

Capitolo 7

Programmazione lineare: metodo del simplesso

Il metodo del simplesso è l'algoritmo ideato da Dantzig per la risoluzione dei problemi di programmazione lineare. Nelle sue linee essenziali il metodo del simplesso in uso oggi è il medesimo di allora. Ci sono stati naturalmente molti miglioramenti di natura tecnica che permettono oggi di risolvere istanze molto grandi, ma l'idea di base rimane quella di generare una sequenza di vertici tramite una ricerca locale dei vertici fino a pervenire ad un ottimo. In altre parole, dato un vertice x , si considerano i vertici adiacenti a x (vedi sezione 6.2) e, se per nessuno di essi la funzione obiettivo è migliore, si può concludere, in base al teorema 6.9, che x è ottimo, altrimenti si passa a considerare uno dei vertici migliori e si procede ricorsivamente. La procedura deve terminare perché il numero di vertici è finito e perché nessun vertice può essere ripetuto (la funzione obiettivo migliora in ogni singolo passo).

Tuttavia le cose non sono così semplici come sono state esposte. I vertici devono essere rappresentati quantitativamente nel momento in cui devono essere usati da un algoritmo. La rappresentazione che sembrerebbe naturale, cioè quella di considerare i valori numerici delle coordinate di un vertice, non è adeguata al tipo d'informazione che viene fornita come dati d'ingresso di un problema di programmazione lineare, cioè un insieme di disequaglianze. Risulta invece più conveniente rappresentare un vertice indicando quali disequaglianze sono soddisfatte come uguaglianze nel vertice stesso. In questo modo è semplice calcolare i vertici adiacenti.

Tutto sarebbe semplice se questa rappresentazione di un vertice come sottoinsieme di disequaglianze fosse biunivoca. Si è già visto nel capitolo precedente che non è sempre così. Infatti succede frequentemente (ed è la regola in problemi altamente strutturati quali quelli di ottimizzazione combinatoria) che per un vertice passino più degli n piani strettamente necessari, cioè che si abbia degenerazione. In questo caso vi sono molte rappresentazioni equivalenti per lo stesso vertice e questo fatto può creare problemi.

Rappresentando un vertice come un insieme di disequaglianze il metodo del simplesso diventa un algoritmo di tipo combinatorio ed algebrico piuttosto che combinatorio e geometrico. Presenteremo il metodo pertanto come un metodo puramente algebrico e combinatorio e solo in seguito lo interpreteremo geometricamente.

7.1. Soluzioni di base

Il metodo del simplesso si applica a problemi di programmazione lineare in forma standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

dove la matrice A ha n colonne e m righe con $n \geq m$. Inoltre si assume che le righe di A siano linearmente indipendenti.

L'ipotesi di indipendenza lineare è di solito soddisfatta nella maggior parte dei problemi reali. In alcuni casi (ad esempio se A è una matrice d'incidenza nodi-archi di un grafo orientato) è possibile ricondursi a priori alla verifica dell'ipotesi. Inoltre è sempre possibile scoprire se le righe sono linearmente dipendenti e, nel caso $\text{rank}(A) = \text{rank}(Ab)$, quale equazione può essere eliminata dal problema senza perdita di generalità.

7.1 DEFINIZIONE. Sia $\beta \subset \{1, \dots, n\}$ un sottoinsieme di m elementi tale che le colonne $\{A^j\}_{j \in \beta}$ siano linearmente indipendenti. L'insieme β prende il nome di base. La sottomatrice quadrata $m \times m$ di A definita da

$$B := (A^{\beta(1)} \quad \dots \quad A^{\beta(m)})$$

dove $\beta(1), \dots, \beta(m)$ è un arbitrario ordinamento di β , prende il nome di matrice di base. ■

Le colonne di A possono perciò essere ripartite in colonne *in base* e colonne *fuori base*. Le colonne fuori base possono essere identificate dall'insieme complementare $\eta := \{1, \dots, n\} \setminus \beta$, che può essere a sua volta arbitrariamente ordinato $\eta(1), \dots, \eta(n-m)$. Possiamo definire pertanto la seguente sottomatrice di A

$$N := (A^{\eta(1)} \quad \dots \quad A^{\eta(n-m)})$$

Analogamente le componenti di x possono essere ripartite in variabili x_j di base se $j \in \beta$ e fuori base se $j \in \eta$. Possiamo pertanto definire due vettori x_β e x_η aggregando le componenti in base e fuori base. Il sistema di equazioni $Ax = b$ può quindi essere riscritto come

$$(B \quad N) \begin{pmatrix} x_\beta \\ x_\eta \end{pmatrix} = b \quad \text{ovvero} \quad Bx_\beta + Nx_\eta = b$$

da cui si ottiene un'espressione per le variabili in base in funzione di quelle fuori base

$$x_\beta = B^{-1}b - B^{-1}Nx_\eta.$$

7.2 DEFINIZIONE. Per ogni base β una soluzione del seguente tipo

$$\begin{aligned} x_\beta &:= B^{-1}b \\ x_\eta &:= 0 \end{aligned}$$

prende il nome di soluzione di base. Se $x_\beta \geq 0$ si dice che la soluzione di base, la matrice di base e la base sono ammissibili. Se $x_\beta > 0$ si dice che la soluzione di base, la matrice di base e la base sono ammissibili e non degeneri. Se esiste $j \in \beta$ tale $x_j = 0$, allora si dice che la soluzione di base, la matrice di base e la base sono degeneri. ■

Questa definizione di soluzione degenera corrisponde alla definizione 6.20 di vertice degenero. È importante notare che due differenti basi degeneri possono dar luogo alla medesima soluzione di base.

7.3 ESEMPIO.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 2 \\x_1 &\leq 2 \\x_2 &\leq 1 \\x_1 \geq 0 \quad x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Trasformando in forma standard si ha

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\x_1 + x_4 &= 2 \\x_2 + x_5 &= 1 \\x_j \geq 0 \quad j &= 1, \dots, 5\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base è quindi un opportuno sottoinsieme di tre elementi dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Consideriamo, a titolo esemplificativo, tutti i sottoinsiemi di 3 elementi (si veda in figura 7.1 l'insieme ammissibile con l'indicazione delle basi vicino alle soluzioni di base):

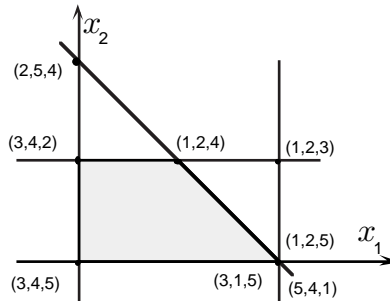


FIGURA 7.1

$$- \quad \beta = (1 \ 2 \ 3), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_\beta = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0$$

base non ammissibile in quanto $x_3 < 0$.

$$- \quad \beta = (1 \ 2 \ 4), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_\beta = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 0$$

base ammissibile non degenera.

$$- \quad \beta = (1 \ 2 \ 5), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_\beta = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1$$

base ammissibile degenera.

$$— \quad \beta = (1 \ 3 \ 4), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

B è singolare e quindi β non è una base.

$$— \quad \beta = (3 \ 1 \ 5), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_\beta = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1$$

base ammissibile degenera.

$$— \quad \beta = (5 \ 4 \ 1), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_\beta = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1$$

base ammissibile degenera.

$$— \quad \beta = (3 \ 4 \ 2), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_\beta = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 0$$

base ammissibile non degenera.

$$— \quad \beta = (5 \ 2 \ 3), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

B è singolare e quindi β non è una base.

$$— \quad \beta = (2 \ 5 \ 4), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_\beta = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = -1$$

base non ammissibile ($x_5 < 0$).

$$— \quad \beta = (3 \ 4 \ 5), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_\beta = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 1$$

base ammissibile non degenera. ■

7.4 ESERCIZIO. Si calcolino tutte le basi ammissibili di

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 2, 0 \leq x_1 \leq 2, x_2 \geq 1\}$$

■

7.2. Condizioni di ottimalità

Sia $\bar{x} = (\bar{x}_\beta, \bar{x}_\eta)$ una soluzione di base ammissibile. Il valore di questa soluzione di base è dato da

$$f(\bar{x}) = c_\beta \bar{x}_\beta + c_\eta \bar{x}_\eta = c_\beta B^{-1} b$$

e quello di una generica soluzione ammissibile $x = (x_\beta, x_\eta)$, (ripartita come \bar{x}), da

$$\begin{aligned} f(x) &= c_\beta x_\beta + c_\eta x_\eta = c_\beta (B^{-1} b - B^{-1} N x_\eta) + c_\eta x_\eta \\ &= c_\beta B^{-1} b + (c_\eta - c_\beta B^{-1} N) x_\eta = c_\beta B^{-1} b + \bar{c}_\eta x_\eta = f(\bar{x}) + \bar{c}_\eta x_\eta \end{aligned}$$

dove si è posto $\bar{c}_\eta := (c_\eta - c_\beta B^{-1} N)$. Si noti ora che l'insieme ammissibile $F = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ può anche essere rappresentato come

$$F = \{x = (x_\beta, x_\eta) : x_\beta = \bar{x}_\beta - B^{-1} N x_\eta, x_\beta \geq 0, x_\eta \geq 0\}$$

per cui il problema di programmazione lineare in esame è equivalente a ($f(\bar{x})$ è costante)

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}_\eta x_\eta \\ & B^{-1} N x_\eta \leq \bar{x}_\beta \\ & x_\eta \geq 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

In (7.1) la soluzione $x_\eta := 0$ è sempre ammissibile. Pertanto se $\bar{c}_\eta \geq 0$, il valore ottimo di (7.1) è 0 e quindi, in tal caso, $x_\eta := 0$ è ottimo di (7.1) e, di conseguenza, $x := (\bar{x}_\beta, \bar{x}_\eta) = (B^{-1} b, 0)$ è ottimo nel problema in esame. Abbiamo perciò dimostrato il seguente teorema:

7.5 TEOREMA. *Se $\bar{c}_\eta \geq 0$, la soluzione di base è ottima. Inoltre si dice che la base stessa è ottima.* ■

Il vettore $\bar{c}_\eta = c_\eta - c_\beta B^{-1} N$ viene indicato di solito come *costo ridotto*. Si può anche notare che, siccome $c_\beta - c_\beta B^{-1} B = 0$, la condizione espressa nel teorema può anche essere riscritta come $c - c_\beta B^{-1} A \geq 0$ e il costo ridotto ridefinito come $\bar{c} := c - c_\beta B^{-1} A$.

Il teorema sopra enunciato dà evidentemente una condizione sufficiente di ottimalità. Si tratta anche di una condizione necessaria? A tal fine vale il seguente teorema:

7.6 TEOREMA. *Se una soluzione di base non degenera è ottima, allora il suo costo ridotto è non negativo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\bar{c}_j < 0$. Per l'ipotesi di non degenerazione esiste sempre una soluzione ammissibile \bar{x} in (7.1) con $\bar{x}_i := 0, i \neq j$ e $\bar{x}_j > 0$ sufficientemente piccolo. Siccome $\bar{c}_j \bar{x}_j < 0$ la base non può essere ottima. ■

7.7 ESERCIZIO. Si verifichi che nell'esercizio 7.3 le basi (1, 2, 5) e (1, 5, 4) sono ottime se la funzione obiettivo è $\max 2x_1 + x_2$. Si verifichi anche che la base (3, 1, 5), pur corrispondendo ad una soluzione ottima, non verifica la condizione sufficiente di ottimalità e quindi non può dirsi ottima (in quanto base). ■

7.3. Cambiamento di base

Si è visto che se la base non è degenera ed esiste un indice $p \in \eta$ tale che $\bar{c}_p < 0$, allora la soluzione di base in esame non è ottima. Quindi bisogna trovare un metodo per passare ad un'altra base ammissibile di valore inferiore. Se la base è degenera ed esiste un indice $p \in \eta$ tale che $\bar{c}_p < 0$, non si può trarre alcuna conclusione sull'ottimalità o meno della soluzione di base. Bisogna comunque cambiare base o per trovare una soluzione migliore o per poter provare tramite la condizione di ottimalità, applicata ad una base diversa, che la soluzione è davvero ottima.

Al fine di effettuare un cambiamento di base si consideri il seguente problema (dove si è posto $\tilde{a} := B^{-1} A^p$, con A^p colonna p -esima di A):

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}_p x_p \\ & \tilde{a} x_p \leq \bar{x}_\beta \\ & x_p \geq 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Si noti che (7.2) è stato ricavato da (7.1) ponendo tutte le componenti di x_η , tranne la p -esima, uguali a zero. Quindi (7.2) ha la stessa funzione obiettivo di (7.1), ma un insieme ammissibile più piccolo, e le soluzioni ottime di (7.2) sono soluzioni ammissibili di (7.1). Se, in particolare, il valore ottimo di (7.2) è negativo, la soluzione ottima di (7.2) è una soluzione ammissibile di (7.1) di valore inferiore. Il calcolo dell'ottimo di (7.2) è immediato. È dato infatti da

$$\hat{x}_p := \min \left\{ \frac{\bar{x}_{\beta(i)}}{\tilde{a}_i} : 1 \leq i \leq m, \tilde{a}_i > 0 \right\} =: \frac{\bar{x}_{\beta(q)}}{\tilde{a}_q}$$

Se però $\tilde{a}_i \leq 0, \forall i$, allora (7.2) è un problema illimitato e a maggior ragione lo è (7.1) (e quindi anche il problema originario). Se invece esiste almeno un indice i tale che $\tilde{a}_i > 0$, la nuova soluzione che si è ottenuta è data da

$$\begin{aligned} x'_{\beta(i)} &:= \bar{x}_{\beta(i)} - \tilde{a}_i \hat{x}_p = \bar{x}_{\beta(i)} - \tilde{a}_i \frac{\bar{x}_{\beta(q)}}{\tilde{a}_q} \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ x'_p &:= \hat{x}_p = \frac{\bar{x}_{\beta(q)}}{\tilde{a}_q} \geq 0 \\ x'_j &:= \bar{x}_j = 0 & j \in \eta \setminus p \end{aligned} \quad (7.3)$$

Siccome $x'_{\beta(q)} = 0$, si è ottenuta una soluzione con $n - m$ componenti uguali a zero e le altre maggiori o uguali a zero. Se le colonne $\{A^j\}$ con $j \in \beta \setminus \beta(q) \cup p$ sono linearmente indipendenti, allora la nuova soluzione è di base. A tal fine si osservi che $B^{-1}(B \ A^p) = (I \ \tilde{a})$. Siccome $\tilde{a}_q \neq 0$, se si toglie la colonna q -esima della matrice identica si ha ancora una matrice non singolare. Quindi la soluzione di (7.2) è una soluzione ammissibile di base, ottenibile tramite le formule (7.3).

Si può a questo punto verificare se la nuova soluzione di base è ottima e, in caso contrario, effettuare un ulteriore cambiamento di base. Se tutte le basi sono non degeneri si giunge all'importante conclusione che, in un numero finito di passi, si raggiunge una base ottima oppure si determina che il problema è illimitato. Infatti, se tutte le basi sono non degeneri, il valore della funzione obiettivo decresce di una quantità maggiore di zero ad ogni cambiamento di base e quindi nessuna base si ripresenta due volte. Dato che le basi sono in numero finito, necessariamente il numero di cambiamenti di base è finito. Il problema della finitezza del metodo in presenza di base degeneri verrà affrontato più avanti.

Metodo del simplesso

```

input( $\beta$ ); (* $\beta$  base ammissibile*)
  optimal := False; unlimited := False;
  while  $\neg$ optimal  $\wedge$   $\neg$ unlimited do
    begin
       $\beta \mapsto B^{-1}$ ;
       $x_\beta := B^{-1} b$ ;  $u := c_\beta B^{-1}$ ;
       $\bar{c} := c - u A$ ;
      optimal := ( $\bar{c} \geq 0$ );
      if  $\neg$ optimal
        then begin
           $p : \bar{c}_p < 0$ ;
           $\tilde{a} := B^{-1} A^p$ ;
          unlimited := ( $\tilde{a} \leq 0$ );
          if  $\neg$ unlimited
            then begin
               $q : \bar{x}_{\beta(q)} / \tilde{a}_q = \min \{ \bar{x}_{\beta(i)} / \tilde{a}_i : 0 \leq i \leq m, \tilde{a}_i > 0 \}$ ;
               $\beta := \beta \setminus \beta(q) \cup p$ ;
            end
          end
        end
      end
    end
  output(optimal, unlimited,  $\beta$ ,  $x_\beta$ ,  $u$ ).

```

7.8 ESERCIZIO. Con riferimento all'esercizio 7.3 si applichino le formule (7.3) alle trasformazioni di base $(3, 4, 5) \rightarrow (3, 4, 2)$ e $(3, 1, 5) \rightarrow (1, 2, 5)$. ■

7.4. Metodo del simplesso

Si è quindi individuato un algoritmo che in linea generale procede come indicato nel riquadro.

