





**M. Pireddu**

**Università degli Studi di Udine  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali**

**e-mail: [pireddu@dimi.uniud.it](mailto:pireddu@dimi.uniud.it)**

**Un approccio topologico allo studio delle  
dinamiche caotiche.**



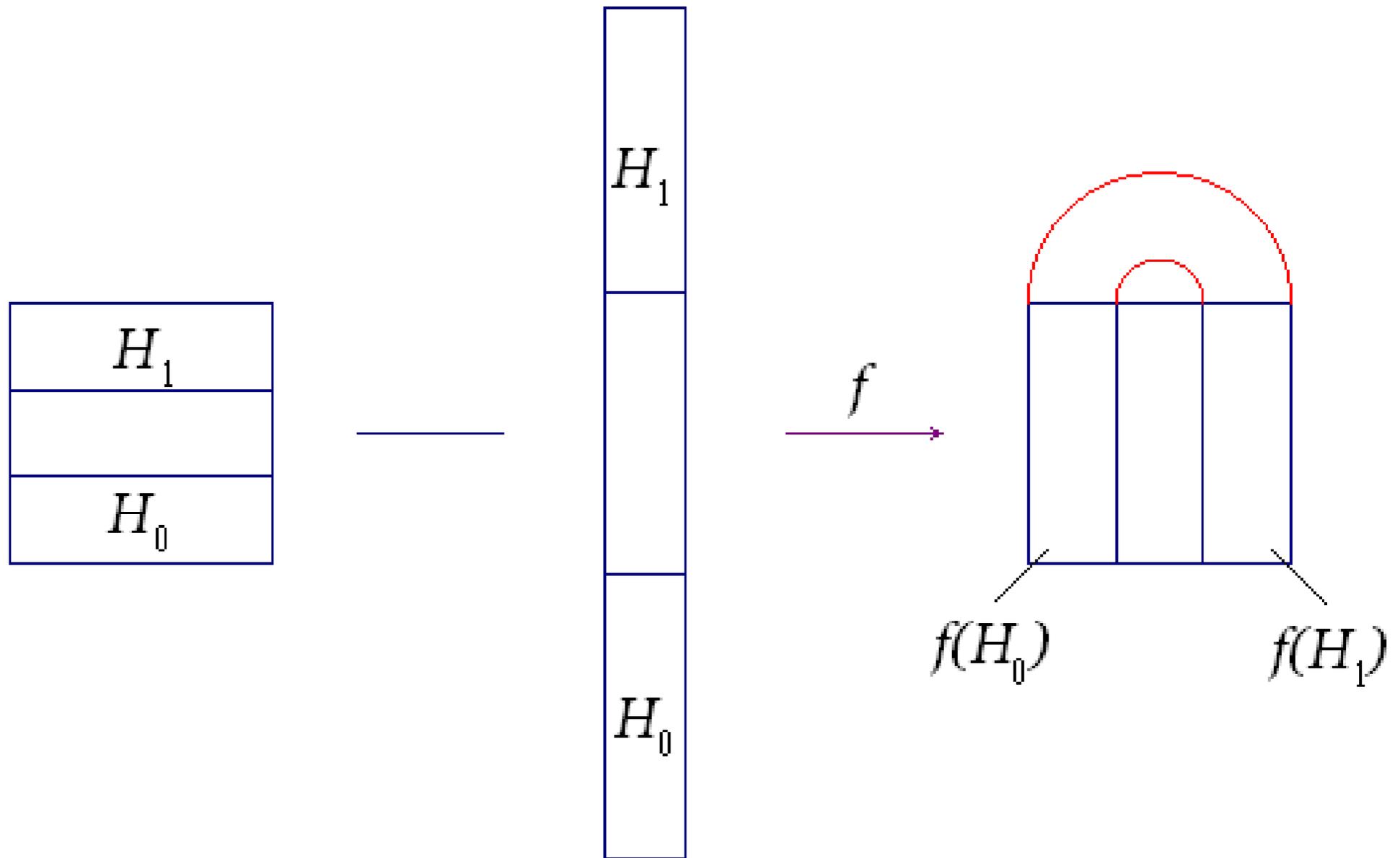
# 1. Introduzione alle dinamiche caotiche



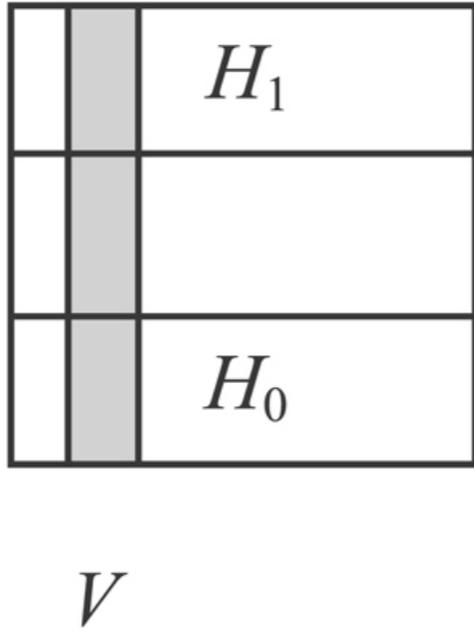
■ *Prototipo di sistema dinamico caotico: ferro di cavallo di Smale (Smale Horseshoe).*



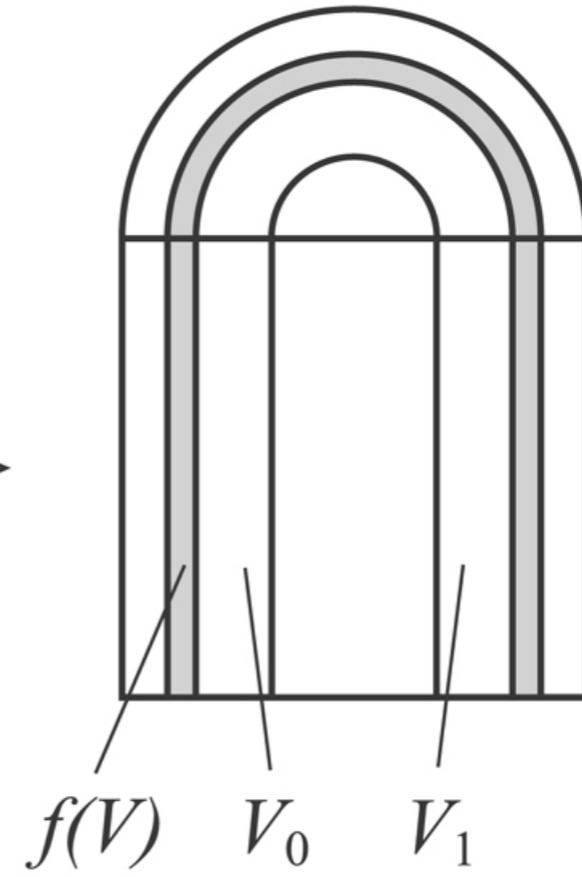
- *Prototipo di sistema dinamico caotico: **ferro di cavallo di Smale** (Smale Horseshoe).*
- *Indichiamo con  $Q := [0, 1]^2$  il quadrato unitario di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$  come in figura:*



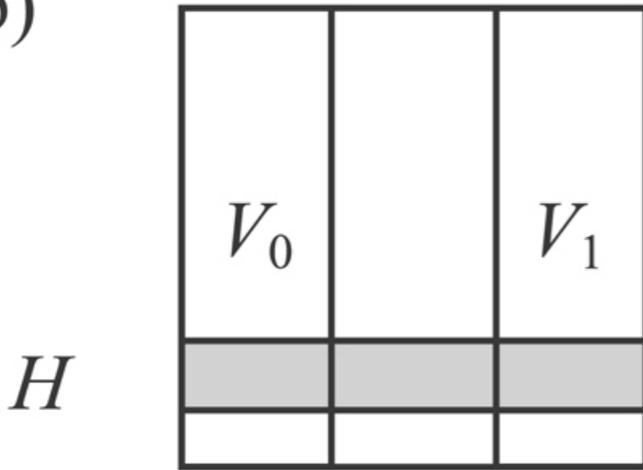
(a)



$f$

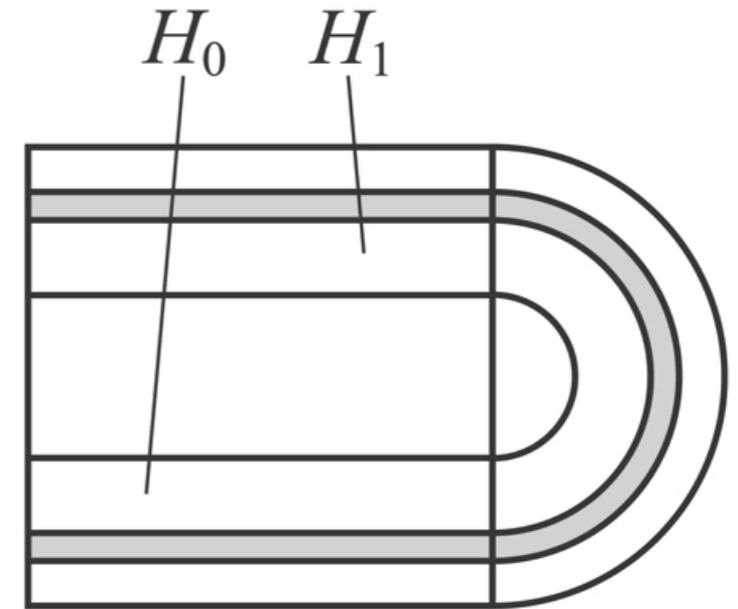


(b)



$f^{-1}$

$f^{-1}(H)$





## ■ *Ricerca dell'insieme invariante*

$$\Lambda := \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(Q).$$



■ *Ricerca dell'insieme invariante*

$$\Lambda := \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(Q).$$

■ *Osservazione:  $\Lambda$  risulterà compatto!*

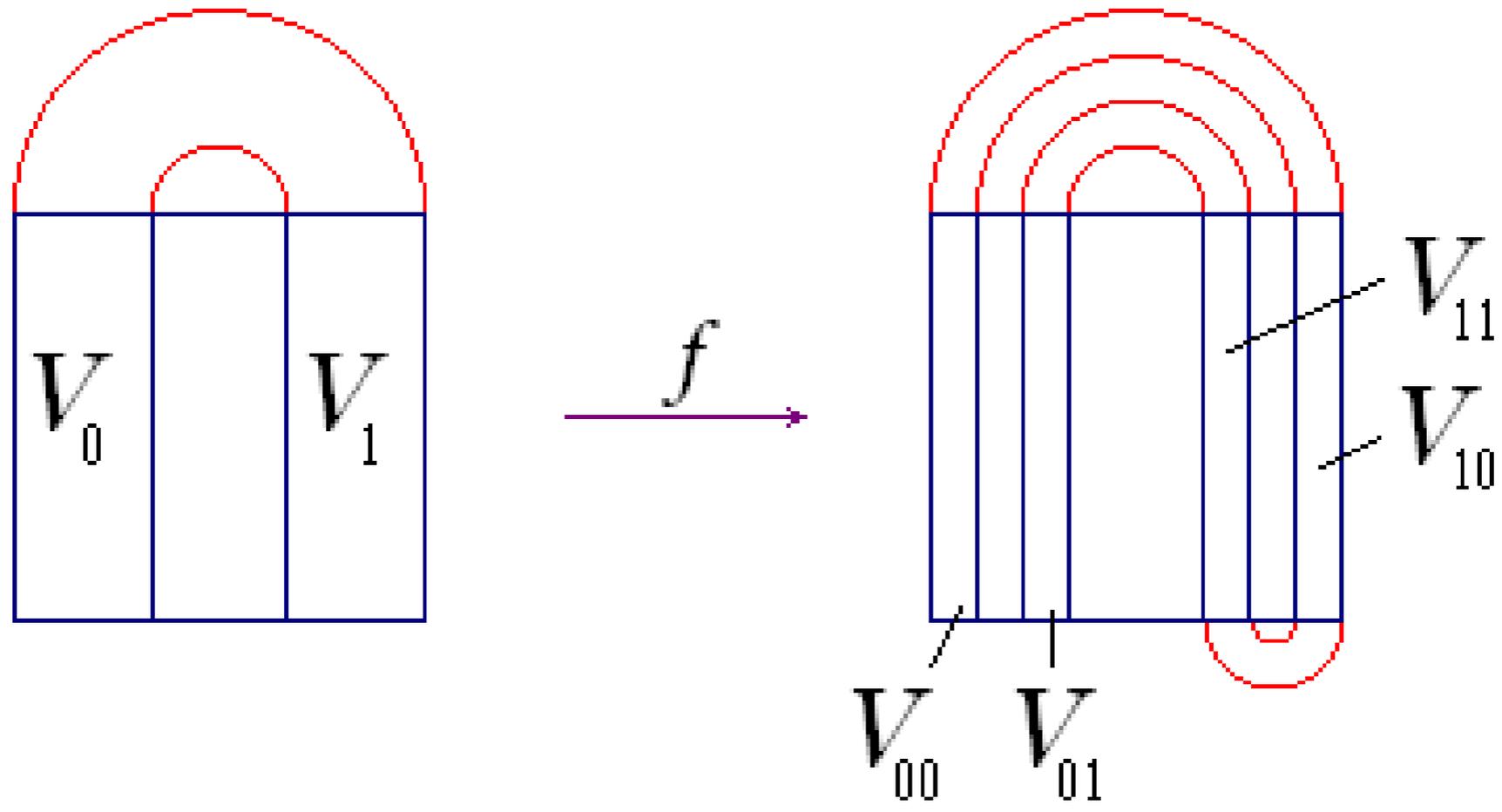


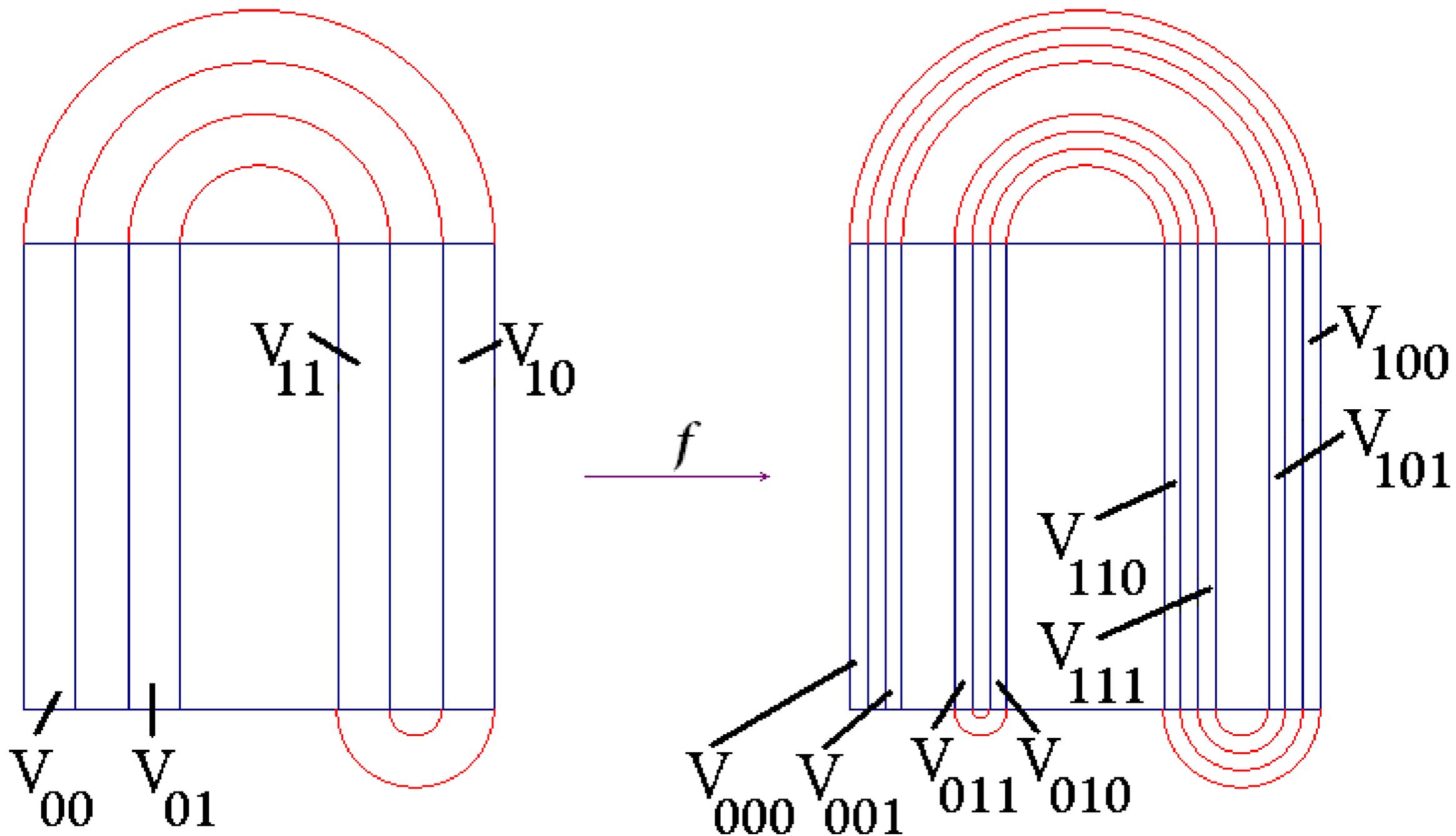
■ *Ricerca dell'insieme invariante*

$$\Lambda := \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(Q).$$

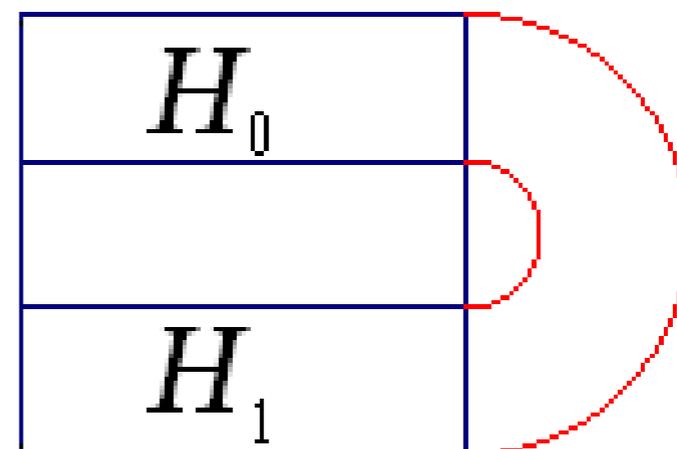
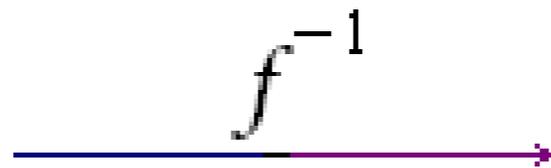
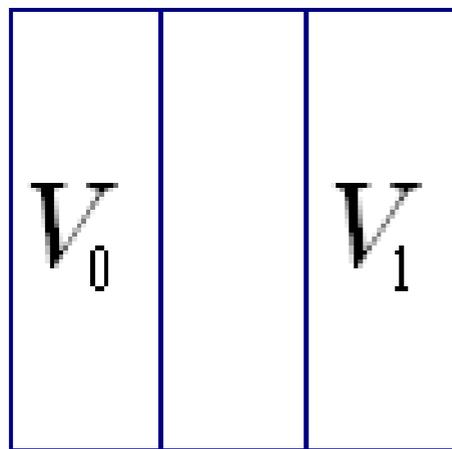
■ *Osservazione:  $\Lambda$  risulterà compatto!*

