Capitolo 2

Misure e funzioni a variazione limitata

2.1 Richiami di teoria della misura e integrazione

Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathscr{F}$ una *σ-algebra* su Ω, cioè una famiglia di sottoinsiemi di Ω che gode delle seguenti proprietà:

(i) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(ii) $B \in \mathscr{F} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus B \in \mathscr{F}$

(iii) $B_h \in \mathscr{F}\ \forall h \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{h\in\mathbb{N}} B_h \in \mathscr{F}$.

Ad esempio, l'insieme delle parti di Ω, $\wp(\Omega) = \{B \,:\, B \subseteq \Omega\}$, è una σ-algebra.

Se Ω è dotato di una topologia, si chiama *σ-algebra di Borel* di Ω, e si denota con $\mathscr{B}(\Omega)$, la più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di Ω contenente gli insiemi aperti (per la *(ii)* $\mathscr{B}(\Omega)$ risulterà contenere anche tutti i chiusi).

Definizione 2.1 *Una* misura positiva *μ su Ω è un'applicazione $\mu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ tale che*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$*;*

(ii) μ *è* numerabilmente additiva*, cioè*

$$B_h \in \mathscr{F},\; B_h \cap B_k = \varnothing \textit{ se } h \neq k \;\Rightarrow\; \mu\Big(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} B_h\Big) = \sum_{h\in\mathbb{N}} \mu(B_h).$$

Una misura *μ su Ω* a valori in $\mathbb{R}^n$ *(o* misura vettoriale*) è un'applicazione $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^n$ per cui valgono le proprietà di cui sopra nel senso dei vettori di $\mathbb{R}^n$. Una misura a valori in $\mathbb{R}$ è anche detta una* misura con segno*. La terna $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ sarà detta uno* spazio con misura*, e quando ciò non dia luogo ad ambiguità parleremo dello spazio con misura Ω. Gli elementi di $\mathscr{F}$ si dicono insiemi μ-*misurabili *e gli insiemi μ-misurabili di misura nulla si dicono μ-*trascurabili*.*

Esercizio 2.2 Dimostrare che se i valori di μ sono a priori in $[0, +\infty[$, allora *(i)* è una conseguenza di *(ii)*.

Esempio 2.3 Sia $\mathscr{F}$ l'insieme delle parti di Ω. Allora la funzione

$$\#(A) = \begin{cases} +\infty & \text{se } A \text{ è infinito} \\ \operatorname{card}(A) & \text{se } A \text{ è finito} \end{cases}$$

è una misura su Ω chiamata la *misura che conta i punti (counting measure).*

Esempio 2.4 Sia $\mathscr{F}$ l'insieme delle parti di Ω ed $x_0 \in \Omega$. Allora la funzione

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$

è una misura su Ω chiamata *massa di Dirac* nel punto x_0.

Esempio 2.5 La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ è una misura positiva, spesso indicata con dx, mentre $\mathcal{L}$ denoterà la σ-algebra dei Lebesgue-misurabili. Si potrebbe dimostrare che $\mathcal{L}$ è strettamente più grande di $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. La misura di Lebesgue di $B \in \mathcal{L}$ sarà denotata con $|B|$.

Definizione 2.6 *Un sottoinsieme $E \subseteq \Omega$ si dice* σ-finito *rispetto ad una misura positiva se è unione di una successione crescente di insiemi $E_n \in \mathscr{F}$ di misura finita. Se Ω è σ-finito si dice che μ è* σ-finita.

Osservazione 2.7 Le misure positive sono continue lungo successioni monotone di insiemi, vale a dire, se $E_n \in \mathscr{F}$ è una successione crescente oppure una successione decrescente tale che $\mu(E_0) < +\infty$, allora si ha

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n), \text{ ripettivamente, } \mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Definizione 2.8 *Dato uno spazio con misura $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice* μ-misurabile *(o* $\mathscr{F}$-misurabile*) se*

$$\{x \in \Omega \ : \ f(x) > t\} \in \mathscr{F} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Integrale di una funzione rispetto ad una misura

Per una definizione alternativa e sentetica vedi anche [1], Definizione 1.14. Dato uno spazio con misura $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, un sottoinsieme misurabile E di Ω ed una funzione $f : \Omega \to [0, +\infty[$ μ-misurabile, introduciamo la *funzione di distribuzione di* f rispetto a μ sull'insieme E

$$\varphi(t) := \mu\{x \in E \ : \ f(x) > t\}, \quad t \geq 0$$

mediante la quale si definisce l'*integrale di f rispetto alla misura μ sull'insieme E* nella maniera seguente:

- se esiste $t_0 > 0$ tale che $\varphi(t_0) = +\infty$ allora

$$\int_E f \, d\mu := +\infty;$$

- se $\varphi(t) < +\infty$ per ogni $t > 0$ allora

$$\int_E f \, d\mu := \int_0^{+\infty} \mu\{x \in E \ : \ f(x) > t\} \, dt$$

  dove l'integrale a secondo membro è inteso nel senso generalizzato di Riemann (che esiste sempre perché φ è monotona decrescente).

