UN MODELLO VARIAZIONALE PER TRAVI IN PARETE SOTTILE CON TENSIONE RESIDUA

Luca Della Longa

21 giugno 2007

Outline

1. Introduzione al problema delle travi in parete sottile con tensione residua
2. La Γ-convergenza come modello di convergenza variazionale
3. I risultati ottenuti...

Iniziamo....

Travi: corpi tridimensionali allungati.

Teorie Classiche (Eulero, Bernoulli, Navier): spesso fondate su assunzioni a-priori, giustificate dalla piccolezza di certe dimensioni rispetto ad altre.

L. Freddi, A. Morassi, R. Paroni *Thin-walled beams: the case of rectangular cross-section*

Difficoltà:

- materiale non omogeneo
- materiale anisotropo
- tensione residua

La tensione residua

1829 Cauchy ottenne le corrette equazioni della teoria elastica lineare per un materiale con tensione residua.

Truesdell, Gurtin, Hoger (1986)
R. Paroni 2003 *Theory of Linearly Elastic Residually Stressed Plates*

Problema della tensione residua: l'equazione costitutiva non dipende soltanto dalla parte simmetrica del gradiente di spostamento ma da tutto il gradiente!

$$\mathbf{S}\left(\mathbf{x}\right) = \mathcal{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{F}\right) = \mathring{\mathbf{T}} + \mathbf{H}\mathring{\mathbf{T}} + \mathbb{L}\mathbf{E}, \tag{1}$$

Analisi asintotica per $\varepsilon \to 0$ di un problema 3D
Difficoltà rispetto ad altri casi: anisotropia introdotta dalla scelta di una doppia scala nella riduzione dimensionale.

La Γ-convergenza

Famiglia di problemi di minimo che dipendono da un parametro ε

$$\min \{F_\varepsilon (u) : u \in X_\varepsilon\} . \tag{2}$$

Problema limite

$$\min \{F (u) : u \in X\} , \tag{3}$$

Una definizione

La Γ-convergenza, introdotta da Ennio De Giorgi e T. Franzoni nel 1976, è una nozione di convergenza per funzionali variazionali su spazi di funzioni.
Sia X uno spazio metrico, e per $\varepsilon > 0$ sia dato $F_\varepsilon : X \longrightarrow [0, +\infty]$.
Diciamo che F_ε Γ-converge a F in X per $\varepsilon \longrightarrow 0$, se valgono le seguenti condizioni:
(LB) Per ogni $u \in X$ e ogni successione u_ε tale che $u_\varepsilon \longrightarrow u$ in X, vale

$$\liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} F_\varepsilon (u_\varepsilon) \geq F(u) \tag{4}$$

(UB) Per ogni $u \in X$ esiste una successione u_ε tale che $u_\varepsilon \longrightarrow u$ in X e

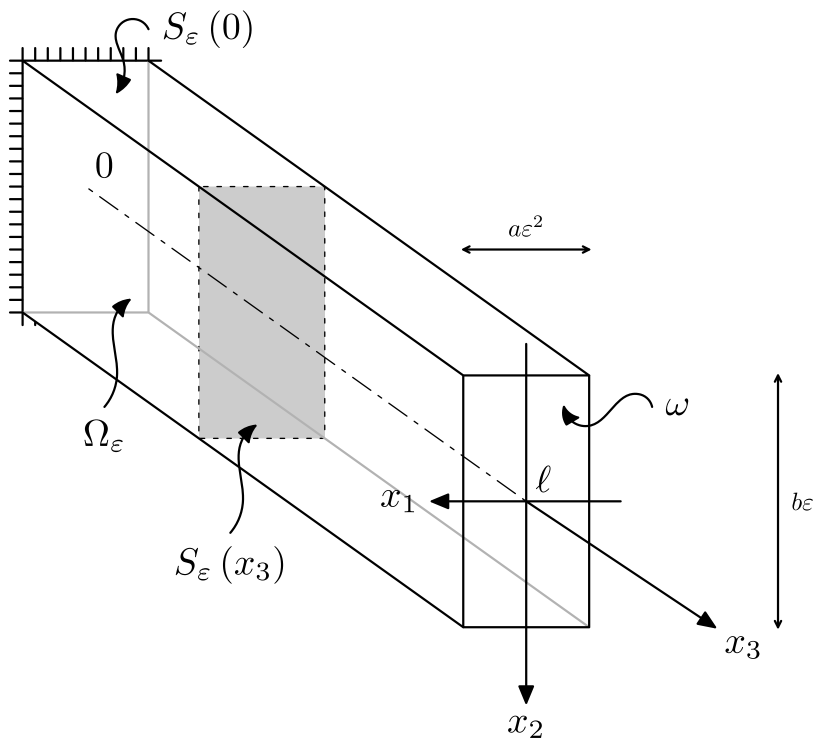
$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} F_\varepsilon (u_\varepsilon) = F(u) \,. \tag{5}$$