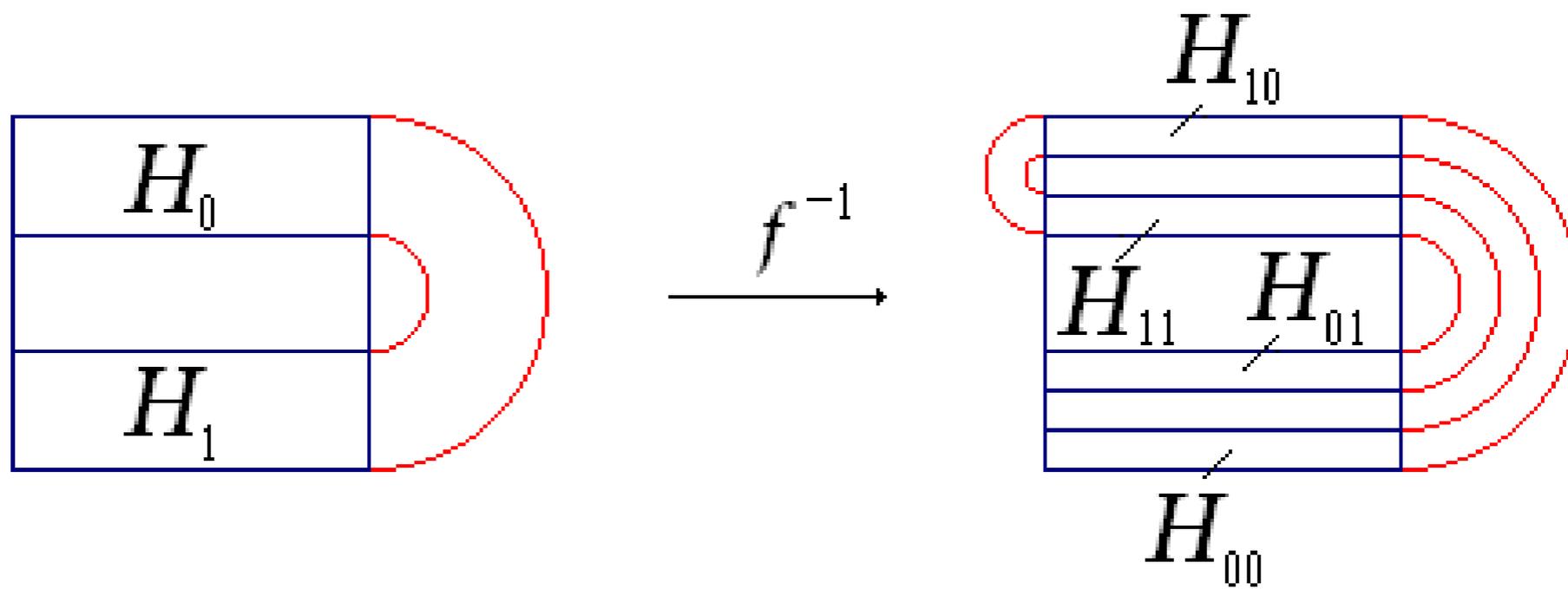
■ *Iterate positive  $\Rightarrow$  linee verticali;*





■ *Iterate negative*  $\Rightarrow$  *linee orizzontali*;





- *Quindi  $\Lambda$  è costituito dai punti che appartengono alle varie intersezioni tra linee verticali ed orizzontali.*

- *Quindi  $\Lambda$  è costituito dai punti che appartengono alle varie intersezioni tra linee verticali ed orizzontali.*
- *A ogni punto viene associata in modo unico una sequenza bi-infinita di 0 e 1  $\Rightarrow$  **dinamica su due simboli.***



■ Chiamiamo  $\Sigma_2 := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , su cui agisce lo **shift di Bernoulli**  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , cioè l'omeomorfismo

$$\sigma((s_i)_i) := (s_{i+1})_i.$$



■ Chiamiamo  $\Sigma_2 := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , su cui agisce lo **shift di Bernoulli**  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , cioè l'omeomorfismo

$$\sigma((s_i)_i) := (s_{i+1})_i.$$

■ **Teorema:** Esiste un omeomorfismo  $\phi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  e vale

$$\phi \circ f = \sigma \circ \phi,$$



■ Chiamiamo  $\Sigma_2 := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , su cui agisce lo **shift di Bernoulli**  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , cioè l'omeomorfismo

$$\sigma((s_i)_i) := (s_{i+1})_i.$$

■ **Teorema:** Esiste un omeomorfismo  $\phi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  e vale

$$\phi \circ f = \sigma \circ \phi,$$

$\Rightarrow f$  è **coniugata** allo shift di Bernoulli  $\sigma$ .



- Chiamiamo  $\Sigma_2 := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , su cui agisce lo **shift di Bernoulli**  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , cioè l'omeomorfismo

$$\sigma((s_i)_i) := (s_{i+1})_i.$$

- **Teorema:** Esiste un omeomorfismo  $\phi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  e vale

$$\phi \circ f = \sigma \circ \phi,$$

$\Rightarrow f$  è **coniugata** allo shift di Bernoulli  $\sigma$ .

- Le proprietà topologiche ( $\equiv$  indipendenti dalla scelta della metrica) di  $(\Sigma_2, \sigma)$  si trasferiscono a  $(\Lambda, f)$ .



- Chiamiamo  $\Sigma_2 := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , su cui agisce lo **shift di Bernoulli**  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , cioè l'omeomorfismo

$$\sigma((s_i)_i) := (s_{i+1})_i.$$

- **Teorema:** Esiste un omeomorfismo  $\phi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  e vale

$$\phi \circ f = \sigma \circ \phi,$$

$\Rightarrow f$  è **coniugata** allo shift di Bernoulli  $\sigma$ .

- Le proprietà topologiche ( $\equiv$  indipendenti dalla scelta della metrica) di  $(\Sigma_2, \sigma)$  si trasferiscono a  $(\Lambda, f)$ .
- $(\Sigma_2, \sigma)$  è caotico secondo diverse definizioni (Devaney, lancio della moneta, etc.)  $\Rightarrow$  grazie alla compattezza, anche  $(\Lambda, f)$ .



■ *Problema: verificare condizione di **iperbolicità**  $\Rightarrow$  scomposizione dello spazio tangente nelle componenti*

*stabile  $\Rightarrow$  compressione;*

*instabile  $\Rightarrow$  espansione,*

*invarianti sotto l'applicazione del differenziale.*



■ *Problema: verificare condizione di **iperbolicità**  $\Rightarrow$  scomposizione dello spazio tangente nelle componenti*

*stabile  $\Rightarrow$  compressione;*

*instabile  $\Rightarrow$  espansione,*

*invarianti sotto l'applicazione del differenziale.*

■ *Si cercano formulazioni più semplici.*



■ *Problema: verificare condizione di **iperbolicità**  $\Rightarrow$  scomposizione dello spazio tangente nelle componenti*

*stabile  $\Rightarrow$  compressione;*

*instabile  $\Rightarrow$  espansione,*

*invarianti sotto l'applicazione del differenziale.*

■ *Si cercano formulazioni più semplici.*

■ *Kennedy, Koçak e Yorke (2001) studiano i **ferrati di cavallo topologici**.*



■ *Problema: verificare condizione di **iperbolicità**  $\Rightarrow$  scomposizione dello spazio tangente nelle componenti*

*stabile  $\Rightarrow$  compressione;*

*instabile  $\Rightarrow$  espansione,*

*invarianti sotto l'applicazione del differenziale.*

■ *Si cercano formulazioni più semplici.*

■ *Kennedy, Koçak e Yorke (2001) studiano i **ferricelli topologici**.*

■ *Introdotti i concetti di **connettori** e **pre-connettori**:*

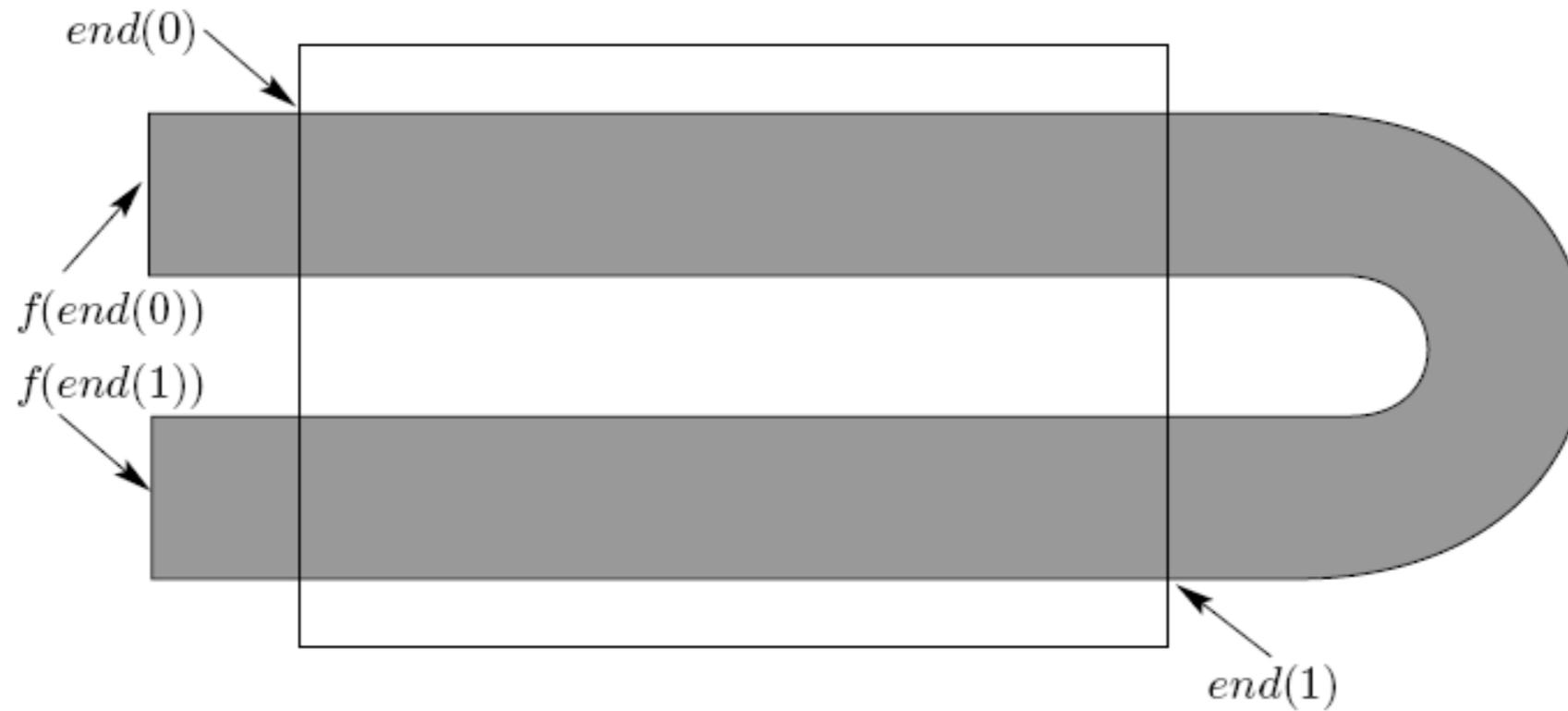


FIGURE 1. Smale horseshoe with crossing number  $M = 2$ . The set  $Q$  is the rectangle pictured, with  $end_0$  being the left boundary of  $Q$  and  $end_1$  being the right boundary of  $Q$ . The shaded region is the image  $f(Q)$ .

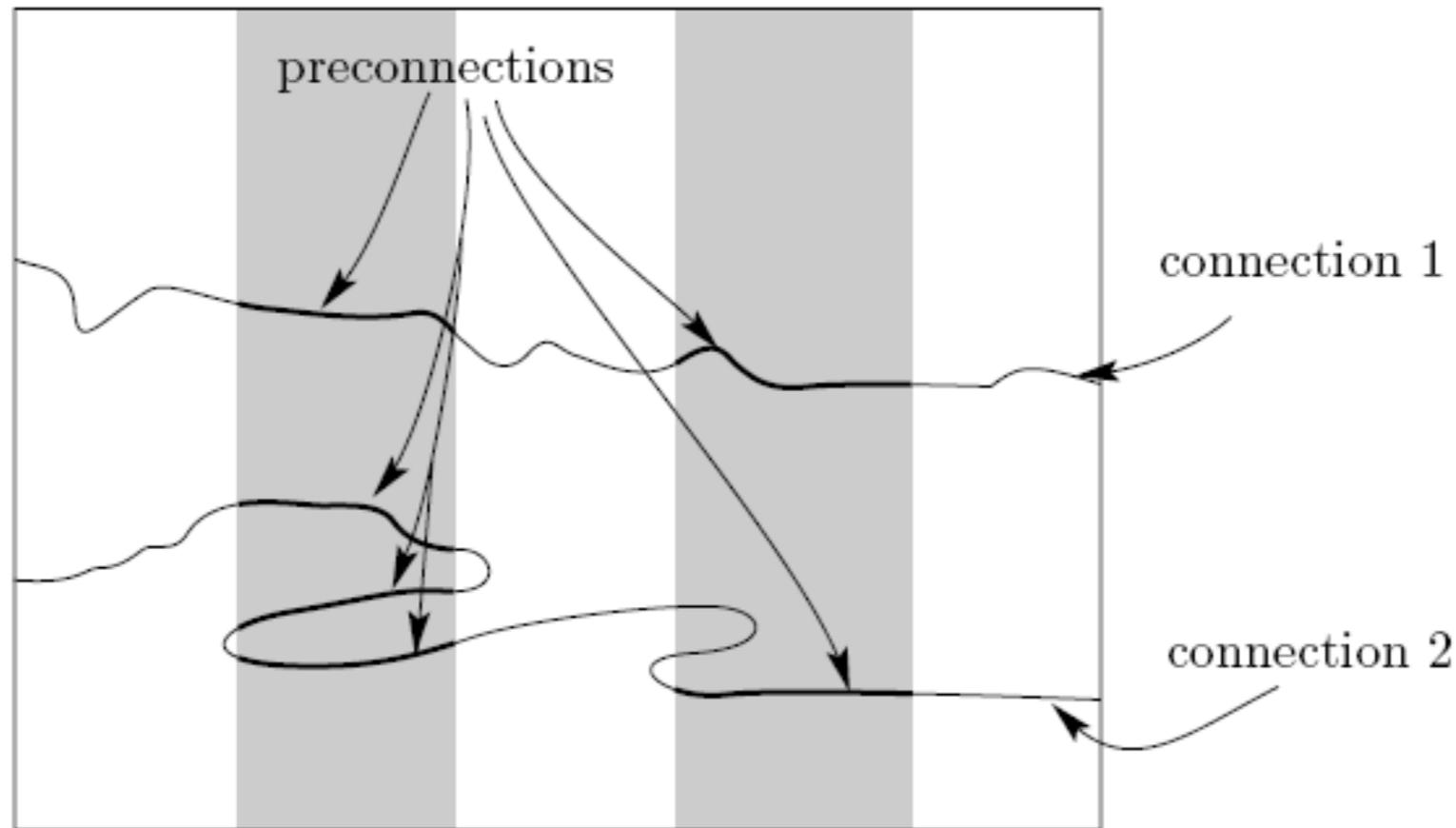
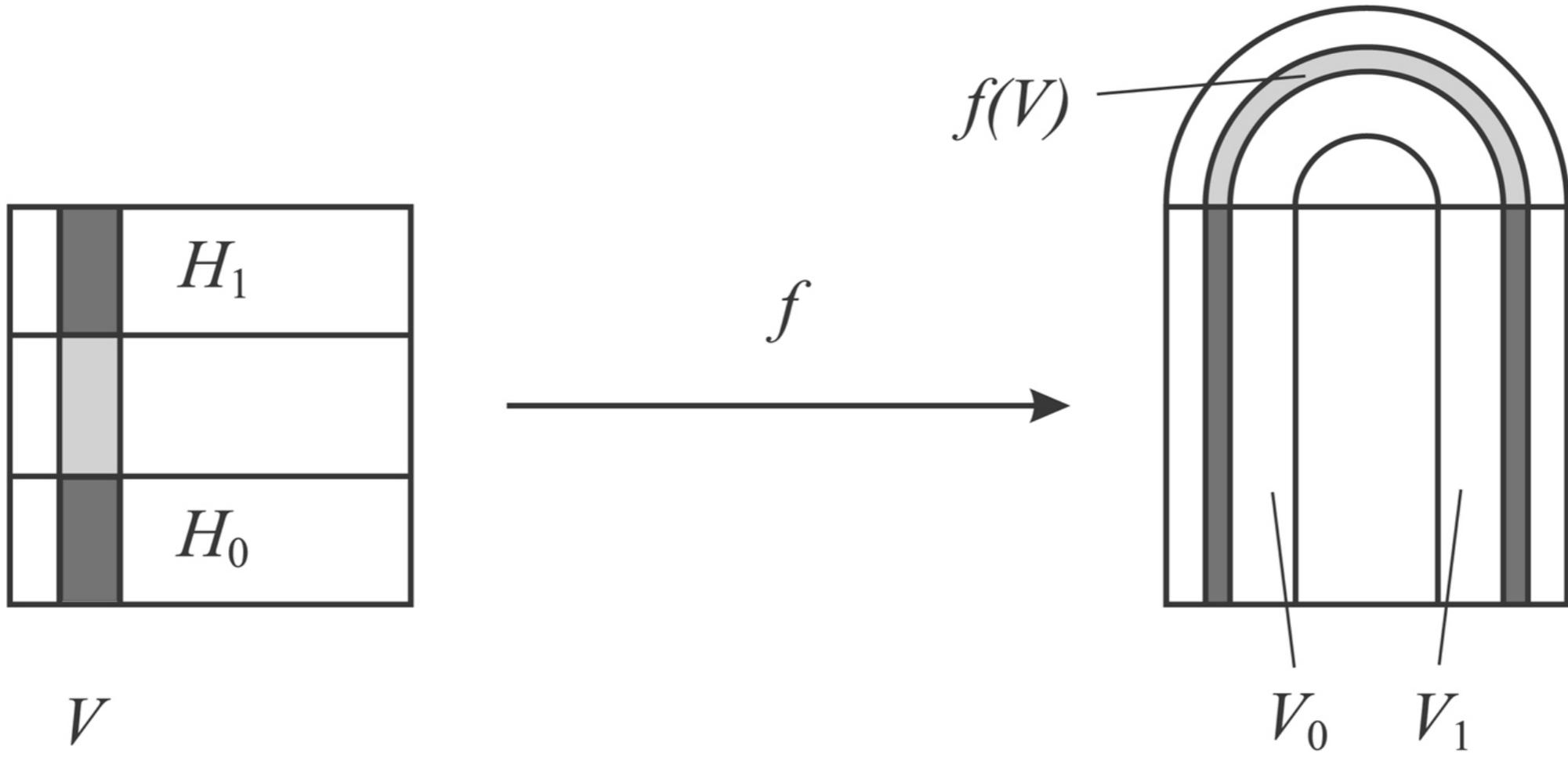


FIGURE 2. Connections and their preconnections for the Smale horseshoe. Any continuum that extends from  $end_0$  to  $end_1$  in  $Q$  is a connection. Two possible connections are pictured above. Both are arcs. Connection 1 has the minimum number of preconnections possible, namely 2, while connection 2 has 4, due to the wiggly path it takes in travelling from  $end_0$  to  $end_1$ . The preconnections in this case are arcs in the grey-shaded regions which connect the two sides of a grey band.





