = 0$  e quindi  $\hat{u}_K + \delta_K(H) \in \{0, 1\}$  per ogni  $K$ . Dobbiamo dimostrare che tale soluzione costituisce una ripartizione in cricche di  $S$ . In base a (12.19) ogni massimo insieme stabile in  $S$  ha un nodo in  $H$  e quindi la cardinalità  $\alpha(H')$  di un massimo insieme stabile in  $H'$  è uguale a  $\alpha(S) - 1$  con  $\alpha(S)$  cardinalità di un massimo insieme stabile in  $S$ . Per l'ipotesi induttiva  $H'$  è suddiviso in  $\alpha(H')$  cricche. Quindi aggiungendo  $H$  ad  $H'$  si ottiene la suddivisione di  $S$  in  $\alpha(S)$  cricche. Il valore  $\alpha(S)$  è anche il valore ottimo duale. Infatti

$$\sum_{K \in \mathcal{K}} \hat{u}_K + \delta_K(H) = \theta(H') + 1 = \alpha(H') + 1 = \alpha(S) \leq \theta(S) = \theta(H') + 1$$

Viceversa, si supponga il grafo perfetto. In generale si ha, per ogni sottoinsieme  $S \subset N$ , la relazione

$$\alpha(S) \leq v \leq \theta(S)$$

dove  $v$  è il valore ottimo della coppia primale-duale:

$$\begin{aligned} v = \max \quad & \sum_{i \in N} e_i(S) x_i \\ & \sum_{i \in K} x_i \leq 1 \quad \forall K \in \mathcal{K} \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in N \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v = \min \quad & \sum_{K \in \mathcal{K}} u_K \\ & \sum_{K \ni i} u_K \geq e_i(S) \quad \forall i \in N \\ & u_K \geq 0 \quad \forall K \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

Tuttavia essendo il grafo perfetto vale  $\alpha(S) = \theta(S)$  e quindi  $v = \alpha(S) = \theta(S)$ . Quindi c'è la garanzia che i vertici di  $Q_1$  che massimizzano funzioni lineari del tipo  $\sum_i e_i(S) x_i$  sono interi.

Dobbiamo ora estendere questo risultato ad arbitrarie funzioni  $\sum_i c_i x_i$ , con  $c_i \geq 0$ . Per farlo supponiamo senza perdita di generalità che i coefficienti  $c_i$  siano numeri interi (se sono razionali basta moltiplicarli per il m.c.m. dei denominatori, e la densità dei razionali nei reali garantisce il risultato anche per coefficienti reali). Costruiamo un grafo  $G' = (N', E')$  creando, per ogni nodo  $i$  di  $G$ ,  $c_i$  copie del nodo  $i$ . Un arco  $(i', j') \in E'$  (dove  $i' \in N'$  è una generica copia di  $i \in N$ ) se e solo se  $(i, j) \in E$  (si noti che non ci sono archi fra copie dello stesso nodo). Un insieme stabile  $I \subset N$  può essere naturalmente associato ad un insieme stabile  $I' \subset N'$  prendendo in  $I'$  tutte le copie di  $i \in I$ . Viceversa un generico insieme stabile in  $I'$  può essere esteso aggiungendo le copie, eventualmente non in  $I'$ , di un

nodo in  $I'$ , e quindi può venire naturalmente associato ad uno stabile in  $I$ . Come si vede, la cardinalità dell'insieme stabile in  $I'$  è pari al costo dell'insieme stabile associato in  $I$ . Quindi massimizzare  $\sum_i c_i x_i$  in  $G$  è equivalente a massimizzare la cardinalità in  $G'$ , e siccome si è dimostrato che questo secondo ottimo è intero, anche il primo è intero. ■

In base al teorema l'inclusione  $P_1 \subset Q_1$  è stretta per grafi non perfetti. Basta considerare un circuito dispari con  $n \geq 5$  e la soluzione  $x_i := 1/2$  per ogni  $i$ . Siccome la massima cardinalità di un insieme stabile è  $(n - 1)/2$  mentre  $\sum_i x_i = n/2$  si vede che  $x$  non può essere espresso come combinazione convessa di vertici di  $P_1$ . Quindi la disuguaglianza

$$\sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C| - 1}{2} \tag{12.21}$$

è valida per  $P_1$  e taglia soluzioni di valore  $1/2$  sui nodi del circuito dispari  $C$ . Si noti ora che, se nel circuito dispari è presente una corda, ovvero esiste un arco fra due nodi  $i, j \in C$  non adiacenti nel circuito, esiste un altro circuito dispari  $C'$  (usando la corda) di cardinalità inferiore. La disuguaglianza  $\sum_{i \in C} x_i \leq (|C| - 1)/2$  è implicata da  $\sum_{i \in C'} x_i \leq (|C'| - 1)/2$  e dalle disuguaglianze  $x_i + x_j \leq 1$  sugli altri archi del circuito  $C$ . Quindi basta considerare (12.21) per circuiti dispari senza corde.

