Facoltà di Agraria

Prova scritta di **Matematica e Statistica**

del 17/02/2011

A.A. 2009-2010

Voto

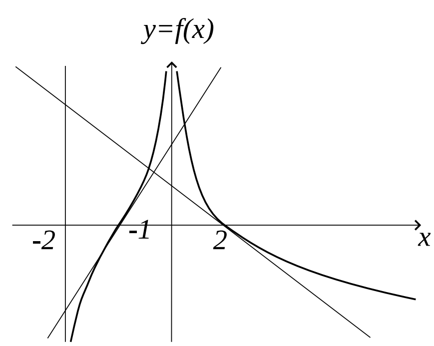
Istruzioni: scrivere la risposta nel riquadro a fianco dell'esercizio ed allegare lo svolgimento completo. Apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato.

Cognome	Nome
no. fogli (compreso questo)	N. Matricola

1. Data la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x+2}{x^2}\right)$$

1. determinarne il dominio;
2. calcolarne i limiti agli estremi degli intervalli che costituiscono il dominio di f;
3. determinare in quali intervalli la funzione è crescente e in quali decrescente;
4. scrivere le equazioni della retta tangente al grafico di f nei punti in cui esso interseca l'asse x;
5. disegnare un grafico approssimativo di f e delle rette tangenti precendentemente individuate;
6. servendosi eventualmente del grafico, determinare quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 3$.

1. $]-2,0[\cup]0,+\infty[$
2. $$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$$
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$
   $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$
3. $$f'(x) = -\frac{x+4}{x(x+2)}$$
   f è crescente in $]-2,0[$
   f è decrescente in $]0,+\infty[$
4. $$y = 3(x+1)$$
   $$y = -\frac{3}{4}(x-2)$$
5. 

6. 2

2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2x^3} & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

1. verificare che f è una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X;
2. calcolare la probabilità $P(X = 2)$;
3. calcolare la probabilità $P(X \geq 2)$.

1. lo è perché $f \geq 0$ e
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$
2. 0
3. 3/8

3. Lanciando un dado 15 volte esce il numero 1 per 5 volte. Sottoporre a test l'ipotesi nulla che il dado non sia truccato.

Indicata con X la v.a. che fornisce il risultato di ciascun lancio si ha

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}.$$

Decidiamo, per comodità di calcolo di effettuare uno Z-test. La statistica del test

$$s = \frac{|k - Nq|}{\sqrt{Nq(1-q)}}$$

con $N = 15$, $q = 1/6$ e $k = 5$ risulta $s \simeq 1.73$.
Il valore p del test risulta allora

$$p = P(|Z| \geq 1.73) = 2P(Z \leq -1.73) \simeq 0.0418 < 0.05$$

e pertanto l'ipotesi che il dado non sia truccato va rifiutata.

4. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y - 12 \\ y(1) = 4, \end{cases}$$

1. dire se la funzione
$$y(t) = 3 + t^2$$
è una soluzione del problema;
2. determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia già la funzione di cui al punto precedente.

1. no
2. $y(t) = 4$