- *Sotto opportune ipotesi, si dimostrano l'esistenza di dinamiche caotiche nel senso del lancio della moneta e la sensitività rispetto ai dati iniziali.*



- *Sotto opportune ipotesi, si dimostrano l'esistenza di dinamiche caotiche nel senso del lancio della moneta e la sensitività rispetto ai dati iniziali.*
- *N.B.: Non si parla di punti fissi o periodici!!*



- *Sotto opportune ipotesi, si dimostrano l'esistenza di dinamiche caotiche nel senso del lancio della moneta e la sensitività rispetto ai dati iniziali.*
- *N.B.: Non si parla di punti fissi o periodici!!*
- *Papini e Zanolin trovano criterio (**stiramento lungo i cammini**) per assicurarne l'esistenza nel caso di insiemi omeomorfi al quadrato.*



- *Sotto opportune ipotesi, si dimostrano l'esistenza di dinamiche caotiche nel senso del lancio della moneta e la sensitività rispetto ai dati iniziali.*
- *N.B.: **Non si parla di punti fissi o periodici!!***
- *Papini e Zanolin trovano criterio (**stiramento lungo i cammini**) per assicurarne l'esistenza nel caso di insiemi omeomorfi al quadrato.*
- *I cammini e i sotto-cammini svolgono la funzione di connettori e pre-connettori.*



- *Applicazione ai lavori di Yang e Yangi (2004), Yang e Li (2006), etc.*



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

Chaos, Solitons and Fractals 20 (2004) 587–591

---

---

CHAOS  
SOLITONS & FRACTALS

---

---

[www.elsevier.com/locate/chaos](http://www.elsevier.com/locate/chaos)

# A rigorous verification of chaos in an inertial two-neuron system

Xiao-Song Yang<sup>a,b,\*</sup>, Fangyan Yang<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Department of Automation, Center for Systems and Control, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China*

<sup>b</sup> *Institute for Nonlinear Systems, Chongqing University of Posts and Telecomm., Chongqing 400065, China*

Accepted 1 August 2003

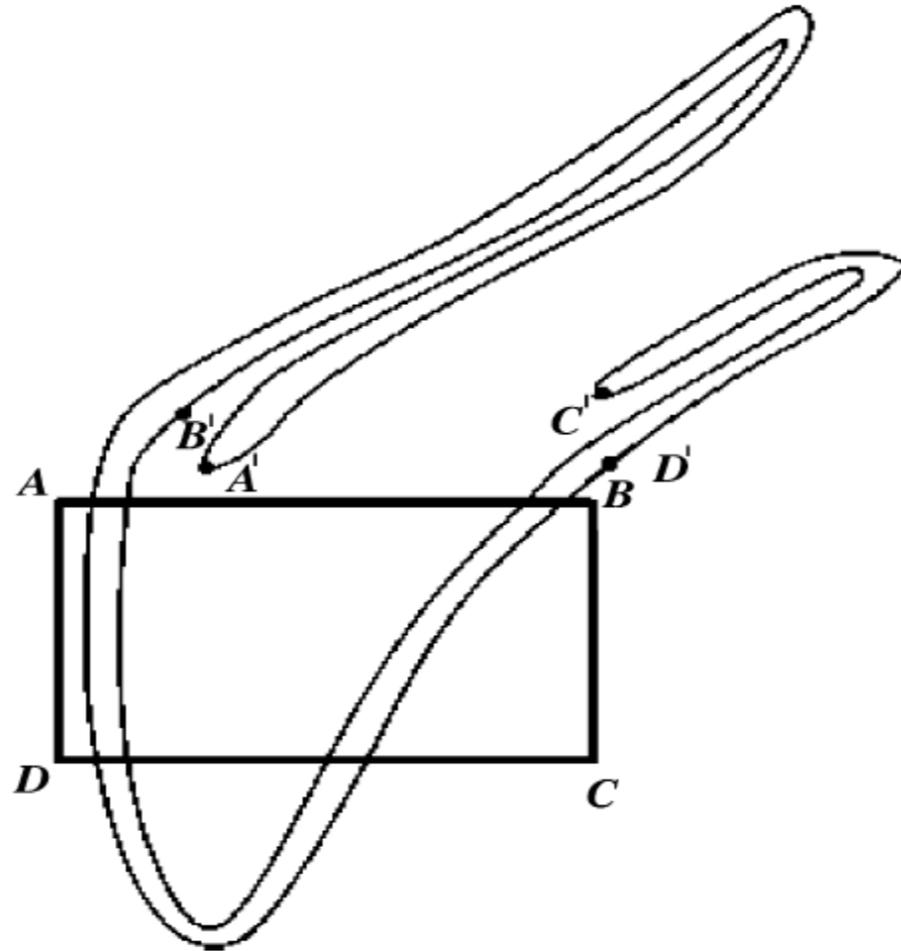


Fig. 3. An illustrative figure for this Poincaré map.



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

Chaos, Solitons and Fractals 27 (2006) 25–30

---

---

CHAOS  
SOLITONS & FRACTALS

---

---

[www.elsevier.com/locate/chaos](http://www.elsevier.com/locate/chaos)

# A computer-assisted proof of chaos in Josephson junctions

Xiao-Song Yang <sup>a,\*</sup>, Qingdu Li <sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074, China*

<sup>b</sup> *Institute for Nonlinear Systems, Chongqing University of Posts and Telecomm., Chongqing 400065, China*

Accepted 31 March 2005

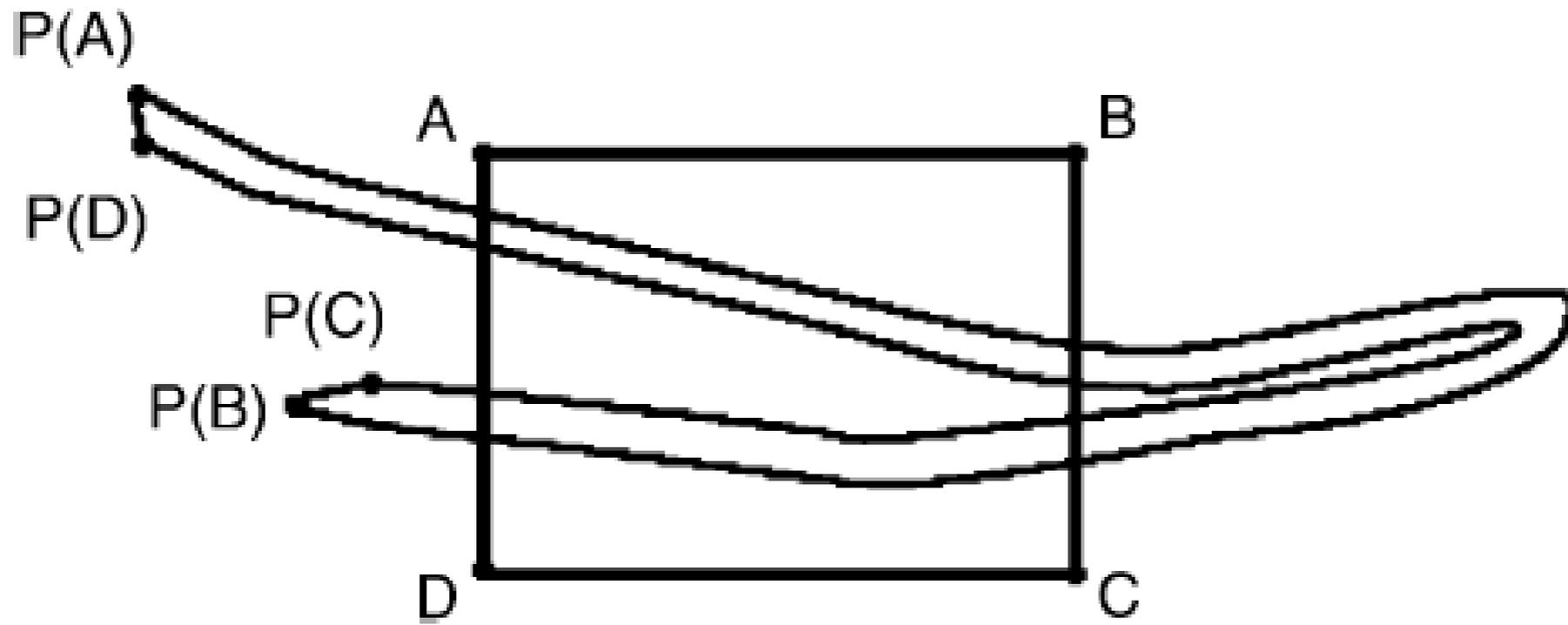


Fig. 5. An illustrative picture for the Poincaré map.



## ■ *Motivazioni della nostra ricerca:*



- *Motivazioni della nostra ricerca:*
- *Unificare e generalizzare* lavori riguardanti l'esistenza di punti periodici e dinamiche caotiche (Zgliczyński, Wójcik, Gidea, Mischaikow, Mrozek, Szrednicki, etc.), tramite un *approccio elementare*;



- *Motivazioni della nostra ricerca:*
- *Unificare e generalizzare* lavori riguardanti l'esistenza di punti periodici e dinamiche caotiche (Zgliczyński, Wójcik, Gidea, Mischaikow, Mrozek, Szrednicki, etc.), tramite un *approccio elementare*;
- *Estendere* al caso  $N$ -dimensionale la teoria di Papini e Zanolin.



# 2. Lemmi topologici



■ *Notazione: Dato un generico cammino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ , indicheremo con  $\bar{\gamma}$  la sua immagine.*



- *Notazione: Dato un generico cammino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ , indicheremo con  $\bar{\gamma}$  la sua immagine.*
- *I cammini sono sempre continui!*

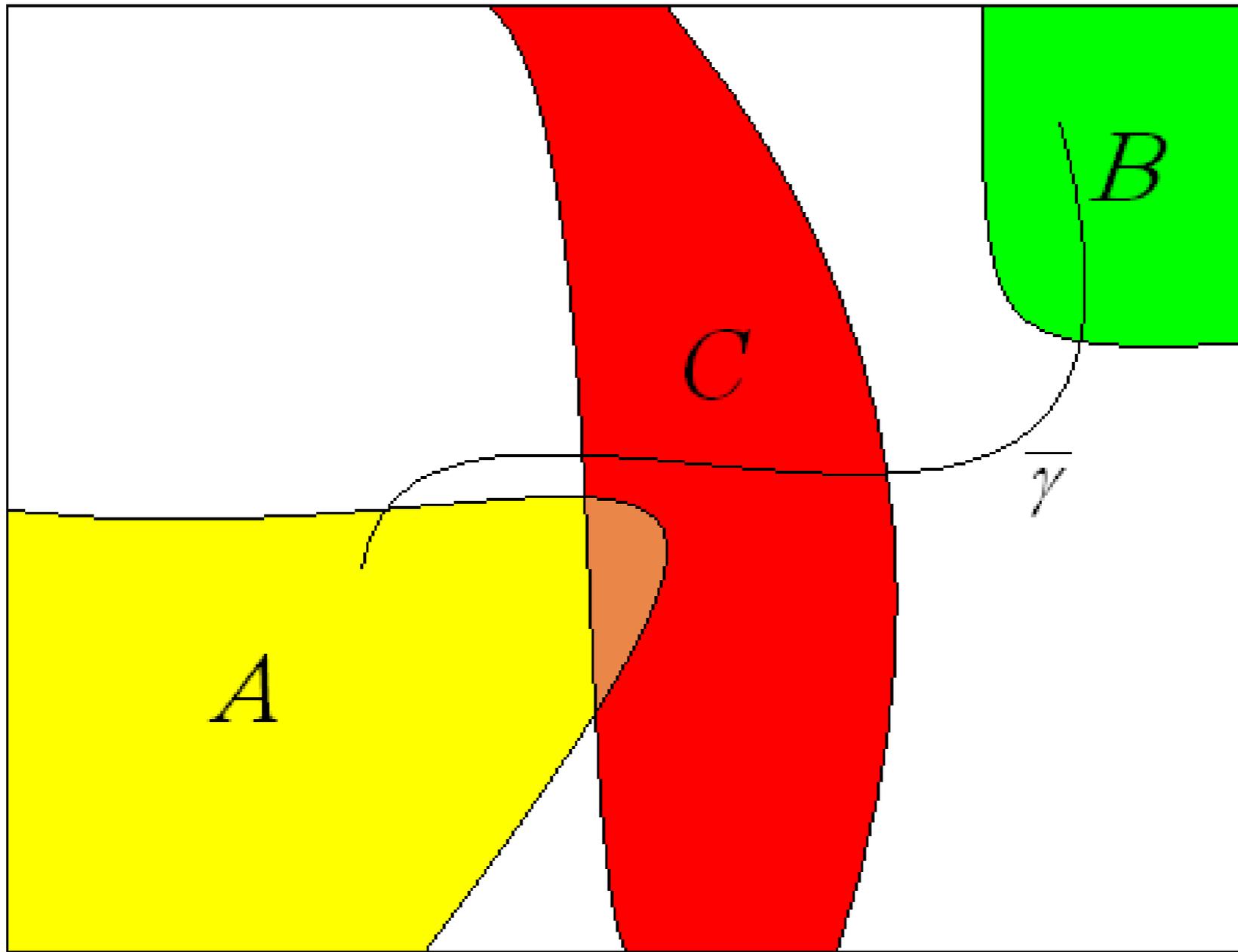


- **Notazione:** Dato un generico cammino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ , indicheremo con  $\bar{\gamma}$  la sua immagine.
- ***I cammini sono sempre continui!***
- **Definizione:** Sia  $X$  uno spazio metrico connesso per archi e siano  $A, B, C \subseteq X$  insiemi chiusi non vuoti, con  $A \cap B = \emptyset$ . Diciamo che ***C taglia gli archi tra A e B*** se, per ogni cammino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  con

$$\bar{\gamma} \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \bar{\gamma} \cap B \neq \emptyset,$$

vale che

$$\bar{\gamma} \cap C \neq \emptyset.$$





## ■ *Collegamento tra proprietà topologiche e comportamento delle mappe continue:*



- *Collegamento tra proprietà topologiche e comportamento delle mappe continue:*
- *Nota: Ogni spazio metrico connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.*



- **Collegamento tra proprietà topologiche e comportamento delle mappe continue:**
- **Nota:** Ogni spazio metrico connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.
- **Lemma:** Sia  $X$  uno spazio metrico connesso e localmente connesso per archi e siano  $A, B, C \subseteq X$  chiusi e non vuoti, con  $A \cap B = \emptyset$ . Allora  $C$  taglia gli archi tra  $A$  e  $B$  se e solo se esiste una funzione continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$f(x) \leq 0, \forall x \in A, \quad f(x) \geq 0, \forall x \in B$$

e

$$C = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$



# 3. Punti fissi negli spazi $N$ -dimensionali



## ■ *Schema del lavoro:*



■ *Schema del lavoro:*

■ *Superfici generalizzate  $\Rightarrow$  insiemi degli zeri di funzioni scalari;*



- *Schema del lavoro:*
- *Superfici generalizzate  $\Rightarrow$  insiemi degli zeri di funzioni scalari;*
- *L'intersezione delle superfici corrisponde a uno zero di un campo vettoriale.*



■ *Strumento principale: Teorema di Poincaré-Miranda.*



■ *Strumento principale: **Teorema di Poincaré-Miranda.***

■ *Teorema: Indichiamo con  $I^N := [0, 1]^N$  il cubo unitario  $N$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^N$  e sia*

$$[x_i = k] := \{x = (x_1, \dots, x_N) \in I^N : x_i = k\}.$$

*Sia  $F = (F_1, \dots, F_N) : I^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  una funzione continua tale che, **per ogni**  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,*

$$F_i(x) \leq 0, \forall x \in [x_i = 0] \quad \mathbf{ed} \quad F_i(x) \geq 0, \forall x \in [x_i = 1]$$

***oppure***

$$F_i(x) \geq 0, \forall x \in [x_i = 0] \quad \mathbf{ed} \quad F_i(x) \leq 0, \forall x \in [x_i = 1].$$

*Allora esiste  $\bar{x} \in I^N$  tale che  $F(\bar{x}) = 0$ .*



■ *Introduciamo gli spazi su cui vogliamo lavorare:*



■ *Introduciamo gli spazi su cui vogliamo lavorare:*

■ *Definizione: Sia  $Z$  uno spazio metrico e*

$$h : \mathbb{R}^N \supseteq I^N \rightarrow X \subseteq Z$$

*un omeomorfismo di  $I^N$  sulla sua immagine  $X$ . Allora chiameremo la coppia*

$$\hat{X} := (X, h)$$

*un rettangolo generalizzato  $N$ -dimensionale di  $Z$ .  
Gli insiemi*

$$X_i^l := h([x_i = 0]), \quad X_i^r := h([x_i = 1])$$

*verranno detti la  $i$ -esima faccia sinistra e la  $i$ -esima faccia destra di  $X$ , rispettivamente.*



■ *Ed ora il nostro risultato principale:*



■ Ed ora il nostro **risultato principale**:

■ **Teorema:** Sia  $\widehat{X} := (X, h)$  un rettangolo generalizzato  $N$ -dimensionale di uno spazio metrico  $Z$ . Assumiamo che, per ogni  $i \in \{1, \dots, N\}$ , esista un compatto  $S_i \subseteq X$ , tale che  $S_i$  taglia gli archi tra  $X_i^l$  e  $X_i^r$  in  $X$ . Allora

$$\bigcap_{i=1}^N S_i \neq \emptyset.$$



# 4. Punti periodici e dinamiche caotiche per mappe che stirano i cammini



- *Estensione al caso  $N$ -dimensionale di recenti lavori di Papini e Zanolin nel piano.*



■ *Estensione al caso  $N$ -dimensionale di recenti lavori di Papini e Zanolin nel piano.*

■ *Definizione: Siano  $Z$  uno spazio metrico e  $\hat{X} := (X, h)$  un rettangolo generalizzato  $N$ -dimensionale di  $Z$ .*

*Ponendo*

$$X_\ell := h([x_N = 0]), \quad X_r := h([x_N = 1])$$

*e*

$$X^- := X_\ell \cup X_r,$$

*la coppia*

$$\tilde{X} := (X, X^-)$$

*viene detta un **rettangolo orientato  $N$ -dimensionale**.*



■ *Estensione al caso  $N$ -dimensionale di recenti lavori di Papini e Zanolin nel piano.*

■ *Definizione: Siano  $Z$  uno spazio metrico e  $\hat{X} := (X, h)$  un rettangolo generalizzato  $N$ -dimensionale di  $Z$ .*