Se f ha segno non costante, posto $f = f^+ - f^-$ dove $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ e se

$$\int_E f^+ \, d\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_E f^- \, d\mu < +\infty$$

allora

$$\int_E f \, d\mu := \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

L'integrale così definito gode delle usuali proprietà di linearità, monotonia e additività (cfr. De Giorgi e Letta [4]). Inoltre se μ è la misura di Lebesgue allora si ottiene proprio l'integrale di Lebesgue.

$L^p_\mu(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ($p \in [1, +\infty)$) denota lo spazio quoziente delle funzioni misurabili $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tali che

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty,$$

modulo la relazione di equivalenza che identifica funzioni che differiscono in un insieme di misura μ nulla. Quando μ è la misura di Lebesgue si usa scrivere semplicemente $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Ricordiamo che $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ se $f \in L^1(K; \mathbb{R}^n)$ per ogni sottoinsieme compatto K di Ω.

Esempio 2.9 Come già osservato la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ è una misura. Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ allora la funzione

$$T_f(B) = \int_B f(x) \, dx, \quad B \in \mathscr{B}(\Omega)$$

è una misura su Ω. Essa viene usualmente denotata con il simbolo $f \cdot dx$.

Data una misura vettoriale $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^n$, definiamo per ogni $B \in \mathscr{F}$

$$|\mu|(B) = \sup \left\{ \sum_{h \in \mathbb{N}} |\mu(B_h)| \ : \ B_h \in \mathscr{F}, \ B_h \text{ due a due disgiunti}, \ \bigcup_{h \in \mathbb{N}} B_h \subseteq B \right\}.$$

Nel caso scalare, in cui μ è una misura con segno, si potrebbero definire la *parte positiva*, μ^+, e la *parte negativa*, μ^-, di μ nel modo seguente

$$\mu^+(B) = \sup\{\mu(F) \ : \ F \in \mathscr{F}, \, F \subseteq B\}, \quad \mu^-(B) = -\inf\{\mu(F) \ : \ F \in \mathscr{F}, \, F \subseteq B\}$$

e si avrebbe allora che μ^+ e μ^- sono due misure positive e

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \quad \text{e} \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

In ogni caso, la funzione d'insieme $|\mu|$, risulta una misura positiva su Ω che chiameremo *variazione* della misura μ (vedi [1], Theorem 1.6). Si usa anche scrivere $|\mu|(B) = \int_B |\mu|$.

Esercizio 2.10 Mostrare che se $f \in L^1(a, b)$, con $-\infty < a < b < +\infty$, e se $\mu = f \cdot dx$ allora $|\mu|(a, b) = \int_a^b |f| \, dx$. [1] È suggestivo scrivere $\int_a^b |\mu| = \int_a^b |f| \, dx$.

[1] Suggerimento: si usa da una parte il fatto che ogni partizione è una particolare scelta dei B_h e dall'altra che anche $|f| \cdot dx$ è una misura, e il Lemma 1.17.

2.2 Lo spazio delle misure

D'ora in poi Ω indicherà uno spazio topologico localmente compatto con una base di aperti numerabile (in particolare Ω è quindi metrico e separabile), e tutte le misure che considereremo saranno misure di Borel, cioè definite sulla σ-algebra di Borel di Ω, che indicheremo con $\mathscr{B}(\Omega)$.

Lo spazio $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ delle *misure a variazione limitata* si definisce nel modo seguente:

$$M(\Omega;\mathbb{R}^n) = \{\mu \text{ misura di Borel su } \Omega \text{ a valori in } \mathbb{R}^n \ : \ |\mu|(\Omega) < +\infty\},$$

e risulta uno spazio di Banach con la norma

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega).$$

Indichiamo con $C_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni continue definite su Ω a valori in $\mathbb{R}^n$ che *tendono a zero sul bordo di* Ω, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon \text{ compatto in } \Omega \ : \ |u| < \varepsilon \text{ su } \Omega \setminus K_\varepsilon,$$

munito della norma della convergenza uniforme

$$\|u\|_{C_0(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \|u\|_\infty = \sup_\Omega |u|,$$

che rende $C_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$ uno spazio di Banach separabile. È ben noto il seguente teorema di caratterizzazione dello spazio delle misure a variazione limitata su Ω.