Circuiti senza corde prendono il nome di *buche* (*holes*). Sia  $\mathcal{H}$  l'insieme delle buche dispari. Definiamo pertanto le seguenti *disuguaglianze di buche dispari* (*odd hole inequalities*):

$$\sum_{i \in H} x_i \leq \frac{|H| - 1}{2} \quad H \in \mathcal{H}$$

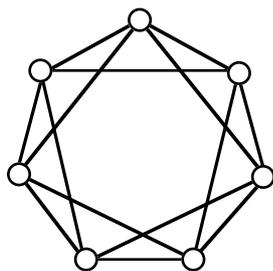


FIGURA 12.20

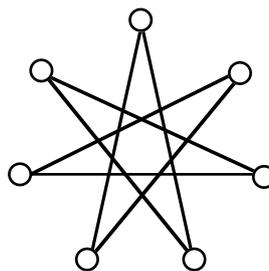


FIGURA 12.21

Oltre ai circuiti dispari vi sono altri casi di vertici di  $Q_1$  non in  $P_1$ . Si consideri il grafo in figura 12.20. La soluzione  $\bar{x}_i = 1/3$  è un vertice di  $Q_1$  come si vede facilmente e siccome  $\sum_i \bar{x}_i = 7/3 > 2$  dove 2 è la massima cardinalità di un insieme stabile, si ha che  $\bar{x} \notin P_1$ . Per capire come tagliare tale soluzione frazionaria si consideri il grafo complementare (figura 12.21), che risulta essere una buca dispari. La massima cricca su una buca è di due elementi, quindi non vi possono essere più di due nodi stabili nel complemento di una buca. Il complemento di una buca prende il nome di *antibuca* (*antihole*), per cui possiamo aggiungere le disuguaglianze di antibuche dispari

$$\sum_{i \in AH} x_i \leq 2 \quad \forall AH \in \mathcal{AH}$$

dove  $AH$  è un'antibuca e  $\mathcal{AH}$  è l'insieme delle antibuche dispari, e definire il poliedro

$$Q_2 := \left\{ x \in Q_1 : \sum_{i \in H} x_i \leq (|H| - 1)/2, \forall H \in \mathcal{H}, \sum_{i \in AH} x_i \leq 2, \forall AH \in \mathcal{AH} \right\}$$

Tuttavia anche  $P_1 \subset Q_2$  è un'inclusione stretta, come vedremo in un esempio successivo.

Il problema  $\max \{cx : x \in P_1\}$  viene risolto quindi usando le limitazioni superiori (il problema è formulato più naturalmente come un massimo) ottenute risolvendo il problema  $\max \{cx : x \in Q_2\}$ . Tuttavia anche la risoluzione di questo secondo problema non è elementare in quanto si tratta di dover determinare le disequaglianze violate in  $Q_2$  da una soluzione frazionaria. Per le disequaglianze di cricca ci sono delle evidenti difficoltà dato che bisognerebbe trovare una cricca di peso massimo (con peso dei nodi pari al valore frazionario  $\bar{x}_i$ ) e questo problema è della stessa natura e difficoltà del problema del massimo insieme stabile che si vuole calcolare! Non resta che affidarsi a delle euristiche per determinare, quando si può, le disequaglianze di cricca violate.

Più semplice è invece la determinazione di disequaglianze di buca dispari violate. Sia  $\bar{x} \in Q_0$  una soluzione frazionaria. Dobbiamo valutare

$$h(\bar{x}) := \min_{H \in \mathcal{H}} \frac{|H| - 1}{2} - \sum_{i \in H} \bar{x}_i \tag{12.22}$$

Se  $h(\bar{x}) \geq 0$  nessuna disequaglianza è violata altrimenti la risoluzione di (12.22) genera la disequaglianza violata. Per risolvere (12.22) si operi nel seguente modo: si crea un grafo bipartito  $\tilde{G} = (N, N', \tilde{E})$  in cui  $N'$  è una copia di  $N$  e un arco  $(i, j') \in \tilde{E}$  (e anche  $(j, i') \in \tilde{E}$ ) se e solo se  $(i, j) \in E$ . Allora un cammino  $i \rightsquigarrow i'$  in  $\tilde{G}$  corrisponde ad un circuito dispari in  $G$ . Il circuito che si ottiene non è necessariamente semplice, ma in tal caso contiene un sottocircuito semplice dispari. In  $\tilde{G}$  vengono assegnati dei costi agli archi in modo che il cammino minimo in  $\tilde{G}$  corrisponda alle buche minime in (12.22). Ad ogni arco  $(i, j') \in \tilde{E}$  si assegna una lunghezza  $d_{ij'} := 1 - \bar{x}_i - \bar{x}_j \geq 0$  (siccome  $\bar{x} \in Q_0$ ). Allora la lunghezza del circuito è

$$\sum_{(i,j) \in C} (1 - \bar{x}_i - \bar{x}_j) = |C| - 2 \sum_{i \in C} \bar{x}_i$$

e

$$|C| - 2 \sum_{i \in C} \bar{x}_i \geq 1 \iff \sum_{i \in C} \bar{x}_i \leq \frac{|C| - 1}{2}$$

Quindi basta calcolare  $n$  cammini minimi (uno da ogni nodo) e vedere se il valore di qualche cammino minimo è strettamente minore di uno. Se il circuito non è una buca basta considerare la buca generata da una corda del circuito (necessariamente violata se il circuito è violato). Se il circuito non è semplice, cioè è formato da un cammino  $i \rightsquigarrow k$  seguito da un circuito da  $k$  e seguito ancora dal cammino  $i \rightsquigarrow k$  percorso all'indietro, il circuito da  $k$  ha costo non superiore al circuito da  $i$  (le lunghezze degli archi sono non negative). Si noti che in questo modo vengono anche determinate le disequaglianze di cricca di tre nodi violate.