*Ponendo*

$$X_\ell := h([x_N = 0]), \quad X_r := h([x_N = 1])$$

*e*

$$X^- := X_\ell \cup X_r,$$

*la coppia*

$$\tilde{X} := (X, X^-)$$

*viene detta un **rettangolo orientato  $N$ -dimensionale**.*

■ *Concetto simile a quello di  $h$ -set di tipo  $(1, N - 1)$  di Zgliczyński e Gidea e a quello di  $(1, N - 1)$ -window di Gidea e Robinson.*



■ **Definizione:** Siano  $Z$  uno spazio metrico e  $\tilde{X} := (X, X^-)$ ,  $\tilde{Y} := (Y, Y^-)$  due rettangoli orientati  $N$ -dimensionali di  $Z$ . Sia poi  $\psi : Z \supseteq D_\psi \rightarrow Z$  una funzione e sia

$$\mathcal{D} \subseteq X \cap D_\psi.$$

**Diciamo che  $(\mathcal{D}, \psi)$  stira  $\tilde{X}$  su  $\tilde{Y}$  lungo i cammini e scriviamo**

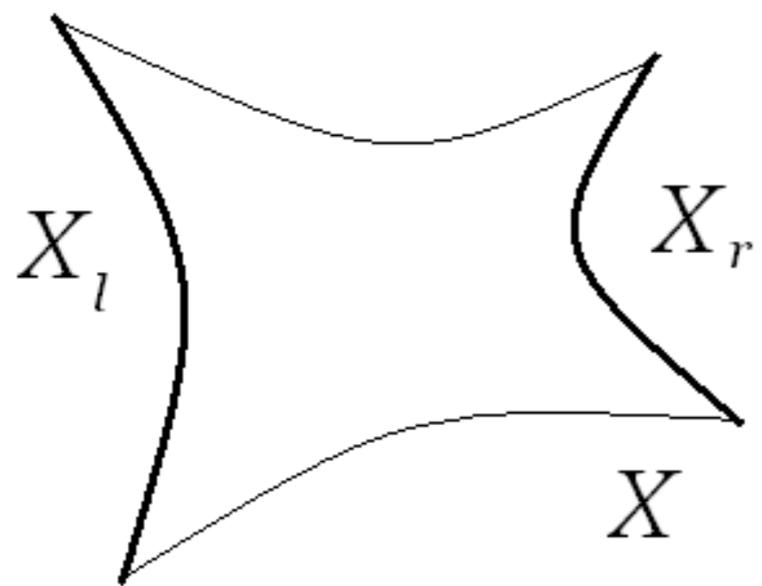
$$(\mathcal{D}, \psi) : \tilde{X} \xrightarrow{\cong} \tilde{Y}$$

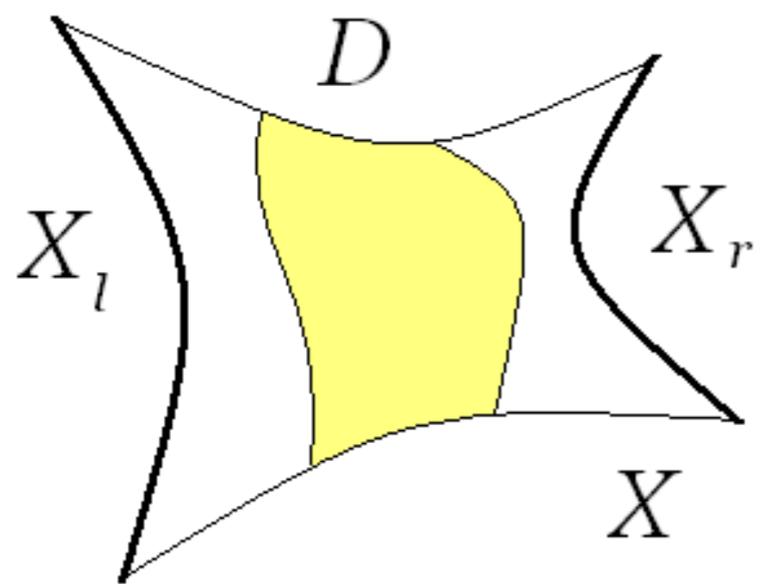
**se esiste un compatto  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{D}$  tale che  $\psi$  è continua su  $\mathcal{K}$  e per ogni cammino  $\gamma$  con**

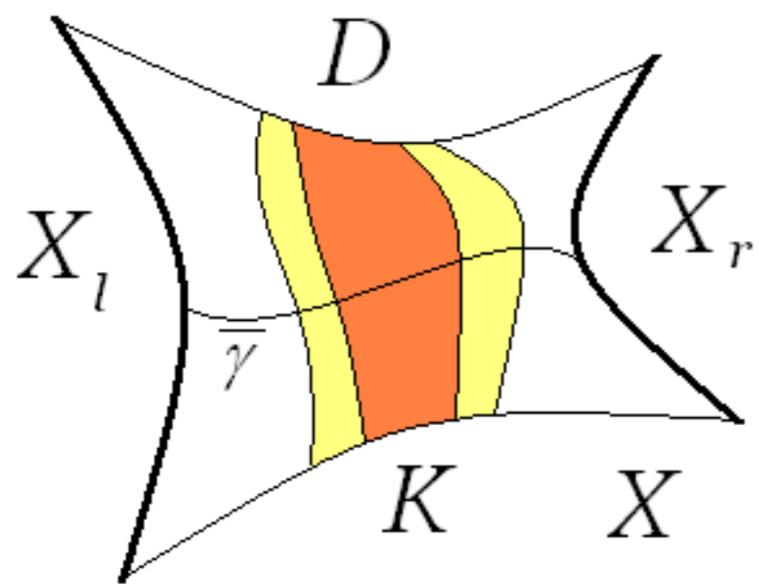
$$\bar{\gamma} \subseteq X \quad \text{e} \quad \bar{\gamma} \cap X_\ell \neq \emptyset, \quad \bar{\gamma} \cap X_r \neq \emptyset,$$

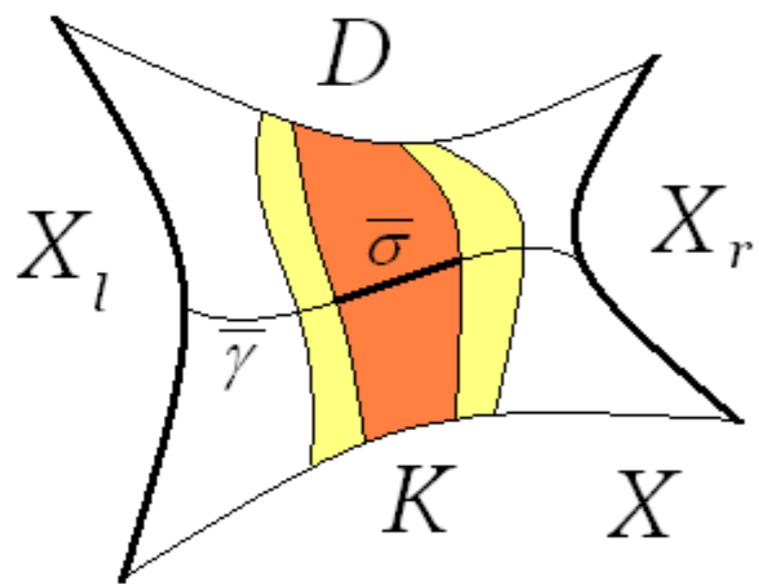
**esiste un sottocammino  $\sigma$  di  $\gamma$  tale che**

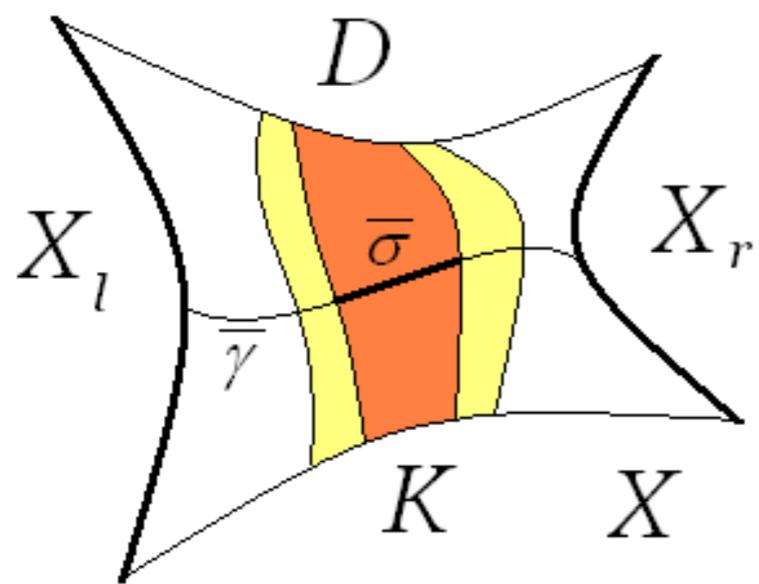
$$\bar{\sigma} \subseteq \mathcal{K} \quad \text{e} \quad \psi(\bar{\sigma}) \subseteq Y, \quad \text{con} \quad \psi(\bar{\sigma}) \cap Y_\ell \neq \emptyset, \quad \psi(\bar{\sigma}) \cap Y_r \neq \emptyset.$$



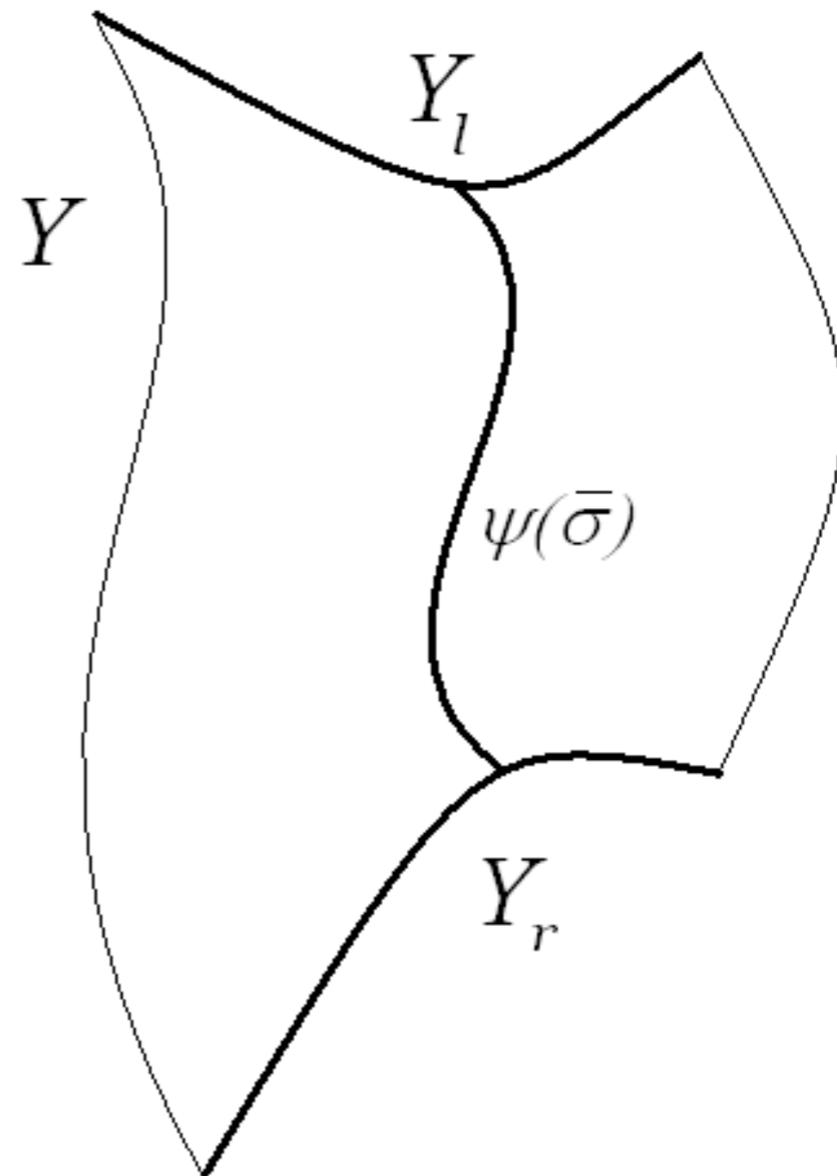








$\psi$





■ *Quando vorremo mettere in evidenza il ruolo di  $\mathcal{K}$ , scriveremo anche*

$$(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \psi) : \tilde{X} \rightleftarrows \tilde{Y}.$$



- *Quando vorremo mettere in evidenza il ruolo di  $\mathcal{K}$ , scriveremo anche*

$$(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \psi) : \tilde{X} \xrightarrow{\psi} \tilde{Y}.$$

- *Notare che  $\psi$  non è necessariamente continua su tutto il suo dominio  $D_\psi$  e in generale  $\psi(\mathcal{K}) \not\subseteq Y$ .*



- Quando vorremo mettere in evidenza il ruolo di  $\mathcal{K}$ , scriveremo anche

$$(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \psi) : \tilde{X} \xrightarrow{\cong} \tilde{Y}.$$

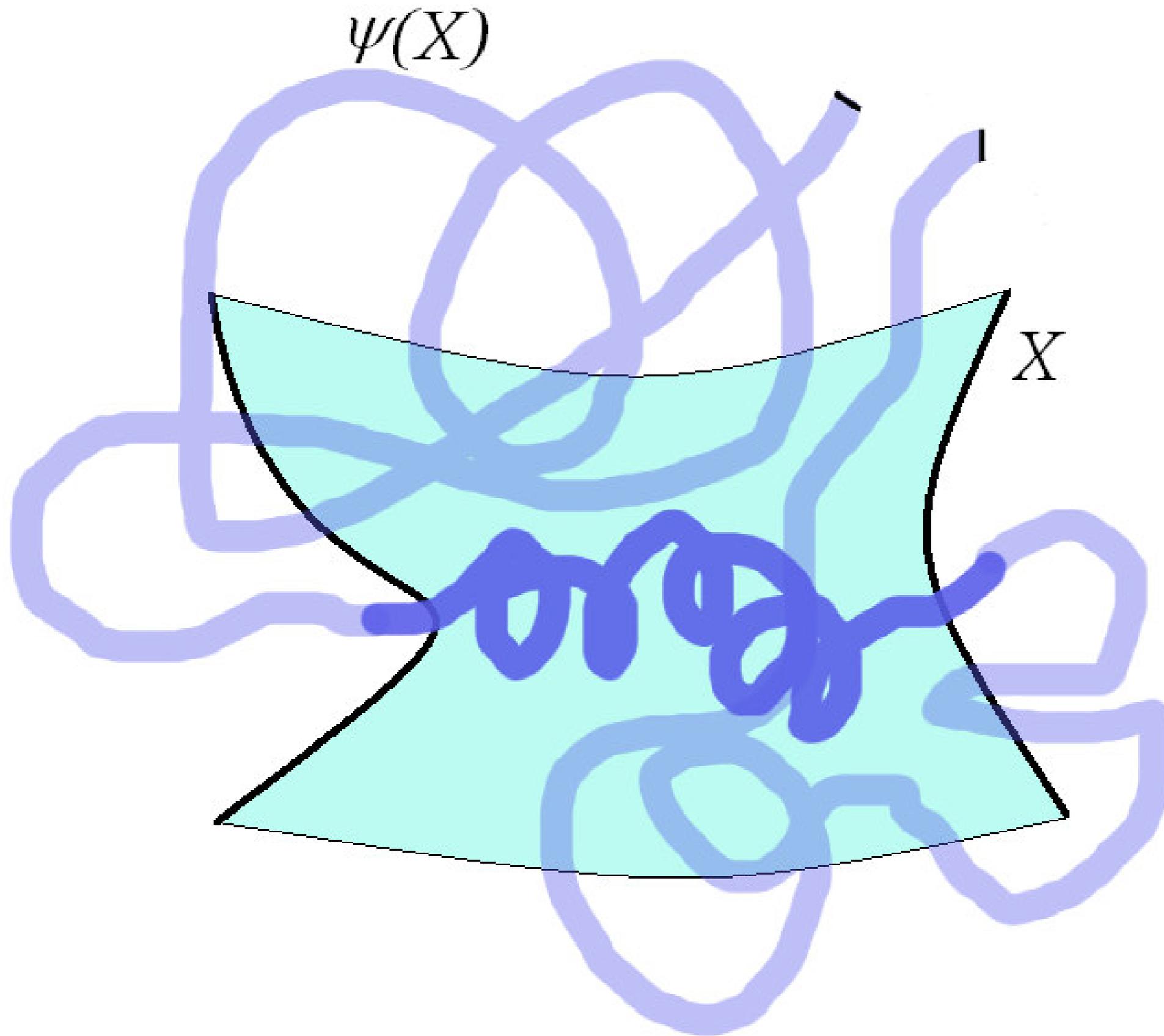
- Notare che  $\psi$  non è necessariamente continua su tutto il suo dominio  $D_\psi$  e in generale  $\psi(\mathcal{K}) \not\subseteq Y$ .