7.9 ESEMPIO.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -x_1 - 2x_2 \\
 & x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_1 \leq 2 \\
 & x_2 \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

L'insieme ammissibile è il medesimo dell'esempio 7.3. I dati del problema trasformato in forma standard sono:

$$c = (-1 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia $\beta := (3 \quad 4 \quad 5)$ la base iniziale. Quindi $B^{-1} = I$, $u := (0 \quad 0 \quad 0)I = (0 \quad 0 \quad 0)$ e $\bar{c} := c$. Siccome $\bar{c}_2 < 0$ e la base non è degenere, la soluzione corrente $\bar{x} := (0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1)$ non è

ottima. Calcoliamo allora

$$\tilde{a} := B^{-1} A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{\bar{x}_{\beta(1)}}{\tilde{a}_1} = \frac{2}{1} \quad \frac{\bar{x}_{\beta(3)}}{\tilde{a}_3} = \frac{1}{1}$$

quindi $q := 3$. La nuova base è pertanto $\beta := (3 \ 4 \ 2)$ con soluzione $\bar{x} := (0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 0)$.

$$u := c_\beta B^{-1} = (0 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ -2)$$

$$\bar{c}_1 := -1 - (0 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \quad \bar{c}_5 := 0 - (0 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

La base non è degenera, $\bar{c}_1 < 0$, quindi la base non è ottima.

$$\tilde{a} := B^{-1} A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\bar{x}_{\beta(1)}}{\tilde{a}_1} = \frac{1}{1} \quad \frac{\bar{x}_{\beta(2)}}{\tilde{a}_2} = \frac{2}{1}$$

quindi $q := 1$ e la nuova base è $\beta := (1 \ 4 \ 2)$ con soluzione $\bar{x} := (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)$.

$$u := c_\beta B^{-1} = (-1 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \ 0 \ -1)$$

$$\bar{c}_3 := 0 - (-1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \bar{c}_5 := 0 - (-1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

La base è ottima. L'iterazione è raffigurata in figura 7.2. Come si vede le soluzioni di base sono vertici dell'insieme ammissibile e il passaggio da una soluzione di base alla successiva avviene tramite uno spigolo. ■

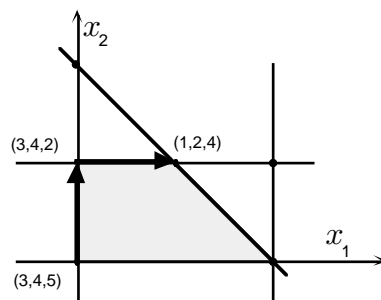


FIGURA 7.2

7.10 ESERCIZIO. Si rifaccia l'esempio inserendo in base la colonna A^1 anziché la colonna A^2 al primo cambiamento di base. ■

Il metodo del semplice consiste nell'implementazione il più possibile efficiente dell'algoritmo delineato precedentemente. Consideriamo ora in dettaglio le varie operazioni del metodo.

Come si è visto, la verifica dell'ottimalità fornisce una serie di possibili elementi da far entrare in base. Anche se la relativa scelta è arbitraria ai fini della correttezza dell'algoritmo purché non vi sia degenerazione, è preferibile tuttavia adottare qualche criterio che riduca possibilmente il numero di iterazioni. I criteri più largamente adottati sono essenzialmente due e sono molto semplici.

Il primo consiste nella scelta di p tale che

$$\bar{c}_p = \min_{j \in \eta} \bar{c}_j \quad (7.4)$$

Si noti però che questo criterio non comporta necessariamente il più grande decremento del costo, in quanto questo è dato da $\bar{c}_p \hat{x}_p$ e può quindi esserci un indice j tale che $\bar{c}_p \hat{x}_p > \bar{c}_j \hat{x}_j$. Si potrebbe allora pensare di adottare come criterio alternativo la scelta del minimo $\bar{c}_j \hat{x}_j$. Questo criterio ha tuttavia un elevato costo computazionale all'interno di ogni iterazione per cui si preferisce adottare il più semplice criterio (7.4).

Il secondo criterio consiste nella scelta del primo indice per cui il costo ridotto risulti negativo. In questo caso il decremento del costo ad ogni iterazione può anche non essere rilevante, tuttavia il risparmio computazionale all'interno di ogni iterazione può essere notevole specie in presenza di molte variabili.

In generale è impossibile dire quale criterio sia più efficace e in ogni caso è opportuno notare che al procedere delle iterazioni i due criteri tendono sempre di più a produrre gli stessi risultati. In casi pratici con un numero elevato di colonne (addirittura milioni) si preferisce scegliere un sottoinsieme di colonne (ad esempio qualche migliaio) che abbiano costo ridotto negativo. Poi si ottimizza solo rispetto a questo insieme (detto *working set*) e ottenuto l'ottimo parziale si genera un altro insieme di colonne a costo ridotto negativo, e così di seguito finché non esistono più colonne a costo ridotto negativo.

Una volta operata la scelta dell'elemento da far entrare in base, è automaticamente determinato dall'algoritmo anche l'elemento da far uscire dalla base, purché non ci sia degenerazione.

Inoltre ad ogni cambiamento di base è richiesto il calcolo dell'inversa della nuova matrice di base. Se fatto direttamente, questo calcolo comporterebbe una complessità computazionale pari a $O(n^3)$. Vedremo ora come sia possibile calcolare la nuova inversa con una complessità computazionale pari a $O(n^2)$ sfruttando l'inversa della precedente matrice di base.

Siano B e \bar{B} due matrici di base che differiscono di una colonna, ad esempio la colonna q -esima. Si indichi $W = B^{-1}$ e $\bar{W} = \bar{B}^{-1}$. Si indichi con e_q il vettore colonna tutto nullo tranne un 1 in posizione q -esima e sia e_q^T il suo trasposto. Quindi, se a è un generico vettore colonna, $a e_q^T$ è una matrice tutta nulla tranne la colonna q -esima che è uguale al vettore colonna a . Se indichiamo con B^q la q -esima colonna di B possiamo scrivere:

$$\bar{B} = B - B^q e_q^T + A^p e_q^T,$$

dove si esprime il fatto che la colonna q -esima della matrice di base è stata sostituita con A^p . Inoltre $B^q = B e_q$ e allora

$$\bar{B} = B (I - e_q e_q^T + B^{-1} A^p e_q^T) = B (I - (e_q - \bar{a}) e_q^T)$$

Facendo uso della formula (con a e b generici vettori colonna)

$$(I - a b^T)^{-1} = I + \frac{a b^T}{1 - b^T a} \quad (7.5)$$

si ottiene

$$\bar{W} := \left(I + \frac{(e_q - \tilde{a}) e_q^T}{1 - e_q^T (e_q - \tilde{a})} \right) W$$

Indicando con W_q la q -esima riga di W e notando che $1 - e_q^T (e_q - \tilde{a}) = \tilde{a}_q$ si ha

$$\bar{W} := W + \frac{1}{\tilde{a}_q} (e_q - \tilde{a}) W_q$$

cioè

$$\bar{W}_i^j := \begin{cases} W_i^j - \frac{W_q^j \tilde{a}_i}{\tilde{a}_q} & \text{se } i \neq q \\ \frac{W_q^j}{\tilde{a}_q} & \text{se } i = q \end{cases} \quad (7.6)$$

L'aggiornamento dell'inversa della matrice base si effettua pertanto direttamente dall'inversa della matrice corrente di base tramite le formule (7.6). Questa operazione viene anche chiamata *pivoting*, per il fatto che per ogni calcolo sono coinvolti quattro elementi della matrice, di indice (ij) , (qj) , (ip) , (qp) , disposti a rettangolo nella matrice. L'ultimo di questi, (qp) , rimane sempre fisso, come fosse un perno (pivot in inglese). Inoltre si riottengono facilmente le formule (7.3) direttamente da

$$x'_\beta := \bar{B}^{-1} b = \left(I + \frac{(e_q - \tilde{a}) e_q^T}{1 - e_q^T (e_q - \tilde{a})} \right) x_\beta$$

Al procedere delle iterazioni l'accumulo degli errori d'arrotondamento inevitabilmente presenti in queste formule può far sì che W differisca da B^{-1} in modo tale da alterare qualitativamente la prova di ottimalità e il calcolo di \tilde{a} . È pertanto opportuno ricalcolare periodicamente W direttamente come inversa di B .

7.5. Inizializzazione

Solo in rari casi è disponibile immediatamente una base ammissibile con relativa matrice inversa. Questo avviene ad esempio se i vincoli del problema si presentano nella forma $Ax \leq b$, $x \geq 0$, con $b \geq 0$. Infatti la trasformazione in forma standard porta a

$$\begin{aligned} Ax + Is &= b \\ x \geq 0 \quad s &\geq 0 \end{aligned}$$

per il quale una base è immediatamente data dagli indici relativi alle variabili di scarto con matrice di base la matrice identica. Nel caso generale bisogna invece operare in modo diverso. Innanzitutto si noti che l'insieme ammissibile $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ non è vuoto se e solo se il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{1} z \\ & Ax + Iz = b \\ & x \geq 0 \quad z \geq 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

ammette valore ottimo nullo. Infatti in tal caso l'ottimo deve dare $z = 0$ e x ammissibile per i vincoli originari.

Il problema (7.7) prende il nome di *problema artificiale* e le variabili z vengono appunto dette *variabili artificiali*. La risoluzione del problema artificiale è quindi particolarmente utile in quanto permette di sapere se il problema dato è ammissibile e in caso positivo fornisce anche una soluzione ammissibile. Inoltre la sua risoluzione si effettua facilmente con il metodo del semplice inizializzando il problema con la base riferita alle variabili artificiali.

Ciò che si vuole è che la soluzione ottima del problema artificiale (quando ovviamente il valore ottimo sia nullo) sia anche una soluzione ammissibile di base per il problema dato. Ciò sarà sempre vero quando le variabili artificiali ottime siano tutte fuori della base. In presenza di degenerazione può tuttavia succedere che una variabile artificiale ottima sia in base con valore nullo.

In tal caso l'elemento della base che si riferisce alla variabile artificiale può essere sostituito con un qualsiasi elemento fuori base purché la matrice che si ottiene sia non singolare. Dalle espressioni (7.5)-(7.6) si vede che la nuova matrice è singolare se e solo se $\tilde{a}_q = 0$. Quindi qualsiasi elemento j può entrare in base purché $(B^{-1})_q A^j \neq 0$, dove B è la matrice di base ottima del problema artificiale. In tal caso l'inversa della base viene aggiornata nel solito modo con la formula (7.6).

Può tuttavia succedere che per ogni j fuori base che si riferisce a colonne di A , avvenga $(B^{-1})_q A^j = 0$. Sia e_q il vettore riga con tutte le componenti nulle tranne la q -esima che vale 1. Si avrebbe quindi

$$e_q B^{-1} N = 0$$

dove N è la matrice formata dalle colonne di A che nella soluzione ottima del problema artificiale sono fuori dalla base. Inoltre si ha anche

$$e_q B^{-1} \hat{B} = 0$$

dove \hat{B} è la matrice formata dalle colonne di A che nella soluzione ottima del problema artificiale sono in base. Infatti l'elemento q -esimo della base si riferisce ad una variabile artificiale. Siccome $A = (\hat{B} N)$ possiamo scrivere

$$e_q B^{-1} A = 0 \quad \text{ovvero} \quad d A = 0$$

dove $d = e_q B^{-1}$ è necessariamente non nullo. Allora le righe di A sono linearmente dipendenti e una di esse può essere eliminata dal problema perché ridondante. In particolare deve essere eliminata una riga a cui corrisponda un coefficiente di d non nullo.

7.11 ESERCIZIO. Si trovi una soluzione ammissibile di base per

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(si tratta dell'esercizio 7.3 con un vincolo modificato; come cambia l'insieme ammissibile della figura 7.1?) Trasformando in forma standard si ha

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_5 &= 1 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Due colonne della matrice identica sono già presenti nella matrice. Basta aggiungere allora solo una variabile artificiale:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 & & + x_6 & = 2 \\ x_1 & & + x_4 & = 2 \\ & x_2 & + x_5 & = 1 \\ x_j & \geq 0 & & j = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

Il vettore artificiale dei costi è quindi $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, la base iniziale è $(6, 4, 5)$ e la soluzione iniziale di base è $x = (0, 0, 0, 2, 1, 2)$. Si calcolino i costi ridotti di questa soluzione di base e si calcolino le basi successive, inserendo in base alla prima iterazione l'indice 1, fino ad ottenere una soluzione ammissibile di base. ■

7.6. Dualità e sensibilità

La notazione $u := c_\beta B^{-1}$ non è casuale. Infatti in corrispondenza della base finale ottima si ha

$$\bar{c}_\eta = c_\eta - c_\beta B^{-1} N = c_\eta - \hat{u} N \geq 0$$

e siccome vale anche $c_\beta - \hat{u} B = 0$, si ha che

$$c - \hat{u} A \geq 0$$

Inoltre

$$\hat{u} b = c_\beta B^{-1} b = c_\beta \hat{x}_\beta = c_\beta \hat{x}_\beta + c_\eta \hat{x}_\eta = c \hat{x}$$

Siccome il duale di

$$\begin{aligned} \min \quad & c x \\ & A x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

è

$$\begin{aligned} \max \quad & u b \\ & u A \leq c \end{aligned}$$

si vede immediatamente che \hat{u} è l'ottimo duale.

Quindi il metodo del simplesso fornisce automaticamente anche l'ottimo duale. Si noti che si può interpretare il metodo come la ricerca di una coppia (x, u) ammissibile in entrambi i problemi e tale che $u b = c x$. Tale ricerca viene fatta con x sempre ammissibile e con u non ammissibile. La condizione di ottimalità del teorema 7.5 non è altro che la condizione di ammissibilità per la variabile duale.

Anche i costi ridotti possono essere interpretati come variabili duali, relativamente al vincolo di non negatività. Si supponga infatti di considerare esplicito il vincolo di non negatività. Allora il vincolo implicito si riduce banalmente a $x \in \mathbb{R}^n$. Costruendo un nuovo problema duale in cui le variabili w siano associate ai vincoli di non negatività si ottiene:

$$L(u, w) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} c x + u (b - A x) - w x = u b + \inf_{x \in \mathbb{R}^n} (c - u A - w) x$$

Affinché $(u, w) \in \text{dom } L(u, w)$ bisogna avere $(c - uA - w) = 0$, cioè $w = c - uA$ e quindi w è proprio il costo ridotto. Per una coppia di problemi primale-duale in forma canonica riscritti aggiungendo variabili di scarto

$$\begin{aligned} Ax - Is &= b & uA + rI &= c \\ x \geq 0, \quad s &\geq 0 & u \geq 0, \quad r &\geq 0 \end{aligned}$$

i costi ridotti di un problema sono semplicemente le variabili di scarto dell'altro problema.

Si supponga ora che alcuni dati del problema possano variare. È naturale chiedersi di quanto varia il valore ottimo al variare dei dati del problema. Consideriamo dapprima una variazione di ε per la componente q -esima di b (ε può anche essere negativo). Quindi $b' := b + \varepsilon e_q$ dove e_q è il vettore colonna nullo con un 1 in posizione q -esima. Abbiamo

$$c_\beta x'_\beta = c_\beta B^{-1} (b + \varepsilon e_q) = c_\beta x_\beta + \varepsilon u e_q = c_\beta x_\beta + \varepsilon u_q$$

Quindi la variazione relativa del valore ottimo è u_q , come del resto già si sapeva dalla teoria generale. Tuttavia bisogna tener presente che se la soluzione è degenera vi sono variazioni di b , anche arbitrariamente piccole, che portano alla non ammissibilità. Infatti se $x_{\beta(r)} = 0$ e $W_r^q < 0$ si ha non ammissibilità per qualsiasi $\varepsilon > 0$. Più in generale, siccome $x'_\beta = x_\beta + \varepsilon W e_q = x_\beta + \varepsilon W^q$, i valori consentiti di ε che non causano un cambiamento della base ottima si trovano come

$$r_q^- := -\min \left\{ \frac{x_{\beta(i)}}{W_i^q} : W_i^q > 0 \right\} \leq \varepsilon \leq \min \left\{ -\frac{x_{\beta(i)}}{W_i^q} : W_i^q < 0 \right\} =: r_q^+ \quad (7.8)$$

Si supponga ora una variazione nei costi. Sia $c'_j := c_j + \varepsilon$ con $j \in \eta$. Se la soluzione è non degenera nulla cambia. In generale, fintantoché i costi ridotti non cambiano di segno la soluzione di base ottima rimane inalterata. Quindi i valori consentiti di ε sono dati da $\varepsilon \geq -\bar{c}_j$. Se invece $c'_j := c_j + \varepsilon$ con $j \in \beta$ allora c'è una ovvia variazione di $\varepsilon x_{\beta(q)}$ nel valore della soluzione di base. Per verificare se la base ottima non cambia si devono ricalcolare i costi ridotti delle variabili fuori base. Sia $c'_{\beta(q)} := c_{\beta(q)} + \varepsilon$, cioè $c'_\beta := c_\beta + \varepsilon e_q^T$. Quindi $u' = u + \varepsilon e_q^T B^{-1}$ e $\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \varepsilon e_q^T B^{-1} A^j$. Indicando $\tilde{a}^j := B^{-1} A^j$ si ha $\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \varepsilon \tilde{a}_q^j$ e quindi i valori consentiti di ε sono dati da

$$-\min \left\{ -\frac{\bar{c}_j}{\tilde{a}_q^j} : \tilde{a}_q^j < 0 \right\} \leq \varepsilon \leq \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\tilde{a}_q^j} : \tilde{a}_q^j > 0 \right\}$$