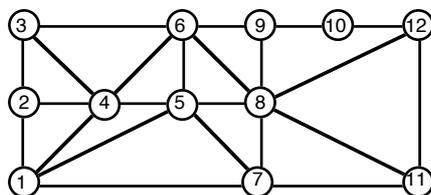


FIGURA 12.22

12.12 ESEMPIO. Sia dato il grafo in figura 12.22 e si voglia calcolare il massimo insieme stabile. La massimizzazione di  $\mathbf{1} \cdot x$  in  $Q_0$  dà come soluzione  $\bar{x}_i := 1/2, \forall i$  (questo avviene per la

maggior parte dei grafi non bipartiti) con valore ottimo 6 (figura 12.23; nelle varie figure ogni nodo è disegnato di grandezza proporzionale a  $\bar{x}_i$ ). Con l’algoritmo precedentemente delineato vengono individuate le seguenti cricche violate:  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{2, 3, 4\}$ ,  $\{1, 4, 5\}$ ,  $\{3, 4, 6\}$ ,  $\{1, 5, 7\}$ ,  $\{5, 6, 8\}$ ,  $\{6, 8, 9\}$ ,  $\{7, 8, 11\}$ ,  $\{8, 11, 12\}$ . Aggiungendo le nove disequazioni si ottiene come ottimo la soluzione indicata in figura 12.24 di valore  $4 + 2/3$ . Si noti che questo valore di limitazione superiore implica che il massimo insieme stabile non può avere più di quattro nodi. Quindi, disponendo di un’euristica che fornisca delle ‘buone’ soluzioni e supponendo di ottenerne una di quattro nodi, abbiamo la garanzia dell’ottimalità (in questo caso è facile ‘vedere’ insiemi stabili di quattro nodi).

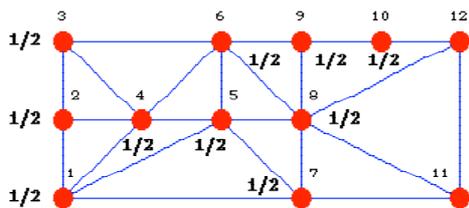


FIGURA 12.23

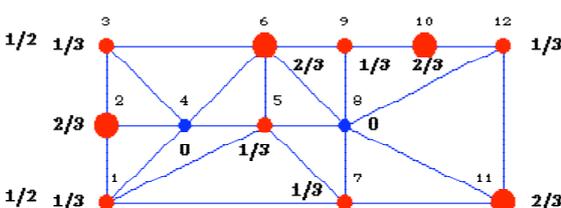


FIGURA 12.24

Comunque, a scopo illustrativo, continuiamo nell’analisi dei piani di taglio. Questa volta vengono individuate due buche dispari:  $\{1, 2, 3, 6, 5\}$  e  $\{7, 11, 12, 10, 9, 6, 5\}$ . Con le due disequazioni l’ottimo diventa quello in figura 12.25 di valore  $4 + 1/2$ . Si individua quindi la buca  $\{1, 2, 3, 6, 9, 10, 12, 11, 7\}$  che taglia la soluzione precedente, ma non abbassa il valore della soluzione. La nuova soluzione è in figura 12.26.

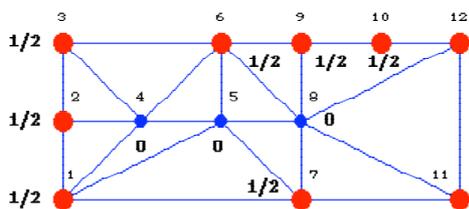


FIGURA 12.25

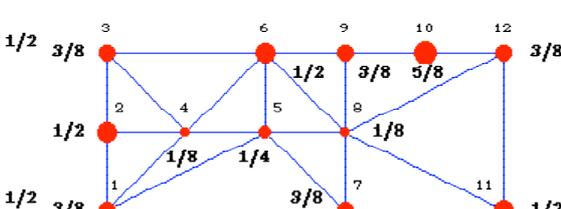


FIGURA 12.26

A questo punto non vi sono più buche violate, né cricche violate, ma la soluzione è ancora frazionaria (il grafo non presenta antibuche). Le strade possibili sono essenzialmente due: operare con metodi di enumerazione implicita, che verranno illustrati nel capitolo 14, oppure cercare disequazioni violate di tipo nuovo e ‘generate’ dalla soluzione frazionaria stessa e dalla struttura del grafo. Ad esempio si è visto come le due ultime disequazioni di buca introdotte abbiano ‘aggiustato’ i valori della soluzione sul circuito riversando sul nodo centrale l’eccesso di valore. Possiamo allora considerare il sottografo dato dalla ruota dispari  $W := \{1, 2, 3, 6, 5\}$  con centro  $c := 4$  e chiederci che struttura abbia una disequazione valida per tale ruota.

I casi sono due: o l’insieme stabile è sul circuito e quindi al massimo di cardinalità  $(|W| - 1)/2$  ( $= 2$  nell’esempio) e in tal caso  $x_c = 0$ , oppure  $x_c = 1$  e nessun nodo di  $W$  può essere

stabile. La disuguaglianza

$$\sum_{i \in W} x_i + \frac{|W|-1}{2} x_c \leq \frac{|W|-1}{2} \quad (12.23)$$

opera nel modo richiesto. Si noti che (12.23) non è implicata né dalle disuguaglianze di cricca né da quelle di buca dispari. Infatti sommando su tutte le cricche che compongono la ruota si ha:

$$2 \sum_{i \in W} x_i + |W| x_c \leq |W|$$

e (12.23) si ottiene dividendo per 2 e arrotondando  $|W|/2$  (se  $|W|$  dispari). Nel nostro caso (12.23) è violata dalla soluzione corrente.

