

# Capitolo 1

## Funzioni a variazione limitata

### 1.1 Il problema delle primitive di funzioni $L^1$

Il problema della ricerca delle primitive di un'assegnata funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I = [a, b]$  intervallo limitato, cioè le soluzioni dell'equazione differenziale

$$(1.1) \quad y' = f$$

è il primo e fondamentale problema che si presenta nella teoria dell'integrazione.

#### Teoria puntuale

Se  $f$  è continua su  $I$ , una soluzione del problema nel senso puntuale, cioè intendendo che l'uguaglianza (1.1) valga in ogni punto, è fornita dal teorema fondamentale del calcolo integrale e consiste nella funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I.$$

Si ha cioè

$$(1.2) \quad \boxed{\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)} \quad \forall x \in I.$$

Se  $y$  è una generica soluzione della (1.1), cioè una funzione derivabile in ogni punto di  $I$  con derivata  $y' = f$  in  $I$ , allora derivando si ha

$$(y - F)' = 0 \quad \text{identicamente in } I$$

e quindi le soluzioni della (1.1) sono tutte e sole le funzioni

$$y(x) = F(x) + \text{costante}.$$

Naturalmente le soluzioni sono funzioni di classe  $C^1([a, b])$  (perché la derivata è la funzione continua  $f$ ).

Se calcoliamo la soluzione in  $x = a$  otteniamo  $y(a) = \text{costante}$ , quindi la formula precedente si può anche scrivere nella forma

$$(1.3) \quad \boxed{\int_a^x y'(t) dt = y(x) - y(a)}, \quad x \in I$$

nota come *formula fondamentale del calcolo integrale*.

Le considerazioni precedenti valgono nell'ambito della teoria di Riemann. È d'altra parte naturale chiedersi come si generalizzino se si suppone  $f \in L^1(I)$  anziché  $f \in C^1(I)$ . Anzitutto occorre precisare che cosa si intenda per primitiva di  $f$  in questo caso in cui il secondo membro della (1.1) è definito solo quasi ovunque e in che senso si intenda la derivabilità.

Supponiamo dunque ora  $f \in L^1(I)$  con  $I = (a, b)$  intervallo limitato e osserviamo che anche in questo caso la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I.$$

è ben definita e continua su  $\bar{I} = [a, b]$  (come semplice conseguenza del teorema della convergenza dominata).

### Teoria distribuzionale

Si può dare un senso alla derivabilità utilizzando la moderna teoria delle distribuzioni. Abbiamo visto l'anno scorso che

$$f \in L^1(I) \Rightarrow DF = f \text{ in } \mathcal{D}'(I) \Rightarrow F \in W^{1,1}(I) \Rightarrow \int_a^x DF(t) dt = F(x) - F(a)$$

Quindi  $F$  è una primitiva di  $f$  nel senso delle distribuzioni. È naturale chiedersi quali siano **tutte** le primitive in questo caso. Osserviamo che se  $y \in \mathcal{D}'(I)$  e  $Dy = f$  nel senso delle distribuzioni allora  $D(F - y) = 0$ . Per un lemma dimostrato l'anno scorso ciò implica che  $F - y = \text{costante}$  e ciò implica che  $y \in L^1(I)$ , come  $F$  visto che  $I$  è limitato. Ne consegue che se  $f \in L^1(I)$  allora

$$\{y \in \mathcal{D}'(I) : Dy = f\} = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

e inoltre

$$\{y \in \mathcal{D}'(I) : Dy \in L^1(I)\} = W^{1,1}(I),$$

cioè  $W^{1,1}(I)$  è lo spazio delle primitive in senso distribuzionale delle funzioni integrabili secondo Lebesgue.

La formula (1.2) vale quindi nel senso delle distribuzioni, ovvero la *derivata distribuzionale* è l'operazione inversa dell'integrazione secondo Lebesgue.

Abbiamo visto sempre l'anno scorso che la formula fondamentale del calcolo integrale (1.3) vale per il rappresentante continuo della  $y \in W^{1,1}(I)$ .

### Teoria quasi-ovunque

Più classicamente, senza usare le distribuzioni, si può definire primitiva di  $f$  (cioè soluzione di (1.1)) ogni funzione  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- (i)  $y$  sia derivabile (in un senso opportuno) quasi ovunque in  $I$ ;
- (ii) risulti  $y' = f$  quasi ovunque in  $I$ .

La differenza che subito si presenta rispetto alla teoria distribuzionale è che,

- tutte le funzioni  $L^1_{\text{loc}}$  sono derivabili nel senso delle distribuzioni,
- non tutte le funzioni  $L^1_{\text{loc}}$  sono derivabili quasi-ovunque.

infatti esistono funzioni continue che non sono derivabili in alcun punto. Una condizione sufficiente è data dal seguente teorema di Lebesgue sulla derivazione delle funzioni monotone che dimostreremo nella sezione seguente.

**Teorema 1.1 (di Lebesgue)** *Sia  $f$  una funzione reale monotona non decrescente sull'intervallo  $I = [a, b]$ . Allora  $f$  è derivabile quasi ovunque; inoltre la derivata quasi-ovunque  $f'$  è una funzione misurabile non negativa e si ha che*

$$(1.4) \quad \int_a^b f'(t) dt \leq f(b) - f(a),$$

e la disuguaglianza può essere stretta (esempio: funzioni costanti a tratti).

Siccome ovviamente un teorema analogo vale per le funzioni non crescenti, ne consegue che tutte le funzioni monotone sono derivabili quasi ovunque.

Nel seguito  $f'$  denoterà sempre la derivata quasi ovunque e  $Df$  quella nel senso delle distribuzioni.

A questo punto naturalmente è interessante chiedersi se nel caso delle funzioni monotone  $f' = Df$ , ma è subito visto che così non è e l'esempio è dato ancora dalle funzioni monotone costanti a tratti. Vedremo che una condizione sufficiente affinché le due derivate coincidano è che  $Df \in L^1(I)$ , cioè che  $f \in W^{1,1}(I)$  e in tal caso allora però  $f$  risulta continua e nella (1.4) vale l'uguaglianza (cioè vale la formula fondamentale del calcolo integrale).

