Criterio di Griffith ed evoluzione quasistatica di fratture

Chiara Zanini

MPI MIS, Leipzig

Astrazione e realizzazione:

temi di carattere interdisciplinare tra fisica, matematica e ingegneria

Udine, 21 giugno 2007

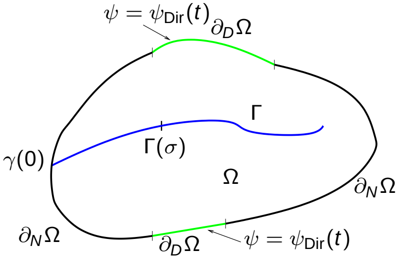
Problema modello

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto, limitato

Γ cammino preassegnato

$\Gamma(\sigma) = \{\gamma(\sigma) : 0 \leq s \leq \sigma\}$

$\partial\Omega = \partial_D\Omega \cup \partial_N\Omega$



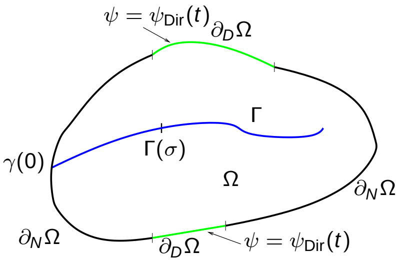
Problema modello

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto, limitato

Γ cammino preassegnato

$\Gamma(\sigma) = \{\gamma(\sigma) : 0 \leq s \leq \sigma\}$

$\partial\Omega = \partial_D\Omega \cup \partial_N\Omega$



Forma base del funzionale dell'energia al tempo t:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t)(\psi,\sigma) &= \text{parte di “volume”} + \text{parte di “superficie”} \\ &= \int_{\Omega\setminus\Gamma(\sigma)} |\nabla\psi|^2 \, \mathrm{d}x + G_c\sigma \end{aligned}$$

Formulazione matematica secondo Francfort e Marigo

Obiettivo: ottenere una funzione $t \mapsto (\psi(t), \sigma(t))$ che soddisfi:

- stabilità globale: per ogni $t \in [0, T]$

$$\mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t)) \leq \mathcal{E}(t)(\widetilde{\psi}, \widetilde{\sigma}) \quad \forall (\widetilde{\psi}, \widetilde{\sigma}) \text{ ammissibile;}$$

Formulazione matematica secondo Francfort e Marigo

Obiettivo: ottenere una funzione $t \mapsto (\psi(t), \sigma(t))$ che soddisfi:

- stabilità globale: per ogni $t \in [0, T]$

$$\mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t)) \leq \mathcal{E}(t)(\widetilde{\psi}, \widetilde{\sigma}) \quad \forall (\widetilde{\psi}, \widetilde{\sigma}) \text{ ammissibile;}$$

- irreversibilità: $\sigma(s) \leq \sigma(t)$ per $0 \leq s < t \leq T$;

Formulazione matematica secondo Francfort e Marigo

Obiettivo: ottenere una funzione $t \mapsto (\psi(t), \sigma(t))$ che soddisfi:

- stabilità globale: per ogni $t \in [0, T]$

$$\mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t)) \leq \mathcal{E}(t)(\widetilde{\psi}, \widetilde{\sigma}) \quad \forall (\widetilde{\psi}, \widetilde{\sigma}) \text{ ammissibile;}$$

- irreversibilità: $\sigma(s) \leq \sigma(t)$ per $0 \leq s < t \leq T$;

- bilancio dell'energia: per $0 \leq s < t \leq T$,

$$\mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t)) = \mathcal{E}(s)(\psi(s), \sigma(s)) + 2 \int_s^t (\nabla \psi(\tau), \nabla \dot{\psi}_{\mathrm{Dir}}(\tau))\, \mathrm{d}\tau$$

Formulazione matematica secondo Francfort e Marigo

Obiettivo: ottenere una funzione $t \mapsto (\psi(t), \sigma(t))$ che soddisfi:

- stabilità globale: per ogni $t \in [0, T]$

$$\mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t)) \leq \mathcal{E}(t)(\widetilde{\psi}, \widetilde{\sigma}) \quad \forall (\widetilde{\psi}, \widetilde{\sigma}) \text{ ammissibile;}$$

- irreversibilità: $\sigma(s) \leq \sigma(t)$ per $0 \leq s < t \leq T$;

- bilancio dell'energia: per $0 \leq s < t \leq T$,

$$\mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t)) = \mathcal{E}(s)(\psi(s), \sigma(s)) + 2\int_s^t (\nabla\psi(\tau), \nabla\dot{\psi}_{\mathrm{Dir}}(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

$$\text{Esistenza} \to \begin{cases} \text{energia di volume} & = \displaystyle\int_{\Omega\setminus\Gamma(t)} W(x, \nabla\psi(x))\,\mathrm{d}x \\ \text{energia di superficie} & = \displaystyle\int_{\Gamma(t)} \kappa(x, \nu_\Gamma(x))\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \end{cases}$$