Il circuito  $W := \{7, 11, 12, 10, 9, 6, 5\}$  più il nodo  $c := 8$  costituisce quasi una ruota. Manca infatti il ‘raggio’  $(8, 10)$ . In questo caso possiamo provare ad ottenere la disuguaglianza in modo automatico con un metodo di separazione fra la soluzione frazionaria e gli stabili massimali del sottografo. Si individui un gruppo di variabili per le quali ci si aspetta il medesimo coefficiente  $\alpha_1$ . Queste potrebbero essere tutti i nodi della ruota tranne quello difettoso  $h$  (cioè il nodo 10 nell’esempio). Poi si consideri un coefficiente  $\alpha_2$  per il nodo difettoso  $h$  ed un coefficiente  $\alpha_3$  per il centro. Operando in questo modo si ha il seguente problema di separazione

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta - \gamma \\ \delta \leq \quad & \frac{19}{3} \alpha_1 + \frac{5}{3} \alpha_2 + \frac{1}{8} \alpha_3 \\ \gamma \geq \quad & 3 \alpha_1 + 0 \alpha_2 + 0 \alpha_3 \\ \gamma \geq \quad & 2 \alpha_1 + 1 \alpha_2 + 0 \alpha_3 \\ \gamma \geq \quad & 0 \alpha_1 + 1 \alpha_2 + 1 \alpha_3 \\ & -1 \leq \alpha_i \leq 1 \end{aligned} \quad (12.24)$$

La soluzione di (12.24) è  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\gamma = 1.5$ ,  $\delta = 1.625$ . Quindi c’è separazione e la disuguaglianza è

$$x(W \setminus h) + x_h + 2 x_c \leq 3$$

Da questa si deduce facilmente la seguente disuguaglianza di tipo generale per una generica ruota dispari difettosa in un nodo:

$$\sum_{i \in W} x_i + \frac{|W|-3}{2} x_c \leq \frac{|W|-1}{2} \quad (12.25)$$

(in che modo si ottiene (12.25) partendo dalle disuguaglianze di cricca e arrotondando?).

Aggiungendo (12.23) e (12.25) alle disuguaglianze del problema e risolvendo si ottiene la soluzione in figura 12.27 di valore  $4 + 1/3$ . Volendo a tutti i costi aggiungere una disuguaglianza violata si può notare che il grafo ha una struttura particolare. Si può cioè ripartire nei due insiemi  $N_1 := \{4, 5, 8\}$  e  $N_2 := \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$ . I sottografi indotti all’interno dei due insiemi sono particolarmente semplici, un cammino e un circuito, per cui è facile applicare il seguente ragionamento generale.

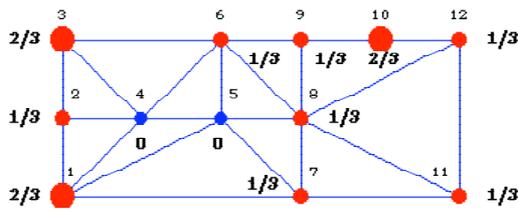


FIGURA 12.27

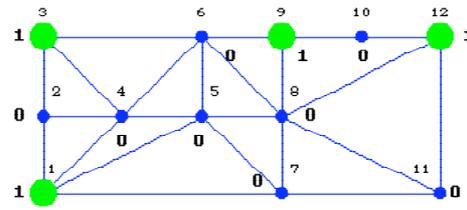


FIGURA 12.28

Siano  $N_1$  e  $N_2$  due insiemi disgiunti di nodi e si consideri il sottografo indotto da  $N_1 \cup N_2$ . Sia  $\alpha(N_1)$  la cardinalità del massimo insieme stabile in  $N_1$ . Sia

$$p_k := \max \{ |I_2| : I_2 \in \mathcal{I}, I_2 \subset N_2, \exists I_1 \in \mathcal{I}, I_1 \subset N_1, |I_1| = k \}$$

(ovvero  $p_k$  è la massima cardinalità che può avere un insieme stabile in  $N_2$  quando in  $N_1$  sia presente un insieme stabile di cardinalità  $k$ ). Allora la separazione si ottiene risolvendo

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta - \gamma \\ \delta \leq & \bar{x}(N_1) \alpha_1 + \bar{x}(N_2) \alpha_2 \\ \gamma \geq & k \alpha_1 + p_k \alpha_2 \quad k := 0, \dots, \alpha(N_1) \\ & -1 \leq \alpha_i \leq 1 \quad i := 1, 2 \end{aligned}$$

che diventa nell'esempio

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta - \gamma \\ \delta \leq & 4 \alpha_1 + \frac{1}{3} \alpha_2 \\ \gamma \geq & 0 \alpha_1 + 4 \alpha_2 \\ \gamma \geq & 1 \alpha_1 + 3 \alpha_2 \\ \gamma \geq & 2 \alpha_1 + 1 \alpha_2 \\ & -1 \leq \alpha_i \leq 1 \quad i := 1, 2 \end{aligned}$$

la cui soluzione è  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \gamma = 4, \delta = 4 + 1/3$ . Quindi si ha la disuguaglianza  $x(N) \leq 4$  che aggiunta alle altre fornisce finalmente un insieme stabile (figura 12.28). ■

### 12.3. Sistemi di indipendenti e knapsack

Si è visto nel precedente capitolo che per i matroidi è possibile fornire una descrizione poliedrale completa. Un simile risultato è possibile anche per sistemi di indipendenti definiti come intersezione di due matroidi. Per un generico sistema di indipendenti invece si può fornire, in certi casi, solo una descrizione parziale, che comunque può risultare utile a fini algoritmici.