Dimostreremo che la funzione integrale  $F$  gode delle proprietà (i) e (ii) e quindi è una primitiva di  $f$  nel senso quasi-ovunque; evidentemente questo risultato si riconduce a quello puntuale se  $f$  è continua.

Anche in questo caso sarà naturale chiedersi quali siano **tutte** le primitive. Si osserva che se  $y' = f$  quasi ovunque allora

$$(y - F)' = 0 \quad \text{quasi ovunque in } I.$$

A differenza dei casi precedenti però questa uguaglianza non implica  $y - F = \text{costante}$ . Esistono infatti funzioni, che chiameremo *singolari*, derivabili quasi ovunque con derivata nulla ma non costanti (ad esempio le costanti a tratti non costanti o la funzione di Vitali). Si può concludere quindi solamente che esiste una funzione singolare  $h$  tale che

$$y = F + h \quad \text{in } I.$$

quest'ultima è nota come *decomposizione di Lebesgue* della funzione  $y$  di cui fornisce una rappresentazione unica a meno di costanti additive (forse lo vedremo).

Se  $h$  è costante allora, calcolando  $y$  in  $a$  si deduce la formula fondamentale del calcolo integrale vista sopra. È interessante cercare di *caratterizzare* le soluzioni dell'equazione  $y' = f$  per cui ciò si verifica. A tale proposito vedremo che:

- (a) è naturale cercare soluzioni di  $y' = f$  nello spazio delle *funzioni a variazione limitata* (che definiamo in seguito), poiché tali funzioni risultano derivabili quasi ovunque con derivata in  $L^1$ ;
- (b) la funzione integrale non solo è a variazione limitata ma è anche *assolutamente continua*;
- (c) vale la formula fondamentale del calcolo integrale se e solo se  $y$  è assolutamente continua.

La relazione con la teoria distribuzionale sarà infine data dal fatto che ogni funzione  $W^{1,1}(I)$  ha un rappresentante assolutamente continuo.

## 1.2 Derivazione delle funzioni monotone

Sia  $I$  un intervallo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Ricordiamo che vale il seguente

**Teorema 1.2 (Continuità delle funzioni monotone)** *Ogni funzione monotona ha al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità.*

Sia  $x \in I$ . Si chiama *salto di  $f$  in  $x$*  il numero

$$[f]_x = |f(x^+) - f(x^-)|.$$

**DIMOSTRAZIONE** Supponiamo  $f$  crescente e  $I = [a, b]$ . Per la monotonia la somma dei salti di  $f$  non può superare  $f(b) - f(a)$ . Ne consegue che

esistono al più  $n_1 \in \mathbb{N}$  punti  $x \in I$  con  $[f]_x > 1/2$ ;

esistono al più  $n_2 \in \mathbb{N}$  punti  $x \in I$  con  $1/2^2 < [f]_x \leq 1/2$ ;

esistono al più  $n_3 \in \mathbb{N}$  punti  $x \in I$  con  $1/2^3 < [f]_x \leq 1/2^2$ ;

ed in generale, per ogni  $k \in \mathbb{N}$

esistono al più  $n_k \in \mathbb{N}$  punti  $x \in I$  con  $1/2^k < [f]_x \leq 1/2^{k-1}$ ; sia  $N_k$  l'insieme di tali punti.

Allora si ha  $\{x \in I : [f]_x > 0\} = \cup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ . Questo insieme è al più numerabile come unione numerabile di insiemi finiti. Esercizio: completare la dimostrazione estendendola ai casi tralasciati.  $\square$

**Esempio 1.3** La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 1/(n+1) & \text{se } 1/(n+1) \leq x < 1/n \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

è monotona crescente e discontinua in infiniti punti.

Sui punti di non derivabilità vale il teorema di Lebesgue enunciato prima.

Osserviamo che quindi le funzioni monotone si comportano, nei confronti dell'operazione di derivazione, meglio delle funzioni continue che possono non essere derivabili in alcun punto.

Osserviamo inoltre che gli insiemi di misura nulla non sono necessariamente di cardinalità piccola; ad esempio l'insieme di Cantor ha misura nulla ma la cardinalità del continuo.

Il materiale di questa sezione è tratto da Royden [2].

**Definizione 1.4** *Sia  $\mathcal{I}$  una famiglia di intervalli. Si dice che  $\mathcal{I}$  ricopre un sottoinsieme  $E \subset \mathbb{R}$  nel senso di Vitali se per ogni  $\varepsilon > 0$  ed ogni  $x \in E$  esiste un intervallo  $I \in \mathcal{I}$  tale che  $x \in I$  e  $\ell(I) < \varepsilon^1$ .*

**Lemma 1.5 (di ricoprimento di Vitali)** *Sia  $E \subset \mathbb{R}$  di misura esterna finita e  $\mathcal{I}$  una famiglia di intervalli che ricopre  $E$  nel senso di Vitali. Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una sottofamiglia finita  $\{I_1, \dots, I_N\}$  di intervalli di  $\mathcal{I}$  due a due disgiunti e tale che*

$$m^*(E \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n) < \varepsilon.$$

<sup>1</sup> $\ell(I)$  = lunghezza dell'intervallo

DIMOSTRAZIONE È sufficiente provare il lemma nel caso in cui ogni intervallo della famiglia è chiuso altrimenti basta sostituire ogni intervallo con la propria chiusura e usare il fatto che gli estremi hanno misura nulla.

Sia  $O$  un aperto di misura finita contenente  $E$  (esiste per definizione di misura esterna). Poiché  $\mathcal{I}$  ricopre  $E$ , possiamo assumere senza perdere in generalità che ogni intervallo di  $\mathcal{I}$  sia contenuto in  $O$ .