Infine si supponga che la variazione sia in uno dei coefficienti della matrice A . Consideriamo dapprima il caso in cui il coefficiente appartenga alla matrice di base e sia l'elemento della riga q e colonna p di B , cioè

$$B' = B + \varepsilon e_q e_p^T = B (I + \varepsilon B^{-1} e_q e_p^T)$$

Applicando la formula (7.5) si ha

$$B'^{-1} = \left(I - \varepsilon \frac{B^{-1} e_q e_p^T}{1 + \varepsilon e_p^T B^{-1} e_q} \right) B^{-1}$$

Quindi il valore ottimo è dato da

$$c_\beta x'_\beta = c_\beta x_\beta - \varepsilon \frac{c_\beta B^{-1} e_q e_p^T x_\beta}{1 + \varepsilon W_p^q} = c_\beta x_\beta - \varepsilon \frac{u_q x_{\beta(p)}}{1 + \varepsilon W_p^q}$$

In prima approssimazione quindi la variazione è proporzionale al prodotto della variabile duale della riga q -esima e della p -esima variabile di base. Per il calcolo della variazione ammessa per ε ci si può basare sulle seguenti espressioni:

$$x'_{\beta(i)} = x_{\beta(i)} - \varepsilon \frac{W_i^q x_p}{1 + \varepsilon W_p^q} \quad \bar{c}'_j = \bar{c}_j + \varepsilon \frac{u_q \tilde{a}_p^j}{1 + \varepsilon W_p^q}$$

Se il coefficiente non appartiene alla matrice di base allora basta considerare il coefficiente di costo ridotto della colonna a cui si riferisce la variazione. Si ha pertanto

$$\bar{c}'_p = \bar{c}_p - \varepsilon u_q$$

Si riconsideri il caso di variazioni di b , effettuate però simultaneamente su più componenti di b . Ovviamente il valore ottimo cambia di $\sum_i \varepsilon_i u_i$. Tuttavia affinché la base non cambi non basta che $r_i^- \leq \varepsilon_i \leq r_i^+$, $\forall i$. I vincoli (7.8) valgono solo se presi individualmente. Deve ovviamente valere

$$x_\beta + \sum_i \varepsilon_i W^i \geq 0 \tag{7.9}$$

Siccome i valori $\varepsilon_q = r_q^+$ (oppure r_q^-) e $\varepsilon_i = 0$ per $i \neq q$ sono ammissibili in (7.9) per qualsiasi q , anche una loro combinazione convessa è ancora ammissibile. Quindi se $\sum_i \varepsilon_i / r_i^+ < 1$ (con l'ovvio cambio ε_i / r_i^- se $\varepsilon < 0$) la base resta ancora ottima. Questa regola è nota come la regola del 100%.

7.12 ESEMPIO. Si riconsideri l'esempio 7.9 la cui soluzione ottima è $\hat{x} = (1, 1, 0, 1, 0)$. Valutiamo i cambiamenti consentiti alle singole componenti del vettore $b = (2, 2, 1)$. Ad esempio consideriamo b_1 . Quindi $r_1^- = -x_{\beta(1)} / W_1^1 = -1$, $r^+ = -x_{\beta(2)} / W_2^1 = 1$. Allora il vincolo $x_1 + x_2 \leq 2$ può essere trasformato in $x_1 + x_2 \leq b_1$ con $1 \leq b_1 \leq 3$ senza che la base ottima $(1, 2, 4)$ cambi. Infatti, facendo riferimento alla figura 7.1, si vede che, abbassando il valore di b_1 a partire da $b_1 = 2$, la retta che rappresenta il vincolo $x_1 + x_2 \leq b_1$ viene 'spostata' verso l'origine e questo spostamento non altera l'ottimalità della base finché, per $b_1 = 1$ la retta non interseca la soluzione di base $(3, 4, 2)$. Per $b_1 = 1$ la stessa soluzione di base viene ottenuta dalle basi $(1, 2, 4)$ e $(3, 4, 2)$. Se invece il valore di b_1 viene aumentato a partire da $b_1 = 2$, la retta che rappresenta il vincolo $x_1 + x_2 \leq b_1$ viene 'allontanata' dall'origine e questo spostamento non altera l'ottimalità della base finché, per $b_1 = 3$, la retta non interseca la soluzione di base $(1, 2, 3)$ che diventa ammissibile nel momento in cui $b_1 = 3$. Il calcolo per b_2 e b_3 viene lasciato come esercizio.

Consideriamo ora le variazioni ammissibili per c_1 . Si tratta di un costo in base. Bisogna valutare \tilde{a}^3 e \tilde{a}^5 :

$$(\tilde{a}^3 \quad \tilde{a}^5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo $\bar{c}_3 = \bar{c}_5 = 1$ si ottiene $-2 \leq c_1 \leq 0$, che corrisponde a 'ruotare' le rette di livello fino a rendere parallele o allo spigolo orizzontale ($c_1 = 0$) oppure a quello diagonale ($c_1 = -2$).

Supponiamo infine di variare l'elemento A_3^1 della matrice A . L'elemento A_3^1 è l'elemento B_3^1 della matrice di base, quindi $q = 3$ e $p = 1$, $x_p = x_1 = 1$, $W_p^q = W_1^3 = -1$, $W_2^q = 1$, $W_3^q = 1$, $u_q = u_3 = -1$, $\tilde{a}_p^3 = 1$, $\tilde{a}_p^5 = -1$. Allora si deve avere

$$\begin{aligned} x_{\beta(1)} \geq 0 &\implies 1 - \varepsilon \frac{-1 \cdot 1}{1 - \varepsilon} \geq 0 & \bar{c}_3 \geq 0 &\implies 1 + \varepsilon \frac{-1 \cdot 1}{1 - \varepsilon} \geq 0 \\ x_{\beta(2)} \geq 0 &\implies 1 - \varepsilon \frac{1 \cdot 1}{1 - \varepsilon} \geq 0 & \bar{c}_5 \geq 0 &\implies 1 + \varepsilon \frac{-1 \cdot -1}{1 - \varepsilon} \geq 0 \\ x_{\beta(3)} \geq 0 &\implies 1 - \varepsilon \frac{1 \cdot 1}{1 - \varepsilon} \geq 0 & & \end{aligned}$$

che porta a $\varepsilon \leq 1/2$. Questa variazione corrisponde a far ruotare la retta orizzontale di figura 7.1, con perno nella soluzione di base $(3, 4, 2)$, dal caso in cui contiene la soluzione di base $(3, 1, 5)$ (valore $A_3^1 = 1/2$) fino a farla diventare verticale ($A_3^1 \rightarrow -\infty$). ■

7.7. Geometria del metodo del semplice

Vediamo ora il legame fra l'aspetto algebrico del metodo e quello geometrico. Sia pertanto

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

F è quindi un poliedro non contenente rette e pertanto, se esiste una soluzione finita, almeno un vertice deve essere ottimo. Si tratta ora di caratterizzare i vertici di F .

7.13 TEOREMA. \bar{x} è vertice di F se e solo se le colonne di A corrispondenti alle componenti di \bar{x} strettamente positive, sono linearmente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. (\implies) Sia $J = \{j : \bar{x}_j > 0\}$ e siano le colonne $\{A^j\}_{j \in J}$ linearmente dipendenti. Allora esistono α_j non tutti nulli tali che $\sum_{j \in J} A^j \alpha_j = 0$. Per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo le soluzioni

$$\begin{cases} x_j^1 = x_j + \varepsilon \alpha_j & j \in J \\ x_j^1 = 0 & j \notin J \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_j^2 = x_j - \varepsilon \alpha_j & j \in J \\ x_j^2 = 0 & j \notin J \end{cases}$$

sono ammissibili. Ma allora $\bar{x} = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ e quindi \bar{x} non può essere vertice.

(\impliedby) Se \bar{x} non è un vertice, esistono x^1, x^2 ammissibili (e $x^1 \neq x^2$) e $0 < \alpha < 1$ tali che $\bar{x} = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$. Si noti che $\bar{x}_j = 0$ implica $x_j^1 = 0$ e $x_j^2 = 0$. Quindi $Ax^1 = \sum_{j \in J} A^j x_j^1 = b$ e $Ax^2 = \sum_{j \in J} A^j x_j^2 = b$ che implica $A(x^1 - x^2) = \sum_{j \in J} A^j (x_j^1 - x_j^2) = 0$. Ma i termini $(x_j^1 - x_j^2)$ non sono tutti nulli e quindi le colonne $\{A^j\}_{j \in J}$ sono linearmente dipendenti. ■

7.14 COROLLARIO. Se \bar{x} è vertice, $n - m$ componenti di \bar{x} devono essere nulle. ■

Si noti che non è necessariamente vero il contrario. Ad esempio con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = 0$ si ha $\bar{x}_1 = 1$ e $\bar{x}_2 = 0$ che non è un vertice pur avendo $n - m = 1$ componente nulla.

7.15 COROLLARIO. Siano le righe di A linearmente indipendenti. Allora \bar{x} è vertice di F se e solo se \bar{x} è soluzione ammissibile di base.

DIMOSTRAZIONE. La sufficienza è immediata. Anche la necessità è immediata se $|J| = m$. Se $|J| < m$ si possono sempre aggiungere alle colonne A^j con $j \in J$ altre colonne A^i con $i \notin J$, in modo da formare una matrice quadrata di rango pieno, in virtù dell'ipotesi di indipendenza lineare delle righe. ■

È pertanto immediato verificare che

7.16 TEOREMA. Se non c'è degenerazione la corrispondenza fra vertici di F e soluzioni ammissibili di base è biunivoca. ■

Siano β^1 e β^2 due basi ammissibili. Se β^1 e β^2 differiscono solo per un elemento, ovvero $|\beta^1 \cup \beta^2| = m + 1$, diremo che sono *basi adiacenti* e le rispettive soluzioni di base sono soluzioni di base adiacenti. Se $\alpha \subset \{1, \dots, n\}$ si indichi con $A(\alpha)$ la matrice ottenuta con le colonne di A relative agli indici in α ordinate in modo arbitrario.

Definiamo ora vertici adiacenti di F due vertici giacenti alle estremità di un medesimo spigolo. Ci proponiamo ora di stabilire la relazione intercorrente tra basi adiacenti e vertici adiacenti.

7.17 LEMMA. *Siano le righe di A linearmente indipendenti. Se β^1 e β^2 sono due basi, allora*

$$\dim \mathcal{N}(A(\beta^1 \cup \beta^2)) = |\beta^1 \cup \beta^2| - m$$

e in particolare se β^1 e β^2 sono adiacenti si ha $\dim \mathcal{N}(A(\beta^1 \cup \beta^2)) = 1$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è immediata ricordando la relazione $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}^\perp(A^\top)$, dove A^\top è la matrice trasposta di A . ■

7.18 LEMMA. *Siano β^1 e β^2 basi ammissibili adiacenti non degeneri con rispettive soluzioni di base x^1 e x^2 . Allora $Ax = b$, $x \geq 0$ con $x_j = 0$ se $j \notin \beta^1 \cup \beta^2$ se e solo se x è combinazione convessa di x^1 e x^2 .*

DIMOSTRAZIONE. (\Leftarrow) Da $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$ risulta $x_j = 0$ se $j \notin \beta^1 \cup \beta^2$. Ovviamente si ha $Ax = b$. (\Rightarrow) Sia $D = A(\beta^1 \cup \beta^2)$ e x_D il vettore relativo. Quindi $Ax = Dx_D = b$. Inoltre si ha per ipotesi $Dx_D^1 = b$ e $Dx_D^2 = b$ da cui $D(x_D - x_D^2) = 0$ e $D(x_D^1 - x_D) = 0$ cioè $x_D - x_D^2 \in \mathcal{N}(D)$ e $x_D^1 - x_D \in \mathcal{N}(D)$. Siccome x^1 e x^2 sono non degeneri si ha $x_D^1 \neq x_D^2$. Inoltre, siccome $\dim \mathcal{N}(D) = 1$, esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $x_D - x_D^2 = \alpha(x_D^1 - x_D^2)$ ovvero $x_D = \alpha x_D^1 + (1 - \alpha)x_D^2$. Le ipotesi di adiacenza e non degenerazione implicano $\alpha \geq 0$ e $1 - \alpha \geq 0$ da cui la tesi. ■

7.19 TEOREMA. *Siano β^1 e β^2 due basi ammissibili non degeneri. Le due basi sono adiacenti se e solo se i due vertici corrispondenti x^1 e x^2 sono adiacenti.*

DIMOSTRAZIONE. (\Rightarrow) Siano β^1 e β^2 adiacenti e sia x una generica combinazione convessa di x^1 e x^2 . Dal lemma 7.18 si ha $Ax = b$ e $x_j = 0$ se $j \notin \beta^1 \cup \beta^2$. Sia ora lo stesso x combinazione convessa stretta di due punti distinti e ammissibili z e y . Si vede facilmente che $z_j = y_j = 0$ se $j \notin \beta^1 \cup \beta^2$. Ma quindi, riapplicando il lemma 7.18 si trova che sia z che y sono combinazioni convesse di x^1 e x^2 . Quindi $\text{conv}\{x^1, x^2\}$ è una faccia, necessariamente di dimensione 1, cioè uno spigolo.

(\Leftarrow) Siano x^1 e x^2 vertici adiacenti e sia x combinazione convessa stretta di x^1 e x^2 . In base all'ipotesi di non degenerazione $x_j > 0$ se $j \in \beta^1 \cup \beta^2$. Sia $\xi_D \in \mathcal{N}(D)$ di norma unitaria e sia $\xi = (\xi_D \ 0)$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $z = x + \varepsilon \xi$ e $y = x - \varepsilon \xi$ sono soluzioni ammissibili. Come si vede $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}y$ e dall'ipotesi che $\text{conv}\{x^1, x^2\}$ è uno spigolo si ricava che anche z e y devono appartenere a questo spigolo. Quindi $\dim \mathcal{N}(D) \leq 1$. Tuttavia le due basi sono distinte e quindi $\dim \mathcal{N}(D) \geq 1$. Cioè $\dim \mathcal{N}(D) = 1$, da cui, tramite il lemma 7.17 si ottiene la tesi. ■

Da questi risultati si ricava l'interpretazione geometrica del metodo del simplesso: la soluzione ottima viene cercata passando da un vertice all'altro 'muovendosi' lungo gli spigoli. Il metodo quindi sfrutta implicitamente il concetto di intorno di vertici già definito precedentemente.

Perciò, se indichiamo con \mathcal{B} l'insieme di tutte le basi ammissibili e definiamo il seguente intorno di una base:

$$N_\beta := \{\beta' \in \mathcal{B} : \beta \text{ e } \beta' \text{ sono basi adiacenti}\}$$

e ricordando che una base è ottima, per definizione, quando è soddisfatta la condizione d'ottimalità $\bar{c} \geq 0$, e non semplicemente quando la soluzione di base corrispondente è ottima (in presenza di un ottimo degenero una base potrebbe rappresentare il vertice ottimo ma non soddisfare la condizione d'ottimalità) possiamo concludere che:

7.20 TEOREMA. Se un problema di programmazione lineare ammette soluzione ottima, allora N_β è un intorno esatto. ■

Si noti un fatto importante. Il metodo del sempliceo fa qualcosa di più di una ricerca sull'intorno N_β . Infatti nell'esaminare ogni elemento fuori base per il suo possibile inserimento in base, si esaminano anche elementi che non darebbero luogo in ogni caso a basi adiacenti ammissibili. Facendo ciò il metodo del sempliceo è in grado di determinare se il problema ammette soluzione limitata senza dover presupporlo. Si consideri il seguente esempio (vedi figura 7.3):

7.21 ESEMPIO.

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array} \quad \text{cioè} \quad \begin{array}{ll} \min & -x_1 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

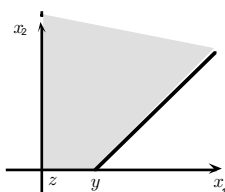


FIGURA 7.3

I vertici sono z e y corrispondenti alle due uniche basi ammissibili $\{3\}$ e $\{1\}$. L'intorno di y è costituito da z (o alternativamente, dato che non c'è degenerazione, l'intorno di $\{1\}$ è costituito da $\{3\}$) e pertanto y è un ottimo discreto. Tuttavia il problema è illimitato. Il metodo del sempliceo scopre questo fatto perché oltre ad esaminare \bar{c}_3 relativo ad una base adiacente, esamina anche \bar{c}_2 relativo ad una base adiacente *non* ammissibile. ■

Un'interessante caratterizzazione geometrica del metodo del sempliceo si ottiene ragionando sul poliedro polare del poliedro duale. Per semplicità di trattazione supponiamo che $c > 0$ (si possono naturalmente considerare anche costi di valore arbitrario, ma questo complicherebbe in modo non necessario la trattazione). In questo modo il problema duale di un programmazione lineare in forma standard ammette sempre l'origine come soluzione ammissibile ed interna ed il poliedro duale è quindi un corpo convesso.