Consideriamo per il momento un generico sistema di indipendenti  $\mathbf{S} = (E, \mathcal{S})$  e definiamo con  $P_{\mathbf{S}}$  l'involuppo convesso degli indipendenti. Se  $A \notin \mathcal{S}$ , la disuguaglianza  $\sum_{e \in A} x_e \leq |A| - 1$  è certamente valida per  $P_{\mathbf{S}}$ , però non è detto che sia faccettale e neppure di supporto. Conviene a tali fini considerare insiemi dipendenti  $C$  minimali (circuiti in ambito matroidale

e che chiameremo anche qui circuiti), tali cioè che  $C \notin \mathcal{S}$  e  $C \setminus e \in \mathcal{S}$  per ogni  $e \in C$ . Allora le disequaglianze  $\sum_{e \in C} x_e =: x(C) \leq |C| - 1$  sono di supporto per ogni circuito  $C$ . Infatti per ogni  $\bar{e} \in C$  il vettore d'incidenza dell'indipendente  $C \setminus \bar{e}$  rende attivo il vincolo e quindi il piano  $x(C) = |C| - 1$  contiene  $|C|$  indipendenti. Non è difficile vedere che i vettori d'incidenza di questi indipendenti sono linearmente indipendenti e quindi la faccia determinata dal piano ha dimensione  $|C| - 1$ . Se consideriamo la proiezione di  $P_{\mathcal{S}}$  sul sottospazio degli elementi di  $C$  (indichiamola come  $P_{\mathcal{S}}(C)$ ), allora  $x(C) \leq |C| - 1$  definisce una faccetta di  $P_{\mathcal{S}}(C)$ .

È possibile a questo punto 'innalzare' la disequaglianza nello spazio originario cercando di mantenerla faccettale modificando i coefficienti degli elementi non in  $C$ . Il metodo è simile a quanto si è già fatto precedentemente per trovare delle disequaglianze che tagliassero una soluzione frazionaria. In questo caso possiamo prescindere da soluzioni frazionarie, ma il metodo è essenzialmente il medesimo. In generale, data una disequaglianza

$$\sum_{e \in S} \alpha_e x_e \leq \gamma \tag{12.26}$$

definita su un generico  $S$ , il metodo di *innalzamento* (*lifting*) richiede di considerare un elemento  $\bar{e} \notin S$  e tutti gli insiemi indipendenti in  $A \cup \bar{e}$ . Questi insiemi possono essere ripartiti fra quelli che contengono  $\bar{e}$  e quelli che non contengono  $\bar{e}$ . In relazione a questa ripartizione si definisca

$$K_0(S) := \max \left\{ \sum_{e \in A} \alpha_e : A \subset S, A \in \mathcal{S} \right\}$$

$$K_1(S) := \max \left\{ \sum_{e \in A} \alpha_e : A \subset S, (A \cup \bar{e}) \in \mathcal{S} \right\}$$

ovvero  $K_0(S)$  è il massimo valore (rispetto ai coefficienti  $\alpha_i$ ) di un indipendente in  $S$ , mentre  $K_1(S)$  è il massimo valore di indipendenti in  $S \cup \bar{e}$  con l'obbligo di contenere  $\bar{e}$ .

Per generare una disequaglianza della forma

$$\sum_{s \in S} \alpha_s x_s + \alpha_{\bar{e}} x_{\bar{e}} \leq \bar{\gamma}$$

basta tener conto, fra tutti gli indipendenti in  $S \cup \bar{e}$ , di due soli indipendenti, cioè quelli che rispettivamente determinano  $K_0(S)$  e  $K_1(S)$ . Tutti gli altri sono dominati da uno di questi due, nel calcolo di  $\alpha_{\bar{e}}$  e  $\bar{\gamma}$  che si ottiene risolvendo il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ & \gamma \geq K_0(S) \\ & \gamma \geq K_1(S) + \alpha_{\bar{e}} \end{aligned}$$

La soluzione è  $\alpha_{\bar{e}} = (K_0(S) - K_1(S))$  (non serve normalizzare in questo caso), e quindi otteniamo la disequaglianza

$$\sum_{e \in S} \alpha_e x_e + (K_0(S) - K_1(S)) x_{\bar{e}} \leq K_0(S) \tag{12.27}$$

Si noti che ogni indipendente che soddisfa come uguaglianza (12.26) soddisfa anche (12.27) come uguaglianza. Inoltre (12.27) è soddisfatta come uguaglianza anche da quell'indipendente che fornisce il valore  $K_1(S)$ . Per costruzione il vettore d'incidenza di questo insieme

indipendente è linearmente indipendente dai precedenti e quindi la faccia definita da (12.27) è di una dimensione superiore a quella definita da (12.26). Può succedere che  $K_0(S) = K_1(S)$ , nel qual caso il coefficiente di  $x_{\bar{e}}$  è nullo. Questo significa che la disuguaglianza era già originariamente una faccetta anche nello spazio superiore.