Teorema 2.11 (Riesz). *Sia T un'applicazione definita su $C_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$ con valori in $\mathbb{R}$. Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

(i) T è lineare e continua (i.e. $\exists\, C > 0 \ : \ |T(u)| \le C\|u\|_\infty$);

(ii) esiste una misura $\mu \in M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ tale che

$$T(u) = \int_\Omega u\, d\mu \qquad \textit{per ogni } u \in C_0(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

In altre parole $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ può essere visto come lo spazio duale di $C_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$, mediante la dualità

$$\langle u, \mu\rangle := \int_\Omega u\, d\mu.$$

Si ha inoltre

vtmd

$$\|\mu\| := |\mu|(\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega u\, d\mu \ : \ u \in C_0(\Omega;\mathbb{R}^n),\ \|u\|_\infty \le 1\right\}. \tag{2.1}$$

Infine, utilizzando la densità di $C_c^\infty(\Omega)$ in $C_0(\Omega)$ e il teorema di caratterizzazione delle distribuzioni, si dimostra che lo spazio $M(\Omega)$ è isomorfo a quello delle distribuzioni di ordine zero su Ω.

Per definire i funzionali sullo spazio delle funzioni a variazione limitata che dipendano anche dal gradiente, che in tal caso è una misura, occorre dapprima definire funzionali sullo spazio $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$. A questo scopo ricordiamo i teoremi di decomposizione di misure, di Radon-Nikodym e di Lebesgue-Nikodym. Delle due misure considerate nel seguito, quella vettoriale, cioè λ, dovrà giocare il ruolo del gradiente mentre quella scalare, cioè μ, corrisponderà alla misura di Lebesgue.

Definizione 2.12 *Data una misura positiva μ su Ω ed una misura vettoriale λ diremo che*

(i) λ *è* assolutamente continua *rispetto a μ (e scriveremo $\lambda \ll \mu$) se*

$$\mu(B) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\lambda|(B) = 0;$$

(ii) λ *è* concentrata *su un insieme E se*

$$B \in \mathscr{F},\ B \cap E = \varnothing \quad \Rightarrow \quad |\lambda|(B) = 0;$$

(iii) λ *e* μ *sono* singolari *(e scriveremo $\lambda \perp \mu$) se esistono $A, B \in \mathscr{F}$ con $A \cap B = \varnothing$ tali che λ è concentrata su A e μ è concentrata su B.*

Ad esempio, la misura di Dirac concentrata in x_0, δ_{x_0}, e quella di Lebesgue, dx, sono singolari: infatti δ_{x_0} è concentrata su $\{x_0\}$ mentre dx su $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$.

Teorema 2.13 (Radon-Nikodym). *Sia μ una misura positiva di Radon (cioè finita sui compatti) su Ω a sia $\lambda \in M(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tale che $\lambda \ll \mu$. Allora esiste una funzione $h \in L^1_\mu(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tale che*

cdv02_eq_hdmu

$$\lambda(B) = \int_B h\, d\mu \qquad \textit{per ogni } B \in \mathscr{B}(\Omega). \tag{2.2}$$

Inoltre, h è unica a meno di insiemi μ-trascurabili. La funzione vettoriale h viene usualmente indicata con $d\lambda/d\mu$ ed è detta derivata di Radon-Nikodym *di λ rispetto a μ.*

La (2.2) si scrive anche nella forma $\lambda = h \cdot \mu$. Con questa notazione si ha $\langle u, \mu \rangle = u \cdot \mu(\Omega)$.

Teorema 2.14 (Lebesgue-Nikodym). *Sia μ una misura positiva di Radon su Ω e sia $\lambda \in M(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Allora esistono due misure vettoriali λ^a e λ^s con $\lambda^a \ll \mu$ e $\lambda^s \perp \mu$ tali che*

$$\lambda = \lambda^a + \lambda^s.$$

Inoltre λ^a e λ^s sono uniche e, per il teorema di Radon-Nikodym, si ha

$$\lambda = \frac{d\lambda}{d\mu} \cdot \mu + \lambda^s.$$

λ^a e λ^s sono dette, rispettivamente, *parte assolutamente continua* e *parte singolare* di λ rispetto a μ.