- il Γ-limite è sempre semicontinuo inferiormente;
- la nozione di Γ-convergenza è stabile sotto perturbazioni continue
- i minimizzanti convergono ai minimizzanti!!!

Thin walled beams with residual stress

$$\Omega_\varepsilon := \omega_\varepsilon \times (0, \ell) \subset \mathbb{R}^3,$$

$$\omega_\varepsilon := \left\{ (x_1, x_2) : |x_1| \leq \frac{a\varepsilon^2}{2}, |x_2| \leq \frac{b\varepsilon}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$



$$\begin{cases} div\, \mathring{\mathbf{T}}^{\varepsilon} = 0 & in\ \Omega_\varepsilon, \\ \mathring{\mathbf{T}}^{\varepsilon} = \mathring{\mathbf{T}}^{\varepsilon T} & in\ \Omega_\varepsilon, \\ \mathring{\mathbf{T}}^{\varepsilon}\mathbf{n} = 0 & su\ \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{6}$$

$$(FF)\ \begin{cases} div\, \mathbf{S}^{\varepsilon} + \mathbf{b}^{\varepsilon} = 0 & in\ \Omega_\varepsilon, \\ \mathbf{S} = \mathring{\mathbf{T}}^{\varepsilon} + D\mathbf{u}\mathring{\mathbf{T}}^{\varepsilon} + \mathbb{L}^{\varepsilon}\mathbf{E}\mathbf{u} & in\ \Omega_\varepsilon, \\ \mathbf{S}\mathbf{n} = 0 & in\ \Omega_\varepsilon \setminus S_\varepsilon(0), \\ \mathbf{u} = 0 & su\ S_\varepsilon(0). \end{cases} \tag{7}$$

$$(FD)\ \int_{\Omega_\varepsilon} D\mathbf{u}\mathring{\mathbf{T}}^{\varepsilon} \cdot D\mathbf{v} + \mathbb{L}\mathbf{E}\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}\mathbf{v}\, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{b}^{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}\, dx \quad \forall \mathbf{v} \in H^1_{\#} \tag{8}$$

Problema di esistenza ed unicità della soluzione! Serve un risultato di ellitticità in $H^1_{\#}$.

Studio sugli autovalori di $\mathring{\mathbf{T}}$. Ipotesi

$$C_L > C_K \frac{\tau_m^\varepsilon}{\varepsilon^4} \tag{9}$$

$$(FV)\ J_\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} D\mathbf{u}\mathring{\mathbf{T}}^\varepsilon \cdot D\mathbf{u} + \mathbb{L}\mathbf{E}\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}\mathbf{u}\ dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{b}^\varepsilon \cdot \mathbf{u}\ dx. \tag{10}$$

$$\begin{aligned} p_\varepsilon : \quad & \Omega \to \Omega_\varepsilon \\ & \mathbf{y} \to \left(\varepsilon^2 y_1, \varepsilon y_2, y_3\right) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\mathbf{H}^\varepsilon \mathbf{v} := \left(\frac{D_1 \mathbf{v}}{\varepsilon^2}, \frac{D_2 \mathbf{v}}{\varepsilon}, D_3 \mathbf{v}\right), \quad \mathbf{E}^\varepsilon \mathbf{v} := Sym \mathbf{H}^\varepsilon \mathbf{v}. \tag{12}$$

$$\mathbb{L}^\varepsilon = \mathbb{L} p_\varepsilon^{-1}, \quad \mathring{\mathbf{T}}^\varepsilon = \varepsilon^4 \mathring{\mathbf{T}} p_\varepsilon^{-1}, \quad \mathbf{b}^\varepsilon = \ldots \tag{13}$$