Allora si può procedere ricorsivamente e, se si inizia con una disuguaglianza faccettale, tutte le successive disuguaglianze sono faccettali. Quindi conviene porre inizialmente  $S := C$  per un circuito  $C$  e  $\alpha_e := 1$  per  $e \in C$ , in modo appunto da iniziare con una faccetta e generare una sequenza di faccette di dimensione via via più grande. Si ha ovviamente  $K_0(C) = |C| - 1$ .

12.13 ESEMPIO. Sia dato un problema di knapsack 0-1 e se ne consideri l'insieme ammissibile

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} w_e x_e &\leq b \\ x &\in \{0, 1\}^{|E|} \end{aligned}$$

L'insieme ammissibile può essere visto come un sistema di indipendenti  $(E, \mathcal{S})$ , dove  $S \in \mathcal{S}$  se e solo se  $\sum_{e \in S} w_e \leq b$ . Un circuito è un qualsiasi sottoinsieme  $C$  non ammissibile che diventa ammissibile togliendo un suo qualsiasi elemento, ovvero quando  $\sum_{e \in C} w_e > b$  e  $\sum_{e \in C} w_e - \min_{e \in C} w_e \leq b$ . Si consideri la seguente istanza:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 12x_6 + 15x_7 &\leq 25 \\ x_i &\in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned} \quad (12.28)$$

Sia ad esempio  $S := \{2, 3, 4, 5\}$ . Si ha  $5 + 7 + 8 + 9 > 25$  e  $(5 + 7 + 8 + 9) - 5 < 25$ . Quindi  $S$  è un circuito e  $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$  è valida. Per innalzarla e renderla faccettale si consideri  $\bar{e} = 1$ . Allora

$$\begin{aligned} K_0(S) &= \max\{|A| : A \subset S, A \in \mathcal{S}\} = |S| - 1 = 3 \\ K_1(S) &= \max\{|A| : A \subset S, (A \cup \bar{e}) \in \mathcal{S}\} = 3 \end{aligned}$$

Quindi otteniamo che

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

è faccettale anche rispetto a  $S := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Allora sia  $\bar{e} := 6$ .

$$\begin{aligned} K_0(S) &= \max\{x_2 + x_3 + x_4 + x_5 : \\ &\quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in A \subset S, A \in \mathcal{S}\} = 3 \\ K_1(S) &= \max\{x_2 + x_3 + x_4 + x_5 : \\ &\quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in A \subset S, (A \cup \bar{e}) \in \mathcal{S}\} = 2 \end{aligned}$$

Quindi otteniamo che

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

è faccettale anche rispetto a  $S := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Consideriamo infine  $\bar{e} = 7$

$$\begin{aligned} K_0(S) &= \max\{x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 : \\ &\quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in A \subset S, A \in \mathcal{S}\} = 3 \\ K_1(S) &= \max\{x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 : \\ &\quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in A \subset S, (A \cup \bar{e}) \in \mathcal{S}\} = 1 \end{aligned}$$

Quindi la seguente diseuguaglianza è faccettale per  $P_{\mathfrak{S}}$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 \leq 3.$$

Possiamo ripetere la procedura scegliendo un diverso circuito iniziale. Se ad esempio si scandiscono gli elementi in ordine decrescente di peso si ottiene un circuito non appena si ottiene un insieme dipendente. Nel caso dell'istanza si ha  $S = \{6, 7\}$  e quindi  $x_6 + x_7 \leq 1$  rappresenta una faccetta rispetto a  $\{6, 7\}$ . Per esercizio il lettore può verificare che la procedura d'innalzamento, rispetto a qualsiasi ordine di scelta degli elementi  $\bar{e}$ , lascia invariata la diseuguaglianza. Quindi è faccettale per  $P_{\mathfrak{S}}$  anche

$$x_6 + x_7 \leq 1$$

Come ulteriore esempio della procedura si consideri il circuito  $S := \{3, 5, 6\}$ . Si ottiene la seguente sequenza di diseuguaglianze:

$$\begin{aligned} S := \{3, 5, 6\}, & \quad \bar{e} := 4, & K_0(S) = 2, & K_1(S) = 2, & x_3 + x_5 + x_6 \leq 2 \\ S := \{3, 4, 5, 6\}, & \quad \bar{e} := 7, & K_0(S) = 2, & K_1(S) = 1, & x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 2 \\ S := \{3, 4, 5, 6, 7\}, & \quad \bar{e} := 1, & K_0(S) = 2, & K_1(S) = 2, & x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 2 \\ S := \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}, & \quad \bar{e} := 2, & K_0(S) = 3, & K_1(S) = 3, & x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 2 \end{aligned}$$

e quindi

$$x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 2$$

è faccettale per  $P_{\mathfrak{S}}$ . ■

Per generare faccette è pertanto indispensabile poter calcolare i valori  $K_0(S)$  e  $K_1(S)$ . Si tratta, a ben vedere, di trovare dei massimi insiemi indipendenti rispetto a opportuni valori di pesi. Siccome interessa il calcolo delle faccette di  $P_{\mathfrak{S}}$  proprio per calcolare un massimo insieme indipendente pesato, non sembra molto sensato risolvere molte istanze del problema stesso al fine di risolverne una sola! Quindi ciò che praticamente conviene fare è sostituire a  $K_0(S)$  e  $K_1(S)$  delle loro limitazioni superiori. In questo modo si perde la proprietà di avere delle diseuguaglianze faccettali, però, se le limitazioni sono buone, le diseuguaglianze valide che si ottengono possono essere utilmente impiegate per la risoluzione del problema originario.