Usando questa decomposizione, data una misura positiva μ su Ω, risulta ben definito su $M(\Omega; \mathbb{R}^n)$ il funzionale

$$F(\lambda) = \int_\Omega f\big(\frac{d\lambda}{d\mu}\big)\, d\mu + \int_\Omega f\big(\frac{d\lambda^s}{d|\lambda^s|}\big)\, d|\lambda^s|$$

per ogni integrando continuo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ritornando allo spazio $M(\Omega; \mathbb{R}^n)$, la convergenza debole* è definita al solito da

$$\mu_h \to \mu \text{ in } w^*M(\Omega; \mathbb{R}^n) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle u, \mu_h \rangle \to \langle u, \mu \rangle \quad \forall u \in C_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

e per ben noti risultati di analisi funzionale (teorema di Alaoglu e teoremi di metrizzabilità), ogni sottoinsieme limitato di $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ è debolmente* relativamente compatto e metrizzabile, sicchè, per ogni successione limitata (μ_h) di elementi di $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ esistono una sottosuccessione (μ_{h_k}) ed una misura $\mu \in M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ tali che $\mu_{h_k} \to \mu$ debolmente*.

Lo spazio $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ non è separabile: infatti il sottospazio $\{\delta_x \ :\ x \in \Omega\}$ non contiene alcun sottoinsieme numerabile denso dal momento che $\|\delta_x - \delta_y\| = 2$ ogni volta che $x \neq y$. Inoltre $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ non è riflessivo: se così non fosse, tutte le successioni debolmente* convergenti convergerebbero debolmente quindi, per il teorema di Mazur, opportune combinazioni convesse dovrebbero convergere fortemente; ciò non si verifica, ad esempio, per la successione (δ_{x_h}) con $x_h \to x$ in Ω, $x_h \neq x$ per ogni h.

2.3 Lo spazio delle funzioni a variazione limitata

Una volta introdotto lo spazio $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$, la definizione dello spazio $BV(\Omega)$ risulta estremamente semplice; infatti, se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, esso è definito come la classe di tutte le funzioni $u \in L^1(\Omega)$ il cui gradiente distribuzionale Du è una misura di $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ (vale a dire che esiste $C > 0$ tale che $|\langle Du, \varphi\rangle| \leq C \sup_\Omega |\varphi|$ per ogni φ). Analogamente

$$BV_{\rm loc}(\Omega) := \{u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)\ :\ Du \in M(\Omega;\mathbb{R}^n)\}.$$

La norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|Du\|_{\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega)$$

rende $BV(\Omega)$ uno spazio di Banach.

devtdu **Osservazione 2.15** Si ha (cfr.(2.1))

$$|Du|(\Omega) = \sup\big\{\langle Du, \varphi\rangle\ :\ \varphi \in C_0(\Omega;\mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1\big\}.$$

Sia $u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$. Definiamo

$$V(u,\Omega) := \sup\left\{\int_\Omega u \,{\rm div}\,\varphi\, dx\ :\ \varphi \in C^\infty_c(\Omega;\mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\}.$$

Si ha che

1. $u \in BV_{\rm loc}(\Omega) \Rightarrow |Du|(\Omega) = V(u,\Omega)$;
2. $u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$, $V(u,\Omega) < \infty \iff u \in BV_{\rm loc}(\Omega)$ e $|Du|(\Omega) = V(u,\Omega)$.

Osservazione 2.16 $BV(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ e l'inclusione è stretta. Ad esempio la funzione $\chi_{(0,1)}$ (con $\Omega = \mathbb{R}$, ad esempio) appartiene al primo e non al secondo. Uno dei maggiori vantaggi di BV, rispetto agli usuali spazi di Sobolev, è che esso include le funzioni caratteristiche di insiemi sufficientemente regolari, e più in generale, funzioni regolari a tratti.

Esercizio 2.17 Dimostrare che se $u \in W^{1,1}(\Omega)$ allora si ha

$$|Du|(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u|\, dx.$$

Perciò spesso si usa anche la notazione $\int_\Omega |Du|$ in luogo di $|Du|(\Omega)$.

Osservazione 2.18 $W^{1,1}(\Omega)$ non è denso in $BV(\Omega)$ perché, in base all'esercizio precedente, la norma di BV ristretta a $W^{1,1}$ diventa la norma di $W^{1,1}$, rispetto alla quale quest'ultimo è completo.

Un'analoga notazione verrà usata per lo spazio delle funzioni vettoriali a variazione limitata

$$BV(\Omega; R^m) = \{u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^m) \ : \ Du \in M(\Omega; \mathbb{R}^{n\times m}\}.$$

Prima di addentrarci nello studio delle proprietà funzionali di BV rassumiamo nella seguente proposizione alcune semplici ma utili proprietà della derivata distribuzionale.