Sia $P := \{u \in \mathbb{R}^m : uA \leq c\}$ il poliedro duale e sia A^j la colonna j -esima di A . Definiamo $a^j := A^j/c_j$. Allora $P = \{u \in \mathbb{R}^m : u a^j \leq 1, \forall j\}$. Per definizione il poliedro polare è $P^* = \{w \in \mathbb{R}^m : u w \leq 1, \forall u \in P\}$, esprimibile anche come $P^* = \text{conv} \{a^j\}_j$. Ricordiamo che vertici di P sono associati a faccette di P^* e viceversa. Inoltre il semispazio di equazione $u \bar{w} \leq 1$ è associato al punto \bar{w} dello spazio polare e, se il semispazio contiene strettamente P , allora \bar{w} è strettamente contenuto in P^* . Quindi semispazi $u b \leq K$, contenenti P , sono associati a punti $(1/K)b \in P^*$. Massimizzare u in P significa trovare il più piccolo valore di K per cui il semispazio $u b \leq K$ contiene P , ovvero $(1/K)b \in P^*$. Possiamo perciò dire che massimizzare u in P è equivalente a trovare l'intersezione della semiretta $\{\alpha b : \alpha \geq 0\}$ con una faccetta di P^* .

Data una base β , un piano nello spazio polare di equazione $w \bar{u} = 1$ e contenente i punti $a^j, j \in \beta$, deve ovviamente soddisfare $\bar{u} a^j = 1, j \in \beta$, cioè $\bar{u} A^j = c_\beta$. Quindi le colonne della base sono associate a vertici di P^* che appartengono ad un piano. Altre

colonne sono strettamente contenute nei due semispazi determinati dal piano. In particolare il semispazio che non contiene l'origine ($\bar{u} w \geq 1$) contiene strettamente tutti i vertici di P^* per i quali $\bar{u} A^j > c_j$, ovvero $\bar{c}_j < 0$. Si supponga ora che la semiretta $\{\alpha b : \alpha \geq 0\}$ intersechi $\text{conv}\{a^j\}_{j \in \beta}$, quindi esistono $\xi_j \geq 0, \sum_{j \in \beta} \xi_j = 1$, ed esiste $\alpha > 0$ (il piano non contiene l'origine) tali che $\sum_{j \in \beta} \xi_j a^j = \alpha b$. È chiaro che ξ/α è proprio la soluzione di base, e quindi l'ipotesi che la semiretta intersechi $\text{conv}\{a^j\}_{j \in \beta}$ è equivalente all'ammissibilità della base β .

Si immagini ora di traslare il piano $\bar{u} w = 1$ fino a farlo passare per il più 'lontano' vertice di P^* , cioè calcolare $\max_j \bar{u} a^j = \max_j \bar{u} (A^j/c_j)$. Se tale punto più lontano già appartiene al piano, significa che il piano definisce la faccetta di P^* attraverso cui passa la semiretta e quindi si è raggiunta l'ottimalità. Infatti $\max_j \bar{u} a^j = \max_j \bar{u} (A^j/c_j) = 1$ implica $\bar{c}_j \geq 0$.

Se invece $\max_j \bar{u} (A^j/c_j) = \bar{u} (A^p/c_p) > 1$ allora i punti $\{a^j\}_{j \in \beta}$ e a^p determinano una piramide in \mathbb{R}^m di base $\text{conv}\{a^j\}_{j \in \beta}$ e vertice a^p . La semiretta 'entra' nella piramide dalla base della piramide ed esce da una delle faccette laterali della piramide. La determinazione della faccetta di uscita corrisponde proprio alle consuete operazioni di pivoting.

Si noti che con questa interpretazione si ha un nuovo criterio di scelta dell'indice che deve entrare in base, cioè $\max_j (\bar{u} A^j)/c_j$ invece di $\min_j c_j - \bar{u} A^j$.

7.22 ESEMPIO. Sia dato il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 \\ & x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_6 = 3 \\ & x_1 + 3x_2 - x_4 - 2x_5 + x_6 = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Il poliedro duale P è rappresentato in figura 7.4. I vertici di P sono $\{(-3, -1), (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (0, 1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (0, -1)\}$ e quelli di P^* (figura 7.5) sono ovviamente $\{(1, 1), (2, 1), (3, 0), (2, -1), (0, -1), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Sia $\beta = \{1, 5\}$. In figura 7.6 è rappresentata la combinazione convessa di a^1 e a^5 insieme alla semiretta $\{\alpha(3, 1) : \alpha \geq 0\}$. I due insiemi hanno intersezione non vuota, quindi la base è ammissibile. Si trasli ora la combinazione convessa fino ad incontrare l'ultimo vertice di P^* . In figura 7.7 si vede tale traslazione e la piramide generata in tal modo (un triangolo in \mathbb{R}^2). Delle facce laterali (due in questo caso) della piramide si considera solo quella che interseca la semiretta (figura 7.8). Questa viene traslata a sua volta ed una successiva operazione di pivoting porta ad identificare la faccetta ottima. ■

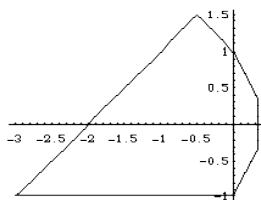


FIGURA 7.4

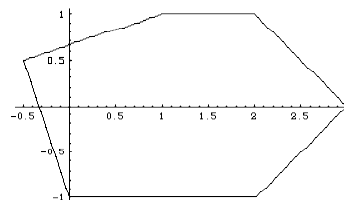


FIGURA 7.5

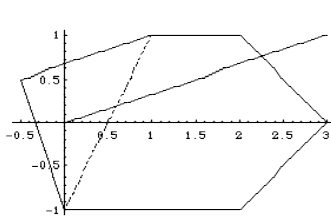


FIGURA 7.6

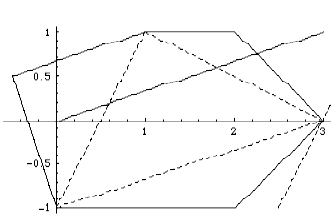


FIGURA 7.7

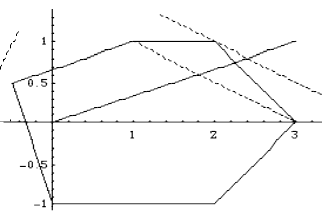


FIGURA 7.8

7.8. Complessità computazionale

La complessità computazionale di ogni iterazione del metodo del semplice è, come visto, $O(m^2 + (n - m)m)$, dove il termine m^2 è dovuto al calcolo di u , \tilde{a} e all'aggiornamento dell'inversa della matrice di base, mentre il termine $(n - m)m$ è dovuto al calcolo dei coefficienti di costo ridotto (si tenga presente che si tratta di una complessità di caso peggiore e che in condizioni di ottimalità i coefficienti di costo ridotto devono comunque essere calcolati tutti). Quindi la complessità computazionale di ogni iterazione è nel caso peggiore $O(nm)$.

La complessità globale dipende tuttavia in modo critico dal numero di iterazioni richieste dall'algoritmo. Sfortunatamente non esiste nessuna limitazione superiore di tipo polinomiale rispetto alla lunghezza dei dati d'ingresso sul numero di iterazioni richieste. Anzi, Klee e Minty [1972] hanno costruito un esempio in cui il numero di iterazioni è esponenziale. L'esempio è il seguente.

7.23 ESEMPIO. Si considerino le seguenti istanze di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_m \\ & \varepsilon \leq x_1 \leq 1 \\ & \varepsilon x_{j-1} \leq x_j \leq 1 - \varepsilon x_{j-1} \quad j = 2, \dots, m \end{aligned} \quad (7.10)$$

che vengono riscritte in forma standard come

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_m \\ & x_1 - r_1 = \varepsilon \\ & x_1 + s_1 = 1 \\ & x_j - \varepsilon x_{j-1} - r_j = 0 \quad j = 2, \dots, m \\ & x_j + \varepsilon x_{j-1} + s_j = 1 \quad j = 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, r_j \geq 0, s_j \geq 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Se ε fosse eguale a zero, l'insieme ammissibile di (7.10) sarebbe un cubo. Con $\varepsilon > 0$ il cubo viene leggermente deformato. Si può dimostrare che le basi di (7.11) sono tutte non degeneri e che esiste una sequenza di basi adiacenti con costo strettamente decrescente corrispondente ad una sequenza di tutti i vertici del cubo. Quindi sono richieste $2^m - 1$ iterazioni per un'istanza con $2m$ equazioni, $3m$ variabili e coefficienti limitati in valore assoluto. ■

Quindi il metodo del semplice *non* è un algoritmo polinomiale. La programmazione lineare è tuttavia un problema polinomiale come si è visto nel precedente capitolo. Nonostante questa qualificazione negativa del metodo del semplice, quasi tutte le istanze risolte praticamente hanno richiesto mediamente un numero di iterazioni lineare in m e sublineare in n . Empiricamente gli utenti del metodo del semplice tendono a valutare il numero di iterazioni compreso fra m e $4m$.

Questa affermazione è stata giustificata teoricamente da alcuni studi che hanno valutato la complessità di caso medio anziché quella di caso peggiore. Si tratta di analisi molto complesse che non è possibile riportare in questa sede. Ci limitiamo a rimandare il lettore agli articoli di Borgwardt [1982] e Smale [1983], i quali ottengono complessità medie superiori a quelle lineari precedentemente indicate. Il problema con questo tipo di analisi è che le assunzioni probabilistiche sui dati tendono a produrre istanze poco tipiche, rispetto ai casi reali. Ampio materiale sull'argomento può anche essere reperito in Borgwardt [1987], Shamir [1987] e Megiddo [1987].

7.9. Degenerazione

In presenza di basi degeneri molti risultati ottenuti precedentemente non sono più validi, in particolare:

- (a) - La condizione $\bar{c}_j \geq 0$ non è necessaria all'ottimalità.
- (b) - Il decremento del costo non è necessariamente positivo ad ogni iterazione, cioè il costo può rimanere costante durante alcune iterazioni. Di conseguenza il ragionamento secondo cui il metodo converge in un numero finito di passi viene a cadere. È quindi possibile che il metodo cicli indefinitamente all'interno di un certo insieme di basi.
- (c) - La corrispondenza fra basi e vertici (teorema 7.16) non è biunivoca. Vertici distinti corrispondono a basi distinte, però basi distinte possono corrispondere al medesimo vertice.
- (d) - Il lemma 7.18 non è valido, cioè il fatto che x^1 e x^2 siano due soluzioni di base, di basi adiacenti, non implica che la soluzione di $A(\beta^1 \cup \beta^2)x = b$ sia combinazione convessa di x^1 e x^2 .
- (e) - Non è vero che vertici adiacenti corrispondono a basi adiacenti (teorema 7.19).

7.24 ESEMPIO. (casi (a) e (c))

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 \\ & -x_1 + x_2 = 1 \\ & x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

L'insieme ammissibile è dato dall'unico punto $(0,1,0)$ che è quindi ottimo. Però relativamente alla base $\beta = \{2, 3\}$ si ha $\bar{c}_1 = -1$. ■

7.25 ESEMPIO. (casi (b) e (c))

$$\begin{aligned} \min \quad & -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 \\ & \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\ & x_3 + x_7 = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Si tratta di un famoso controesempio. Se si adotta la regola di far entrare in base l'elemento di minimo costo ridotto, e, a parità di costo ridotto, di minimo indice, allora il metodo cicla indefinitamente percorrendo la seguente sequenza di basi

$$\{5, 6, 7\} \rightarrow \{1, 6, 7\} \rightarrow \{1, 2, 7\} \rightarrow \{2, 3, 7\} \rightarrow \{3, 4, 7\} \rightarrow \{4, 5, 7\} \rightarrow \{5, 6, 7\} \quad \blacksquare$$

7.26 ESEMPIO. (caso (d))

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le basi $\beta^1 = \{1, 2\}$ e $\beta^2 = \{2, 3\}$ sono ammissibili e adiacenti con rispettive soluzioni di base $x^1 = (1, 0, 0)$ e $x^2 = (1, 0, 0)$. Tuttavia ogni soluzione di $Ax = b$, $x \geq 0$, è del tipo $x = (a + 1, a, a)$ con $a \geq 0$. Si noti che se $b = (1, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ allora β^2 non è più ammissibile. ■

7.27 ESEMPIO. (caso (e))

$$\begin{array}{ll}
 \min & -2x_1 + x_2 \\
 & x_1 - x_2 \leq 0 \\
 & x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0
 \end{array}
 \quad \text{cioè} \quad
 \begin{array}{ll}
 \min & -2x_1 + x_2 \\
 & x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
 & x_i \geq 0 \quad \forall i
 \end{array}$$

L'insieme ammissibile è disegnato in figura 7.9 a sinistra. La base $\{3, 4\}$ corrisponde al vertice y_2 e la base $\{1, 2\}$ al vertice y_1 . Questi vertici sono adiacenti mentre le rispettive basi non lo sono. Per capire ciò che avviene effettivamente si riscrive la prima disequazione come

$$x_1 - x_2 \leq \varepsilon \quad \varepsilon > 0$$

e si ha l'insieme ammissibile indicato in figura 7.9 a destra. Il vertice y_2 si scinde nei due vertici y'_2 e y''_2 corrispondenti alle basi $\{3, 4\}$ e $\{1, 4\}$ e y'_2 non è adiacente a y_1 . ■

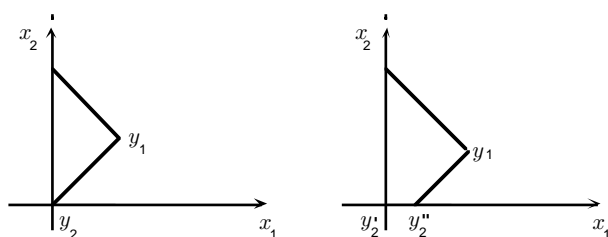


FIGURA 7.9

Si noti che la proprietà che gli intorni sono esatti (teorema 7.20) continua a valere anche in presenza di degenerazione grazie alla definizione di base ottima (più forte di soluzione ottima). Infatti, nella ricerca locale operata dal metodo del simplesso, non vengono tanto esaminati i decrementi di costo relativi a basi adiacenti quanto i costi ridotti relativi a queste basi. In questo modo è come se il metodo lavorasse con dati perturbati per i quali le basi adiacenti corrispondono a vertici diversi. Infatti i costi ridotti *non* dipendono da b , mentre è b responsabile della degenerazione.

In ogni caso la degenerazione comporta la perdita di diverse importanti proprietà. In particolare la possibilità di ciclaggio dell'algoritmo è l'eventualità più seria. Il fatto curioso è che non si è ancora mai riscontrato alcun fenomeno di ciclaggio in problemi reali e questo è probabilmente dovuto alla particolare ricerca locale del metodo del simplesso, come spiegato sopra. L'esempio 7.25 è uno dei pochi casi di ciclaggio noti, costruiti tutti comunque a tavolino a questo scopo.

Una lunga e assodata esperienza suggerisce quindi di non preoccuparsi se vi sono basi degeneri, eventualità tutt'altro che infrequente per alcuni problemi di programmazione lineare, quali quelli originati da problemi di ottimizzazione combinatoria.

Cionondimeno l'esigenza, anche solo teorica, di prevenire possibili ciclaggi, deve essere comunque soddisfatta. A tal fine il problema è risolto essenzialmente in uno dei due seguenti modi:

- un vertice è degenero quando si trova nell'intersezione di più di n piani. Si tratta quindi di una situazione critica che si dissolve perturbando opportunamente i dati del problema. In tal modo il vertice si scinde in un numero di vertici minore o uguale alle basi ammissibili degeneri che gli corrispondevano. Il problema perturbato risulta pertanto non degenero e quindi è garantita la finitezza dell'algoritmo;

– dato che il ciclaggio consiste nella ripetizione di una certa configurazione di basi, si tratta di escogitare delle regole di entrata in base che impediscano tali ripetizioni.

Le tecniche del secondo tipo sono più semplici e sono perciò maggiormente adottate. In particolare la seguente regola dovuta a Bland [1977] è probabilmente la più semplice:

7.28 TEOREMA. *Si scelga l'elemento da far entrare in base con il criterio*

$$p = \min\{j : \bar{c}_j < 0\}$$

e l'elemento da far uscire dalla base con il criterio

$$\beta(q) = \min\{\beta(i) : \bar{a}_i > 0 \text{ e } x_{\beta(i)}/\bar{a}_i \leq x_{\beta(k)}/\bar{a}_k \quad \forall k : \bar{a}_k > 0\}$$

allora il metodo del simplesso termina in un numero finito di iterazioni.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga che vi sia ciclaggio. Sia $\hat{\beta}$ l'insieme degli elementi che entrano ed escono dalla base durante il ciclo. Sia $q = \max\{i : i \in \hat{\beta}\}$. Siano β^1 e β^2 due basi del ciclo tali che $q \in \hat{\beta}$ entra in β^1 ed esce da β^2 .