Va notato che il calcolo di  $K_0(S)$  e  $K_1(S)$  per il problema di knapsack risulta ovviamente anch'esso un problema di knapsack, ma di natura particolare. I coefficienti della funzione obiettivo sono i coefficienti delle diseuguaglianze e sono sempre numeri non superiori a  $|E|$ . Quindi, applicando l'algoritmo di knapsack 0-1  $C$ , sono problemi polinomiali.

Si può estendere la procedura pensando di fissare i valori delle variabili fuori dall'insieme  $S$ , anziché solo al valore 0 come si è fatto finora, anche al valore 1. In questo modo si può inizializzare la procedura da insiemi contenuti in circuiti. Sia allora  $C$  un circuito e sia  $S \subset C$  e  $T := C \setminus S$ . A questo punto si proietta  $P_{\mathfrak{S}}$  sull'insieme affine

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^{|E|} : x_e = 0, e \notin C, x_e = 1, e \in T \right\}$$

La diseuguaglianza  $x(S) \leq |S| - 1$  è faccettale per il poliedro proiettato (cioè per  $S$ ) in base alle medesime considerazioni del caso precedente. Si tenga però presente che non è valida per  $P_{\mathfrak{S}}$ . Infatti, se  $C$  è un circuito,  $S \subset C$  è un indipendente e la diseuguaglianza  $x(S) \leq |S| - 1$  è chiaramente non valida per  $S$  stesso. La procedura d'innalzamento considera gli elementi

non in  $S$ , uno alla volta, mantenendo fissi gli altri. Alla fine la disuguaglianza sarà valida per  $P_{\mathbf{S}}$ . Per la procedura è necessario calcolare i seguenti valori

$$K_0(S, T) := \max \left\{ \sum_{e \in A} \alpha_e : A \subset S, (A \cup T) \in \mathcal{S} \right\}$$

$$K_1(S, T) := \max \left\{ \sum_{e \in A} \alpha_e : A \subset S, (A \cup T \cup \bar{e}) \in \mathcal{S} \right\}$$

e risolvere

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ & \gamma \geq K_0(S, T) \\ & \gamma \geq K_1(S, T) + \alpha_{\bar{e}} \\ & -1 \leq \alpha_{\bar{e}} \leq 1 \end{aligned}$$

La soluzione è  $\alpha_{\bar{e}} = (K_0(S, T) - K_1(S, T))$ , e quindi otteniamo la disuguaglianza

$$\sum_{e \in S} \alpha_e x_e + (K_0(S, T) - K_1(S, T)) x_{\bar{e}} \leq K_0(S, T) \quad (12.29)$$

12.14 ESEMPIO. Si consideri il problema di knapsack dell'esempio precedente. Si prenda il circuito  $C := \{2, 3, 4, 5\}$  (come nel caso precedente) e si ponga  $S := \{2, 3\}$  e  $T := \{4, 5\}$ . Allora  $x_2 + x_3 \leq 1$  è faccettale per  $S$  (e si noti che non è valida per  $P_{\mathbf{S}}$ ). Si proceda allora ponendo  $\bar{e} = 1$ . Il calcolo fornisce i seguenti valori  $K_0(S, T) = 1$  e  $K_1(S, T) = 0$  e quindi possiamo innalzare la disuguaglianza a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

Si noti ora che non è possibile porre  $\bar{e} := 6$  oppure  $\bar{e} := 7$  perché gli insiemi  $\{4, 5, 6\}$  e  $\{4, 5, 7\}$  sono dipendenti. Poniamo quindi  $\bar{e} := 5$  e di conseguenza aggiorniamo  $T := \{4\}$ . Si ottiene  $K_0(S, T) = 3$  e  $K_1(S, T) = 1$  e quindi innalziamo la disuguaglianza a

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 \leq 3$$

Poniamo  $\bar{e} := 6$  (questa volta è possibile a causa della riduzione di  $T$ ) e otteniamo  $K_0(S, T) = 3$  e  $K_1(S, T) = 1$  da cui

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 + 2x_6 \leq 3$$

Poniamo  $\bar{e} := 7$  e otteniamo  $K_0(S, T) = 3$  e  $K_1(S, T) = 0$  da cui

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 + 2x_6 + 3x_7 \leq 3$$

Infine poniamo  $\bar{e} := 4$  (e quindi  $T := \emptyset$ ) che porta a  $K_0(S, T) = 5$  e  $K_1(S, T) = 3$  e alla disuguaglianza faccettale per  $P_{\mathbf{S}}$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 3x_7 \leq 5$$

■

12.15 ESERCIZIO. Si consideri un sistema di indipendenti definito dall'insieme ammissibile di un problema di knapsack 0-1. Si definisca l'espansione di un circuito  $C$  l'insieme  $E(C) := \{i : w_i \geq w_j, \forall j \in C\}$ . Si dimostri che la diseuguaglianza  $\sum_{e \in E(C)} x_e \leq |C| - 1$  è faccettale. ■