Proposizione 2.19 *Sia $u \in BV_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Allora*

1. *se $Du = 0$ allora u è (equivalente ad una) costante su ogni componente connessa di Ω;*
2. *per ogni funzione $\psi \in W^{1,\infty}(\Omega)$ si ha che $u\psi \in BV_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ e vale la regola di derivazione del prodotto*
$$D(u\psi) = \psi Du + u \otimes \nabla\psi.$$
3. *se ρ è un mollificatore, $\rho_\varepsilon(x) := \rho(x/\varepsilon)$ e $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \ : \ \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ allora*
$$\nabla(u * \rho_\varepsilon) = Du * \rho_\varepsilon.$$
dove $Du * \rho_\varepsilon$ denota la funzione $x \to \langle Du, \rho_\varepsilon(x - \cdot)\rangle = \int \rho_\varepsilon(x - y)\, dDu(y)$.

DIMOSTRAZIONE 1. è già stata provata nella prima parte del corso. 2. è un semplice esercizio. Per provare 3. basta usare la definizione di convoluzione, quella di derivata distribuzionale e scambiare l'ordine di derivazione. □

Teorema 2.20 $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV})$ *è uno spazio di Banach.*

DIMOSTRAZIONE Si vede facilmente che $BV(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale normato di $L^1(\Omega)$. Dimostriamo la completezza. Sia dunque (f_n) una successione di Cauchy in $BV(\Omega)$. In particolare allora (f_n) è di Cauchy in $L^1(\Omega)$ e quindi, poiché L^1 è completo, si ha che

$$f_n \to f \text{ in } L^1(\Omega).$$

Basta ora dimostrare che

1. $f \in BV(\Omega)$;
2. $f_n \to f$ in $BV(\Omega)$.

Osserviamo che, per Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_\Omega |D(f_m - f_n)| < \varepsilon \quad \forall m, n > \nu.$$

Si vorrebbe ora passare al limite per $m \to \infty$ tenendo fissato n, ma ci si scontra col fatto che ancora non si sa (fa parte della tesi) se Df, candidato limite di Df_m, sia una misura. Quello che si può dire, però, è che Df è una distribuzione e che (quasi per definizione) $Df_m \to Df$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$, e questo può essere utilizzato per passare al limite in

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ \langle Df_m - Df_n, \varphi\rangle \le \varepsilon \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \ \forall m, n > \nu,$$

che si deduce dalla precedente usando una delle definizioni equivalenti di variazione totale. Passando al limite si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ \langle Df - Df_n, \varphi\rangle \le \varepsilon \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \ \forall n > \nu,$$

dalla quale, passando al sup su $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si deduce sia che $|Df|(\Omega) < \infty$, cioè la 1 e poi anche la 2. □

BV come spazio duale

Come $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$, anche $BV(\Omega)$ non è riflessivo nè separabile. Si può dimostrare (vedi [1], Remark 3.12) che, come $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$, è duale di uno spazio di Banach separabile, e quindi si può dotare della topologia debole* che deriva da questa dualità. Si potrebbe evitare di usare questo argomento (vedi [1]), ma usarlo rende più semplici e più facili da ricordare alcune delle più importanti proprietà di BV.

Supponiamo d'ora in poi che Ω sia limitato e con bordo lipschitziano. Utilizzando il preduale si potrebbe provare che l'immersione di $BV(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$ è compatta e dimostrare come teorema quella che qui diamo come definizione.

Definizione 2.21 *La convergenza debole* in $BV(\Omega)$ è definita come segue*

$$u_h \to u \text{ debolmente* in } BV(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u_h \to u & \text{fortemente in } L^1(\Omega) \\ Du_h \to Du & \text{debolmente* in } M(\Omega;\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Ne consegue che quella ora definita ha tutte le buone proprietà della convergenza debole*, ed in particolare, successioni limitate in $BV(\Omega)$ sono debolmente* relativamente compatte. Inoltre la norma BV è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole*. In particolare lo è la variazione totale della misura gradiente. Il seguente teorema da una facile dimostrazione diretta di questo fatto.

Teorema 2.22 *Sia u_h una successione di funzioni di $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che $u_h \to u$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$. Allora*

$$V(u,\Omega) \leq \liminf_h V(u_h,\Omega)$$

(dove gli integrali valgono $+\infty$ se le funzioni non sono BV; vedi Osservazione 2.15).

DIMOSTRAZIONE Per l'osservazione 2.15, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$ con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ si ha

$$\int_\Omega |Du_h| \geq \int_\Omega u_h \operatorname{div}\varphi \to \int_\Omega u \operatorname{div}\varphi.$$

Passando al liminf si ha

$$\liminf_{h\to\infty} \int_\Omega |Du_h| \geq \int_\Omega u \operatorname{div}\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)\; \|\varphi|_\infty \leq 1,$$

e la tesi segue quindi passando al sup su φ. □

Convergenza stretta

Un'altro tipo di convergenza molto usata in BV è la seguente.