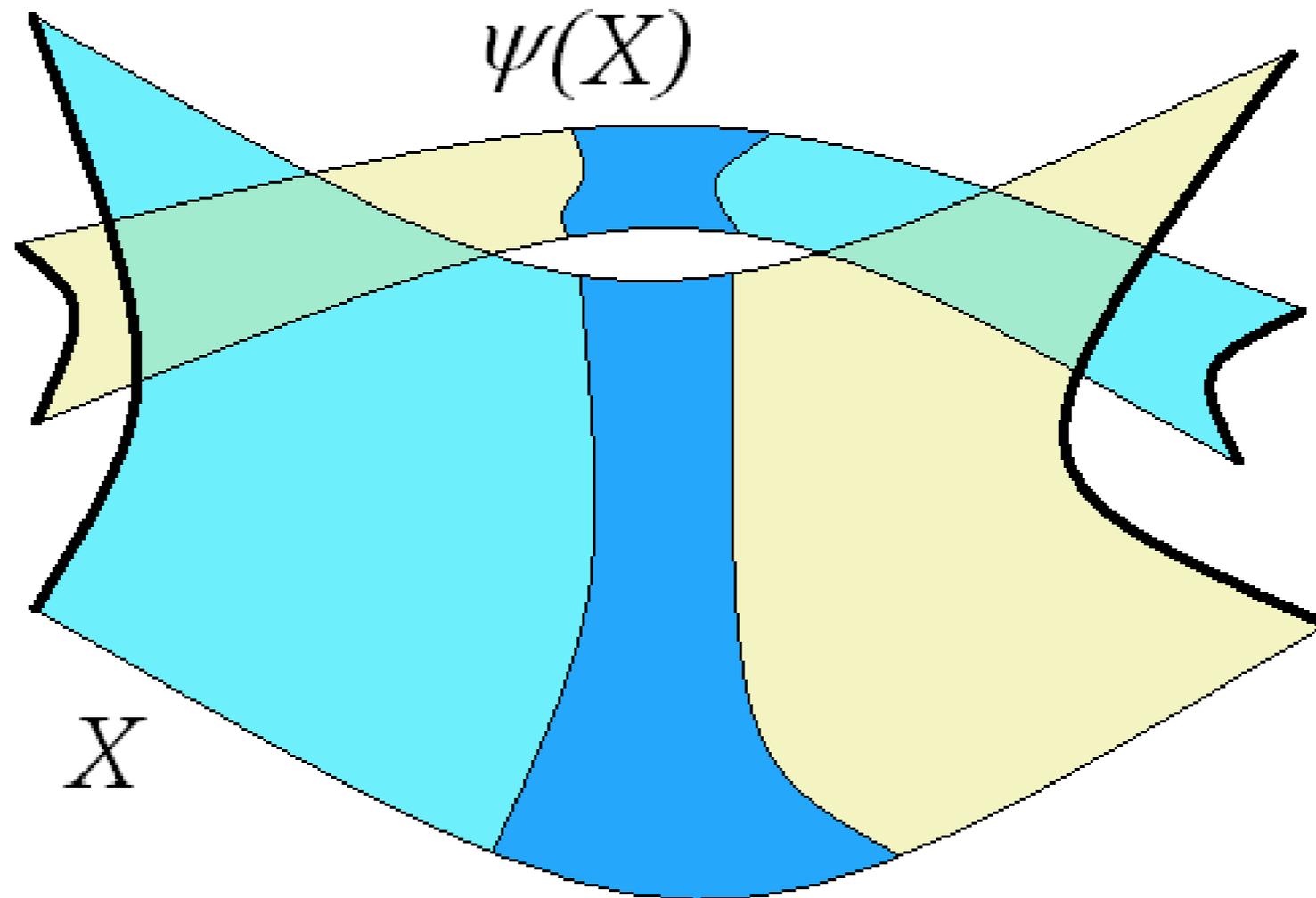
- **Teorema:** Sia  $\tilde{X} := (X, X^-)$  un rettangolo orientato  $N$ -dimensionale di uno spazio metrico  $Z$ . Siano poi  $\psi : Z \supseteq D_\psi \rightarrow Z$  e  $\mathcal{D} \subseteq X \cap D_\psi$  tali che

$$(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \psi) : \tilde{X} \xrightarrow{\cong} \tilde{X},$$

per qualche compatto  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{D}$ . Allora **esiste**  $\tilde{w} \in \mathcal{K}$  tale che

$$\psi(\tilde{w}) = \tilde{w}.$$







■ **Teorema:** Sia  $\tilde{X}_k = (X_k, X_k^-)_{k \in \mathbb{Z}}$  una sequenza bi-infinita di rettangoli orientati  $N$ -dimensionali di uno spazio metrico  $Z$  e sia  $((\mathcal{D}_k, \psi_k))_{k \in \mathbb{Z}}$ , con  $\mathcal{D}_k \subseteq X_k$ , tale che

$$(\mathcal{D}_k, \psi_k) : \tilde{X}_k \xrightarrow{\cong} \tilde{X}_{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Allora valgono le seguenti:

- **Esiste**  $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  con  $w_k \in \mathcal{D}_k$  e  $\psi_k(w_k) = w_{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}$ ;
- **Se**  $\exists k, l \in \mathbb{Z}$ , con  $k < l$ , tali che  $\tilde{X}_k = \tilde{X}_l$ , allora esiste una sequenza finita  $(z_i)_{k \leq i \leq l}$ , con  $z_i \in \mathcal{D}_i$  e  $\psi_i(z_i) = z_{i+1}$  per ogni  $i = k, \dots, l-1$ , tale che  $z_l = z_k$ , cioè,  $z_k$  è un punto fisso di  $\psi_{l-1} \circ \dots \circ \psi_k$ .

◁ ▷ *Applicazione alle dinamiche caotiche:*

## ◁ ▷ *Applicazione alle dinamiche caotiche:*

■ *Definizione:* Siano  $Z$  spazio metrico,  $\psi : Z \supseteq D_\psi \rightarrow Z$  una funzione e  $\mathcal{D} \subseteq D_\psi$ . Assumiamo che  $m \geq 2$  sia un intero. Diciamo che  $\psi$  **induce dinamiche caotiche su  $m$  simboli nell'insieme  $\mathcal{D}$**  se esistono  $m$  insiemi compatti, disgiunti e non vuoti

$$\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{m-1} \subseteq \mathcal{D},$$

*tali che, per ogni sequenza  $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \{0, \dots, m-1\}^{\mathbb{Z}}$ , esiste una corrispondente sequenza  $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ , con*

$$w_i \in \mathcal{K}_{s_i} \quad \text{e} \quad w_{i+1} = \psi(w_i), \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

*e se  $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  è una sequenza  $k$ -periodica per qualche  $k \geq 1$  (cioè  $s_{i+k} = s_i, \forall i \in \mathbb{Z}$ ), esiste una sequenza  $k$ -periodica  $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$  che soddisfa (1).*

◁ ▷ Quando vorremo mettere in evidenza il ruolo dei  $\mathcal{K}_j$ , diremo anche che  $\psi$  induce dinamiche caotiche su  $m$  simboli nell'insieme  $\mathcal{D}$  relativamente a  $(\mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}_{m-1})$ .

◁ ▷ Quando vorremo mettere in evidenza il ruolo dei  $\mathcal{K}_j$ , diremo anche che  $\psi$  induce dinamiche caotiche su  $m$  simboli nell'insieme  $\mathcal{D}$  relativamente a  $(\mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}_{m-1})$ .

■ **Teorema:** Siano  $\tilde{X} = (X, X^-)$  un rettangolo orientato  $N$ -dimensionale di  $Z$  e  $\psi : Z \supseteq D_\psi \rightarrow Z$  una mappa. Sia  $\mathcal{D} \subseteq X \cap D_\psi$  e supponiamo esistano  $m \geq 2$  insiemi compatti disgiunti e non vuoti  $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{m-1} \subseteq \mathcal{D}$  tali che

$$(\mathcal{D}, \mathcal{K}_i, \psi) : \tilde{X} \rightleftarrows \tilde{X}, \quad \text{per } i = 0, \dots, m-1.$$

Allora la mappa  $\psi$  induce dinamiche caotiche su  $m$  simboli nell'insieme  $\mathcal{D}$  relativamente a  $(\mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}_{m-1})$ .



■ *Concetto di **intersezione trasversale**  $\Rightarrow$  dinamiche caotiche.*



- Concetto di **intersezione trasversale**  $\Rightarrow$  dinamiche caotiche.
- **Definizione:** Siano  $\tilde{\mathcal{M}}$  ed  $\tilde{\mathcal{N}}$  due rettangoli orientati  $N$ -dimensionali di uno spazio metrico  $Z$ . Diciamo che  $\tilde{\mathcal{M}}$  è una **fetta verticale** di  $\tilde{\mathcal{N}}$  e scriviamo

$$\tilde{\mathcal{M}} \subseteq_v \tilde{\mathcal{N}}$$

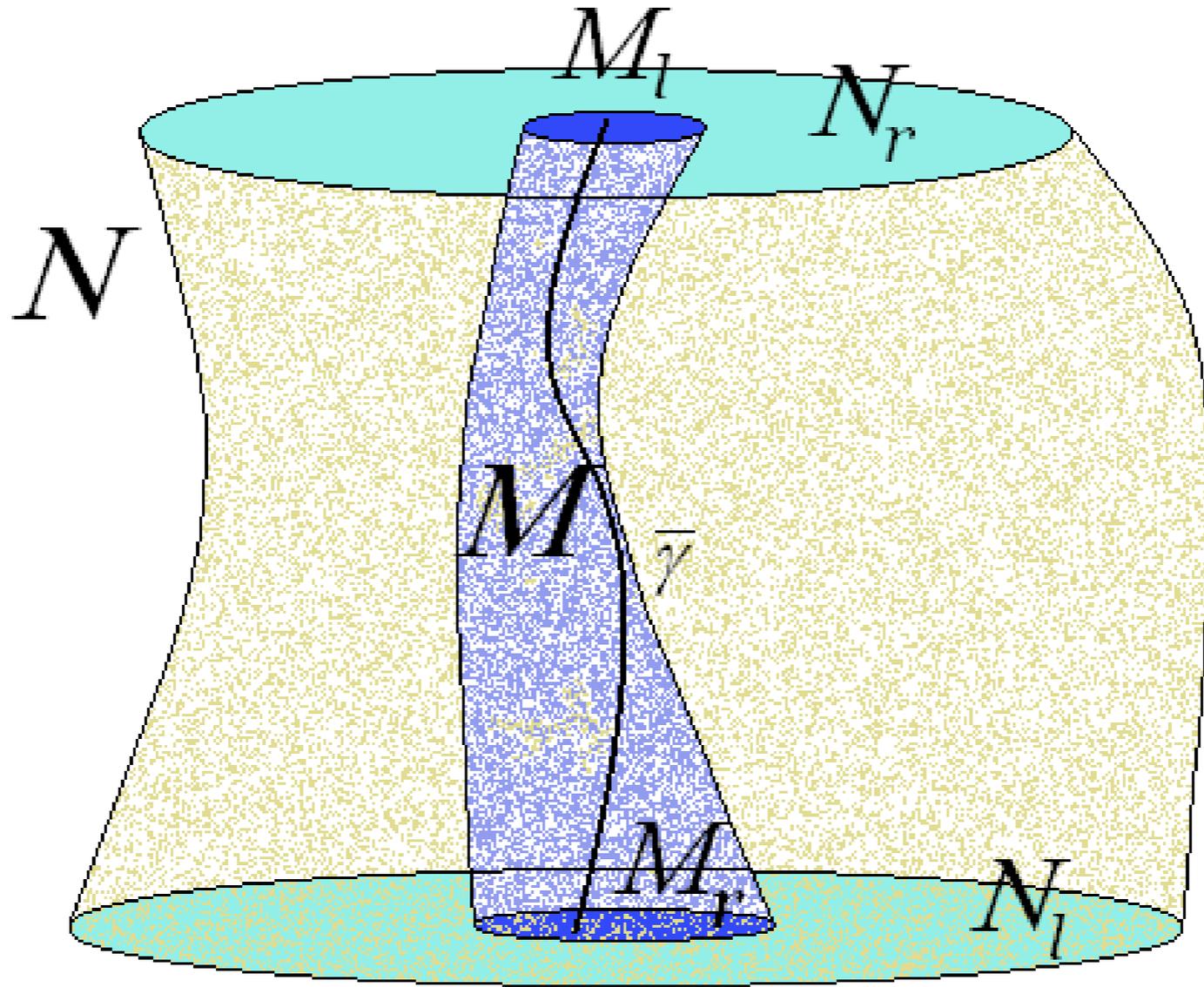
se  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$  e

$$\mathcal{M}_l \subseteq \mathcal{N}_l \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_r \subseteq \mathcal{N}_r,$$

oppure

$$\mathcal{M}_l \subseteq \mathcal{N}_r \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_r \subseteq \mathcal{N}_l,$$

così che ogni cammino in  $\mathcal{M}$  che unisce i due lati di  $\mathcal{M}^-$  è anche contenuto in  $\mathcal{N}$  e unisce i due lati di  $\mathcal{N}^-$ .

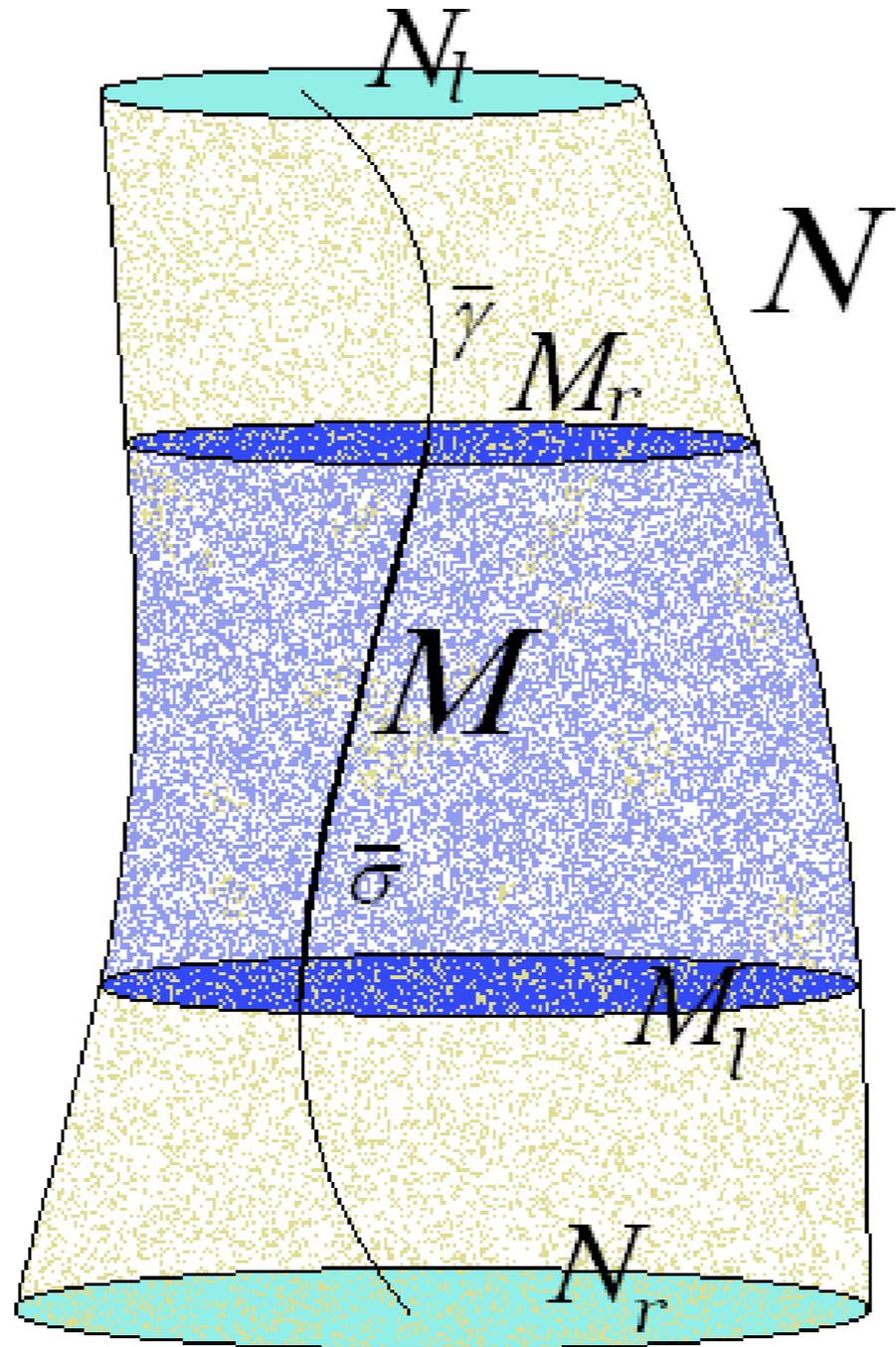




■ Diciamo invece che  $\widetilde{\mathcal{M}}$  è una **fetta orizzontale** di  $\widetilde{\mathcal{N}}$  e scriviamo

$$\widetilde{\mathcal{M}} \subseteq_h \widetilde{\mathcal{N}}$$

se  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$  e ogni cammino in  $\mathcal{N}$  che unisce i due lati di  $\mathcal{N}^-$  ammette un sottocammino in  $\mathcal{M}$  che unisce i due lati di  $\mathcal{M}^-$ .



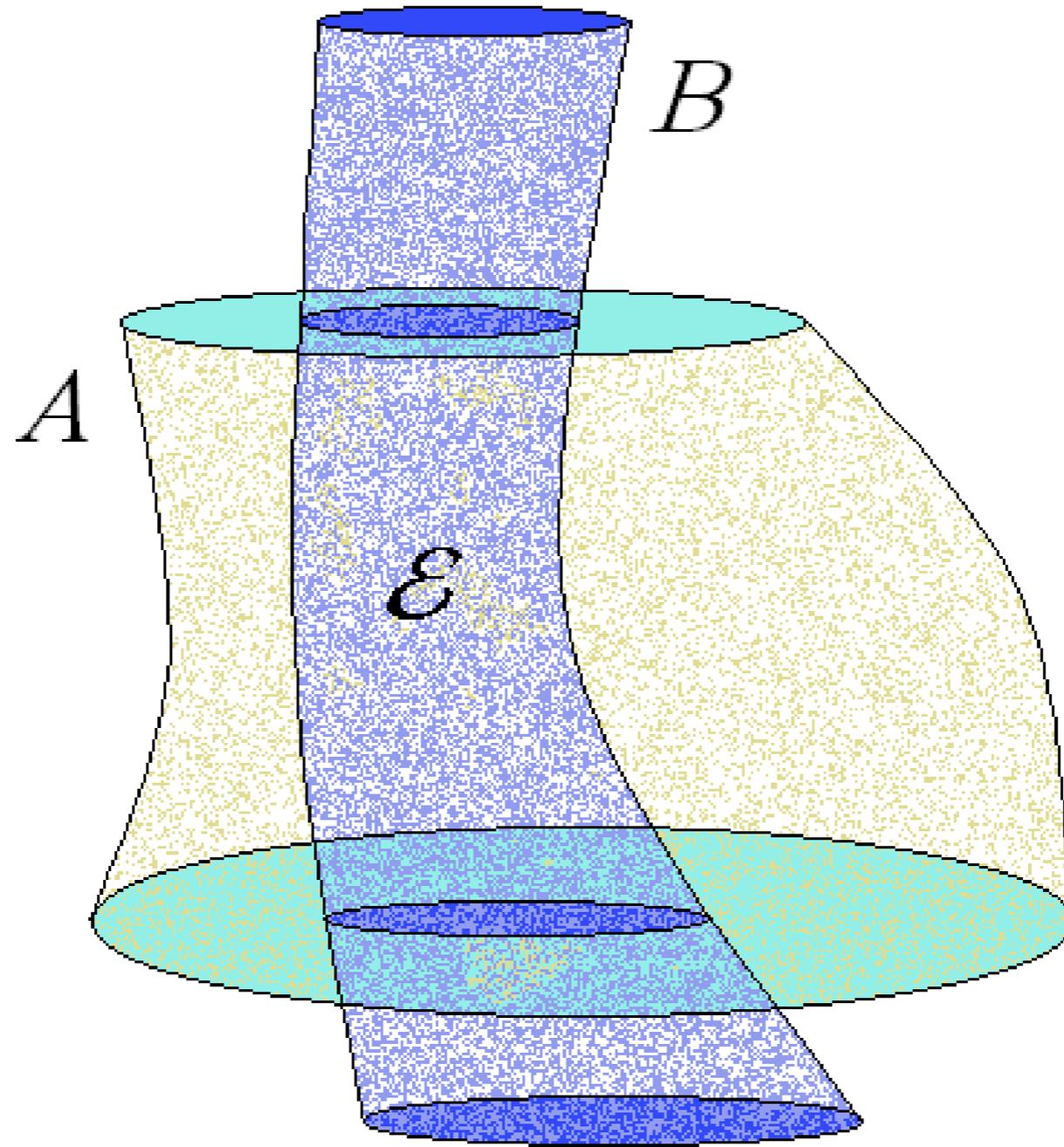


■ *Dati tre rettangoli orientati  $N$ -dimensionali  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  ed  $\tilde{\mathcal{E}}$  dello spazio metrico  $Z$ , con  $\mathcal{E} \subseteq A \cap B$ , diciamo che  $\tilde{B}$  attraversa  $\tilde{A}$  in  $\tilde{\mathcal{E}}$  e scriviamo*

$$\tilde{\mathcal{E}} \in \{\tilde{A} \pitchfork \tilde{B}\},$$

se

$$\tilde{\mathcal{E}} \subseteq_v \tilde{A} \text{ e } \tilde{\mathcal{E}} \subseteq_h \tilde{B}.$$