Criterio di Griffith

$$E(t,\sigma) = \min\left\{ \int_{\Omega\setminus\Gamma(\sigma)} |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x \ : \quad \begin{aligned} &\psi \in \mathrm{H}^1(\Omega \setminus \Gamma(\sigma)), \\ &\psi_{|_{\partial_D \Omega}} = \psi_{\mathrm{Dir}}(t) \end{aligned} \right\}$$

Criterio di Griffith

$$E(t,\sigma) = \min\left\{\int_{\Omega\setminus\Gamma(\sigma)} |\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x : \quad \begin{array}{l}\psi \in \mathrm{H}^1(\Omega \setminus \Gamma(\sigma)), \\ \psi_{|\partial_D\Omega} = \psi_{\mathrm{Dir}}(t)\end{array}\right\}$$

Due ingredienti:

$\longrightarrow$ tasso di rilascio dell'energia: $G(t,\sigma) = -\partial_\sigma E(t,\sigma)$

$\longrightarrow$ durezza: $G_c =$ un parametro materiale

Criterio di Griffith

$$E(t,\sigma) = \min \left\{ \int_{\Omega \setminus \Gamma(\sigma)} |\nabla\psi|^2 \, dx : \quad \psi \in H^1(\Omega \setminus \Gamma(\sigma)), \quad \psi_{|\partial_D \Omega} = \psi_{\mathrm{Dir}}(t) \right\}$$

Due ingredienti:

$\rightarrow$ tasso di rilascio dell'energia: $G(t,\sigma) = -\partial_\sigma E(t,\sigma)$

$\rightarrow$ durezza: $G_c =$ un parametro materiale

Criterio di Griffith

- stabilità: $G(t,\sigma(t)) \leq G_c$
- attivazione: $[G_c - G(t,\sigma(t))]\dot{\sigma}(t) = 0$
- irreversibilità: $\dot{\sigma}(t) \geq 0$

per q.o. $t \in [0,T]$

Nuova proposta [Toader-Z 06]

Ottenere una funzione $t \mapsto (\psi(t), \sigma(t))$ continua da sinistra che soddisfi

- per ogni $t \in [0, T]$

criterio di stazionarietà:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t)) \leq \mathcal{E}(t)(\widetilde{\psi}, \sigma(t)) & \forall\, \widetilde{\psi} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma(\sigma(t))), \\ -\partial_\sigma E(t, \sigma(t)) \leq G_c & (\leftrightarrow G(t, \sigma(t)) \leq G_c) \end{cases}$$

Nuova proposta [Toader-Z 06]

Ottenere una funzione $t \mapsto (\psi(t), \sigma(t))$ continua da sinistra che soddisfi

- per ogni $t \in [0, T]$

criterio di stazionarietà:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t)) \leq \mathcal{E}(t)(\widetilde{\psi}, \sigma(t)) & \forall\, \widetilde{\psi} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma(\sigma(t))), \\ -\partial_\sigma E(t, \sigma(t)) \leq G_c & (\leftrightarrow G(t, \sigma(t)) \leq G_c) \end{cases}$$

- irreversibilità: $\sigma(s) \leq \sigma(t)$ per $0 \leq s < t \leq T$;

Ottenere una funzione $t \mapsto (\psi(t), \sigma(t))$ continua da sinistra che soddisfi

- per ogni $t \in [0, T]$

criterio di stazionarietà:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t)) \leq \mathcal{E}(t)(\widetilde{\psi}, \sigma(t)) & \forall \widetilde{\psi} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma(\sigma(t))), \\ -\partial_\sigma E(t, \sigma(t)) \leq G_c & (\leftrightarrow G(t, \sigma(t)) \leq G_c) \end{cases}$$

- irreversibilità: $\sigma(s) \leq \sigma(t)$ per $0 \leq s < t \leq T$;

- disuguaglianza dell'energia: per $0 \leq s < t \leq T$,

$$\mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t)) \leq \mathcal{E}(s)(\psi(s), \sigma(s)) + 2 \int_s^t (\nabla\psi(\tau), \nabla\dot{\psi}_{\mathrm{Dir}}(\tau))\, \mathrm{d}\tau$$