Definizione 2.23 *La* convergenza stretta *in $BV(\Omega)$ è definita come segue*

$$u_h \to u \text{ debolmente* in } BV(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u_h \to u & \text{fortemente in } L^1(\Omega) \\ |Du_h|(\Omega) \to |Du|(\Omega) & \text{per } h \to \infty. \end{cases}$$

Esercizio 2.24 Dimostrare che

$$d(u,v) = \int_\Omega |u-v|\,dx + \big||Du|(\Omega) - |Dv|(\Omega)\big|$$

è una metrica che induce la convergenza stretta.

Proposizione 2.25 *$u_h \to u$ strettamente $\Rightarrow u_h \to u$ debolmente*.*

Dimostrazione Se $u_h \to u$ strettamente allora u_h è limitata in BV, quindi da essa si può estrarre una successione convergente w^* a un limite v. In particolare questa sottosuccessione converge a v in L^1 e da ciò segue, per unicità del limite che $u = v$ in L^1 e quindi in BV. D'altra parte il medesimo discorso si può ripetere per ogni sottosuccessione e quindi l'intera successione u_h converge w^* perché è contenuta in una palla e le palle sono w^*-metrizzabili per la separabilità del preduale. $\square$

Per vedere che non vale il viceversa basta considerare i seguenti esempi:

1. $\Omega = (0,1)$, $u_h = \chi_{(0,x_h)}$ con $0 < x_h \to 0$. In tal caso si ha $u_h \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ ma $|Du_h|(0,1) = |\delta_{x_h}|(0,1) = 1$ per ogni h.

2. $\Omega = (0, 2\pi)$, $u_h = \mathrm{sen}(hx)/h$. Allora $u_h \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ ma $|Du_h|(0,2\pi) = 4$ per ogni h.

2.4 Funzioni a variazione limitata in dimensione 1.

Nella Sezione 1.3 abbiamo definito la variazione totale puntuale $T_a^b(f)$ di una funzione reale f definita su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Quella definizione, interessante storicamente, non è la più adatta per un confronto con la teoria distribuzionale delle funzioni BV che sono invece definite su aperti. Conviene invece introdurre la seguente altra definizione.

Definizione 2.26 *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $I = (a,b)$. Per ogni funzione $u : I \to \mathbb{R}^m$ la* variazione puntuale *di u su I è definita da*

$$pV(u, I) = \sup\{\sum_{i=1}^{n-2} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| \ : \ a < t_1 < ... < t_{n-1} < b\}.$$

Il confronto con la vecchia definizione dei variazione totale è chiarito dal seguente esercizio.

exvsc **Esercizio 2.27** *Provare che si ha*

1. $pV(u, I) = \sup_{[\alpha,\beta]\subset I} T_\alpha^\beta(u)$;

2. *u reale e monotona su $I = (a,b) \Rightarrow pV(u,I) = |u(b^-) - u(a^+)|$;*

3. *se $pV(u, I) < \infty$ allora u è differenza di due funzioni non decrescenti,[2] quindi esistono $u(a^+) := \lim_{x\to a^+} u(x)$ e $u(b^-) := \lim_{x \to b^-} u(x)$ e si ha*

$$pV(u, I) = T_a^b(u)$$

   dove $u(a) := u(a^+)$ e $u(b) := u(b^-)$.

Inoltre, se $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ allora si ha

4. *$pV(u,(a,b)) \le T_a^b(u)$ e può valere $<$;*

5. *se $T_a^b(u) < \infty$ allora esistono $u(a^+)$ e $u(b^-)$e risulta $T_a^b(u) = pV(u,(a,b))$ se e solo se $u(a) = u(a^+)$ e $u(b) = u(b^-)$.*

[2]Suggerimento: considerare la funzione $g(t) = \sup\{\sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| \ : \ a < t_1 < ... < t_{n-1} = t\}$.

Osservazione 2.28 Il funzionale variazione puntuale

$$u \mapsto pV_a^b(u)$$

è s.c.i. rispetto alla convergenza puntuale in (a, b), come estremo superiore di una famiglia di funzionali continui.

Osservazione 2.29 *Siccome per ogni $x \in (a, b)$, $|u(x) - u(a^+)| \leq pV_a^x(u)$, allora*

$$pV_a^b(u) < \infty \Rightarrow u \textit{ limitata.}$$

Variazione essenziale e buoni rappresentanti

Poiché la variazione puntuale è estremamente sensibile alla modifica del valore di una funzione anche in un solo punto introduciamo la seguente definizione.

defev **Definizione 2.30** *Si chiama* variazione essenziale *di u il numero (eventualmente infinito)*

$$eV(u, I) := \inf\{pV(v, I) \ : \ v = u \textit{ q.o. in } I\}.$$

Teorema 2.31 *Per ogni $u \in L^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^m)$ l'inf nella precedente è minimo e*

$$eV(u, I) = V(u, I).$$

Dimostrazione Vedi [1], Theorem 3.27.