### 12.4. Assegnamento tridimensionale

In un problema di assegnamento tridimensionale vi sono 3 insiemi disgiunti  $I, J$  e  $K$  di uguale cardinalità, pari a  $n$ . Una terna è un insieme  $(i, j, k)$  con  $i \in I, j \in J$  e  $k \in K$ . Nel problema dell'assegnamento di cardinalità è assegnato un insieme di terne ammissibili. Un assegnamento è un insieme di  $n$  terne ammissibili con il requisito che ogni  $i \in I$  appaia in esattamente una terna, e altrettanto valga per  $J$  e  $K$ . Si chiede di trovare un assegnamento ammissibile o di provarne la non esistenza. Nel problema dell'assegnamento pesato tutte le terne sono ammissibili e per ogni terna è definito un costo  $c(i, j, k) \geq 0$ . In questo caso si può rilassare la definizione di assegnamento ammissibile pretendendo che ogni  $i \in I$  appaia in al più una terna dell'assegnamento (e altrettanto per  $J$  e  $K$ ). Si chiede di trovare un assegnamento ammissibile di costo massimo.

Si può modellare il problema con un ipergrafo  $H = (N, E)$ , in cui  $N$ , insieme dei nodi è dato da  $I \cup J \cup K$  e  $E$  è l'insieme degli iperarchi, ovvero delle terne  $(i, j, k)$ . Si può rappresentare graficamente un ipergrafo disegnando gli iperarchi come tre segmenti che uniscono i tre nodi della terna. Si veda in figura 12.29 un possibile assegnamento con  $n = 3$ .

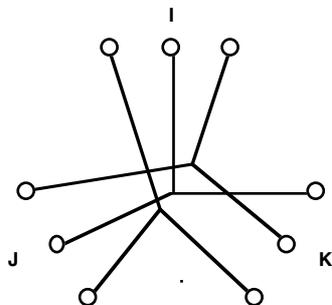


FIGURA 12.29

Il grafo di linea  $\mathbf{G}$  di un particolare ipergrafo è definito da un insieme di nodi in corrispondenza biunivoca con gli iperarchi e da un insieme di archi ogni qualvolta due iperarchi hanno intersezione non vuota, ovvero quando date due terne  $(i, j, k)$  e  $(i', j', k')$  si ha che almeno una delle tre uguaglianze  $i = i', j = j', k = k'$  è vera. Pertanto un assegnamento ammissibile è identificabile con un insieme stabile in  $\mathbf{G}$ .

Un problema di massimo assegnamento pesato può essere risolto con il seguente problema di programmazione lineare 0-1:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_i \sum_j \sum_k c(i, j, k) x(i, j, k) \\
 & \sum_k \sum_j x(i, j, k) \leq 1 \quad \forall i \\
 & \sum_i \sum_k x(i, j, k) \leq 1 \quad \forall j \\
 & \sum_j \sum_i x(i, j, k) \leq 1 \quad \forall k \\
 & x(i, j, k) \in \{0, 1\}
 \end{aligned}
 \tag{12.30}$$

Se si rilassa il vincolo  $x(i, j, k) \in \{0, 1\}$  in  $x(i, j, k) \geq 0$  si può risolvere (12.30) e ricavare dall'eventuale frazionaria tagli derivati da quelli dell'insieme stabile.

12.16 ESEMPIO. Siano dati i seguenti costi:

$$c(1, j, k) := \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c(2, j, k) := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad c(3, j, k) := \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Risolvendo (12.30) (versione rilassata) si ottiene la soluzione

$$\begin{aligned} x(1, 1, 3) = \frac{1}{3} & & x(1, 2, 2) = \frac{1}{3} & & x(1, 3, 1) = \frac{1}{3} & & x(2, 1, 1) = \frac{1}{3} \\ x(2, 3, 2) = \frac{2}{3} & & x(3, 1, 1) = \frac{1}{3} & & x(3, 2, 3) = \frac{2}{3} & & \end{aligned}$$

dalla quale ricaviamo il grafo di linea in figura 12.30.

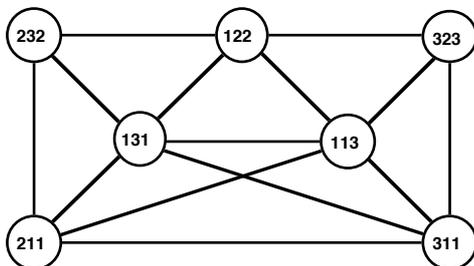


FIGURA 12.30

Si ottengono le seguenti disequaglianze di cricca violate:

$$\begin{aligned} x(2, 3, 2) + x(1, 3, 1) + x(2, 1, 1) &\leq 1 \\ x(2, 3, 2) + x(1, 3, 1) + x(1, 2, 2) &\leq 1 \\ x(3, 2, 3) + x(1, 1, 3) + x(3, 1, 1) &\leq 1 \\ x(3, 2, 3) + x(1, 1, 3) + x(1, 2, 2) &\leq 1 \\ x(1, 3, 1) + x(2, 1, 1) + x(1, 1, 3) + x(3, 1, 1) &\leq 1 \end{aligned}$$

Aggiungendo queste disequaglianze e (12.30) (versione rilassata) si ottiene l'ottimo

$$x(1, 2, 3) = 1 \quad x(2, 3, 2) = 1 \quad x(3, 1, 1) = 1$$

con valore ottimo 14. ■