Siano \bar{c}_j i costi ridotti relativi a β^1 . Allora in base all'algoritmo:

$$\begin{aligned} \bar{c}_q^1 &< 0 \\ \bar{c}_j^1 &\geq 0 \quad j \in \hat{\beta} \setminus q \end{aligned} \quad (7.12)$$

Se $p \in \hat{\beta}$ è l'elemento che sostituisce $q = \beta_h^2$ in β^2 , si ha anche

$$(B_2^{-1} A^p)_i = \bar{a}_i \leq 0 \quad \forall i : \beta_i^2 \in \hat{\beta} \setminus q \quad (7.13)$$

e

$$\bar{c}_p^2 = c_p - c_{\beta^2} B_2^{-1} A^p < 0 \quad (7.14)$$

Facciamo ora vedere che (7.12), (7.13) e (7.14) portano ad una contraddizione. Infatti

$$\begin{aligned} c_p - c_{\beta^2} B_2^{-1} A^p &= c_p - c_{\beta^1} B_1^{-1} A^p + c_{\beta^1} B_1^{-1} A^p - c_{\beta^2} B_2^{-1} A^p = \\ &= c_p - c_{\beta^1} B_1^{-1} A^p + c_{\beta^2} (-B_2^{-1} A^p) - c_{\beta^1} B_1^{-1} B_2 (-B_2^{-1} A^p) = \\ &= \bar{c}_p^1 + \bar{c}_{\beta^2}^1 (-B_2^{-1} A^p) \geq 0 \end{aligned}$$

L'ultima diseguaglianza deriva dal fatto che $\bar{c}_p^1 \geq 0$ in base a (7.12) e che $\bar{c}_{\beta^2}^1 (-B_2^{-1} A^p) \geq 0$ in quanto $\bar{c}_{\beta_i^2}^1 = 0$ se $\beta_i^2 \in \beta^1$ e se invece $\beta_i^2 \notin \beta^1$, ciò significa $\beta_i^2 \in \hat{\beta} \setminus q$, quindi $\bar{c}_{\beta_i^2}^1 \geq 0$ in base ad (7.12) e $(-B_2^{-1} A^p)_i \geq 0$ in base a (7.13). ■

7.10. Variabili limitate superiormente

È frequente il caso in cui le variabili di un problema di programmazione lineare si presentino vincolate da una limitazione superiore. Inoltre possono essere presenti anche delle limitazioni inferiori diverse dallo zero. Consideriamo perciò in generale il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & c x \\ & A x = b \\ & d^- \leq x \leq d^+ \end{aligned} \quad (7.15)$$

dove le limitazioni d_j^- , d_j^+ sono finite $\forall j$ ed inoltre, senza perdita di generalità $d_j^- < d_j^+$, $\forall j$.

Si potrebbe pensare di trasformare (7.15) in forma standard introducendo una variabile $\xi := x - d^-$ e portando nel vincolo esplicito la limitazione $\xi \leq d^+ - d^-$. Questa trasformazione comporta quindi una base di cardinalità $m + n$ e un numero di variabili pari a $2n$. Dato l'aumento di costo computazionale che ne deriva è opportuno invece adottare un procedimento diverso, che fa uso del concetto di soluzione di base estesa.

Per introdurre questo concetto definiamo una base di $Ax = b$ nel modo già visto con l'aggiunta che l'insieme η viene ripartito in due sottoinsiemi η^- e η^+ . Pertanto il termine "base" in questo nuovo contesto non indica semplicemente l'insieme β , ma la partizione (β, η^-, η^+) . Siano N^- e N^+ le due sottomatrici di A ottenute raggruppando le colonne corrispondenti a η^- e η^+ rispettivamente. Analogamente anche i vettori x , d^- e d^+ possono essere ripartiti come $(x_\beta, x_{\eta^-}, x_{\eta^+})$, $(d_\beta^-, d_{\eta^-}^-, d_{\eta^+}^-)$ e $(d_\beta^+, d_{\eta^-}^+, d_{\eta^+}^+)$.

7.29 DEFINIZIONE. Si definisce soluzione estesa di base del problema (7.15) ogni soluzione di $Ax = b$ del seguente tipo:

$$\begin{aligned} x_\beta &:= B^{-1}(b - N^- d_{\eta^-}^- - N^+ d_{\eta^+}^+) \\ x_{\eta^-} &:= d_{\eta^-}^- \\ x_{\eta^+} &:= d_{\eta^+}^+ \end{aligned}$$

Se $d_\beta^- \leq x_\beta \leq d_\beta^+$ diremo che la soluzione di base, la matrice di base e la base sono ammissibili. Se $d_\beta^- < x_\beta < d_\beta^+$ diremo che la soluzione di base, la matrice di base e la base sono ammissibili e non degeneri. ■

Per modificare il metodo del semplice in modo da tener conto delle soluzioni estese di base, conviene, in corrispondenza di ogni base, introdurre una variabile ξ definita come

$$\xi_\beta := x_\beta \quad \xi_{\eta^-} := x_{\eta^-} - d_{\eta^-}^- \quad \xi_{\eta^+} := d_{\eta^+}^+ - x_{\eta^+}$$

Pertanto il problema (7.15) è equivalente a

$$\begin{aligned} \min \quad & c_\beta \xi_\beta + c_{\eta^-} \xi_{\eta^-} - c_{\eta^+} \xi_{\eta^+} \\ & B \xi_\beta + N^- (\xi_{\eta^-} + d_{\eta^-}^-) - N^+ (\xi_{\eta^+} - d_{\eta^+}^+) = b \\ & d_\beta^- \leq \xi_\beta \leq d_\beta^+ \\ & 0 \leq \xi_\eta \leq d_\eta^+ - d_\eta^- \end{aligned}$$

il quale, esprimendo ξ_β esplicitamente in funzione di ξ_η e indicando con $\hat{\xi}_\beta$ i valori relativi alla base corrente, è a sua volta equivalente a

$$\begin{aligned} \min \quad & (c_{\eta^-} - c_\beta B^{-1} N^-) \xi_{\eta^-} - (c_{\eta^+} - c_\beta B^{-1} N^+) \xi_{\eta^+} \\ & \hat{\xi}_\beta - d_\beta^+ \leq B^{-1} N^- \xi_{\eta^-} - B^{-1} N^+ \xi_{\eta^+} \leq \hat{\xi}_\beta - d_\beta^- \\ & 0 \leq \xi_\eta \leq d_\eta^+ - d_\eta^- \end{aligned} \quad (7.16)$$

Da questa formulazione e dalla seguente definizione di costi ridotti

$$\bar{c}_j := \begin{cases} c_j - c_\beta B^{-1} A^j & \text{se } j \in \eta^- \\ -c_j + c_\beta B^{-1} A^j & \text{se } j \in \eta^+ \end{cases}$$

si ricava immediatamente la seguente condizione sufficiente di ottimalità:

7.30 TEOREMA. Se $\bar{c}_\eta \geq 0$ allora la base corrente è ottima. ■

Come nel caso normale si può dimostrare facilmente la seguente condizione necessaria di ottimalità:

7.31 TEOREMA. Se la base corrente è non degenera e ottima allora $\bar{c}_\eta \geq 0$. ■

Quindi se la base corrente non è ottima esiste un indice $p \in \eta$ tale che $\bar{c}_p < 0$. Consideriamo quindi il seguente problema, ottenuto da (7.16) ponendo $\xi_j = 0, \forall j \neq p$ e $\tilde{a} = B^{-1}A^p$ se $p \in \eta^-$ e $\tilde{a} = -B^{-1}A^p$ se $p \in \eta^+$.

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}_p \xi_p \\ & \hat{\xi}_\beta - d_\beta^+ \leq \xi_p \tilde{a} \leq \hat{\xi}_\beta - d_\beta^- \\ & 0 \leq \xi_p \leq d_p^+ - d_p^- \end{aligned} \quad (7.17)$$

La risoluzione di (7.17) è immediata ed è data da

$$\hat{\xi}_p := \min \left\{ \min_{i:\tilde{a}_i > 0} \frac{\hat{\xi}_{\beta(i)} - d_{\beta(i)}^-}{\tilde{a}_i}; \min_{i:\tilde{a}_i < 0} \frac{d_{\beta(i)}^+ - \hat{\xi}_{\beta(i)}}{-\tilde{a}_i}; d_p^+ - d_p^- \right\}$$

A seconda di quale dei tre termini realizzati il minimo la base viene modificata in tre modi diversi. Se avviene

$$\hat{\xi}_p = \frac{\hat{\xi}_{\beta(q)} - d_{\beta(q)}^-}{\tilde{a}_q} = \frac{\hat{x}_{\beta(q)} - d_{\beta(q)}^-}{\tilde{a}_q}$$

allora p esce da η ed entra in β mentre $\beta(q)$ esce da β ed entra in η^- . Se invece avviene

$$\hat{\xi}_p = \frac{d_{\beta(q)}^+ - \hat{\xi}_{\beta(q)}}{-\tilde{a}_q} = \frac{d_{\beta(q)}^+ - \hat{x}_{\beta(q)}}{-\tilde{a}_q}$$

allora p esce da η ed entra in β mentre $\beta(q)$ esce da β ed entra in η^+ . Nel terzo caso invece si ha un semplice passaggio di p da η^- a η^+ (o viceversa) e la variabile x_p passa dal valore d_p^- a quello d_p^+ (o viceversa).

Si hanno quindi in totale sei possibili cambiamenti di base, tenendo conto del fatto che $p \in \eta^-$ oppure $p \in \eta^+$. Nei due casi in cui il cambiamento consiste in una diversa partizione di η , e β rimane quindi immutato, non c'è ovviamente bisogno di aggiornare la matrice di base. Negli altri casi, una volta stabilito quale elemento entra in β e quale ne esce, si aggiorna $W := B^{-1}$ secondo le formule definite precedentemente e cioè:

$$\bar{W}_i^j := \begin{cases} W_i^j - W_q^j \tilde{a}_i / \tilde{a}_q & \text{se } i \neq q \\ W_q^j / \tilde{a}_q & \text{se } i = q \text{ e } p \in \eta^- \\ -W_q^j / \tilde{a}_q & \text{se } i = q \text{ e } p \in \eta^+ \end{cases}$$

dove l'ultima riga tiene conto della particolare definizione di \tilde{a} . Le componenti in base della soluzione vengono aggiornate secondo le formule:

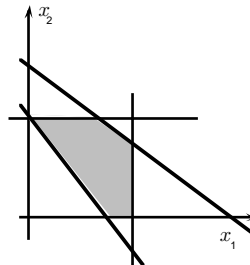
$$x'_{\beta(i)} := \begin{cases} \hat{x}_{\beta(i)} - \tilde{a}_i \hat{\xi}_p & \text{se } i \neq q \text{ oppure } p \notin \beta' \\ d_p^- + \hat{\xi}_p & \text{se } i = q, p \in \eta^- \text{ e } p \in \beta' \\ d_p^+ - \hat{\xi}_p & \text{se } i = q, p \in \eta^+ \text{ e } p \in \beta' \end{cases} \quad (7.18)$$

dove β' corrisponde alla nuova base.

7.32 ESERCIZIO. Si verifichi che la variabile u definita come $c_\beta B^{-1}$ è, relativamente alla base ottima, l'ottimo del problema duale ottenuto ponendo $Ax = b$ come vincolo esplicito e che i costi ridotti \bar{c}_j , $j \in \eta^+$ sono le variabili duali rispetto al vincolo $x_j \leq d_j^+$. ■

7.33 ESEMPIO. Sia dato il seguente problema (già in forma standard):

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 4x_2 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6 \\ & 0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \\ & 0 \leq x_3, \quad 0 \leq x_4 \end{aligned}$$



Sia la base iniziale

$$\beta = \{1, 4\} \quad \eta^- = \{3\} \quad \eta^+ = \{2\}$$

con

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} & B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 4/3 & -1 \end{pmatrix} & x_\beta &= \begin{pmatrix} 4/3 \\ 16/3 \end{pmatrix} \\ u &= (1/3 \quad 0) & \bar{c}_2 &= -8/3 & \bar{c}_3 &= -1/3 \end{aligned}$$

Sia quindi $p = 2$. Allora

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -7/3 \end{pmatrix} \quad \hat{\xi}_2 = \min \left\{ \frac{2 - 4/3}{4/3}; \frac{\infty - 16/3}{7/3}; 2 \right\} = \frac{1}{2}$$

L'indice 1 esce dalla base e la variabile x_1 assume il valore della limitazione superiore. La nuova base è:

$$\beta = \{2, 4\} \quad \eta^- = \{3\} \quad \eta^+ = \{1\}$$

e quindi

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 3/4 & -1 \end{pmatrix} & x_\beta &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ 13/2 \end{pmatrix} \\ u &= (1 \quad 0) & \bar{c}_1 &= 2 & \bar{c}_3 &= -1 \end{aligned}$$

Necessariamente $p = 3$. Quindi

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad \hat{\xi}_3 = \min \left\{ \frac{3/2 - 0}{1/4}; \frac{13/2 - 0}{3/4}; +\infty \right\} = 6$$

Quindi $q = 1$ e la nuova base è;

$$\beta = \{3, 4\} \quad \eta^- = \{2\} \quad \eta^+ = \{1\}$$

da cui

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & x_\beta &= \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \\ u &= (0 \quad 0) & \bar{c}_1 &= -1 & \bar{c}_2 &= 4 \end{aligned}$$

Quindi $p = 1$, da cui

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \hat{\xi}_1 = \min \left\{ \frac{\infty - 6}{3}; \frac{2 - 0}{4}; 2 \right\} = \frac{1}{2}$$

Quindi $q = 2$ con nuova base data da

$$\beta = \{3, 1\} \quad \eta^- = \{2, 4\} \quad \eta^+ = \emptyset$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad x_\beta = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$u = (0 \quad 1/4) \quad \bar{c}_2 = 13/4 \quad \bar{c}_4 = 1/4$$

e quindi la base è ottima. La soluzione ottima è quindi data da

$$x = (1.5 \quad 0 \quad 7.5 \quad 0)$$

Si rifaccia l'esempio, come esercizio, scegliendo alla prima iterazione $p = 3$ anziché $p = 2$ (vi sarà una base degenera). ■

7.11. Simplesso duale

Vi sono molte situazioni in cui, a partire da un ottimo primale, si altera b o si aggiunge un vincolo in modo da rendere non ammissibile l'ottimo e si cerca un nuovo ottimo ammissibile. In questi casi non è conveniente ricominciare da capo il metodo del simplesso per il nuovo problema, piuttosto è utile sfruttare il fatto che la variabile duale ottima del problema originario continua a rimanere ammissibile per il problema alterato. Siccome il problema duale di

$$\begin{aligned} \min \quad & c x \\ & A x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

è

$$\begin{aligned} \max \quad & u b \\ & u A \leq c \end{aligned} \tag{7.19}$$

si vede che si potrebbe pensare ad un metodo in cui m disequazioni in (7.19) sono vincolate ad essere soddisfatte come equazioni mentre le altre devono essere semplicemente ammissibili per il valore di u determinato dalle m equazioni (che formano la base). In un'iterazione generica il valore di x calcolato con questa base non è ammissibile. Si tratta di cambiare la base in modo da renderlo ammissibile incrementando contemporaneamente il valore obiettivo duale.

Sia ad esempio $x_r < 0$ con $r = \beta(q)$. Affinché $x_r = 0$ bisogna far uscire l' r -esimo vincolo di (7.19) dalla base. Quindi dobbiamo risolvere

$$u' B = c_\beta - \alpha e_q^T$$

dove $\alpha > 0$ deve essere tale che il valore di u' corrispondente è ammissibile per gli altri vincoli ed almeno una disequazione fuori base è soddisfatta come equazione. Quindi

$$u' = u - \alpha e_q^T B^{-1} = u - \alpha W_q \tag{7.20}$$

e

$$uA - \alpha e_q^T B^{-1} A \leq c$$

Indicando $\tilde{a}^j = B^{-1} A^j$ e $\bar{c} = c - uA$ si ha

$$-\alpha \tilde{a}_q^j \leq \bar{c}_j \quad \forall j$$

da cui

$$\alpha = \min_{j: \tilde{a}_q^j < 0} -\frac{\bar{c}_j}{\tilde{a}_q^j} \quad (7.21)$$

Si noti anche che

$$u' b = ub - \alpha e_q^T B^{-1} b = ub - \alpha e_q^T x_\beta = ub - \alpha x_r$$

Perciò, se $\alpha > 0$ il valore dell'obiettivo duale cresce (dato che $x_r < 0$). Se $\tilde{a}_q^j \geq 0, \forall j$, il problema duale è illimitato ed il primale non ammissibile. Sia p l'indice per cui si ottiene il minimo in (7.21). Quindi p entra in base e $r = \beta(q)$ esce e l'aggiornamento della base è del tutto simile al caso normale. Se non vi sono iterazioni degeneri ($\alpha > 0$) allora il metodo deve terminare perché il valore dell'obiettivo cresce ad ogni iterazione.