Due osservazioni

⋆ vale il criterio di Griffith: dalla disuguaglianza dell'energia

$$\mathcal{E}(t)(\psi(t),\sigma(t)) \leq \mathcal{E}(s)(\psi(s),\sigma(s)) + 2\int_s^t (\nabla\psi(\tau), \nabla\dot{\psi}_{\mathrm{Dir}}(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

e dal criterio di stazionarietà segue

$$G_c\dot{\sigma}(t) + \partial_\sigma\mathcal{E}(t)(\psi(t),\sigma(t))\dot{\sigma}(t) \leq 0 \text{ per q.o. } t \in [0,T]$$

e si ottiene

criterio di attivazione

$$(G_c + \partial_\sigma E(t,\sigma(t)))\dot{\sigma}(t) = 0 \quad \text{per q.o. } t \in [0,T]$$

Due osservazioni

- vale il criterio di Griffith: dalla disuguaglianza dell'energia

$$\mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t)) \leq \mathcal{E}(s)(\psi(s), \sigma(s)) + 2\int_s^t (\nabla\psi(\tau), \nabla\dot{\psi}_{\mathrm{Dir}}(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

e dal criterio di stazionarietà segue

$$G_c\dot{\sigma}(t) + \partial_\sigma\mathcal{E}(t)(\psi(t), \sigma(t))\dot{\sigma}(t) \leq 0 \text{ per q.o. } t \in [0, T]$$

e si ottiene

criterio di attivazione

$$(G_c + \partial_\sigma E(t, \sigma(t)))\dot{\sigma}(t) = 0 \quad \text{per q.o. } t \in [0, T]$$

- ogni evoluzione quasistatica globalmente stabile $t \mapsto (\widetilde{\psi}(t), \widetilde{\sigma}(t))$, i.e., $\mathcal{E}(t)(\widetilde{\psi}(t), \widetilde{\sigma}(t)) \leq \mathcal{E}(t)(\hat{\psi}, \hat{\sigma})$ $\forall\hat{\sigma} \geq \widetilde{\sigma}(t)$, $\forall\hat{\psi} \in \mathrm{H}^1(\Omega \setminus \Gamma(\hat{\sigma}))$+bc soddisfa la nuova nozione di evoluzione.

Oss: controparte del problema in dimensione finita

evoluzione quasistatica $u(t)$

$$\nabla_x f(t, u(t)) = 0$$

Approssimazione viscosa

Oss: controparte del problema in dimensione finita

evoluzione quasistatica $u(t)$

$$\nabla_x f(t, u(t)) = 0$$

$\leftarrow - -$

Approx viscosa

$$\varepsilon \dot{u}_\varepsilon(t) + \nabla_x f(t, u_\varepsilon(t)) = 0$$

Oss: controparte del problema in dimensione finita

evoluzione quasistatica $u(t)$

$$\nabla_x f(t, u(t)) = 0$$

$\leftarrow - -$

Approx viscosa

$$\varepsilon \dot{u}_\varepsilon(t) + \nabla_x f(t, u_\varepsilon(t)) = 0$$

Attenzione: $u_\varepsilon \leftrightarrow (\psi_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) +$ irrev.

Approssimazione viscosa

Oss: controparte del problema in dimensione finita

evoluzione quasistatica $u(t)$

$$\nabla_x f(t, u(t)) = 0$$

$\leftarrow - -$

Approx viscosa

$$\varepsilon \dot{u}_\varepsilon(t) + \nabla_x f(t, u_\varepsilon(t)) = 0$$

Attenzione: $u_\varepsilon \leftrightarrow (\psi_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) +$ irrev.

Motivazione: nei tratti regolari (alcuni) il limite dell'approx. viscosa corrisponde alla soluzione regolare data dal Teorema delle Funzioni Implicite

Oss: controparte del problema in dimensione finita

evoluzione quasistatica $u(t)$

$$\nabla_x f(t, u(t)) = 0$$

$\leftarrow - -$

Approx viscosa

$$\varepsilon \dot{u}_\varepsilon(t) + \nabla_x f(t, u_\varepsilon(t)) = 0$$

Attenzione: $u_\varepsilon \leftrightarrow (\psi_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) +$ irrev.

Motivazione: nei tratti regolari (alcuni) il limite dell'approx. viscosa corrisponde alla soluzione regolare data dal Teorema delle Funzioni Implicite

Teorema. [Toader-Z 06]. Esiste un'evoluzione irreversibile e quasistatica ottenuta come limite di una opportuna approssimazione viscosa.