Costruiamo per induzione una successione  $(I_n)$  di intervalli disgiunti di  $\mathcal{I}$  come segue: sia  $I_1$  qualunque intervallo di  $\mathcal{I}$  e supponiamo che  $I_1, \dots, I_n$  siano stati scelti. Sia

$$k_n = \sup\{\ell(I) ; I \in \mathcal{I}, I \cap I_h = \emptyset, h = 1, \dots, n\}.$$

Poiché ogni intervallo è contenuto in  $O$  allora

$$k_n \leq m(O) < \infty.$$

Se  $E \subset \bigcup_{h=1}^n I_h$  la dimostrazione è terminata. Altrimenti esiste  $I_{n+1} \in \mathcal{I}$  disgiunto dai precedenti e tale che

$$\ell(I_{n+1}) > k_n/2.$$

In tal modo, se la dimostrazione non termina prima, si ottiene una successione di intervalli di  $\mathcal{I}$  disgiunti  $(I_n)$  con  $\cup I_n \subseteq O$  e quindi tale che

$$\sum \ell(I_n) \leq m(O) < \infty.$$

Allora esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$\sum_{N+1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon/5.$$

Sia  $R = E \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n$  e la tesi è provata se dimostriamo che  $m(R) < \varepsilon$ . Sia  $x \in R$  arbitrario. Siccome  $\bigcup_{n=1}^N I_n$  è un chiuso non contenente  $x$ , allora esiste  $I \in \mathcal{I}$  di lunghezza abbastanza piccola da essere disgiunto da  $I_1, \dots, I_N$ . Se ora  $I \cap I_h = \emptyset$  per ogni  $h \leq n$ , allora necessariamente

$$\ell(I) \leq k_n < 2\ell(I_{n+1}).$$

Siccome  $\lim \ell(I_n) = 0$  allora l'intervallo  $I$  deve intersecare almeno uno degli intervalli  $I_n$ . Sia  $n$  il più piccolo intero tale che  $I$  interseca  $I_n$ . Ovviamente  $n > N$  e

$$\ell(I) \leq k_{n-1} < 2\ell(I_n).$$

Siccome  $x \in I$  e  $I$  ha un punto in comune con  $I_n$  segue che la distanza di  $x$  dal punto medio di  $I_n$  è al più  $\ell(I) + \frac{\ell(I_n)}{2} \leq \frac{5}{2}\ell(I_n)$ . Ne consegue che  $x$  appartiene all'intervallo  $J_n$  avente lo stesso punto medio di  $I_n$  e lungo 5 volte tanto. Si ha dunque, con l'ovvio significato delle notazioni,

$$R \subseteq \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n$$

e quindi

$$m^*(R) \leq \sum_{N+1}^{\infty} \ell(J_n) = 5 \sum_{N+1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon.$$

□

DIMOSTRAZIONE (del teorema di Lebesgue) Supponiamo per fissare le idee che  $f$  sia non decrescente.

Si tratta di provare che per tutti gli  $x$  che non stanno in un insieme di misura nulla esiste finito il limite

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Introduciamo a tal scopo i *numeri derivati* (U. Dini) della  $f$  in  $x$ :

$$\begin{aligned} D^+ f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ D_+ f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ D^- f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ D_- f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Si ha che  $f$  è derivabile in  $x$  se e solo se

$$(0 \leq) D_- = D^- = D_+ = D^+ < \infty,$$

quindi dimostrare il teorema di Lebesgue equivale a dimostrare che questo succede quasi ovunque.

Vediamo anzitutto che ci si può restringere a dimostrare che sono verificate quasi ovunque e per ogni funzione non decrescente le due sole condizioni

1.  $D^+ < \infty$ ;
2.  $D^+ \leq D_-$ .

Supponiamo infatti che queste siano verificate e poniamo  $h(x) = -f(-x)$ . Per definizione di max e min limite si vede facilmente che in tal modo si scambia la destra con la sinistra, cioè

$$D_+ h(-x) = D_- f(x), \quad D^+ h(-x) = D^- f(x), \quad D^- h(-x) = D^+ f(x), \quad D_- h(-x) = D_+ f(x).$$

Osservato poi che anche  $h$  è crescente allora per essa vale la 2 e dunque

$$D^- f = D^+ h \leq D_- h = D_+ f$$

e quindi, se valgono 1 e 2 si ha

$$D^+ \leq D_- \leq D^- \leq D_+ \leq D^+ < \infty$$

e quindi la tesi.

Cominciamo col provare la 2. Proviamo che posto

$$E := \{x \in [a, b] : D^+ > D_-\}$$

si ha  $m(E) = 0$ . A tal scopo osserviamo che posto

$$E_{c,C} := \{x \in [a, b] : D^+ > C > c > D_-\}, \quad c, C \in \mathbb{Q}, 0 < c < C$$

si ha

$$E = \bigcup_{\substack{c, C \in \mathbb{Q}, \\ 0 < c < C}} E_{c,C}.$$

Per ciò basterà provare che  $m^*(E_{c,C}) = 0$ .

Sia  $s := m^*(E_{c,C})$  e, scelto  $\varepsilon > 0$ , includiamo  $E_{c,C}$  in un aperto  $O$  con  $m(O) < s + \varepsilon$  (ciò è possibile per definizione di misura esterna di Lebesgue). Per ogni punto  $x \in E_{c,C}$  si ha  $D_- f(x) < c$  e questo implica che esiste  $h_x > 0$  tale che per ogni  $0 < h \leq h_x$  l'intervallo  $[x - h, x]$  è contenuto in  $O$  e

$$f(x) - f(x - h) < ch.$$

L'insieme di questi intervallini costituisce un ricoprimento di Vitali di  $E_{c,C}$  e quindi, per il lemma di ricoprimento di Vitali, esiste una famiglia finita e disgiunta  $\{I_1, \dots, I_N\}$  le cui parti interne ricoprono un sottoinsieme aperto  $A$  di  $E$  di misura maggiore di  $s - \varepsilon$ . Sommando su ciascun intervallo  $I_n = [x_n - h_n, x_n]$  della famiglia si ha

$$\sum_{n=1}^N [f(x_n) - f(x_n - h_n)] < c \sum_{n=1}^N h_n \leq cm(O) < c(s + \varepsilon).$$