Se ora $u \in BV(I; \mathbb{R}^n)$ si ha che $V(u, I) = |Du|(I) < \infty$ (osservazione 2.15); poiché $V(u, I) = eV(u, I)$, allora, per il teorema precedente, la Definizione 2.30 e la 3. dell'Esercizio 2.27, nella classe di equivalenza di u esiste un rappresentante $\tilde{u}$ tale che

$$pV(\tilde{u}, I) = eV(u, I) = V(u, I) = T_a^b(u),$$

cioè $\tilde{u}$ è una funzione a variazione limitata in senso classico. Ogni $\tilde{u}$ con questa proprietà è detta un *buon rappresentante.* [3] Osserviamo inoltre che in generale di buoni rappresentanti in una stessa classe ce n'è più di uno (considerare ad esempio una funzione con un salto). Il teorema seguente caratterizza i buoni rappresentanti e ne stabilisce alcune proprietà.

Teorema 2.32 (dei buoni rappresentanti) *Sia $u \in BV(I; \mathbb{R}^m)$. Sia $A = \{t \in \mathbb{R} \ : Du(\{t\}) \neq 0\}$ l'insieme degli atomi di Du. Valgono le proposizioni seguenti.*

(a) Esiste un'unica costante $c \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$u^l(t) = c + Du((a, t)), \qquad u^r(t) = c + Du((a, t])$$

sono buoni rappresentanti di u, rispettivamente quello continuo da sinistra e quello continuo da destra. Ogni altra funzione $\tilde{u} : I \to \mathbb{R}^m$ è un buon rappresentante di u se e solo se

$$\tilde{u}(t) \in \text{co}(u^l(t), u^r(t)) := \{\theta u^l(t) + (1 - \theta) u^r(t) \ : \ \theta \in [0, 1]\} \ \forall t \in I;$$

[3] Per la precisione due rappresentanti appartengono alla stessa classe se e solo se differiscono al piú su un insieme di misura nulla e in tal caso è facile verificare che le derivate distribuzionali coincidono e quindi coincidono le loro variazioni totali. Possono invece essere diverse le variazioni puntuali. Un buon rappresentante invece, per definizione, oltre ad essere un rappresentante deve anche avere variazione puntuale uguale alla variazione totale della misura derivata.

(b) *ogni buon rappresentante $\tilde{u}$ è continuo in $I \setminus A$ ed ha una discontinuità di salto in ogni punto di A;*

(c) *ogni buon rappresentante $\tilde{u}$ è una funzione a variazione limitata in senso classico ed in particolare è derivabile quasi ovunque in I; si ha inoltre $\tilde{u}' = d(Du)/dx$.*

DIMOSTRAZIONE Vedi [1], Theorem 3.28 (per dimostrare che u^l e u^r sono buoni rappresentanti procedere come nella dimostrazione del Lemma 1.17).

Esercizio 2.33 *Sia $\mu \in M(I;\mathbb{R}^m)$. Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} Du = \mu \\ u(a^+) = c. \end{cases}$$

provare che

1. *$u^l(t) = c + \mu((a,t))$ e $\mu^r(t) = c + \mu((a,])$ sono soluzioni del problema (usare il teorema di Fubini-Tonelli sull'inversione dell'ordine di derivazione);*

2. *sono soluzioni anche tutte le funzioni $\tilde{u}(t) \in \mathrm{co}(u^l(t), u^r(t))$; esistono altre soluzioni oltre a queste, ma...*

3. *tutte le soluzioni individuano una stessa classe di equivalenza di funzioni BV che è l'unica soluzione in $BV(I;\mathbb{R}^m)$ del problema di Cauchy.*

In generale ogni misura μ su I può essere decomposta nella somma di tre parti, una AC rispetto a $\mathcal{L}^\infty$ (μ^a), una puramente atomica(μ^j) e una diffusa (cioè non atomica) e singolare (μ^s). Per ottenere questa decomposizione denotiamo con $A = \{t \in I \,:\, \mu(\{t\}) \neq 0\}$ l'insieme degli atomi di μ (siccome μ è finita A è al più numerabile) e considerata la decomposizione $\mu = \mu^a + \mu^s$ con $\mu^a \ll \mathcal{L}^1$, definiamo $\mu^j = \mu^s|A$ e $\mu^C = \mu^s|(\Omega \setminus A)$. Si ha così

$$\mu = \mu^a + \mu^j + \mu^C.$$

Per l'unicità della decomposizione di Lebesgue, questa decomposizione è unica a poiché le tre misure sono mutuamente singolari si ha anche

$$|\mu| = |\mu^a| + |\mu^j| + |\mu^C|.$$

In accordo con questa decomposizione diciamo che una $u \in BV(I)$ è una *funzione di salto* se $Du = (Du)^j$, cioè se Du è puramente atomica, e che u è *cantoriana* se $Du = (Du)^C$, cioè se Du è singolare e priva di atomi.