Se il problema primale presenta variabili limitate anche superiormente allora la non ammissibilità può essere dovuta o a $x_r < d_r^-$ oppure a $x_r > d_r^+$. Inoltre i vincoli duali da rispettare sono

$$uA^j \leq c^j \quad j \in \eta^- \quad uA^j \geq c^j \quad j \in \eta^+ \quad (7.22)$$

Quindi se $x_r < d_r^-$ allora $r = \beta(q)$ esce dalla base e va in η^- e quindi dovrà essere soddisfatto il vincolo $uA^r \leq c^r$. Se invece $x_r > d_r^+$ allora r esce dalla base e va in η^+ e dovrà essere soddisfatto il vincolo $uA^r \geq c^r$. Nel primo caso si ha

$$u' B = c_\beta - \alpha e_q^T$$

e nel secondo

$$u' B = c_\beta + \alpha e_q^T$$

Nel primo caso si ottiene

$$-\alpha \tilde{a}_q^j \leq \bar{c}_j \quad j \in \eta^- \quad -\alpha \tilde{a}_q^j \geq -\bar{c}_j \quad j \in \eta^+$$

da cui

$$\alpha = \min \left\{ \min_{j \in \eta^-: \tilde{a}_q^j < 0} -\frac{\bar{c}_j}{\tilde{a}_q^j}; \min_{j \in \eta^+: \tilde{a}_q^j > 0} \frac{\bar{c}_j}{\tilde{a}_q^j} \right\} \quad (7.23)$$

e nel secondo caso

$$\alpha \tilde{a}_q^j \leq \bar{c}_j \quad j \in \eta^- \quad \alpha \tilde{a}_q^j \geq -\bar{c}_j \quad j \in \eta^+$$

da cui

$$\alpha = \min \left\{ \min_{j \in \eta^-: \tilde{a}_q^j > 0} \frac{\bar{c}_j}{\tilde{a}_q^j}; \min_{j \in \eta^+: \tilde{a}_q^j < 0} -\frac{\bar{c}_j}{\tilde{a}_q^j} \right\} \quad (7.24)$$

Il calcolo di α determina quale indice entra in base. La nuova base soddisfa per costruzione la condizione di ottimalità, ma non è detto che sia ammissibile. Per verificarlo bisogna calcolare x applicando le formule di trasformazione (7.18). Bisogna notare che il valore $\hat{\xi}_p$ era stato ottenuto valutando quale variabile in base raggiungeva per prima la limitazione (inferiore o superiore). In questo caso invece si sa già a priori quale variabile debba raggiungere la limitazione, in quanto è la variabile non ammissibile che si vuol far uscire dalla base per renderla ammissibile. Quindi il valore di $\hat{\xi}_p$ è uguale alla divisione per \tilde{a}_q della differenza fra il valore (non ammissibile) della variabile e la limitazione (inferiore o superiore) più vicina.

7.34 ESEMPIO. Si consideri l'esempio 7.33, la cui istanza è

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 4x_2 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6 \\ & 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{aligned}$$

e si supponga che, ottenuta la soluzione ottima $\hat{x}_1 = 1.5$, $\hat{x}_2 = 0$, $\hat{x}_3 = 7.5$, $\hat{x}_4 = 0$ (con base ottima $\beta = \{3, 1\}$, $\eta^- = \{2, 4\}$, $\eta^+ = \emptyset$), si cambi la limitazione superiore di x_1 in $x_1 \leq 1$ (questa è una situazione tipica della programmazione lineare intera, come si vedrà più avanti). Allora si ha $\hat{x}_1 > 1$. Facendo riferimento alla base ottima dell'esempio 7.33 si ha $r = 1 = \beta(2)$ e quindi $q = 2$. L'indice 1 deve uscire dalla base per andare in η^+ . Per calcolare \tilde{a}_q^j , $j = 1, \dots, 4$, si moltiplica la riga q -esima di B^{-1} per A . In questo caso si ottiene

$$\tilde{a}_q = (1 \quad 3/4 \quad 0 \quad -1/4)$$

Per calcolare α bisogna applicare la formula (7.24). Essendo $\eta^+ = \emptyset$, e $\tilde{a}_q^4 < 0$, il valore di α è direttamente determinato solo dall'indice 2 e quindi

$$\alpha = \frac{\bar{c}_2}{\tilde{a}_q^2} = \frac{13/4}{3/4} = \frac{13}{3}$$

L'indice 2 entra in base e quindi la nuova base è $\beta = \{3, 2\}$, $\eta^- = \{4\}$, $\eta^+ = \{1\}$. Si ha $\tilde{a} = B^{-1}A^2 = (7/4, 3/4)$ e quindi $\hat{\xi}_p = 1/2 \cdot 4/3 = 2/3$. Allora si ottiene

$$x_3 := 15/2 - 7/4 \cdot 2/3 = 19/3 \quad x_2 := 0 + 2/3 = 2/3$$

Essendo questi valori ammissibili, la soluzione è ottima. Il valore ottimo duale può essere calcolato tramite (7.20) e quindi si aggiornano i valori come: $u := u + \alpha W_q = (0, 1/4) + 13/3(0, 1/4) = (0, 4/3)$. La nuova matrice di base è:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

e si può verificare che $u = c_\beta B^{-1} = (0, 4)B^{-1} = (0, 4/3)$. I nuovi costi ridotti sono $\bar{c}_4 := c_4 - uA^4 = 4/3$, $\bar{c}_1 := -c_1 + uA^1 = 13/3 = \alpha$ (perché?).

Si supponga ora di imporre a questa soluzione il vincolo $x_2 \geq 1$. Si ha $r = 1 = \beta(2)$ e quindi $q = 2$. L'indice 2 deve uscire dalla base per andare in η^- . Si ottiene

$$\tilde{a}_q = (4/3 \quad 1 \quad 0 \quad -1/3)$$

Per calcolare α bisogna applicare ora la formula (7.23).

$$\alpha = \min \left\{ -\frac{4/3}{-1/3}; \frac{13/3}{4/3} \right\} = 13/4$$

L'indice 1 entra in base e quindi la nuova base è $\beta = \{3, 1\}$, $\eta^- = \{2, 4\}$. Si ha $\tilde{a} = -B'^{-1}A^1 = (7/3, -4/3)$ e quindi $\hat{\xi}_p = -1/3 \cdot -3/4 = 1/4$. Allora si ottiene

$$x_3 := 19/3 - 7/3 \cdot 1/4 = 23/4, \quad x_1 := 1 - 1/4 = 3/4,$$

che, essendo ammissibile, è anche ottimo. ■

7.12. Generazione di colonne

In alcuni problemi di programmazione lineare i valori della matrice A e del costo c possono essere assegnati implicitamente tramite una relazione che deve essere appunto soddisfatta dai valori stessi. Se A e c fossero generati esplicitamente a partire dalla relazione che li definisce si andrebbe incontro ad un onere computazionale eccessivo in quanto nella maggior parte dei casi d'interesse il numero di colonne di A tende a crescere esponenzialmente rispetto ai dati d'ingresso.

Tuttavia si può notare che solo parte delle colonne di A entra in base durante le iterazioni del metodo del semplice e che la conoscenza di tutte le componenti di A e di c viene richiesta solo nel calcolo di $\bar{c}_p = \min_j \bar{c}_j$. Quindi se si riesce a basare questo calcolo sulla relazione implicita che definisce A e c , si può fare a meno di generare esplicitamente tutte le componenti di A e c , bastando quelle che entrano in base, che verranno generate esplicitamente solo nel momento in cui dovranno entrare in base.

7.35 ESEMPIO. Si consideri il seguente problema primale in cui X è un insieme finito anche se molto grande e non noto esplicitamente:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & x \in X \end{aligned}$$

Indichiamo $f_x := f(x)$ e $g_x := g(x)$. Il problema duale si può esprimere come:

$$\begin{aligned} d := \max \quad & u_0 \\ & u_0 \leq f_x + u g_x \quad \forall x \in X \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

Si tratta di un problema di programmazione lineare nelle variabili u_0 e u il cui duale è, dopo l'introduzione delle variabili ausiliarie per trasformarlo in forma standard:

$$\begin{aligned} d = \min \quad & \sum_{x \in X} f_x \alpha_x \\ & \sum_{x \in X} \alpha_x = 1 \\ & - \sum_{x \in X} g_x \alpha_x - s = 0 \\ & \alpha_x \geq 0 \quad s \geq 0 \end{aligned} \tag{7.25}$$

Come previsto questo problema non è altro che la versione convessificata del problema primale. Il numero di colonne di (7.25) è $|X| + m$, ma non è necessario generarle tutte per eseguire il metodo del semplice. Infatti i coefficienti ridotti di costo sono dati da

$$\bar{c}_x = f_x - (u_0 \quad u) \begin{pmatrix} 1 \\ -g_x \end{pmatrix} = f_x + u g_x - u_0$$

dove u_0 e u sono generate durante le iterazioni del metodo del semplice al solito modo. Quindi si ha

$$\min_{x \in X} \bar{c}_x = \min_{x \in X} f_x + u g_x - u_0 = L(u) - u_0$$

Se si verifica quindi $L(u) < u_0$ la colonna da inserire in base è la colonna $(1, -g_x)^T$ con $x \in X(u)$. Si fa notare che tale colonna viene generata solo dal calcolo di $L(u)$. A questo punto la determinazione della colonna da far uscire dalla base e l'aggiornamento della matrice e della soluzione di base vengono eseguiti al solito modo. La colonna che esce dalla base non viene mantenuta in memoria.

Bisogna inoltre tener conto dei costi ridotti relativi alle variabili ausiliarie. Si ottiene immediatamente che il costo ridotto relativo alla variabile ausiliaria i -esima è dato da $\bar{c}_i = u_i$ e quindi la condizione di ottimalità è data da

$$L(u) = u_0 \quad u \geq 0$$

e il valore ottimo duale è u_0 .

L'inizializzazione del metodo richiede la conoscenza di un valore ammissibile di x , nel qual caso è immediato ricavare una soluzione di base iniziale. Se una soluzione ammissibile non fosse immediatamente disponibile bisogna adottare delle tecniche di tipo prima fase per generare tale soluzione.

L'interpretazione geometrica del metodo è la seguente: sia $X^k \subset X$ l'insieme delle soluzioni generate fino alla k -esima iterazione del metodo (si veda la figura 7.10). Il poliedro $P^k := \text{conv}(f - g)(X^k) + R_+^{m+1}$ interseca l'asse verticale in un punto $(u_0, 0)$. Il piano H^k di supporto a P^k passante per tale punto ha equazione $y_0 + u y = u_0$. Il calcolo di u_0 e u genera appunto H^k . Il calcolo di $\min \bar{c}_x$ corrisponde al calcolo del piano H_0^k di supporto a $Y = \text{epi } v$ e parallelo a H^k . Se H_0^k e H^k sono diversi si ottiene un punto $x \in X(u)$ che aggiorna P^k (si veda in figura 7.11 l'iterazione successiva). L'aggiornamento della base corrisponde al calcolo di quale faccia di P^{k+1} interseca l'asse verticale e così di seguito finché $H^k = H_0^k$, cioè $L(u) = u_0$.

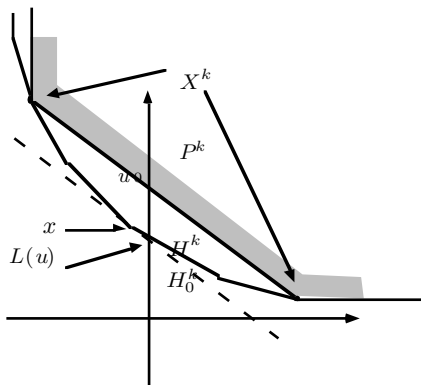


FIGURA 7.10

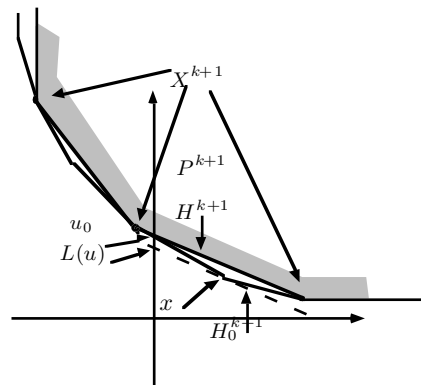


FIGURA 7.11

7.36 ESEMPIO. Applichiamo ora la tecnica di generazione di colonne per risolvere il problema duale dell'esempio 5.20, cioè un duale di un TSP su un grafo completo di 6 nodi con costi dati da: $c_{12} = c_{13} = c_{23} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 2$, $c_{16} = c_{25} = c_{34} = 1$, $c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{26} = c_{35} = c_{36} = 10$.

Il problema (7.25) si presenta in questo caso senza le variabili ausiliarie, in quanto il vincolo esplicito è di eguaglianza. Inoltre, dato che i quasi-alberi sul nodo 1 hanno tutti grado 2 nel nodo 1, il vincolo esplicito del grado nel nodo 1 è ridondante e può essere omissso. Allora la matrice di base è di ordine 6, con la prima riga che si riferisce al vincolo sulla somma $\sum_{x \in X} \alpha_x$ e le altre al vincolo sul grado nei nodi 2, 3, 4, 5 e 6. Per costruire la matrice di base iniziale

serve una qualsiasi soluzione ammissibile. In questo caso non è un problema trovare un circuito ammissibile. Questo può essere ad esempio il circuito $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ di costo 10, che etichettiamo come quasi-albero n. 1. Con questo quasi-albero si forma la prima colonna della matrice di base che risulta $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Le altre colonne della matrice di base sono arbitrarie purché la matrice sia non singolare. Ad ognuna di queste colonne viene associata una variabile fittizia che ha comunque sempre valore 0 e quindi non è mai influente nella determinazione dell'ottimo. Data la prima colonna, la base di partenza può essere la matrice identica. Il costo delle variabili fittizie può essere fissato a 0, dato che è ininfluente. Allora $c_\beta = (10, 0, 0, 0, 0, 0)$ e $(u_0, u) = c_\beta B^{-1} = (10, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Si tratta ora di verificare la condizione di ottimalità $L(u) \geq u_0$. Il calcolo di $L(u)$ corrisponde alla determinazione del minimo quasi-albero di supporto come nell'esercizio 5.20 ma con la differenza che ora non c'è la variabile duale nel nodo 1, visto che tale vincolo è stato omesso. Quindi i costi degli archi vengono modificati in $c_{ij} - u_i - u_j$ con la convenzione che $u_1 = 0$. Il quasi-albero che si ottiene con i costi modificati (di fatto in questa prima iterazione i costi non sono modificati dato che tutte le variabili duali ai nodi sono nulle) è raffigurato in figura 7.12 ed ha costo 9. Identifichiamo questo quasi-albero come quasi-albero n. 2. Abbiamo quindi $L(u) = 2 \sum_{i=2}^5 u_i + c_2 = 9 < u_0 = 10$, da cui la condizione d'ottimalità non è soddisfatta e viene generata la colonna relativa al quasi-albero n. 2, ovvero $(1, 1, 0, 0, -1, 0)$. L'introduzione in base di questa colonna provoca l'uscita della seconda colonna.

La nuova matrice di base e il vettore $c_\beta = (10, 9, 0, 0, 0, 0)$ determinano le variabili duali $(u_0, u) = (10, -1, 0, 0, 0, 0)$. Con questi valori si ottiene il quasi-albero n. 3 in figura 7.13 di costo $c_3 = 9$ (e minimo costo modificato 10). Allora $L(u) = -2 + 10 < u_0 = 10$ e viene generata la colonna relativa al quasi-albero n.3, cioè $(1, -1, 0, 1, 0, 0)$. Questa entra in base facendo uscire la quarta colonna della base.

La nuova base e il vettore $c_\beta = (10, 9, 0, 9, 0, 0)$ determinano $(u_0, u) = (10, -1, 0, -2, 0, 0)$. Con questi valori viene generato il quasi-albero n. 4 di costo $c_4 = 9$ (e minimo costo modificato 13) (vedi figura 7.14). Allora $L(u) = -6 + 13 < u_0 = 10$. Viene generata la colonna $(1, 0, 1, -1, 0, 0)$ che entra in base al posto della terza colonna.

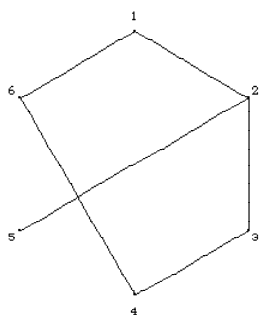


FIGURA 7.12

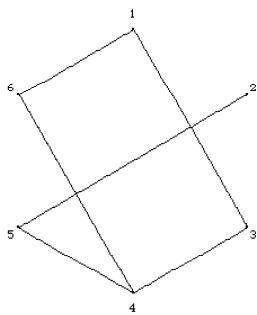


FIGURA 7.13

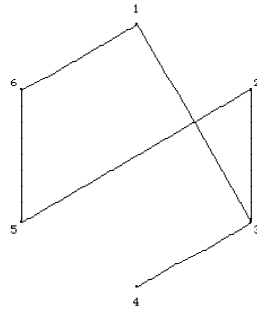


FIGURA 7.14

La soluzione di base rimane ancora quella iniziale ($\alpha_1 = 1$ e tutto il resto nullo), pur essendo variata la base (ovviamente c'è degenerazione), le variabili duali sono $(u_0, u) = (10, -1, -3, -2, 0, 0)$ che danno luogo al quasi-albero n. 5 di figura 7.15 di costo 10 (e minimo costo modificato 18). Quindi $L(u) = -12 + 18 < u_0 = 10$. Viene così generata la colonna $(1, 1, -1, -1, 1, 0)$ che fa uscire dalla base la prima colonna, cioè quella corrispondente al circuito iniziale. A questo punto si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} (u_0, u) &= \left(\frac{46}{5} \quad -\frac{1}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad -\frac{2}{5} \quad 0 \quad 0 \right) \\ \alpha &= \left(\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad 0 \quad 0 \right) \\ c_\beta &= (10 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 0 \quad 0) \end{aligned}$$

Il valore corrente ottimo si è abbassato da 10 a 46/5 e la nuova soluzione di base corrisponde ad una combinazione convessa di quasi-alberi che dà luogo ad un circuito ‘virtuale’. Viene generato il quasi-albero n. 5 (figura 7.16) di costo 9 (e minimo costo modificato 54/5). Quindi $L(u) = -12/5 + 54/5 = 42/5 < u_0 = 46/5$.