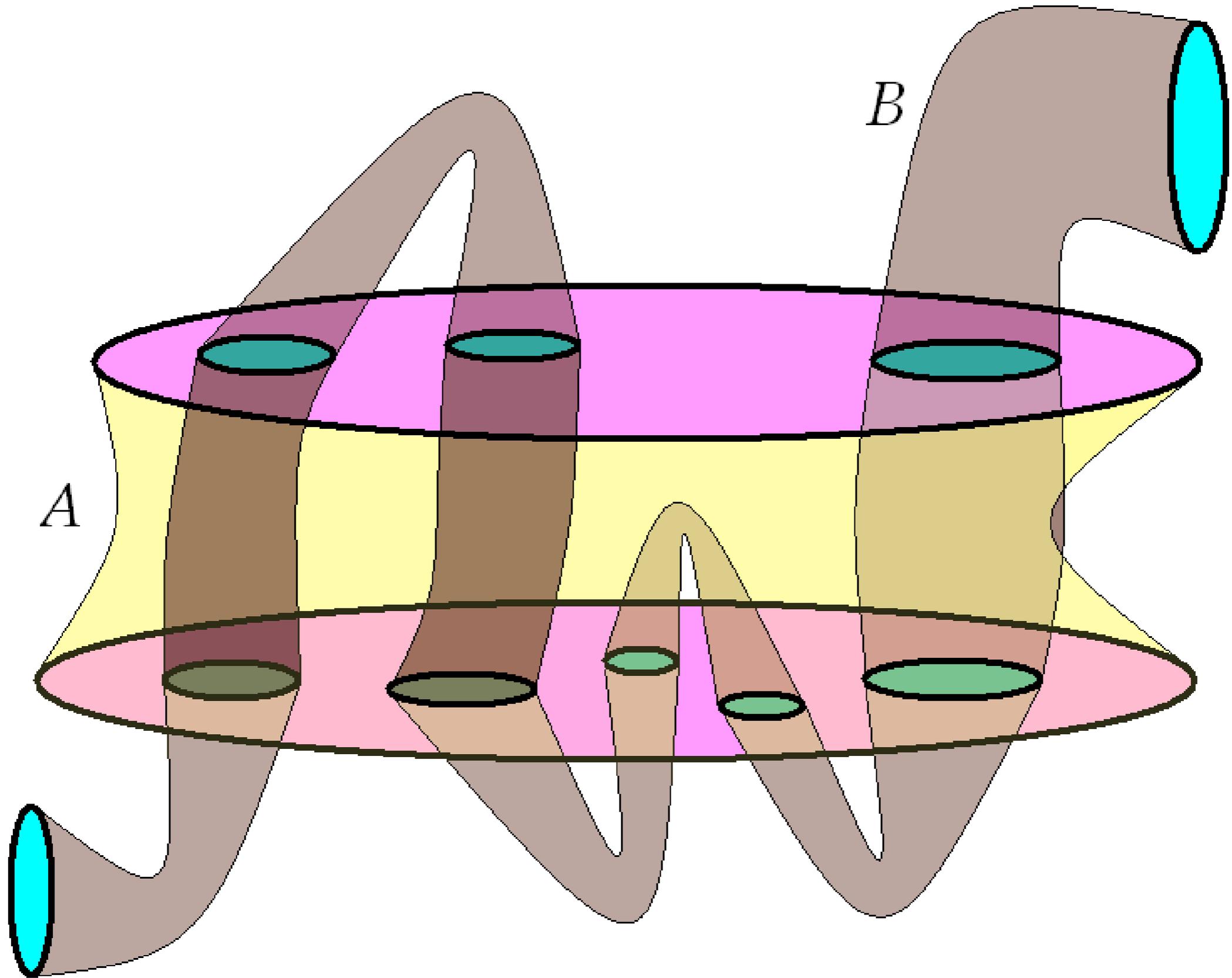
■ **Teorema:** Siano dati  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  due rettangoli orientati  $N$ -dimensionali di  $Z$  e sia  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \cap D_\psi$  chiuso tale che

$$(\mathcal{D}, \psi) : \tilde{A} \xrightarrow{\cong} \tilde{B}.$$

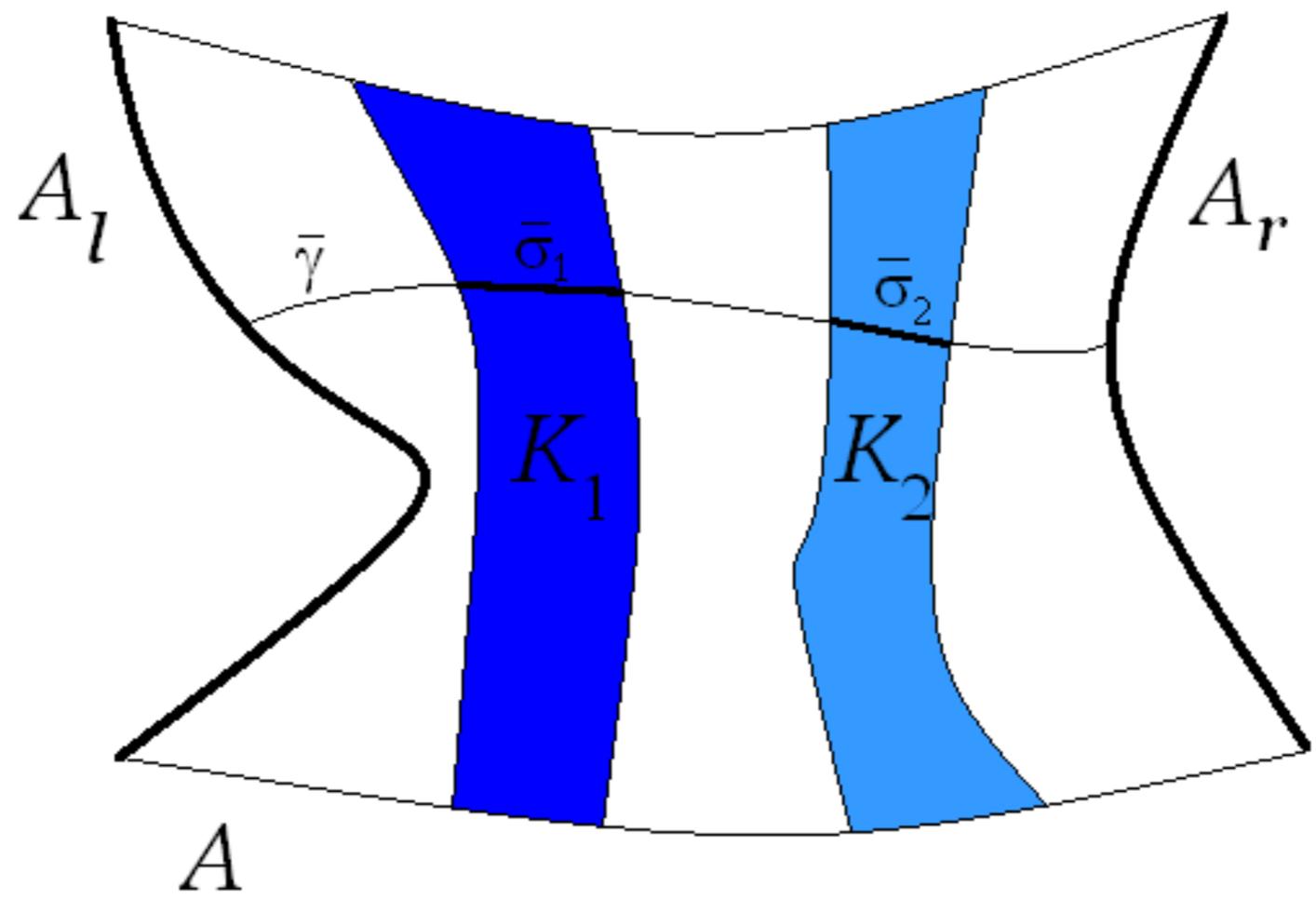
Assumiamo che esistano  $m \geq 1$  rettangoli orientati  $N$ -dimensionali

$$\tilde{\mathcal{E}}_0, \dots, \tilde{\mathcal{E}}_{m-1} \in \{\tilde{A} \uplus \tilde{B}\}.$$

Allora  $\psi$  ha almeno un punto fisso in ogni  $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}_i$ . Inoltre se  $m \geq 2$  e  $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = \emptyset$ , per  $i \neq j$ , la mappa  $\psi$  induce dinamiche caotiche su  $m$  simboli nell'insieme  $\mathcal{D}$  relativamente a  $(\mathcal{D} \cap \mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{D} \cap \mathcal{E}_{m-1})$ .









# 5. Sviluppi futuri: Linked Twist Maps



■ *Linked twist maps*  $\Rightarrow$  *configurazione geometrica per l'esistenza di ferri di cavallo topologici.*



- *Linked twist maps*  $\Rightarrow$  configurazione geometrica per l'esistenza di ferri di cavallo topologici.
- Studiate da diversi autori, inizialmente da un punto di vista teorico (Burton & Easton, Przytycki, etc.) negli anni '80.



- *Linked twist maps*  $\Rightarrow$  configurazione geometrica per l'esistenza di ferri di cavallo topologici.
- Studiate da diversi autori, inizialmente da un punto di vista teorico (Burton & Easton, Przytycki, etc.) negli anni '80.
- Recentemente applicate al miscelamento dei fluidi (*mixing in microfluidics*) da Wiggins, Sturman e Ottino.



- *Linked twist maps*  $\Rightarrow$  configurazione geometrica per l'esistenza di ferri di cavallo topologici.
- Studiate da diversi autori, inizialmente da un punto di vista teorico (Burton & Easton, Przytycki, etc.) negli anni '80.
- Recentemente applicate al miscelamento dei fluidi (*mixing in microfluidics*) da Wiggins, Sturman e Ottino.
- Per queste funzioni si dimostrano rigorosamente **proprietà di forte miscelamento** (*Bernoulli*)  $\Rightarrow$  concetti legati alla teoria della misura, mappe ergodiche.

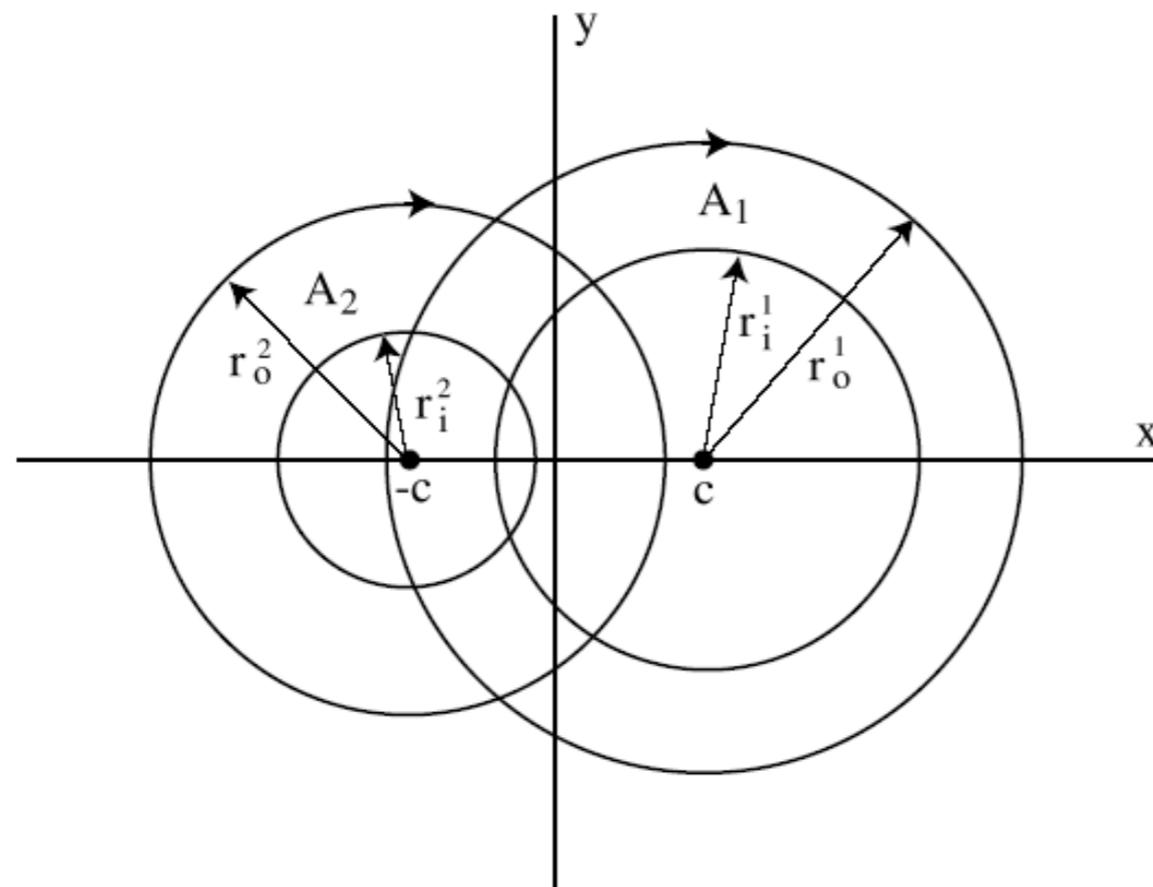
# The Linked Twist Map Approach to Fluid Mixing

Rob Sturman

Department of Mathematics  
University of Bristol

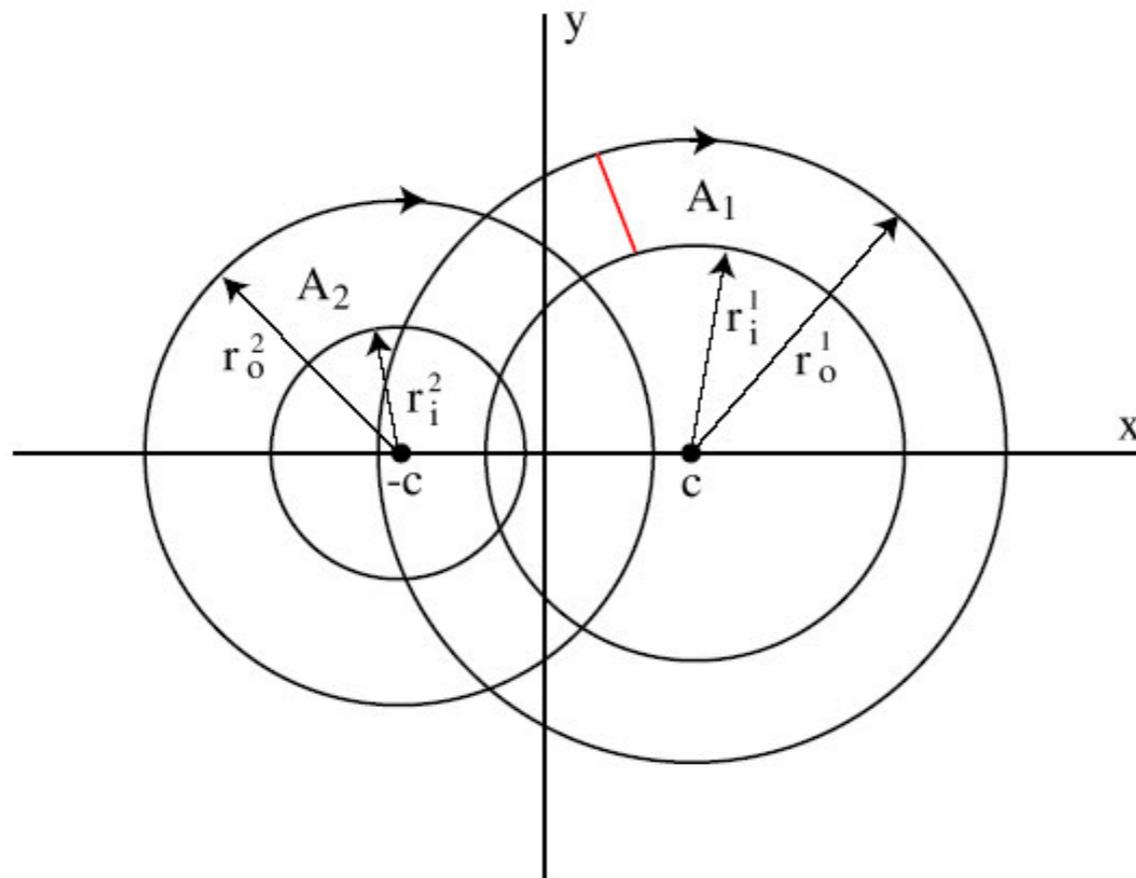
LMS Durham Symposium, 12 July 2006  
*Statistical Mechanics and Dynamical Systems*  
Joint work with Steve Wiggins and Julio Ottino

# Linked Twist Maps on the plane



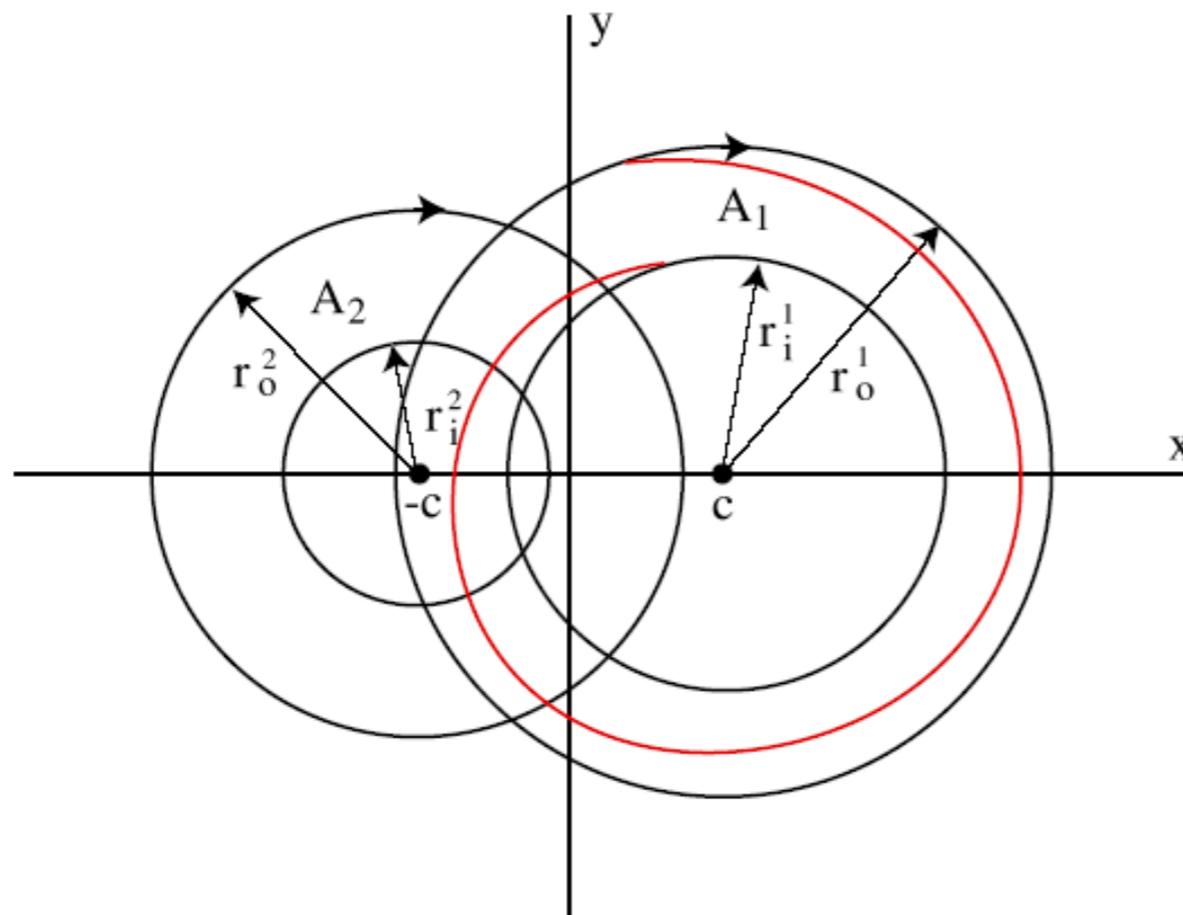
Domain is two intersecting annuli with two distinct regions of intersection