Lavoro in corso con Knees e Mielke (WIAS)

$\star$ parte di volume: $\displaystyle\int_{\Omega\setminus\Gamma(\sigma)} W(\nabla\psi)\,\mathrm{d}x$, con W strett. convesso, regolare, p-crescita

$\star$ parte di superficie: $\displaystyle\int_{\Gamma(\sigma)} \kappa(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1$, con $\kappa > 0$ continua

Lavoro in corso con Knees e Mielke (WIAS)

$\star$ parte di volume: $\displaystyle\int_{\Omega\setminus\Gamma(\sigma)} W(\nabla\psi)\,\mathrm{d}x$, con W strett. convesso, regolare, p-crescita

$\star$ parte di superficie: $\displaystyle\int_{\Gamma(\sigma)} \kappa(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1$, con $\kappa > 0$ continua

$\star$ nozione di evoluzione: $\psi \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega \setminus \Gamma; \mathbb{R}^2)$, $\sigma \in \mathrm{BV}([0,T])$ non decrescente, tali che

- $\psi(t) \in \operatorname{argmin} \mathcal{E}(t)(\cdot, \sigma(t))\ \forall t \in [0,T]$
- $\kappa(\sigma(t)) - G(t,\sigma(t)) \geq 0\ \forall t \in [0,T] \setminus J(\sigma)$
- $\kappa(\sigma(t)) - G(t,\sigma(t)) > 0 \implies t \in D(\sigma)$ e $\dot{\sigma}(t) = 0$
- $\forall t \in J(\sigma)$ e $\forall \hat{\sigma} \in [\sigma(t-), \sigma(t+)]$ vale $\kappa(\hat{\sigma}) - G(t,\hat{\sigma}) \leq 0$.

Per ogni $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ vale

bilancio dell'energia generalizzato

$$\mathcal{E}(t_2)(\psi(t_2+),\sigma(t_2+)) - \mathcal{E}(t_1)(\psi(t_1+),\sigma(t_1+)) + \sum_{t\in J(\sigma)\cap(t_1,t_2]} \int_{\sigma(t-)}^{\sigma(t+)} (G(t,s) - \kappa(s))\,\mathrm{d}s = 2\int_{t_1}^{t_2} (\nabla\psi(t), \nabla\dot{\psi}_{\mathrm{Dir}}(t))\,\mathrm{d}t$$

Bilancio dell'energia e soluzione debole

Per ogni $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ vale

bilancio dell'energia generalizzato

$$\mathcal{E}(t_2)(\psi(t_2+), \sigma(t_2+)) - \mathcal{E}(t_1)(\psi(t_1+), \sigma(t_1+)) + \sum_{t \in J(\sigma) \cap (t_1, t_2]} \int_{\sigma(t-)}^{\sigma(t+)} (G(t,s) - \kappa(s))\, ds = 2 \int_{t_1}^{t_2} (\nabla\psi(t), \nabla\dot{\psi}_{\mathrm{Dir}}(t))\, dt$$

Soluzione debole [Negri-Ortner 2007]: mappa $t \mapsto (\psi(t), \sigma(t))$:

- stabilità:

$$\left.\begin{array}{l} \psi(t) \in \operatorname{argmin} \mathcal{E}(t)(\cdot, \sigma(t)) \\ G(t, \sigma(t)) \leq G_c \end{array}\right\} \forall t \in [0, T]$$

- irreversibilità: $\sigma(s) \leq \sigma(t)$ per ogni $0 \leq s < t \leq T$
- attivazione in forma debole:

$$\sigma(\cdot) \text{ not constant in }]t-\eta, t+\eta[\quad \Rightarrow$$
$$G(t, \sigma_*) \geq G_c \quad \forall \sigma_* \in [\sigma(t-), \sigma(t+)] \setminus \{L\}.$$

Nel caso $\psi_{\text{Dir}}(t,x) = t\psi_{\text{Dir}}(1,x)$ (MIL)

$$E(t,\sigma) = \min\left\{\int_{\Omega\setminus\Gamma(\sigma)} |\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x \,:\, \psi_{|_{\partial_D\Omega}} = \psi_{\text{Dir}}(t)\right\} = t^2E(1,\sigma)$$

Caso MIL

Nel caso $\psi_{\text{Dir}}(t,x) = t\psi_{\text{Dir}}(1,x)$ (MIL)

$$E(t,\sigma) = \min\left\{\int_{\Omega\setminus\Gamma(\sigma)} |\nabla\psi|^2 \, dx : \psi_{|_{\partial_D\Omega}} = \psi_{\text{Dir}}(t)\right\} = t^2 E(1,\sigma)$$

e di conseguenza $G(t,\sigma) = t^2 G(1,\sigma)$

Caso MIL

Nel caso $\psi_{\text{Dir}}(t,x) = t\psi_{\text{Dir}}(1,x)$ (MIL)

$$E(t,\sigma) = \min\left\{\int_{\Omega\setminus\Gamma(\sigma)} |\nabla\psi|^2 \, \mathrm{d}x : \psi_{|_{\partial_D\Omega}} = \psi_{\text{Dir}}(t)\right\} = t^2 E(1,\sigma)$$

e di conseguenza $G(t,\sigma) = t^2 G(1,\sigma)$

criterio di attivazione

$$G(1,\sigma(t)) = \frac{G_c}{t^2}$$