Vale, in $BV(I)$, il seguente teorema di decomposizione

Teorema 2.34 *Sia $I = (a,b)$ limitato. Ogni $u \in BV(I;\mathbb{R}^m)$ si può decomporre nella somma*

$$u = u^a + u^j + u^C$$

dove $u \in W^{1,1}(I;\mathbb{R}^m)$, u^j è una funzione di salto e u^C è cantoriana. Le tre funzioni sono unicamente determinate a meno di una costante additiva e si ha

$$|Du|(I) = |Du^a| + |Du^j| + |Du^C| = \int_a^b |\tilde{u}'|\,dt + \sum_{t\in A} |\tilde{u}(t^+) - \tilde{u}(t^-)| + |Du^C|(I)$$

dove $\tilde{u}$ è un qualunque suo rappresentante di u.

È facile costruire funzioni di salto, ad esempio presa una qualunque successione $d_n \nearrow b$ in I si può definire

$$u(t) := \sum_{\{n \,:\, d_n < t\}} 2^{-n}.$$

Si ha

$$Du = \sum_{\{n \,:\, d_n < t\}} 2^{-n} \delta_{d_n}$$

perché $u(t) = Du(0,t)$ per ogni $t \in I$. In generale la derivata distribuzionale di una funzione di salto può essere ricostruita per mezzo dei limiti da destra e da sinistra di un buon rappresentante.

La costruzione di una funzione cantoriana non costante è molto più complicata. Esse hanno buoni rappresentanti continui e differenziabili quasi ovunque con derivata nulla. Un esempio è dato dalla funzione di Vitali (Esempio 1.21) o dalla funzione di Vitali-Cantor ([1], Esempio 1.67 e Esempio 3.34).

Nel caso in cui $n = 1$ ed $\Omega =]a,b[$ è un intervallo si ha che $u \in BV(\Omega)$ se e solo se u è somma di funzioni monotone e limitate. Inoltre $BV(\Omega)$ si immerge nello spazio $L^\infty(\Omega)$ delle funzioni limitate e l'immersione è continua ma non compatta. Le tracce destra e sinistra di una funzione $u \in BV(\Omega)$ sono semplicemente

$$u(x^-) = \lim_{y \to x^-} u(y) \qquad \text{e} \qquad u(x^+) = \lim_{y \to x^+} u(y)$$

che esistono in virtù della decomposizione in somma di funzioni monotone e limitate cui accennato prima. Disuguaglianze simili a quelle di Poincaré per gli spazi di Sobolev valgono anche in BV, nel senso che per opportune costanti c_1 e c_2 si ha, per ogni $u \in BV(]a,b[)$

1. $\displaystyle\int_{]a,b[} |u|\,dx \le c_1\big(|u'|(]a,b[) + |u(a^+)| + |u(b^-)|\big);$

2. $\displaystyle\int_{]a,b[} |u - \overline{u}|\,dx \le c_2 |u'|(]a,b[)$, con $\displaystyle\overline{u} = \frac{1}{b-a}\int_a^b u\,dx.$

Disuguaglianze di questo genere valgono anche in dimensione maggiore di uno, definendo opportunamente la traccia sul bordo delle funzioni a variazione limitata (cfr. ad esempio [3]).

Bibliografia

AFP [1] Fusco N. Ambrosio, L. and D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Clarendon Press, Oxford, 2000.

AGMMP74 [2] G. Anzellotti, M. Giaquinta, U. Massari, G. Modica, and L. Pepe, *Note sul problema di plateau*, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1974.

B95 [3] G. Buttazzo, *Semicontinuità inferiore di funzionali definiti su bv*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana **39** (1995), 197–235.

DGL77 [4] E. De Giorgi and G. Letta, *Une notion générale de convergence faible pour de fonctions croissantes d'ensemble*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **4** (1977), 61–99.

HS [5] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, Berlin, 1969.

Royden [6] H.L. Royden, *Real analysis*, MacMillian Publishing co., New York, 1963.