# Linked Twist Maps on the plane



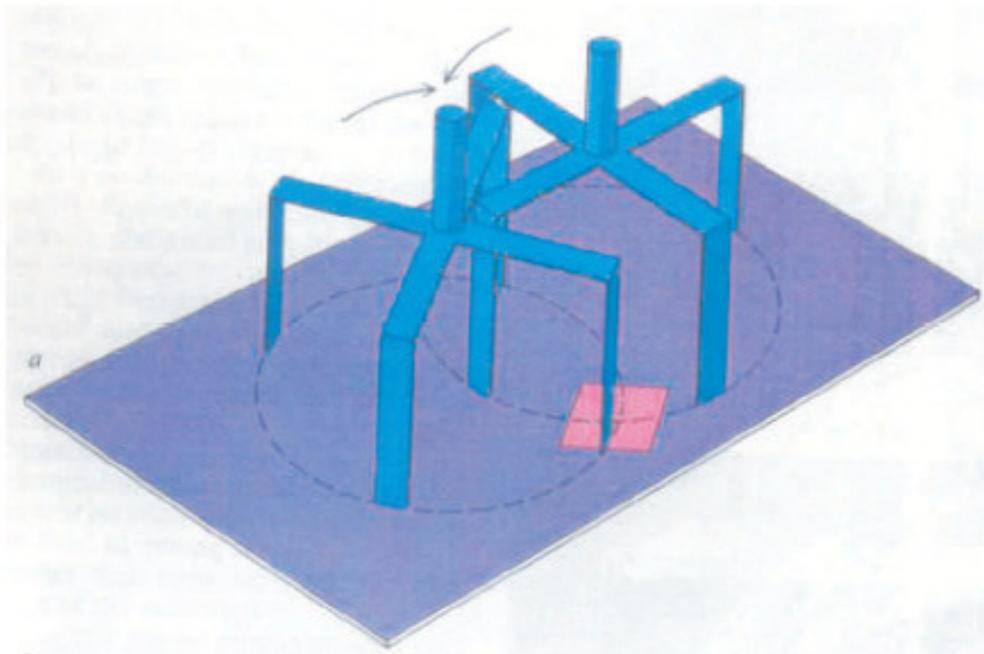
The action of a twist map is to take a line...

# Linked Twist Maps on the plane



$x$  ... and twist it around the annulus.

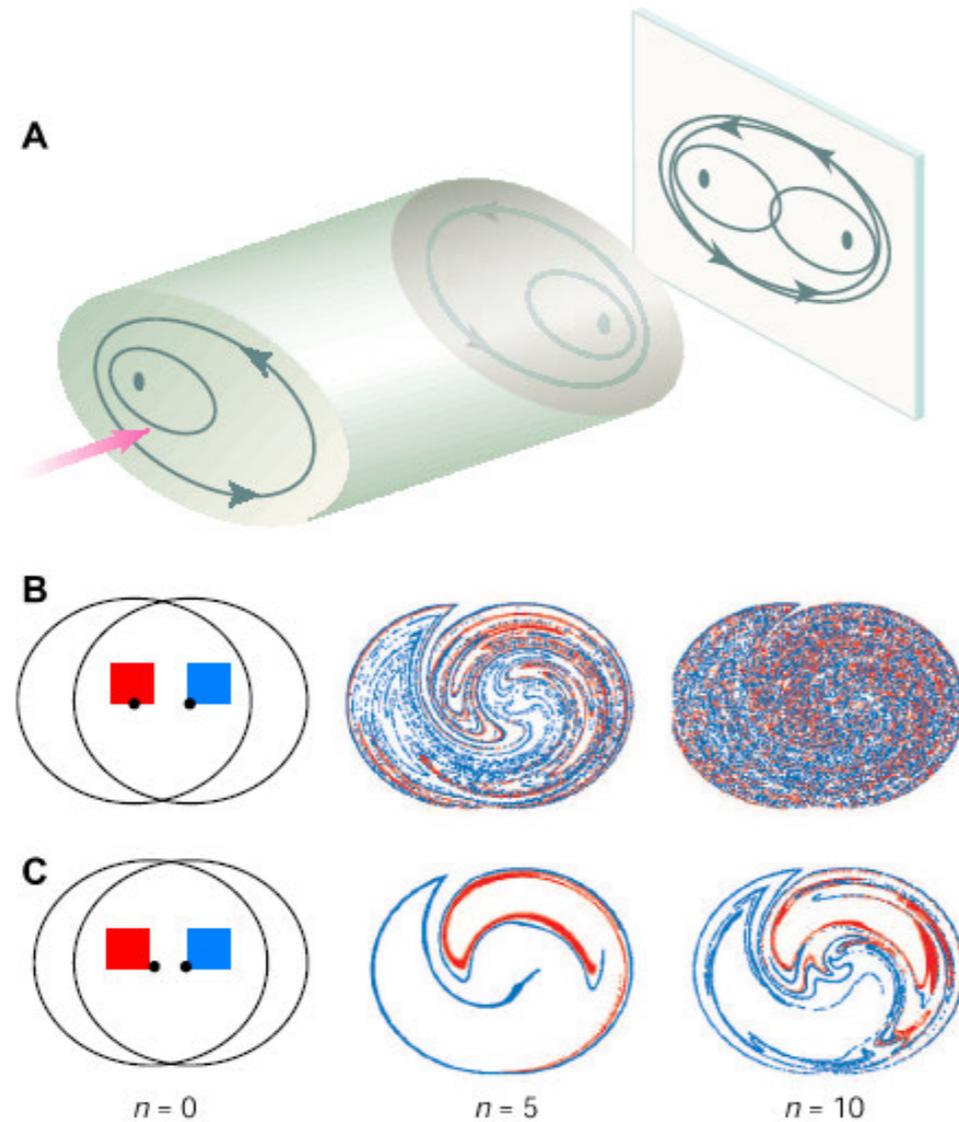
# The Egg-Beater Flow



An egg-beater can be viewed as either linked twist map on the plane, or on the torus. from [Ottino, J, *Sci. Am.*, **260**, 56–67 (1989)]

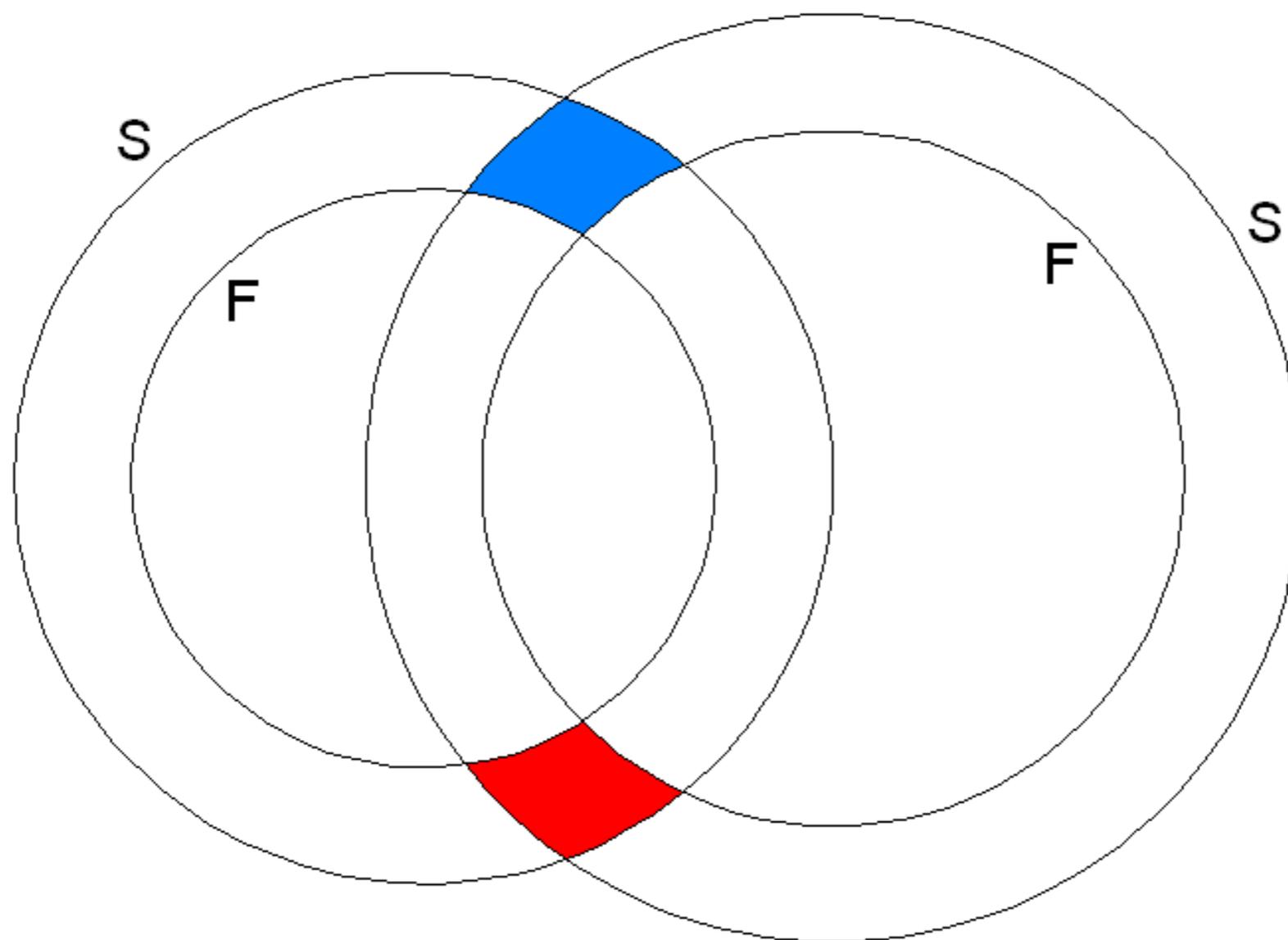
- *Le proprietà di miscelamento dipendono dall'intensità delle rotazioni, dal senso concorde o discorde di rotazione, dalla misura della sovrapposizione delle linee di flusso  $\Rightarrow$  **condizioni matematiche** da verificare.*