Ora, siccome in  $E_{c,C}$  e quindi in  $A$  vale la disuguaglianza  $D^+ f > C$ , allora ogni punto  $y \in A$  è estremo sinistro di un intervallo arbitrariamente piccolo  $(y, y + k)$  contenuto in uno degli  $I_n$  e tale che

$$f(y + k) - f(y) > Ck.$$

Usando di nuovo il lemma di ricoprimento si trova una famiglia finita e disgiunta di intervalli  $\{J_1, \dots, J_M\}$  le cui parti interne ricoprono un sottoinsieme aperto  $B$  di  $A$  di misura esterna maggiore di  $(s - \varepsilon) - \varepsilon = s - 2\varepsilon$ . Sommando su ciascun intervallo della famiglia si ha

$$\sum_{m=1}^M [f(y_m + k_m) - f(y_m)] > C \sum_{m=1}^M k_m > C(s - 2\varepsilon).$$

Ogni intervallo  $J_m$  è contenuto in un  $I_n$  e, sommando su tutti gli  $m$  tali che  $J_m \subseteq I_n$ , si ha, siccome  $f$  è crescente,

$$\sum [f(y_m + k_m) - f(y_m)] \leq f(x_n) - f(x_n - h_n).$$

Allora

$$\sum_{n=1}^N [f(x_n) - f(x_n - h_n)] \geq \sum_{m=1}^M [f(y_m + k_m) - f(y_m)],$$

sicchè

$$c(s + \varepsilon) > C(s - 2\varepsilon)$$

che, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  implica  $cs \geq Cs$ . Poiché d'altra parte  $c < C$ , quest'ultima implica che  $s = 0$ .

Abbiamo quindi provato che il limite del rapporto incrementale

$$g(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

esiste quasi ovunque. Rimane da dimostrare che è finito quasi ovunque (ovvero la 1). Sia

$$g_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)]$$

ed estendiamo la  $f$  ponendo  $f(x) = f(b)$  per ogni  $x \geq b$ . Per quanto appena dimostrato si ha

$$g_n(x) \rightarrow g(x) \text{ quasi ovunque;}$$

inoltre le  $g_n$  sono misurabili, perché lo è  $f$  in quanto monotona, e quindi  $g$  è misurabile. Siccome  $f$  è crescente si ha inoltre  $g_n \geq 0$ . Allora, per il lemma di Fatou si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b g &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} n \int_a^b [f(x + 1/n) - f(x)] dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} n \int_b^{b+1/n} f(x) dx - n \int_a^{a+1/n} f(x) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f(b) - n \int_a^{a+1/n} f(x) dx \\ &\leq f(b) - f(a) \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza è ottenuta eseguendo il cambiamento di variabile  $y = x + 1/n$  nel primo integrale. Ciò prova che  $g$  è integrabile e quindi finita quasi ovunque. Dunque  $f$  è derivabile quasi ovunque con  $f' = g$  e vale la formula (1.4).  $\square$

### 1.3 Funzioni a variazione limitata

Il materiale di questa sezione è tratto da Royden [2] a Hewitt and Stromberg [1].

Ricordiamo che data una funzione  $h$  si definiscono  $h^+ := h \vee 0$  e  $h^- = h \wedge 0$ , rispettivamente, la parte positiva e quella negativa di  $h$ ; osserviamo che sono entrambe funzioni non negative e che  $h = h^+ - h^-$ .

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  una partizione di  $[a, b]$ . I numeri non negativi

$$\begin{aligned} P_a^b(f) &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})]^+ : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ partizione di } [a, b] \right\}, \\ N_a^b(f) &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})]^- : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ partizione di } [a, b] \right\}, \\ T_a^b(f) &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ partizione di } [a, b] \right\}, \end{aligned}$$

si chiamano rispettivamente *variazione positiva*, *variazione negativa* e *variazione totale* di  $f$  in  $[a, b]$ .

**Definizione 1.6** Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice a variazione limitata in  $[a, b]$  se  $T_a^b(f) < \infty$ .

**Esempio 1.7 (di funzione non BV)** La funzione che ha come grafico la curva di  $\mathbb{R}^2$  ottenuta per interpolazione lineare a tratti dei punti

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \dots, \left(\frac{1}{n}, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right), \dots$$

cioè la poligonale che ha vertici in tali punti, non è a variazione limitata. Infatti è composta di un insieme numerabile di tratti rettilinei la cui lunghezza, andando da destra verso sinistra, è minorata da  $\frac{1}{n}$ , che è termine generale di una serie divergente.

**Lemma 1.8** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è a variazione limitata in  $[a, b]$  allora

1.  $f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b$ ,
2.  $T_a^b = P_a^b + N_a^b$ .

DIMOSTRAZIONE Cominciamo con l'osservare che per qualunque funzione  $h$  si ha

$$h = h^+ - h^-,$$

quindi, fissata una qualunque partizione  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  si ha

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = [f(t_i) - f(t_{i-1})]^+ - [f(t_i) - f(t_{i-1})]^-$$

da cui, sommando su  $i$  si ottiene che

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})]^+ - \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})]^-.$$

che conviene scrivere nella forma

$$(1.5) \quad \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})]^- + f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})]^+$$

perchè così si può passare al sup al variare della partizione ad ambo i membri ottenendo

$$P_a^b + f(b) - f(a) = N_a^b$$

cioè la 1.

Per provare la 2 osserviamo anzitutto che siccome per ogni funzione  $h$  si ha

$$|h| = h^+ + h^-$$

e, poiché il sup della somma è minore o uguale della somma dei sup, allora

$$T_a^b \leq P_a^b + N_a^b.$$

Resta da dimostrare la disuguaglianza opposta. Osserviamo che, per ogni partizione si ha

$$T_a^b \geq \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})]^+ + \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})]^-$$

e, per la (1.5) si ha

$$T_a^b \geq 2 \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})]^+ - [f(b) - f(a)].$$

Passando al sup e usando la 1, allora

$$T \geq 2P - [f(b) - f(a)] = P + N,$$

e quindi la tesi. □

**Osservazione 1.9** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è monotona allora è a variazione limitata in  $[a, b]$ .

**Osservazione 1.10** L'insieme delle funzioni a variazione limitata con le operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione con uno scalare è uno spazio vettoriale. In particolare la differenza di funzioni monotone è una funzione a variazione limitata.

