Facoltà di Agraria

Prova scritta di **Matematica**

del 01/02/2010

A.A. 2009-2010

Voto

Istruzioni: scrivere la risposta nel riquadro a fianco dell'esercizio ed allegare lo svolgimento completo. Apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato.

Cognome	Nome
no. fogli (compreso questo)	N. Matricola

1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{3x+1}{4}\,\mathrm{e}^{-x}$$

1. determinarne il dominio;
2. calcolarne i limiti agli estremi degli intervalli che costituiscono il dominio di f;
3. determinare in quali intervalli la funzione è crescente e in quali decrescente;
4. determinare in quali intervalli la funzione è concava e in quali convessa;
5. scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0, f(0))$;
6. disegnare un grafico approssimativo di f e della retta tangente precedentemente individuata;
7. determinare sup e inf di f e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.

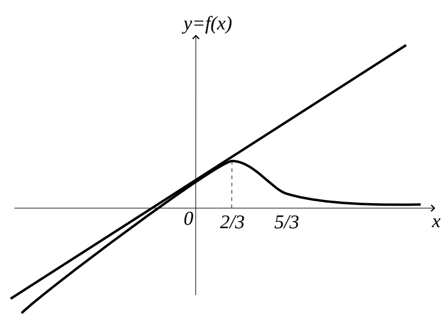
1. $\mathbb{R}$

2. $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

3. $$f'(x) = \frac{2-3x}{4}\,\mathrm{e}^{-x}$$
f crescente in $]-\infty, 2/3]$
f decrescente in $[2/3, +\infty[$

4. f concava in $]-\infty, 5/3]$
f convessa in $[5/3, +\infty[$

5. $$y = \frac{1+2x}{4}$$

6. 

7. $\inf f = -\infty$, $\max f = \dfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-2/3}$

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ con legge $$f(x) = \begin{cases} a + x & \text{se } x < 1 \\ \log x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$ dove a è un parametro reale. 1. Dire per quali valori di a la funzione è invertibile; 2. dire se per $a = -2$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa; 3. determinare per quali valori di a, se ne esistono, la funzione è continua in ogni punto; 4. determinare per quali valori di a, se ne esistono, f è derivabile in ogni punto.	1. $a \leq -1$ 2. $f^{-1} :]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $$f^{-1}(y) = \begin{cases} y + 2 & \text{se } y < -1 \\ \mathrm{e}^y & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$ 3. $a = -1$ 4. $a = -1$
3. a. Dire quali tra le seguenti funzioni 1. $x\,\mathrm{e}^{(1-x)}$, 2. $-(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}$, 3. $-x\,\mathrm{e}^{(1-x)}$, 4. $(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}$, sono primitive di $x\,\mathrm{e}^{-x}$, giustificando la risposta data. **b.** Dato il problema di Cauchy $$\begin{cases} y'(t) = y(t) + 13t \\ y(0) = -12, \end{cases}$$ 1. dire se la funzione $$y(t) = \mathrm{e}^t - 13$$ è una soluzione del problema; 2. determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia già la funzione di cui al punto precedente ed eseguire la verifica.	**a.** 3 (basta derivare) **b.** 1. no 2. $y(t) = 13(t+1) - \mathrm{e}^t$