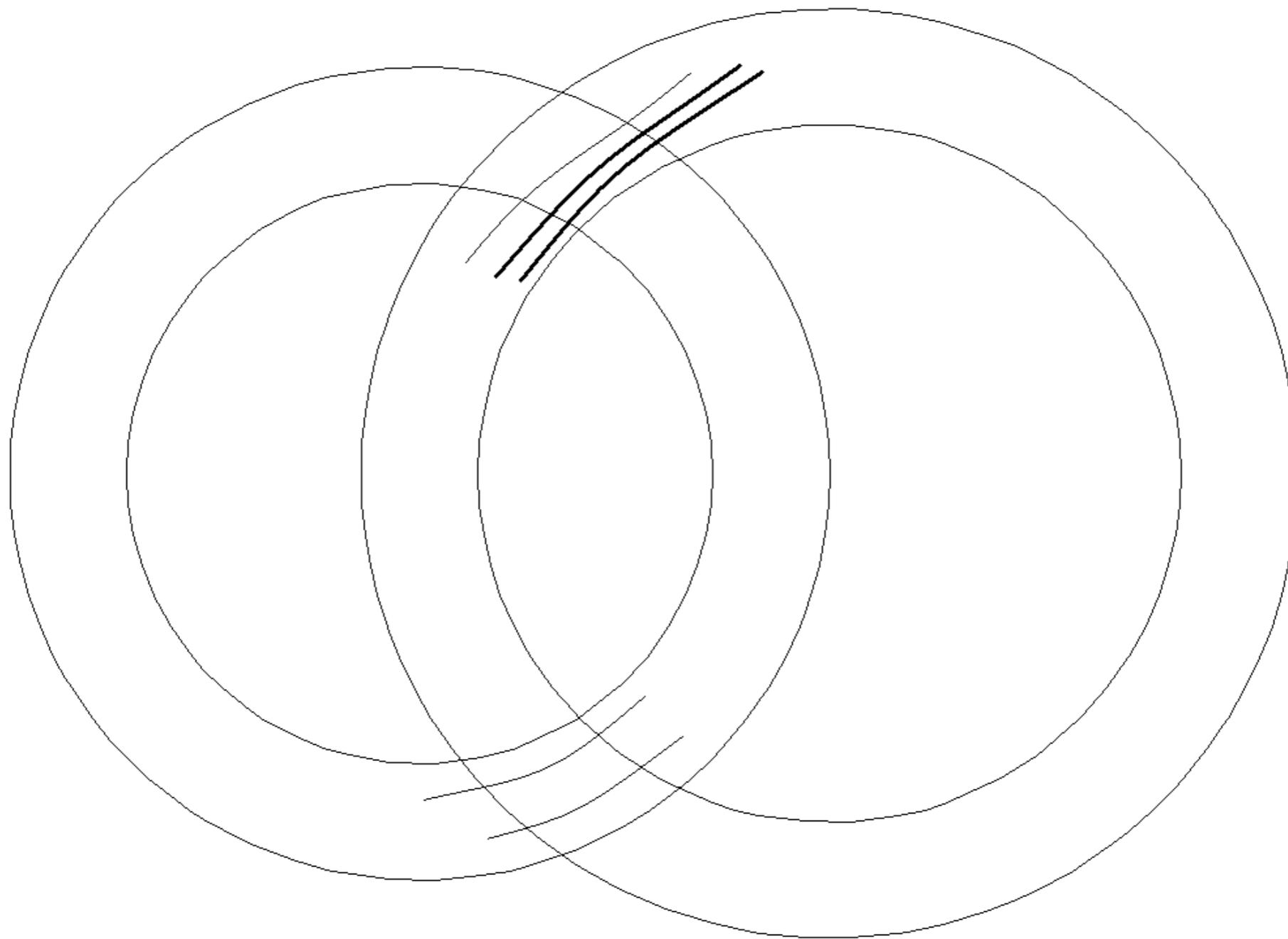
## Duct flows

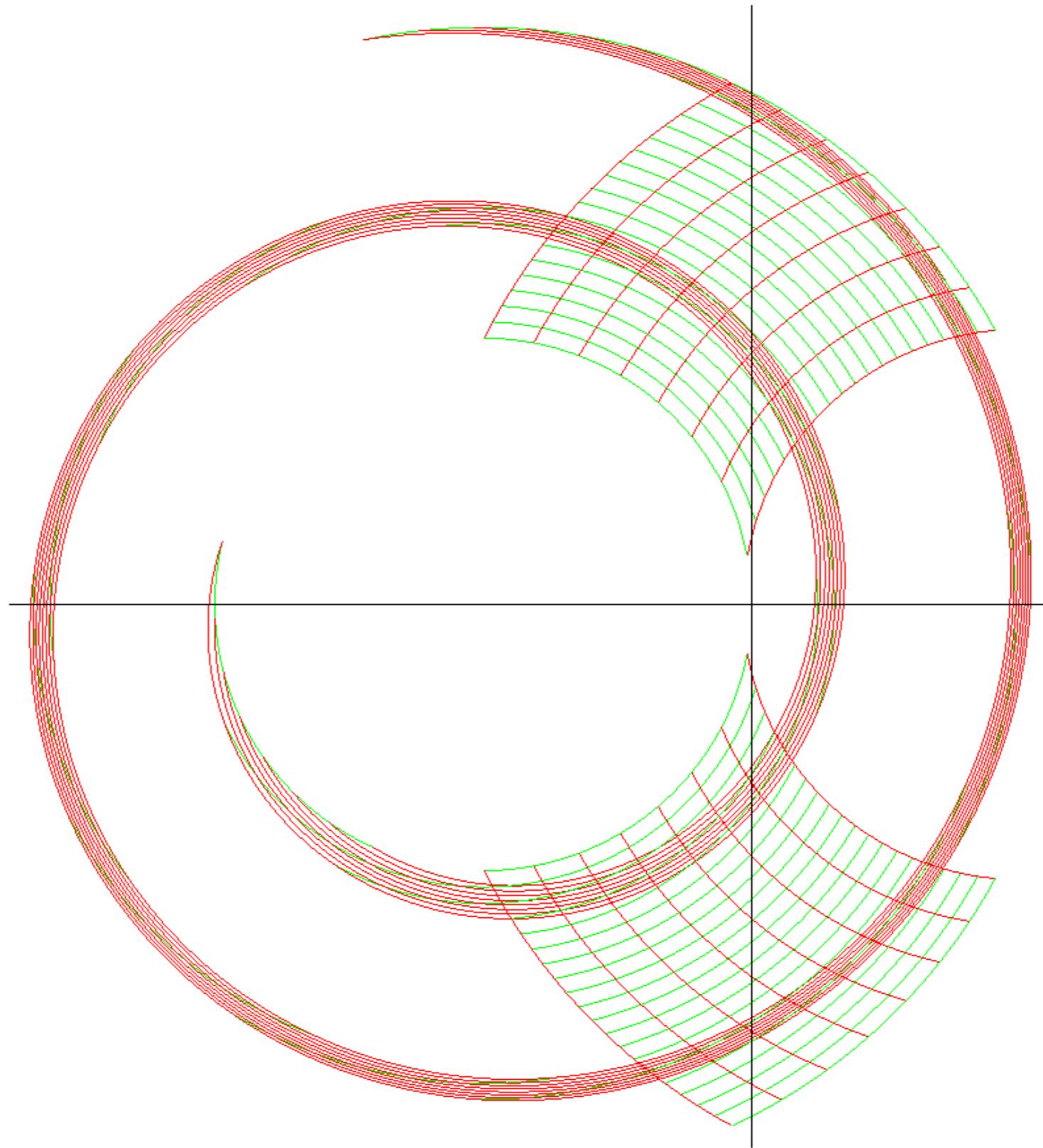


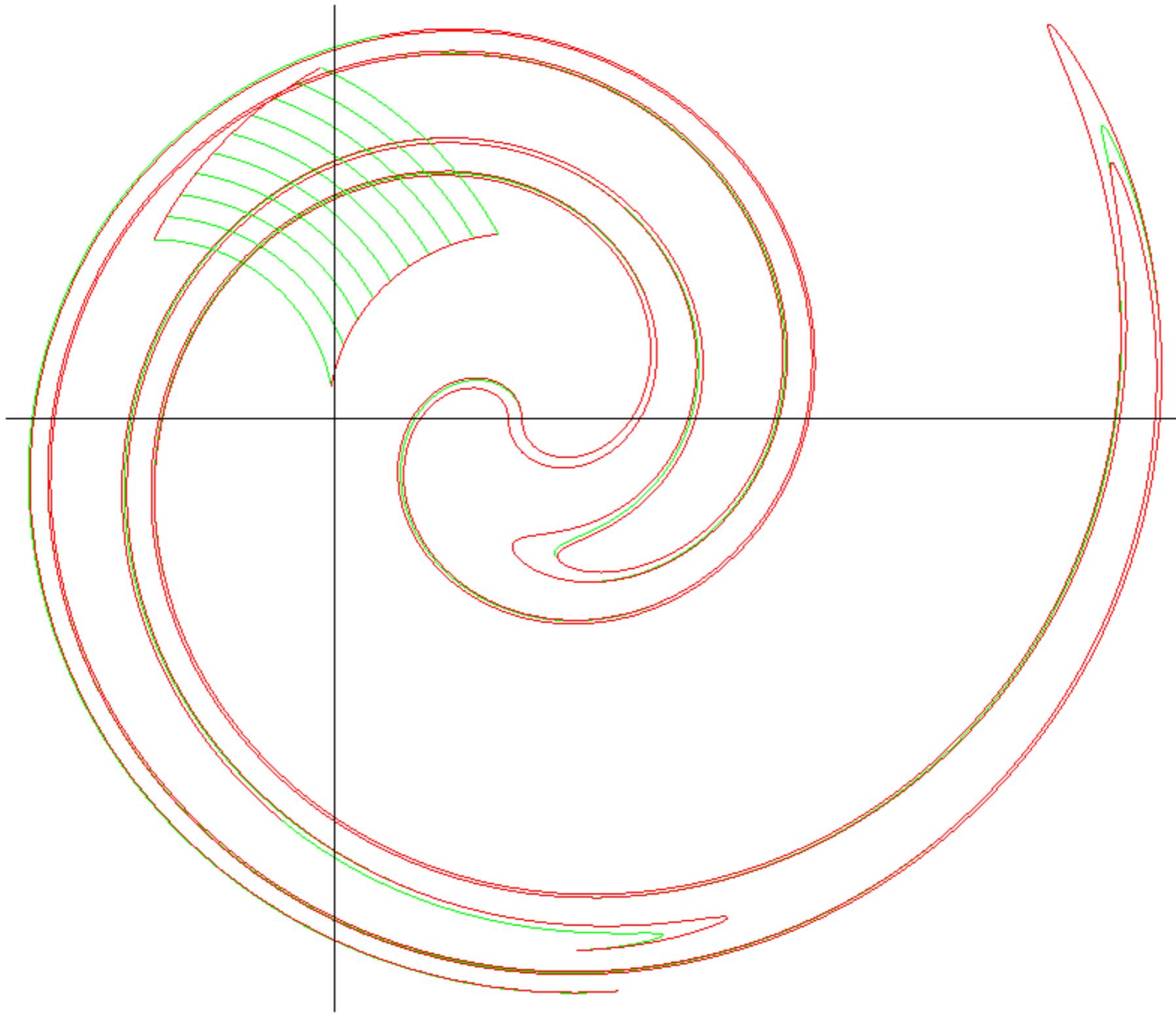
- Schematic view of a duct flow with concatenated mixing elements
- Red and blue blobs of fluid mix well under a small number of applications
- Changing only the position of the centres of rotation can have a marked effect on the quality of mixing

■ *Vediamo come applicare la teoria dello stiramento lungo i cammini:*







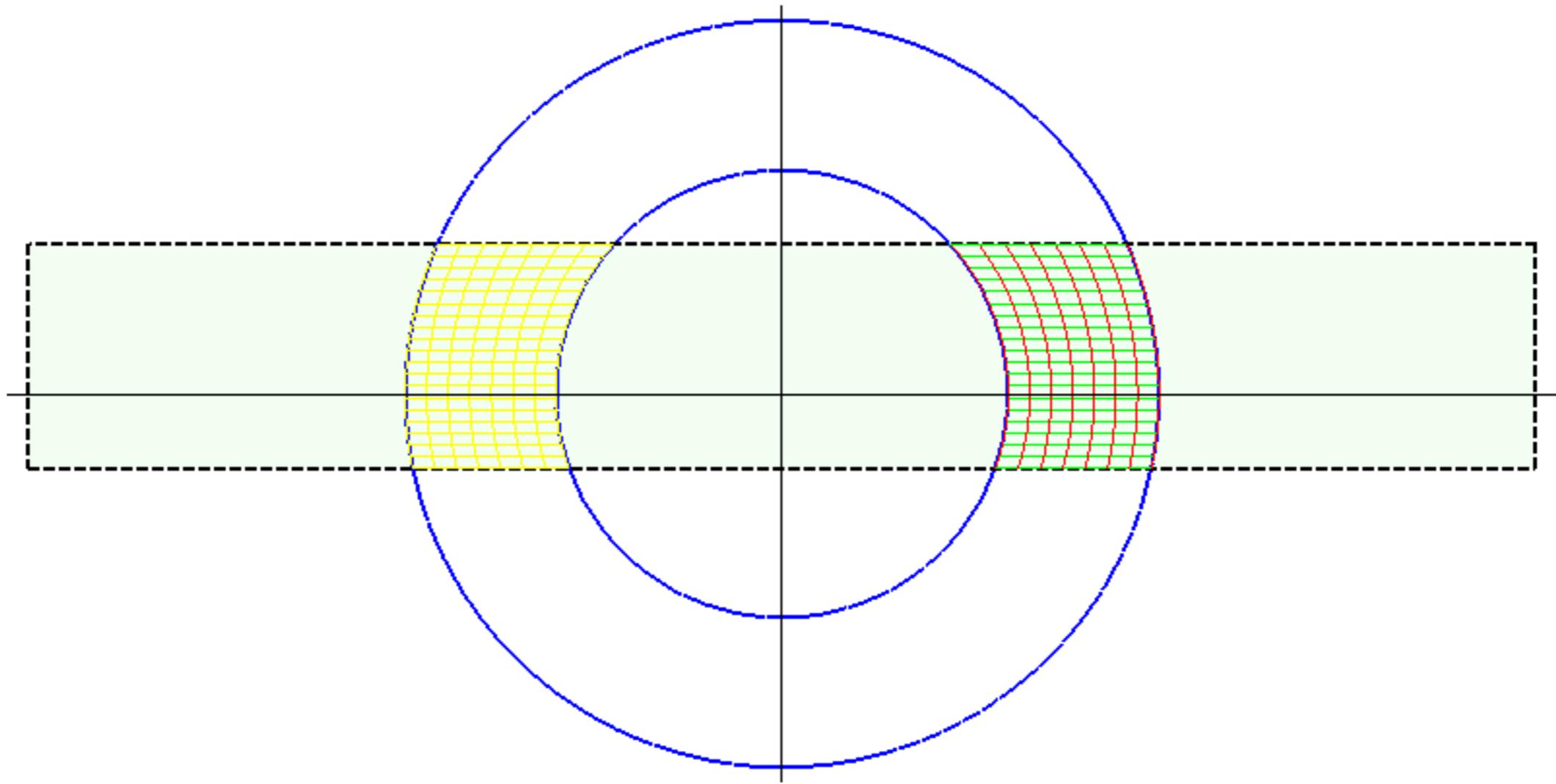


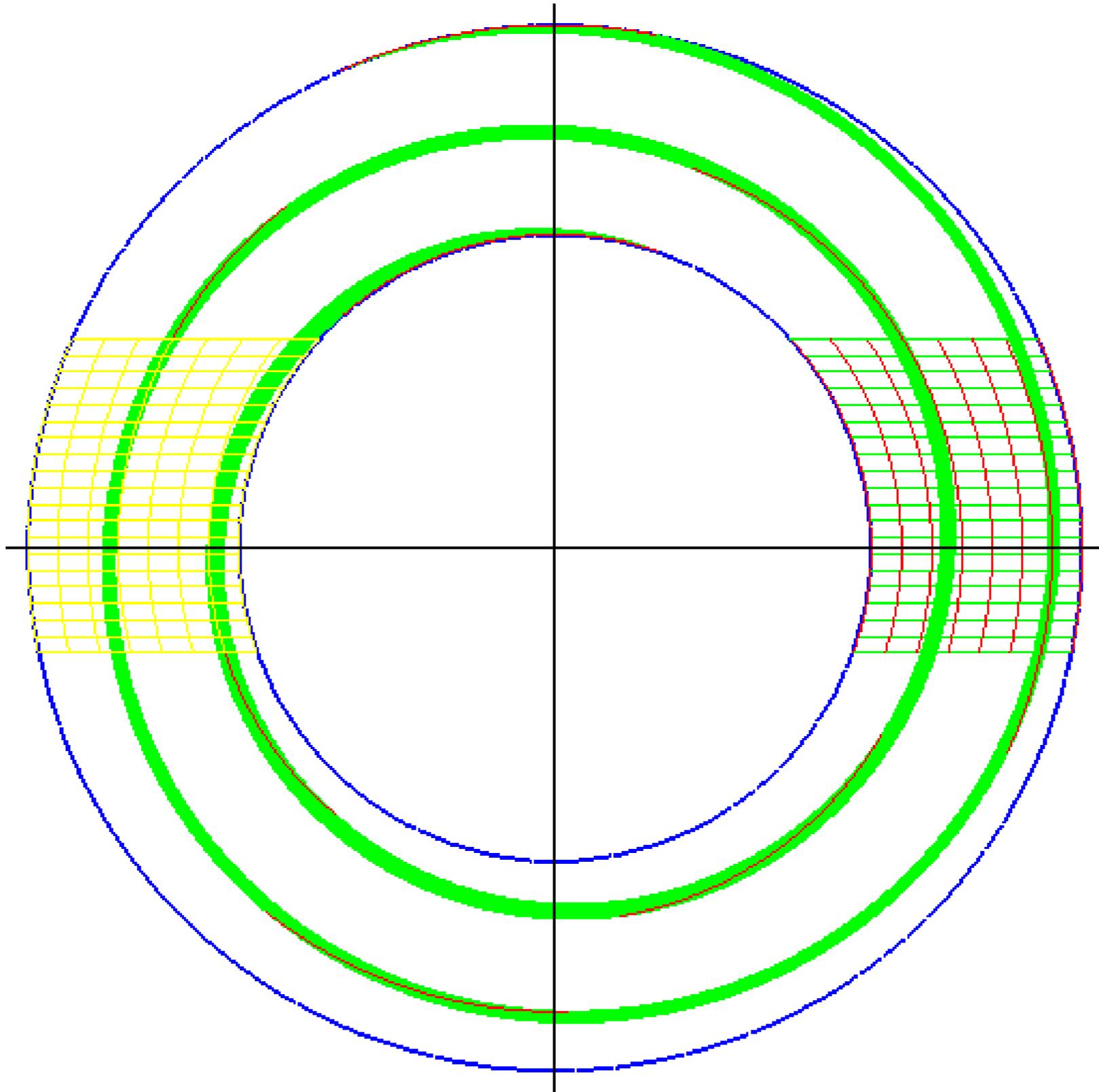


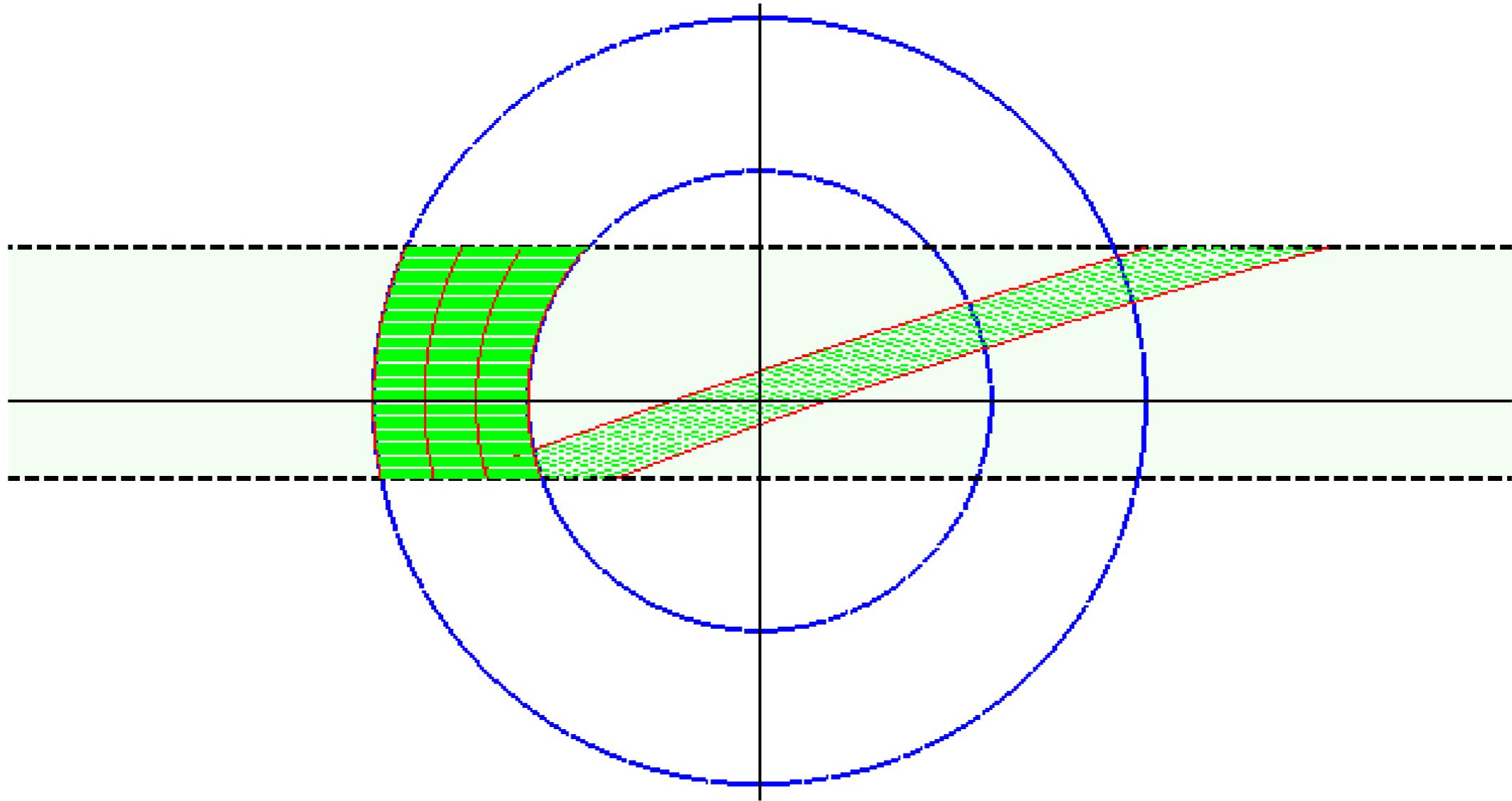
■ *Sviluppi futuri: modifica della geometria.*

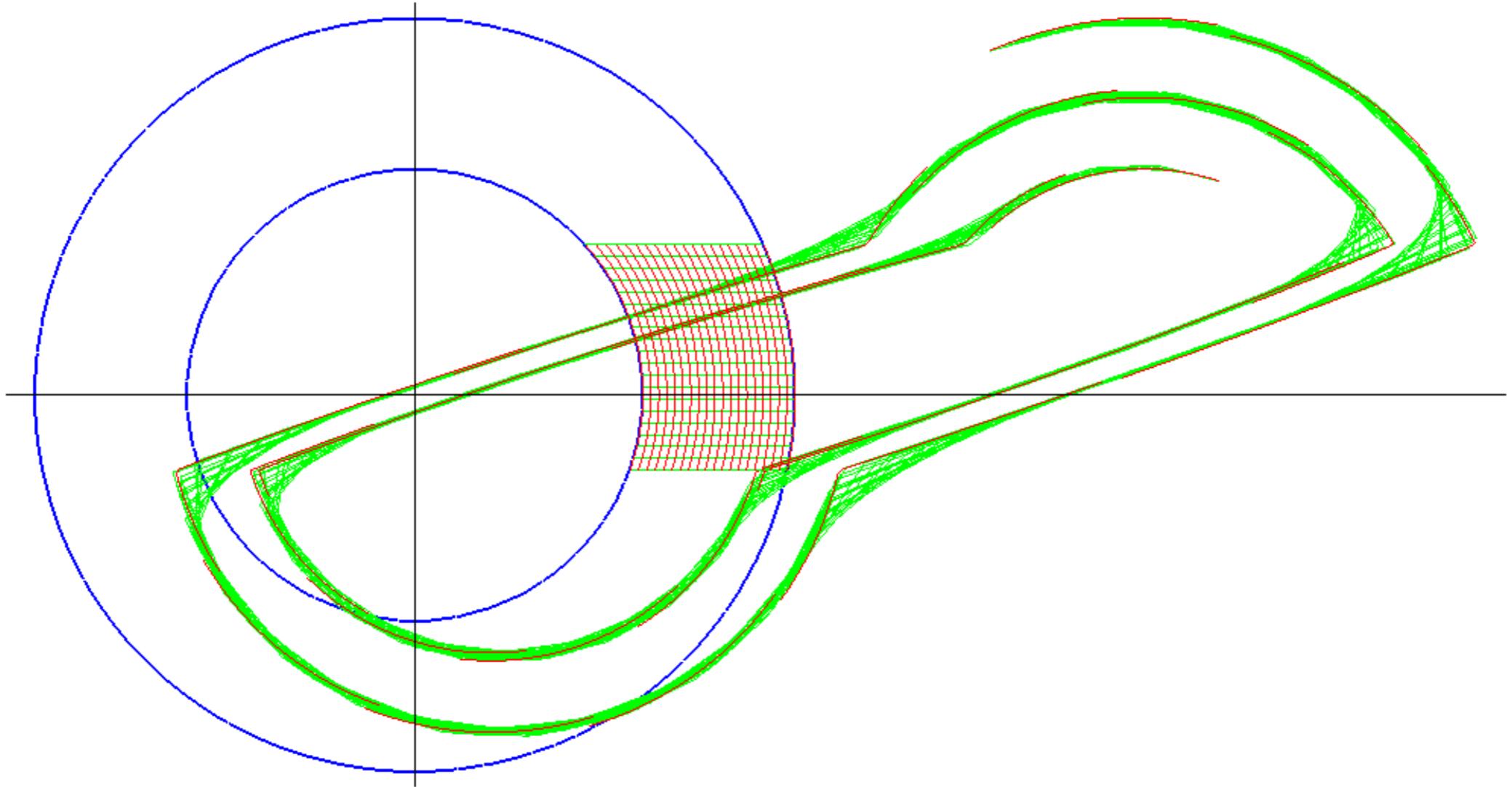


- *Sviluppi futuri: modifica della geometria.*
- *Stiramento sul rettangolo e rotazione sulla corona circolare.*









Fine