**Teorema 1.11 ( di decomposizione di Jordan)** *Ogni funzione a variazione limitata è differenza di due funzioni reali non decrescenti.*

DIMOSTRAZIONE Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a variazione limitata in  $[a, b]$ . Basta osservare che, applicando per la 1 del lemma precedente ad ogni sottointervallo  $[a, x]$  con  $x \in [a, b]$  si ha

$$f(x) = f(a) + P_a^x - N_a^x$$

e che le funzioni  $h(x) = f(a) + P_a^x$  e  $g(x) = N_a^x$  sono finite e non decrescenti.  $\square$

Per quanto precedentemente osservato, il teorema di Jordan è una caratterizzazione delle funzioni a variazione limitata, cioè una  $f \in BV$  se e solo se  $f$  è differenza di funzioni monotone.

Un'immediata conseguenza di quanto provato è che, per la linearità della derivazione, il teorema di Lebesgue sulla derivazione delle funzioni monotone ammette il seguente enunciato equivalente.

**Teorema 1.12 (Lebesgue)** *Ogni funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a variazione limitata è derivabile quasi-ovunque.*

## Curve rettificabili

Ricordiamo la seguente

**Definizione 1.13** *Una funzione continua  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è detta una curva rettificabile se*

$$L(\varphi) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ partizione di } [a, b] \right\} < \infty.$$

$L(\varphi)$  è detta lunghezza della curva.

**Teorema 1.14 (di Jordan)** *Una curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è rettificabile se e solo se ogni componente  $\varphi_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione a variazione limitata su  $[a, b]$ .*

DIMOSTRAZIONE Esercizio.

Quanto ora osservato, unitamente al teorema di Lebesgue, fornisce il risultato seguente.

**Corollario 1.15** *Se  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva rettificabile allora esiste  $\varphi'$  quasi ovunque.*

**Esempio 1.16** Le funzioni lipschitziane su  $[a, b]$  sono a variazione limitata. Le funzioni di classe  $C^1([a, b])$  sono a variazione limitata.

## 1.4 Teorema fondamentale del calcolo integrale (teoria quasi-ovunque)

In questa sezione mostriamo che la derivata della funzione integrale di una funzione integrabile secondo Lebesgue è quasi ovunque uguale alla funzione integranda. Cominciamo col provare il seguente lemma.

**Lemma 1.17** *Se  $f \in L^1(a, b)$  allora la funzione integrale  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è continua e a variazione limitata su  $[a, b]$ . Inoltre

$$T_a^b(F) = \int_a^b |f(t)| dt.$$

DIMOSTRAZIONE Come già osservato, la continuità segue immediatamente dall'applicazione del teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Per dimostrare che  $F$  è a variazione limitata basta osservare che, per definizione di integrale,

$$F(x) = \int_a^x f^+(t) dt - \int_a^x f^-(t) dt,$$

quindi è differenza di funzioni monotone.

Quanto alla variazione totale, osserviamo che

$$\begin{aligned} T_a^b(F) &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |F(t_i) - F(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ partizione di } [a, b] \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dt \right| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ partizione di } [a, b] \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t)| dt : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ partizione di } [a, b] \right\} \\ &= \int_a^b |f(t)| dt \end{aligned}$$

Resta da provare la disuguaglianza opposta. Poiché  $f$  è sommabile esiste una successione di funzioni misurabili e costanti a tratti  $(\varphi_n)$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = f(t)$  q.o.  $t \in (a, b)$ . Ne vogliamo costruire una che tenda a  $|f|$ . Consideriamo a tal scopo la funzione "segno di  $f$ "

$$S(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(t) > 0 \\ -1 & \text{se } f(t) < 0 \\ 0 & \text{se } f(t) = 0 \end{cases}$$

e, usando la  $\varphi_n$ , definiamo una nuova successione di funzioni  $\varepsilon_n(t)$  con valori in  $[-1, 1]$  che tende puntualmente a  $S(t)$  come segue

$$\varepsilon_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi_n(t) > 1/n \\ -1 & \text{se } \varphi_n(t) < -1/n \\ n\varphi_n(t) & \text{se } -1/n \leq \varphi_n(t) \leq 1/n. \end{cases}$$

Si ha dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(t)f(t) = |f(t)| \text{ q.o. } t \in (a, b)$$

e inoltre

$$|\varepsilon_n(t)f(t)| \leq |f(t)| \text{ q.o. } t \in (a, b)$$

e sono quindi soddisfatte le ipotesi del teorema della convergenza dominata per il quale si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varepsilon_n(t)f(t) dt = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Basta ora provare che

$$\int_a^b \varepsilon_n(t)f(t) dt \leq T_a^b(F)$$

e passare al limite per  $n \rightarrow \infty$ . Infatti  $\varepsilon_n$  è costante a tratti e quindi considerata una partizione  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tale che  $\varepsilon_n$  è costante su ogni intervallo della partizione, si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b \varepsilon_n(t) f(t) dt &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_n(\bar{t}_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dt = \sum_{i=1}^n \varepsilon_n(\bar{t}_i) [F(t_i) - F(t_{i-1})] \\ &\leq \sum_{i=1}^n |F(t_i) - F(t_{i-1})| \leq T_a^b(F) \end{aligned}$$

avendo indicato con  $\bar{t}_i := \frac{t_{i-1} + t_i}{2}$ . □

**Lemma 1.18 (teorema di Fubini sulla derivazione delle serie di funzioni monotone)** *Sia  $(f_n)$  una successione di funzioni reali non decrescenti (o non crescenti) definite su un intervallo  $[a, b]$  e tali che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) =: s(x)$$

*è convergente per ogni  $x \in [a, b]$ . Allora  $s(x)$  è derivabile quasi ovunque e si ha*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

**DIMOSTRAZIONE** Osserviamo anzitutto che si può supporre che  $f_n(a) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Infatti, se così non fosse basterebbe porre  $g_n(x) = f_n(x) - f_n(a)$  e applicare il lemma alla successione  $(g_n)$ .

Dunque  $f_n \geq 0$  e la funzione  $s(x)$  risulta non negativa e non decrescente. Per il teorema di Lebesgue allora  $s$  è derivabile quasi ovunque. La stessa cosa vale per ogni ridotta  $n$ -esima  $s_n$ . ed inoltre, per quasi ogni  $x \in [a, b]$  si ha

$$s'_{n+1}(x) = s'_n(x) + f'_{n+1}(x) \geq s'_n(x)$$

in quanto  $f'_{n+1}(x) \geq 0$  perché la funzione è non decrescente.