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbb{L} \mathbf{E}^\varepsilon \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}^\varepsilon \mathbf{v} + \varepsilon^4 \mathbf{H}^\varepsilon \mathbf{v} \mathring{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{H}^\varepsilon \mathbf{v} \, dy - \int_\Omega \mathbf{b}^\varepsilon p_\varepsilon \cdot \mathbf{v} \, dy \tag{14}$$

$$\int_\Omega \left(\left|(u_1, \frac{u_2}{\varepsilon}, \frac{u_3}{\varepsilon^2})\right|^2 + |\mathbf{H}^\varepsilon \mathbf{u}|^2 \right) dy \leq \frac{K}{\varepsilon^4} \int_\Omega |\mathbf{E}^\varepsilon \mathbf{u}|^2 \, dy, \tag{15}$$

$$\left\| \mathbf{E}^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} \leq C\varepsilon^2, \tag{16}$$

$$(\mathsf{u}_1^{\varepsilon_n}, \frac{u_2^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n}, \frac{u_3^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n^2}) \rightharpoonup \mathbf{v} \; in \; H^1(\Omega;\mathbb{R}^3),$$

$$\mathbf{W}^{\varepsilon_n} \mathbf{u}^{\varepsilon_n} \rightharpoonup \mathbf{Hv} := \begin{pmatrix} 0 & -\theta & D_3 v_1 \\ \theta & 0 & 0 \\ -D_3 v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; in \; L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3}).$$

$$\mathsf{E}_{33} = D_3 v_3, \;\; \mathsf{E}_{23} = y_1 D_3 \theta + \eta,$$

$$F(\mathbf{v},\theta) := \frac{1}{2}\int_\Omega f_0\left(y_1 D_3\theta - \frac{\widetilde{\lambda}}{4\widetilde{\mu}}\left(D_3 v_3 + y_1 D_{33} v_1\right), D_3 v_3\right) + \mathbf{Hv}\mathring{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{Hv}\,dy - \int_\Omega \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dy - \int_0^\ell m\theta\,dy_3$$

$$f_0\left(\alpha,\beta\right) := \min\left\{f\left(\mathbf{A}\right) : \mathbf{A}\in \mathsf{Sym},\ A_{23}=\alpha,\ A_{33}=\beta\right\}, \tag{17}$$

$$
\begin{cases}
\widetilde{E} J_2 \xi_1^{(iv)} - D_3 \left(\langle \mathring{T}_{11} + \mathring{T}_{33} \rangle \xi_1' - \langle \mathring{T}_{23} \rangle \vartheta \right) - \widetilde{\lambda} J_2 \vartheta''' - \langle b_1 \rangle - \langle y_1 b_3 \rangle' = 0 \\[2ex]
\left(\widetilde{E} - \dfrac{\widetilde{\lambda}^2}{4\widetilde{\mu}} \right) J_1 \xi_2^{(iv)} - \langle b_2 \rangle - \langle y_2 b_3 \rangle' = 0 \\[2ex]
\left(\widetilde{E} - \dfrac{\widetilde{\lambda}^2}{4\widetilde{\mu}} \right) A {\xi_3'}'' + \langle b_3 \rangle = 0 \\[2ex]
\widetilde{\mu} J \vartheta'' - \langle \mathring{T}_{11} + \mathring{T}_{22} \rangle \vartheta - \widetilde{\lambda} J_2 \xi_1''' + \langle \mathring{T}_{23} \rangle \xi_1' + m = 0
\end{cases}
$$

Evviva la Γ-convergenza e le strutture sottili!

Grazie per l'attenzione