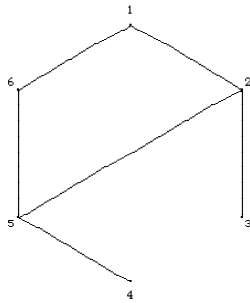


FIGURA 7.15

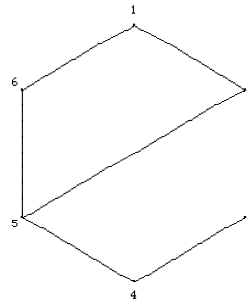


FIGURA 7.16

Introducendo in base la colonna generata $(1, 0, -1, 0, 1, 0)$ esce la colonna 1 (quella appena entrata) e si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} (u_0, u) &= (9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \\ \alpha &= \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \right) \\ c_\beta &= (9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 0 \quad 0) \end{aligned}$$

Con questi valori si riottiene ovviamente il quasi-albero n. 2 e quindi $L(u) = 0 + 9 = u_0 = 9$ e la soluzione è ottima duale. La soluzione è quindi una combinazione convessa dei quattro quasi-alberi delle figure 7.12, 7.13, 7.14 e 7.16. Come si può notare la combinazione convessa dei gradi in ogni nodo è esattamente uguale a 2. Ovviamente si tratta di un’istanza in cui non vale la dualità forte. Il valore ottimo è 10 e uno degli ottimi è il quasi albero n.1. ■

7.37 ESEMPIO. Consideriamo un problema di programmazione lineare con variabili limitate inferiormente e superiormente. Sia X l’insieme dei vertici del poliedro $\{x : d^- \leq x \leq d^+\}$. Le soluzioni ammissibili sono quegli elementi di $\text{conv}(X)$ che soddisfano al vincolo $Ax \geq b$. Quindi il problema da risolvere è

$$\begin{aligned} v := \min \quad & \sum_{x \in X} (c x) \alpha_x \\ & \sum_{x \in X} \alpha_x = 1 \\ & \sum_{x \in X} (A x) \alpha_x \geq b \\ & \alpha_x \geq 0 \end{aligned} \tag{7.26}$$

Il problema (7.26) ha 2^n variabili. Tuttavia il calcolo del minimo coefficiente di costo ridotto, date le variabili duali (u_0, u) ricavate dalla base di (7.26) si può risolvere senza esaminare esplicitamente tutte le colonne. Infatti

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \bar{c}_x &= \min_{x \in X} cx - u_0 - uAx = -u_0 + \sum_j \min_{d_j^- \leq x_j \leq d_j^+} (c_j - uA^j)x_j = \\ &= -u_0 + \sum_j \min \{ (c_j - uA^j)d_j^- ; (c_j - uA^j)d_j^+ \} \end{aligned} \quad (7.27)$$

quindi la condizione di ottimalità è semplicemente $\bar{c}(u) \bar{x}(u) \geq u_0$, $u \geq 0$, con

$$\bar{c}(u) := c - uA, \quad \bar{x}_j(u) := \begin{cases} d_j^- & \text{se } c_j - uA^j \geq 0 \\ d_j^+ & \text{se } c_j - uA^j < 0 \end{cases}$$

Se $\bar{c}(u) \bar{x}(u) < u_0$ viene generata la colonna $(1, A\bar{x}(u))$. Se $u_i < 0$ viene generata la colonna $(0, -e_i)$.

Come esempio numerico si riconsideri l'esempio 7.33 che riscriviamo in forma canonica con variabili limitate superiormente:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 4x_2 \\ & -3x_1 - 4x_2 \geq -12 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & 0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

L'insieme X è quindi costituito dai vettori $\hat{x}^1 = (0, 0)$, $\hat{x}^2 = (0, 2)$, $\hat{x}^3 = (2, 0)$, $\hat{x}^4 = (2, 2)$, vertici del rettangolo $\{x : 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2\}$, che in questo caso possono essere generati esplicitamente. Si ottiene pertanto

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & A\hat{x}^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & A\hat{x}^2 &= \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} & A\hat{x}^3 &= \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} & A\hat{x}^4 &= \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \end{pmatrix} \\ cx^1 &= 0 & cx^2 &= 8 & cx^3 &= 2 & cx^4 &= 10 \end{aligned}$$

Quindi (7.26) diventa (con l'aggiunta delle variabili ausiliarie)

$$\begin{aligned} \min \quad & 0\alpha_1 + 8\alpha_2 + 2\alpha_3 + 14\alpha_4 \\ & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ & 0\alpha_1 - 8\alpha_2 - 6\alpha_3 - 14\alpha_4 - s_1 = -12 \\ & 0\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 14\alpha_4 - s_2 = 6 \end{aligned}$$

Si ribadisce che le quattro colonne sono state generate esplicitamente solo per illustrare la procedura. Per ottenere una soluzione iniziale ammissibile si aggiunga una colonna artificiale con la prima componente uguale a 1 e tutte le altre uguali a $\max_i b_i$. Come matrice di base iniziale si consideri la matrice formata con la colonna artificiale e le colonne delle variabili ausiliarie. Questa scelta produce una soluzione non negativa. Per eliminare la variabile artificiale si fissa un costo pari ad 1 per la medesima e 0 per le altre. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & z &= 1 \\ & 0\alpha_1 - 8\alpha_2 - 6\alpha_3 - 14\alpha_4 - s_1 & + 6z &= -12 \\ & 0\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 14\alpha_4 & - s_2 + 6z &= 6 \end{aligned}$$

La matrice di base è data dalle ultime tre colonne. Si ottiene $(u_0, u) = (1, 0, 0)$. Nel calcolo (7.27) si potrebbe ottenere qualsiasi valore di X . Supponiamo si ottenga $\hat{x} = (0, 0)$. Allora viene generata la colonna $(1, A\hat{x}) = (1, 0, 0)$. Questa colonna fa uscire dalla base la seconda colonna. La nuova matrice di base non è ancora ottima in quanto la colonna artificiale è ancora in base. Si ottiene $(u_0, u) = (0, 0, 1/6)$ e quindi $c - uA = (-2/3, -1/2, 0, 1/6)$ da cui si ottiene $\hat{x} = (2, 2)$ e si genera la colonna $(1, -14, 14)$. La terza colonna esce di base e si ottiene una base ottima rispetto al costo artificiale per la quale si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} \implies s_1 = 6, \alpha_1 = \frac{4}{7}, \alpha_2 = \frac{3}{7}$$

Una prima soluzione ammissibile è quindi data dalla combinazione convessa con coefficienti $4/7$ e $3/7$ dei due vertici $(0, 0,)$ e $(2, 2)$ ed è quindi il punto $(6/7, 6/7)$. Per passare alla fase due basta cambiare il vettore c_β che diventa $(0, 0, 10)$. Si ottiene $(u_0, u) = (0, 0, 5/7)$ che determina $c - uA = (-13/7, 13/7, 0, 5/7)$ e quindi $\hat{x} = (2, 0)$ da cui si genera la colonna $(1, -6, 8)$ che fa uscire dalla base la terza colonna. Si può vedere che la nuova base è ottima con soluzione $s_1 = 15/2, \alpha_1 = 1/4, \alpha_3 = 3/4$. Quindi l'ottimo è dato dalla combinazione convessa $\alpha_1(0, 0) + \alpha_3(2, 0) = (3/2, 0)$. ■

7.38 ESEMPIO. La tecnica di generazione di colonne è utile per risolvere problemi di programmazione lineare a grandi dimensioni dotati di particolare struttura. Si consideri ad esempio il problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^n x^n \\ & A^1 x^1 & & = b^1 \\ & & A^2 x^2 & = b^2 \\ & \dots & & \dots \\ & & & A^n x^n = b^n \\ & D^1 x^1 + D^2 x^2 + \dots + D^n x^n \leq d \\ & x^1 \geq 0 \quad x^2 \geq 0 \quad \dots \quad x^n \geq 0 \end{aligned} \tag{7.28}$$

dove i termini c^i e x^i sono vettori di dimensioni opportune. Il problema potrebbe modellare una situazione in cui un'unità centrale deve coordinare le attività di n unità periferiche con il vincolo di condivisione delle risorse. Per ogni unità il vincolo $A^i x^i = b^i$ si riferisce soltanto all'unità mentre il vincolo $\sum D^i x^i \leq d$ si riferisce alla condivisione delle risorse.

Il problema sarebbe separabile nelle variabili x^i se non ci fosse il vincolo $\sum D^i x^i \leq d$. Si può pertanto pensare di calcolare un problema duale dove tale vincolo figuri come vincolo esplicito. Comunque, data la struttura di programmazione lineare del problema dato, è più conveniente procedere direttamente dal problema primale.

Si definiscano $P^i := \{x^i : A^i x^i = b^i, x^i \geq 0\}$ e siano V^i i rispettivi insiemi di vertici. Allora (7.28) è equivalente a

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i c^i x^i \\ & \sum_i D^i x^i \leq d \\ & x^i \in P^i \quad \forall i, \end{aligned}$$

Tenendo conto che ogni $x^i \in P^i$ si può esprimere come

$$x^i = \sum_{x \in V^i} \alpha_x^i x \quad \text{con} \quad \sum_{x \in V^i} \alpha_x^i = 1 \quad \alpha_x^i \geq 0$$

il problema (7.28) è anche equivalente a

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i \sum_{x \in V^i} (c^i x) \alpha_x^i \\ & \sum_i \sum_{x \in V^i} (D^i x) \alpha_x^i \leq d \\ & \sum_{x \in V^i} \alpha_x^i = 1 \quad \forall i \\ & \alpha_x^i \geq 0 \quad \forall x \in V^i \quad \forall i \end{aligned}$$

Naturalmente i dati di questo problema non sono noti esplicitamente e quindi le colonne vanno generate nel momento in cui devono entrare in base. Infatti si ha (perché ‘max’ invece di ‘min’?):

$$\begin{aligned} \max_i \max_{x \in V^i} \bar{c}_x^i &= \max_i \max_{x \in V^i} c_x^i - u D^i x - w_i = \\ &= \max_i \left(-w_i + \max_{x \in V^i} (c^i - u D^i) x \right) = \max_i \left(-w_i + \max_{x \in P^i} (c^i - u D^i) x \right) \end{aligned}$$

Il calcolo dei costi ridotti viene quindi eseguito tramite i sottoproblemi:

$$\begin{aligned} v_i := \max \quad & (c^i - u D^i) x \\ & A^i x = b^i \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{7.29}$$

Sia quindi p tale che $(v_p - w_p) < 0$ e sia x^p la corrispondente soluzione nel sottoproblema. Si noti che non è strettamente necessario risolvere tutti i sottoproblemi e che la risoluzione di uno di essi in un generico passo d’iterazione si può basare sulla soluzione ottima generata in un passo precedente. La colonna che viene generata è pertanto $((D^p x^p) e_p)'$ dove e_p è il vettore con tutte le componenti nulle tranne la p -esima che vale 1.

Si può interpretare economicamente questo schema di calcolo. Le variabili duali u rappresentano i prezzi ombra delle risorse condivise. Da (7.29) si vede che l’unità periferica calcola il proprio livello ottimo di attività se, oltre ai profitti propri dovuti a c^i , tiene conto dei costi indotti dai prezzi ombra delle risorse. Quindi l’unità centrale può coordinare in modo ottimo tutte le attività limitandosi a ‘vendere’ ad un prezzo u le risorse alle unità periferiche. Al prezzo ottimo i livelli ottimi delle singole unità, come calcolati da (7.29), soddisfano automaticamente il vincolo $\sum D^i x^i \leq d$. Le decisioni quindi sono state decentralizzate in modo ottimo. Questo schema di calcolo (e di azione economica) prende il nome di decomposizione di Dantzig-Wolfe (si veda Dantzig e Wolfe [1960] e l’interessante discussione in Dantzig [1963]). ■

7.39 ESEMPIO. Gilmore e Gomory [1963] modellarono un problema reale di tagliare rotoli di carta in modo da realizzare un assegnato numero di pezzi di dimensioni fissate, minimizzando lo spreco tramite un opportuno modello di LP in cui le colonne dovevano venir generate durante il calcolo. Si tratta probabilmente della prima formulazione di un problema di

programmazione lineare con generazione di colonne. Ripresentiamo tale problema nella veste più generale di un problema di bin packing (vedi esempio 1.76).

Sono assegnati m tipi di oggetti e per ogni tipo i sono assegnati b_i oggetti. Ogni oggetto di tipo i ha dimensione d_i . Bisogna inserire tutti gli oggetti (in numero pari a $\sum_{i=1}^m b_i$) in contenitori tutti uguali di capacità C minimizzando il numero di contenitori usati.

Ogni contenitore può essere riempito secondo diversi schemi, ad esempio a_1 oggetti del primo tipo, a_2 del secondo, ecc. Questi numeri formano un vettore a a m componenti che rappresenta un particolare schema di riempimento del contenitore. Sia J l'insieme di tutti i possibili schemi di riempimento e sia a^j il vettore corrispondente allo schema di riempimento j .

Se indichiamo con x_j un numero intero che indica quante volte lo schema di riempimento j viene impiegato, la quantità $\sum_{j \in J} x_j$ indica il numero di contenitori impiegati. Quindi il problema da risolvere è il seguente

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} x_j \\ & \sum_{j \in J} a_i^j x_j \geq b_i \\ & x_j \geq 0 \quad \text{intero} \quad \forall j \end{aligned} \quad (7.30)$$

Sembrirebbe più corretto usare il vincolo di uguaglianza $\sum_{j \in J} a_i^j x_j = b_i$, invece della diseuguaglianza, dato che gli oggetti sono presenti esattamente nelle quantità b_i e non di più. Tuttavia si può notare che tutte le soluzioni che soddisfano al vincolo di uguaglianza sono ovviamente ammissibili in (7.30) e quindi non vengono 'perse'. Se la soluzione ottima di (7.30) dovesse prevedere qualche diseuguaglianza soddisfatta strettamente, è sufficiente usare parzialmente lo schema di riempimento indicato senza per questo peggiorare la soluzione.

È chiaro che $|J|$ può essere proibitivamente grande, per cui i dati del problema non possono essere generati esplicitamente. Inoltre la richiesta d'interezza per le variabili rende il problema molto difficile. È conveniente pertanto approssimare le variabili intere con variabili continue. L'errore che si ottiene in questo modo può essere poco rilevante se le componenti dell'ottimo sono abbastanza grandi. Con questa approssimazione il problema diventa di programmazione lineare con generazione di colonne.

Per la generazione della colonna da far entrare in base si ha

$$\min_{j \in J} \bar{c}_j = \min_{j \in J} 1 - u a^j = 1 - \max_{j \in J} u a^j \quad (7.31)$$

Uno schema di riempimento è ammissibile se $\sum_i d_i a_i^j \leq C$. Pertanto (7.31) è equivalente a

$$\begin{aligned} w := \max \quad & \sum_i u_i a_i \\ & \sum_i d_i a_i \leq C \\ & a_i \geq 0 \quad \text{intero} \quad \forall i \end{aligned} \quad (7.32)$$

cioè ad un problema di knapsack intero. La condizione di ottimalità è allora $w \leq 1$. Si considerino ad esempio i seguenti dati

$$b = (20 \quad 10 \quad 30 \quad 15 \quad 20), \quad d = (2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7), \quad C = 10$$

Per ottenere una base iniziale di (7.30) si possono usare degli schemi di riempimento che garantiscano l'inserimento di ogni tipo di oggetti, ad esempio uno schema n. 1 che preveda esattamente un oggetto del primo tipo, uno del secondo e uno del terzo (con un riempimento di 9 unità a fronte della capacità di 10), uno schema n. 2 che usi due oggetti del quarto tipo (oggetti del quarto e quinto tipo sono troppo grandi per essere messi assieme) e infine uno schema n. 3 che preveda un oggetto del quinto tipo. Questi tre schemi corrispondono alle colonne $(1, 1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 2, 0)$ e $(0, 0, 0, 0, 1)$.

Per avere una base bisogna aggiungere delle variabili ausiliarie. Siccome gli oggetti dei primi tre tipi sono presenti in quantità 20, 10 e 30 rispettivamente e, per il momento, possono essere riempiti solo con il primo schema, dobbiamo usare 30 volte il primo schema e quindi sono necessarie variabili ausiliarie per i tipi uno e due, presenti in quantità minori.

Quindi le colonne da aggiungere per formare la base iniziale ammissibile sono $(-1, 0, 0, 0, 0)$ e $(0, -1, 0, 0, 0)$. I costi in base sono $c_\beta = (1, 1, 1, 0, 0)$ (gli zeri si riferiscono ovviamente alle variabili ausiliarie).

Questa soluzione iniziale prevede l'uso di 30 volte il primo schema, $15/2$ il secondo e 20 il terzo. La soluzione è frazionaria e quindi non immediatamente applicabile, però può essere arrotondata per eccesso (nel senso che si impiega 7 volte lo schema n. 2 e poi si inserisce un solo oggetto del quarto tipo anziché due) richiedendo 58 contenitori. Con questi valori si ottiene

$$u = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = (0 \ 0 \ 1 \ \frac{1}{2} \ 1)$$

che, inserito in (7.32), dà lo schema di riempimento $(0, 0, 2, 0, 0)$ (n. 4) con un valore $w = 2 > 1$ e quindi lo schema viene inserito in base facendone uscire la quarta colonna (quella ausiliaria).