Inoltre, detto  $r_n$  il resto  $n$ -esimo della serie che definisce  $s(x)$  si ha

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x) \iff r_n(x) = s(x) - s_n(x)$$

e poiché le due funzioni a secondo membro sono derivabili quasi ovunque, anche  $r_n$  lo è e risulta

$$s'(x) = s'_n(x) + r'_n(x) \geq s'_n(x) \quad \text{quasi ovunque,}$$

dal momento che anche  $r_n$  è non decrescente al pari di  $s$ . Riassumendo si ha

$$s'_n(x) \leq s'_{n+1}(x) \leq s'(x)$$

e ciò implica che esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(x) \leq s'(x) \quad \text{quasi ovunque.}$$

Rimane da provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(x) = s'(x) \quad \text{quasi ovunque,}$$

ed in particolare basta provare che questo vale per una sottosuccessione  $s_{n_k}$ , dal momento che, come già osservato, il limite a primo membro esiste. Dato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(b) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b) = s(b) < \infty$$

allora esiste una sottosuccessione  $s_{n_k}$  tale che

$$|s_{n_k}(b) - s(b)| < \frac{1}{2^k}.$$

D'altra parte, per la monotonia dei resti, si ha

$$s(x) - s_{n_k}(x) \leq s(b) - s_{n_k}(b)$$

e quindi

$$|s_{n_k}(x) - s(x)| < \frac{1}{2^k} \quad \forall x \in [a, b]$$

e quindi la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} [s_{n_k}(x) - s(x)]$$

converge totalmente e quindi, in particolare, puntualmente. Osservato che il termine generale di questa serie è non decrescente, per essa valgono i risultati già ottenuti per la serie delle  $f_n$ . In particolare dunque la serie delle derivate è convergente; ne consegue che il termine generale di tale serie è infinitesimo, cioè

$$s'_{n_k}(x) - s'(x) \rightarrow 0 \quad \text{quasi ovunque,}$$

come volevasi dimostrare.  $\square$

**Teorema 1.19 (fondamentale del calcolo integrale)** *Sia  $f \in L^1(a, b)$ . Allora la funzione integrale  $F$  è derivabile quasi ovunque e risulta  $F'(x) = f(x)$  quasi ovunque in  $[a, b]$ .*

**Osservazione 1.20** L'anno scorso abbiamo dimostrato (teorema fondamentale del calcolo nella teoria distribuzionale) che nelle ipotesi del teorema ( $f \in L^1$ ) si ha  $DF = f$  in  $\mathcal{D}'(a, b)$ . Si osserva dunque che in questo caso  $DF = F'$ .

**DIMOSTRAZIONE** Per il lemma precedente  $F$  è a variazione limitata e quindi, per il teorema di Lebesgue, derivabile quasi ovunque.

Cominciamo col dimostrare il teorema nel caso particolare in cui  $f$  è la funzione caratteristica di un sottoinsieme misurabile  $A$  di  $]a, b[$ . In tal caso si ha

$$F(x) = m(]a, x[ \cap A), \quad x \in (a, b),$$

dove  $m$  indica la misura di Lebesgue. Quanto al limite del rapporto incrementale si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(]a, x+h[ \cap A) - m(]a, x[ \cap A)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(]a, x+h[ \cap A \setminus ]a, x[ \cap A)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(]x, x+h[ \cap A)}{h} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{q.o. } x \in A \\ 0 & \text{q.o. } x \in ]a, b[ \setminus A \end{cases} = f(x) \text{ q.o. } x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Per la dimostrazione dell'ultima uguaglianza della catena vedere Hewitt e Stromberg [1], Theorem 18.2. In tal caso si ha quindi  $F'(x) = f(x)$  quasi ovunque.

Sia  $f \geq 0$ . Allora, essendo sommabile, esiste una successione crescente  $(\varphi_n)$  di funzioni semplici misurabili (i.e. combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di sottoinsiemi misurabili di  $]a, b[$ ) e non negative che converge puntualmente crescendo alla  $f$ , cioè

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_n \leq \dots \leq f \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad \forall x \in ]a, b[.$$

Per quanto osservato in precedenza, posto  $\Phi_n(x) = \int_a^x \varphi_n(t) dt$ , si ha  $\Phi_n(x)' = \varphi_n(x)$  q.o.  $x \in ]a, b[$ . Per il teorema di convergenza monotona di Beppo-Levi si ha inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = F(x).$$

La tesi sarebbe a questo punto dimostrata se si potesse scambiare il segno di derivata con quello di limite, cioè se, quasi ovunque

$$F'(x) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Questo si può ottenere, con un truccetto, utilizzando opportunamente il teorema di Fubini sulla derivazione delle serie di funzioni monotone. Infatti, basta osservare che per definizione di somma di una serie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \Phi_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_{n+1}(x) - \Phi_n(x)]$$

e che le funzioni  $\Phi_{n+1}(x) - \Phi_n(x) = \int_a^x [\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)] dt$  sono monotone in quanto l'integranda è non negativa.  $\square$

## 1.5 Funzioni assolutamente continue e formula fondamentale del calcolo integrale

Abbiamo già osservato (Teorema 1.1) che nella sola ipotesi in cui una funzione  $F$  è a variazione limitata, e quindi derivabile quasi ovunque, in generale la formula fondamentale del calcolo non vale, ma vale solo una disuguaglianza nel caso in cui  $F$  sia monotona. Il motivo è che esistono funzioni a variazione limitata che hanno derivata quasi ovunque uguale a zero ma che non sono costanti (sono cioè singolari). Per eliminare questa patologia è necessario supporre che la funzione in questione sia più regolare. Supporre che sia continua, oltre che BV, non è sufficiente perché c'è il seguente controesempio di Vitali.

**Esempio 1.21 (Vitali)** Mostriamo che esiste una funzione  $V : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, strettamente monotona, con derivata quasi-ovunque nulla.

