Facoltà di Agraria

Prova scritta di **Matematica**

del 18/02/2010

A.A. 2009-2010

Voto

Istruzioni: scrivere la risposta nel riquadro a fianco dell'esercizio ed allegare lo svolgimento completo. Apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato.

Cognome	Nome
no. fogli (compreso questo)	N. Matricola

1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\log(3x+1)}{(3x+1)^2}$$

1. determinarne il dominio;
2. calcolarne i limiti agli estremi degli intervalli che costituiscono il dominio di f;
3. determinare in quali intervalli la funzione è crescente e in quali decrescente;
4. scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0, f(0))$;
5. disegnare un grafico approssimativo di f e della retta tangente precedentemente individuata;
6. determinare sup e inf di f e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.

1. $]-1/3, +\infty[$

2.
$$\lim_{x\to -1/3} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

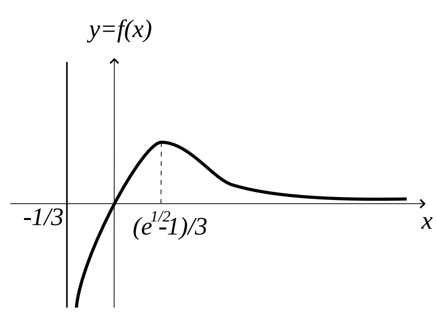
3.
$$f'(x) = 3\frac{1-2\log(3x+1)}{(3x+1)^3}\,\mathrm{e}^{-x}$$

f è crescente in $]-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{e}-1}{3}]$

f è decrescente in $[\frac{\sqrt{e}-1}{3}, +\infty[$

4.

5.



6. $\inf f = -\infty$, $\max f = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ con legge

$$f(x) = \begin{cases} a + x^2 & \text{se } x < 0 \\ -\arctan x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale.

1. Dire per quali valori di a la funzione è invertibile;
2. dire se per $a = 1$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa;
3. determinare per quali valori di a, se ne esistono, la funzione è continua in ogni punto;
4. determinare per quali valori di a, se ne esistono, f è derivabile in ogni punto.

1. $a \geq 0$
2. $f^{-1} :]-\frac{\pi}{2}, 0] \cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$

   $$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\tan(y) & \text{se } -\pi/2 < y \leq 0 \\ -\sqrt{y-1} & \text{se } y > 1 \end{cases}$$
3. $a = 0$
4. nessuno

3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 3t^2 y(t) + \mathrm{e}^{t^3} \operatorname{sen}(2\pi t) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

1. dire se la funzione costante $y(t) = 0$ è una soluzione del problema;
2. determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia già la funzione di cui al punto precedente ed eseguire la verifica.

1. no
2. $y(t) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{t^2} (1 - \cos(2\pi t)$