Il costo in base viene modificato in $c_\beta = (1, 1, 1, 1, 0)$ e si ottiene $u = (1/2, 0, 1/2, 1/2, 1)$ e $x = (20, 15/2, 20, 5, 10)$. Quindi lo schema n. 1 viene usato 10 volte di meno (da 30 a 20) e gli oggetti del terzo tipo vengono inseriti usando anche lo schema n. 4 appena generato 5 volte. In totale sono richiesti ora (arrotondando) 53 contenitori.

Il problema (7.32) fornisce ora lo schema di riempimento $(5, 0, 0, 0, 0)$ (n. 5) per il quale $w = 5/2 > 1$ e quindi l'iterazione deve continuare. L'inserimento in base di questo schema provoca l'uscita dell'ultima colonna ausiliaria, per cui ora tutti gli oggetti vengono inseriti nelle quantità assegnate (anche se in senso frazionario).

La nuova soluzione è $u = (1/5, 3/10, 1/2, 1/2, 1)$, $x = (10, 15/2, 20, 10, 2)$ (50 contenitori). Si ottiene dal problema di knapsack lo schema $(0, 1, 0, 0, 1)$ (n. 6) con un valore $w = 3/10 + 1 > 1$. Esce dalla base il primo schema e si ottiene $u = (1/5, 0, 1/2, 1/2, 1)$ e $x = (10, 15/2, 10, 15, 4)$ (47 contenitori).

Si ottiene dal problema di knapsack lo schema $(1, 0, 0, 0, 1)$ (n. 7) con un valore $w = 1/5 + 1 > 1$. Esce dalla base lo schema n. 3 e si ottiene $u = (1/5, 1/5, 1/2, 1/2, 4/5)$, $x = (10, 15/2, 10, 15, 2)$ (45 contenitori).

Si ottiene dal problema di knapsack lo schema $(1, 0, 2, 0, 0)$ (n. 8) con un valore $w = 1/5 + 1 > 1$. Esce dalla base la quinta colonna, cioè lo schema n. 5 e si ottiene $u = (0, 0, 1/2, 1/2, 1)$, $x = (10, 15/2, 10, 5, 10)$ (43 contenitori).

Si ottiene dal problema di knapsack lo schema n. 3 $(0, 0, 0, 0, 1)$ con un valore $w = 1$ e quindi la soluzione è ottima. Il valore dell'ottimo frazionario è 42.5 e questo significa che non esiste nessuna soluzione intera con valore 42. Quindi il valore di 43 contenitori ottenuto arrotondando la soluzione ottima frazionaria è certamente l'ottimo intero.

In conclusione si ha (indicando con 2' lo schema n. 2 usato parzialmente)

schema n. 6	(0 1 0 0 1)	10	volte
schema n. 2	(0 0 0 2 0)	7	volte
schema n. 2'	(0 0 0 1 0)	1	volta
schema n. 7	(1 0 0 0 1)	10	volte
schema n. 4	(0 0 2 0 0)	5	volte
schema n. 8	(1 0 2 0 0)	10	volte

■

7.40 ESERCIZIO. (Per la risoluzione di questo esercizio sono necessari i concetti di rete di flusso esposti nel capitolo 8) Il problema del massimo flusso può anche essere risolto con una formulazione a generazione di colonne. Sia P un generico cammino dalla sorgente al pozzo e sia x_P un flusso di valore x_P su ogni arco di P e nullo sugli altri archi. Ogni flusso sulla rete (in un problema di massimo flusso) può essere decomposto in un insieme di flussi x_P per un opportuno insieme di cammini. Supponiamo di affrontare un problema con capacità $[0, c_e]$. Allora il problema del massimo flusso può venire formulato come:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_P x_P \\ & \sum_{P \ni e} x_P \leq c_e \quad \forall e \\ & x_P \geq 0 \end{aligned}$$

In questa formulazione il numero di variabili è esponenziale e non può essere generato esplicitamente. In che modo possono venire generate le colonne per un determinato valore delle variabili duali?

■

7.13. Metodi di massima ascesa duale — Metodi primali-duali

Si è visto nel capitolo 4 che le funzioni concave possono essere massimizzate tramite metodi di massima ascesa risolvendo il problema

$$\max_{\|h\|_p \leq 1} Df_x(h) = \max_{\|h\|_p \leq 1} \inf_{\gamma \in \partial f_x} \gamma h = \inf_{\gamma \in \partial f_x} \max_{\|h\|_p \leq 1} \gamma h = \inf_{\gamma \in \partial f_x} \|\gamma\|_q$$

Vogliamo ora far vedere come il metodo del simplesso possa essere un utile strumento nel calcolo delle direzioni di massima ascesa e condurre, in alcuni casi, ad algoritmi efficienti. Si consideri un problema primale in cui f e g sono funzioni affini e X è un poliedro. In questo caso nella definizione di $L(u)$ il poliedro X può essere sostituito dai vertici e dalle direzioni estreme di X senza alterare la funzione $L(u)$. Quindi $L(u)$ è esprimibile come il minimo di un insieme finito di funzioni affini, il suo subdifferenziale è caratterizzabile secondo il teorema 4.119 e l'insieme ammissibile duale è un poliedro che possiamo indicare come $P := \{u : u Q^j \geq q_j, \forall j \in J\}$. Si noti che $X(u)$ comprende solo vertici di X . Eventuali direzioni estreme di X contribuiscono alla definizione di P .

Si indichi inoltre $J(u) := \{j \in J : u Q^j = q_j\}$. Dato un u ammissibile il cono ammissibile (vedi esempio 4.4) in u è definito da $D(P, u) = \{h : h Q^j \geq 0, \forall j \in J(u)\}$. Il calcolo della direzione di massima ascesa diventa perciò:

$$\hat{h}_0 := \max \{DL(u, h) : \|h\|_\infty \leq 1, h \in D(P, u)\}$$

e, tenuto conto che $\partial L(u) = \text{conv} \{g(x)\}_{x \in X(u)}$ si ha

$$\begin{aligned} \hat{h}_0 &= \max h_0 \\ h_0 &\leq h g(x) \quad \forall x \in X(u) \\ 0 &\leq h Q^j \quad \forall j \in J(u) \\ -\mathbf{1} &\leq h \leq \mathbf{1} \end{aligned} \quad (7.33)$$

il cui duale è

$$\begin{aligned} \hat{h}_0 &= \min \sum_{i=1}^m \gamma_i^+ + \gamma_i^- \\ &\quad - \sum_{x \in X(u)} g(x) \alpha_x - \sum_{j \in J(u)} Q^j \xi_j + \gamma^+ - \gamma^- = 0 \\ &\quad \sum_{x \in X(u)} \alpha_x = 1 \\ &\quad \alpha_x \geq 0, \xi_j \geq 0, \gamma_i^+ \geq 0, \gamma_i^- \geq 0 \end{aligned} \quad (7.34)$$

Il problema (7.34) prende il nome di *primale ristretto* e (7.33) *duale ristretto* e verranno indicati come $RP(u)$ e $RD(u)$. Se $\hat{h}_0 = 0$, allora u è ottimo duale. Altrimenti h fornito dalla base ottima di $RP(u)$ individua una direzione di massima ascesa (relativamente alla normalizzazione scelta) e \hat{h}_0 è il valore della derivata direzionale lungo h . La scelta della lunghezza del passo viene fatta secondo il criterio del primo punto di rottura $\bar{\alpha}$ della funzione $\alpha \mapsto L(u + \alpha h)$. La motivazione dell'impiego di tale criterio si basa sulle considerazioni che seguono. Definiamo pertanto, relativamente alla base ottima di $RP(u)$

$$X_B(u) = \{x \in X(u) : \alpha_x \text{ è in base}\} \quad J_B(u) = \{j \in J(u) : \xi_j \text{ è in base}\}$$

Allora valgono il seguente lemma e il successivo teorema.

7.41 LEMMA. $X_B(u) \subset X(u + \bar{\alpha} h)$ e $J_B(u) \subset J(u + \bar{\alpha} h)$.

DIMOSTRAZIONE. I costi ridotti delle variabili in base sono nulli e quindi si ha che $x \in X_B(u)$ implica $\hat{h}_0 - h g(x) = 0$, cioè $DL(u, h) = h g(x)$. Inoltre, siccome $\bar{\alpha}$ è il primo punto di rottura, per qualsiasi $x \in X_B(u)$ si ha:

$$\begin{aligned} L(u + \bar{\alpha} h) &= L(u) + \bar{\alpha} DL(u, h) = L(u) + \bar{\alpha} h g(x) = \\ &= f(x) + u g(x) + \bar{\alpha} h g(x) = f(x) + (u + \bar{\alpha} h) g(x) = L(x, u + \bar{\alpha} h) \end{aligned}$$

cioè $x \in X(u + \bar{\alpha} h)$. Analogamente si ha $\hat{h}_0 0 + h Q^j = 0$ per qualsiasi $j \in J_B(u)$ e quindi $(u + \bar{\alpha} h) Q^j = q_j$. ■

7.42 TEOREMA. Una base ottima di $RP(u)$ è ammissibile per $RP(u + \bar{\alpha} h)$. ■

Il fatto fondamentale è quindi che non serve reinizializzare un primale ristretto nel nuovo punto $u + \bar{\alpha} h$. È invece più conveniente adottare come base iniziale la base ottima del precedente primale ristretto. Inoltre gli elementi di $X(u + \bar{\alpha} h)$ e $J(u + \bar{\alpha} h)$ non presenti nella precedente base ottima sono normalmente molto pochi, anzi, se assumiamo che il problema duale non sia degenerare, cioè che i vertici epi L siano dati dall'intersezione di $m + 1$ piani, ovvero $|X(u)| = m + 1$ in tali punti, si tratta di un singolo elemento, ragion per cui il nuovo primale ristretto viene risolto con un'unica iterazione.

La risoluzione del primale ristretto (indipendentemente dalla degenerazione) può avvenire sia in modo esplicito che implicito. Nel primo caso la conoscenza esplicita di $X(u)$ e $J(u)$ viene fornita dal metodo di calcolo del primo punto di rottura. Nel secondo caso le colonne relative a $X(u)$ non in base vengono generate attraverso una minimizzazione lessicografica su X rispetto ai due obiettivi

$$f(x) + u g(x) \quad \text{e} \quad -h_0 + h g(x)$$

dove h_0 e h sono le variabili duali della base corrente di $RP(u)$.

7.43 ESEMPIO. (Metodo primale-duale)

Sia dato un problema di programmazione lineare in forma standard. Quindi $f(x) = cx$, $g(x) = b - Ax$, $X = R_+^n$. Se u è ammissibile per il duale ($uA \leq c$ e quindi $Q = -A$, $q = -c$) si ha $J(u) = \{j : uA^j = c_j\}$ e $RP(u)$ è dato da

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{1} \gamma^+ + \mathbf{1} \gamma^- \\ & \sum_{j \in J(u)} A^j \xi_j + \gamma^+ - \gamma^- = b \\ & \xi_j \geq 0, \gamma^+ \geq 0, \gamma^- \geq 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

Si noti che eliminando da (7.35) la variabile γ_i^- se $b_i > 0$ e la variabile γ_i^+ se $b_i < 0$ il problema $RP(u)$ rimane ammissibile. Questo significa che la normalizzazione $h_i \geq -1$ è ridondante se $b_i > 0$ e altrettanto vale per $h_i \leq 1$ se $b_i < 0$. Supponiamo, per comodità di notazione che $b_i \geq 0$. Allora il primale ristretto è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{1} \gamma \\ & \sum_{j \in J(u)} A^j \xi_j + \gamma = b \\ & \xi_j \geq 0, \gamma \geq 0 \end{aligned} \quad (7.36)$$

Se B è la matrice di base ottima di $RP(u)$ allora la direzione di massima ascesa è data da $h = c_\beta B^{-1}$ con c_β , al solito, i costi in base (i coefficienti dei costi valgono 0 oppure 1, come si può interpretare h ?). Il primale ristretto si può più convenientemente riscrivere nel seguente modo. Si definisca $d_j := \sum_i A_i^j$. Allora, dato che

$$\sum_i \gamma_i = \sum_i (b_i - \sum_{j \in J(u)} A_i^j \xi_j) = \sum_i b_i - \sum_{j \in J(u)} \left(\sum_i A_i^j \right) \xi_j = \sum_i b_i - \sum_{j \in J(u)} d_j \xi_j$$

(7.36) è equivalente a

$$\max \quad \left\{ \sum_{j \in J(u)} d_j \xi_j : \sum_{j \in J(u)} A^j \xi_j \leq b, \xi_j \geq 0 \right\} \quad (7.37)$$

Tuttavia le variabili duali di (7.37) non sono le stesse di (7.36). Se si indicano con h le variabili duali di (7.36) e con h' quelle di (7.37) non è difficile vedere che $h' = \mathbf{1} - h$. La soluzione ottima di (7.37) è una soluzione parziale del problema primale originale: soddisfa la complementarità, soddisfa il vincolo di non negatività, ma non soddisfa il vincolo $Ax = b$. In ottimalità, cioè quando il valore ottimo di (7.36) è zero e il valore ottimo di (7.37) vale $\sum_i b_i$, allora è soddisfatto anche il vincolo $Ax = b$ e quindi l'ottimo di (7.37) è anche l'ottimo del problema originale.

Il primo punto di rottura è dato da: $\bar{\alpha} = \max \{ \alpha : (u + \alpha h) A^j \leq c_j, \forall j \}$, cioè

$$\bar{\alpha} = \min_{\substack{j \notin J(u) \\ h A^j > 0}} \frac{c_j - u A^j}{h A^j} = \min_{\substack{j \notin J(u) \\ h' A^j < d_j}} \frac{c_j - u A^j}{d_j - h' A^j} =: \frac{c_p - u A^p}{d_p - h' A^p} = \frac{c_p - u A^p}{h A^p}$$

Se $h' A^j \geq d_j, \forall j \notin J(u)$, allora non esiste nessun punto di rottura per $\alpha > 0$, quindi il problema duale è illimitato e di conseguenza il primale è non ammissibile. Altrimenti l'indice p entra in base e $\beta(q)$, determinato al solito modo, esce dalla base. B^{-1} viene aggiornata con le consuete operazioni di pivoting. L'ottimalità viene raggiunta quando il valore ottimo del primale ristretto è nullo; la base ottima corrispondente è anche la base ottima del problema primale, come è facile verificare in base alle CGO. Se non c'è degenerazione la funzione duale aumenta ad ogni iterazione di una quantità strettamente positiva, implicando la finitezza del metodo come nel normale metodo del semplice.

Si applichi la tecnica al problema dell'esempio 7.33 che ora riscriviamo in forma standard insieme al suo duale:

$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 4x_2 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6 \\ & x_1 + x_5 = 2 \\ & x_2 + x_6 = 2 \\ & x_i \geq 0, \forall i \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max \quad & 12u_1 + 6u_2 + 2u_3 + 2u_4 \\ & 3u_1 + 4u_2 + u_3 \leq 1 \quad (1) \\ & 4u_1 + 3u_2 + u_4 \leq 4 \quad (2) \\ & u_1 \leq 0 \quad (3) \\ & -u_2 \leq 0 \quad (4) \\ & u_3 \leq 0 \quad (5) \\ & u_4 \leq 0 \quad (6) \end{aligned}$
---	--

Si ha $d = (8, 8, 1, -1, 1, 1)$ e $u^0 = 0$ ammissibile per il duale. Quindi $J(u^0) = \{3, 4, 5, 6\}$ e (7.37) diventa

$$\begin{aligned} \max \quad & \xi_3 - \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 \\ & \xi_3 \leq 12 \\ & -\xi_4 \leq 6 \\ & +\xi_5 \leq 2 \\ & +\xi_6 \leq 2 \\ & \xi_i \geq 0 \forall i \end{aligned}$$

La soluzione ottima è $\xi_3 = 12, \xi_4 = 0, \xi_5 = 2, \xi_6 = 2$ con $J_B(u) = \{3, 5, 6\}, h' = (1, 0, 1, 1)$ e quindi $h = (0, 1, 0, 0, .)$. Per il calcolo di $\bar{\alpha}$ si ha

$$\bar{\alpha} = \min \left\{ \frac{1-0}{4}; \frac{4-0}{3} \right\} = \frac{1}{4}$$

e quindi $u^1 = (0, 1/4, 0, 0)$, da cui $J(u^1) = \{1, 3, 5, 6\}$. Il nuovo primale ristretto (7.37) è pertanto

$$\begin{aligned} \max \quad & 8\xi_1 + \xi_3 + \xi_5 + \xi_6 \\ & 3\xi_1 + \xi_3 \leq 12 \\ & 4\xi_1 \leq 6 \\ & \xi_1 + \xi_5 \leq 2 \\ & + \xi_6 \leq 2 \\ & \xi_i \geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

Si vede immediatamente che esiste una soluzione che soddisfa il vincolo $A\xi = b$, e cioè $\xi_1 = 3/2$, $\xi_3 = 15/2$, $\xi_5 = 1/2$, $\xi_6 = 2$. Pertanto questa è anche la soluzione ottima del problema originale. ■

Altri significativi esempi di metodi primali-duali verranno esposti nel capitolo 10 per la risoluzione polinomiale del problema dell'assegnamento pesato e dell'accoppiamento pesato.