Sia  $t \in (0, 1)$  un parametro (ad esempio  $t = 1/2$ , per fissare le idee). Costruiamo una successione non decrescente di funzioni continue come segue.

Passo  $n = 0$ . Definiamo  $V_0(x) = x$ .

Passo  $n = 1$ . Definiamo  $V_1(0) = V_0(0)$ ,  $V_1(1) = V_0(1)$  e

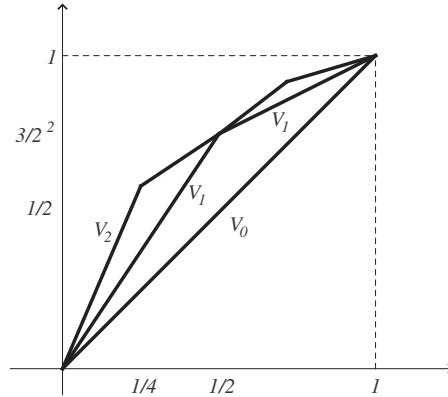
$$V_1(1/2) = \frac{1-t}{2} V_0(0) + \frac{1+t}{2} V_0(1) = \frac{1+t}{2}$$

ed estesa per linearità sugli intervalli  $[0, 1/2]$  e  $[1/2, 1]$  (vedi figura).

Passo  $n$ . Supponendo che siano stati definiti  $V_0, V_1, \dots, V_n$ , definiamo  $V_{n+1}(k/2^n) = V_n(k/2^n)$  per  $k = 1, 2, \dots, 2^n$  e, nei punti medi degli intervalli che hanno per estremi i punti del tipo  $k/2^n$ , cioè quelli del tipo  $(2k+1)/2^{n+1}$  si definisce

$$V_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1-t}{2}V_n\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1+t}{2}V_n\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

e si estende per linearità su ciascun intervallo della suddivisione.



Le  $V_n$  così definite sono funzioni continue, strettamente crescenti, e inoltre

$$0 \leq V_n(x) \leq V_{n+1}(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Allora esiste per ogni  $x \in [0, 1]$  il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x) =: V(x) \in [0, 1].$$

Come si vede dal grafico la pendenza dei segmenti cresce sempre di più vicino ai punti del tipo  $k/2^n$  ma diventa sempre minore su intervalli di ampiezza sempre maggiore. In effetti si dimostra (vedi [1]) che

1.  $V$  è continua;
2.  $V$  è strettamente crescente;
3.  $V' = 0$  quasi ovunque.

Osserviamo che, essendo continua su un intervallo chiuso e limitato, la funzione  $V$  di Vitali è anche uniformemente continua. Quindi anche questo non è sufficiente ad eliminare la singolarità. Una condizione sufficiente sarebbe la lipschitzianità o più in generale l'hölderianità ma, come vedremo, quest'ultima non è necessaria. Per dare una condizione necessaria e sufficiente introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 1.22** Una funzione  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dicesi assolutamente continua se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni famiglia finita di intervalli disgiunti  $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1 \dots N}$ , contenuti in  $[a, b]$ , si ha

$$\sum_{k=1}^N (\beta_k - \alpha_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^N |u(\beta_k) - u(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

**Esempio 1.23** Le funzioni hölderiane sono AC.

**Osservazione 1.24** Se  $u$  è AC allora è UC.

**Proposizione 1.25** Se  $u$  è AC( $a, b$ ) allora è BV( $a, b$ ).

**DIMOSTRAZIONE** Sia  $\delta > 0$  soddisfacente la condizione della definizione di funzione AC con  $\varepsilon = 1$ . Consideriamo una partizione di  $[a, b]$  in punti  $x_k$  equidistanti con  $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ . Per  $n$  abbastanza grande si avrà  $\frac{b-a}{n} < \delta$ . Con questa scelta di  $\delta$  e di  $n$  si ha allora

$$T_{x_{k-1}}^{x_k}(u) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |u(t_i^k) - u(t_{i-1}^k)| : x_{k-1} = t_0 < t_1 < \dots < t_m = x_k \right\} \leq \varepsilon = 1$$

dal momento che  $\sum_{i=1}^m (t_i^k - t_{i-1}^k) = x_k - x_{k-1} < \delta$ . Si ha quindi

$$T_a^b(u) \leq \sum_{k=1}^n T_{x_{k-1}}^{x_k}(u) \leq n.$$

□

**Teorema 1.26** Sia  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione AC. Se  $u' = 0$  quasi ovunque allora  $u$  è costante.

**DIMOSTRAZIONE** Sia  $c \in ]a, b]$  arbitrario. La tesi è provata se dimostriamo che  $u(c) = u(a)$ .

A tal scopo, sia  $\varepsilon > 0$ . Sia  $\delta > 0$  corrispondente all' $\varepsilon$  fissato e per il quale la condizione di assoluta continuità di  $u$  sia soddisfatta.

Sia  $E = \{x \in ]a, c[ : u'(x) = 0\}$ . Chiaramente  $m(E) = c-a$  ( $m =$  misura di Lebesgue). Per definizione di derivabilità, per ogni  $x \in E$  esiste  $h_x > 0$  abbastanza piccolo tale che

$$(1.6) \quad [x, x+h] \subset ]a, c[ \quad \text{e} \quad \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right| < \frac{\varepsilon}{c-a} \quad \text{per ogni } 0 < h \leq h_x.$$

La famiglia di tutti questi intervalli  $[x, x+h]$  è un ricoprimento di Vitali di  $E$ . Poiché  $E$  ha misura finita allora, per il lemma di ricoprimento di Vitali, in corrispondenza a  $\delta$  esiste una famiglia finita di intervalli due a due disgiunti,  $\{[x_k, x_k + h_k]\}_{k=1, \dots, n}$ , tale che

$$m(E \setminus (\cup_{k=1}^n [x_k, x_k + h_k])) < \delta.$$

Ne consegue che

$$(1.7) \quad c - a = m(E) < \delta + \sum_{k=1}^n h_k$$

Possiamo (e così facciamo) supporre che  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

Segue da (1.7) che la somma delle ampiezze degli intervalli aperti

$$]a, x_1[, ]x_1 + h_1, x_2[, \dots, ]x_n + h_n, c[,$$

complementari di  $\cup_{k=1}^n [x_k, x_k + h_k]$  in  $]a, c[$ , è minore di  $\delta$ , e quindi, per come abbiamo scelto  $\delta$  (cioè per l'assoluta continuità di  $u$ ) si ha

$$|u(a) - u(x_1)| + \sum_{k=1}^{n-1} |u(x_k + h_k) - u(x_{k+1})| + |u(x_n + h_n) - u(c)| < \varepsilon.$$

Allora, combinando quest'ultima con la (1.6), si ottiene

$$\begin{aligned} |u(a) - u(c)| &\leq |u(a) - u(x_1)| + \sum_{k=1}^n |u(x_k + h_k) - u(x_k)| + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} |u(x_k + h_k) - u(x_{k+1})| + |u(x_n + h_n) - u(c)| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon h_k}{c - a} \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue  $u(a) = u(c)$ .  $\square$

**Teorema 1.27** *Sia  $f \in L^1(a, b)$ . Allora la funzione integrale  $F$  è assolutamente continua.*

DIMOSTRAZIONE Osserviamo anzitutto che, poiché  $f$  è sommabile, allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono due funzioni sommabili  $h_\varepsilon, g_\varepsilon$  tali che

- $f = h_\varepsilon + g_\varepsilon$ ;
- $g_\varepsilon$  è limitata;
- $\int_a^b |h_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon/2$ .

Infatti, se  $f \geq 0$  allora, per definizione,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f_t(x) dx < +\infty, \quad \text{ove } f_t(x) := f(x) \wedge t.$$

Perciò, essendo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b (f(x) - f_t(x)) dx = 0,$$

si ha che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $t_\varepsilon > 0$  tale che

$$\int_a^b (f(x) - f_t(x)) dx < \varepsilon/2 \quad \forall t \geq t_\varepsilon.$$

Quindi, posto

$$g_\varepsilon(x) = f_{t_\varepsilon}(x), \quad h_\varepsilon(x) := f(x) - f_{t_\varepsilon}(x),$$

si ha che  $f = h_\varepsilon + g_\varepsilon$  e  $|g_\varepsilon| \leq t_\varepsilon$ . Se  $f$  ha segno non costante, basta ragionare separatamente sulla sua parte positiva e negativa.

Consideriamo ora la funzione integrale e sia  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1, \dots, N}$ , un'arbitraria famiglia finita di intervalli disgiunti di  $[a, b]$ . Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^N \left| \int_{a_k}^{b_k} f(t) dt \right| \leq \sum_{k=1}^N \left| \int_{a_k}^{b_k} [h_\varepsilon(t) + g_\varepsilon(t)] dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} |h_\varepsilon| dt + \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} |g_\varepsilon(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |h_\varepsilon| dt + t_\varepsilon \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + t_\varepsilon \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + t_\varepsilon \delta. \end{aligned}$$

La tesi segue prendendo  $\delta = \varepsilon/2t_\varepsilon$ .  $\square$

**Esercizio 1.28** *Esistono funzioni AC che non sono hölderiane?*

**Teorema 1.29 (Formula fondamentale del calcolo integrale)** *Sia  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  assolutamente continua. Allora  $u' \in L^1(a, b)$  e sussiste la formula fondamentale del calcolo integrale*

$$u(x) = \int_a^x u'(t) dt + u(a) \quad \forall x \in [a, b].$$

**DIMOSTRAZIONE** Dato che  $u$  è BV e quindi è differenza di funzioni non decrescenti, possiamo supporre che  $u$  sia non decrescente. Per il teorema di Lebesgue sulla derivazione delle funzioni monotone,  $u$  è derivabile quasi ovunque con  $0 \leq u' \in L^1(a, b)$ .

Sia ora

$$v(x) := \int_a^x u'(t) dt.$$

In quanto funzione integrale di una funzione  $L^1$ , per il Teorema 1.27, anche  $v$  è assolutamente continua e quindi lo è anche  $u - v$ . Per il Teorema 1.19 inoltre,  $v' = u'$  quasi ovunque. Dunque

$$(u - v)' = 0 \text{ quasi ovunque}$$

Per il Teorema 1.26 esiste una costante  $C$  tale che  $u - v = C$ , cioè  $u(x) - v(x) = u(a) - v(a)$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Allora per ogni  $x \in [a, b]$  si ha

$$u(x) = u(x) - v(x) + v(x) = u(a) - v(a) + \int_a^x u'(t) dt$$

e la tesi, cioè la formula fondamentale del calcolo integrale, segue dal fatto che  $v(a) = 0$ .  $\square$

**Osservazione 1.30** Dalla formula fondamentale del calcolo segue che su  $u \in AC$  allora  $Du = u' \in L^1(a, b)$  (vedi Osservazione 1.20) cioè  $AC(a, b) \subseteq W^{1,1}(a, b)$ . Il viceversa l'abbiamo provato l'anno scorso. Abbiamo infatti dimostrato che sussiste la seguente immersione (non compatta)

$$W^{1,1}(a, b) \rightarrow C([a, b])$$

nel senso che per ogni  $u \in W^{1,1}(a, b)$  esiste una funzione (unica)  $\tilde{u} \in C([a, b])$  tale che  $\tilde{u} = u$  q.o. su  $(a, b)$ . Vale inoltre la formula fondamentale del calcolo integrale

$$\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y D\tilde{u}(t) dt.$$

Da quest'ultima, poiché  $\tilde{u} \in W^{1,1}$ , allora  $D\tilde{u} \in L^1$  e quindi  $D\tilde{u} = \tilde{u}'$  e quindi  $\tilde{u} \in AC$  perchè integrale di una funzione  $L^1$ . In effetti quindi l'immagine di  $W^{1,1}$  tramite l'immersione è  $AC(a, b)$  (e non tutto lo spazio delle funzioni uniformemente continue). Le precedenti considerazioni permettono di identificare lo spazio di Sobolev  $W^{1,1}(a, b)$  con lo spazio delle funzioni assolutamente continua (nel caso in cui  $(a, b)$  è un intervallo limitato).

## 1.6 Teorema di Tonelli sulla lunghezza delle curve

**Teorema 1.31 (Tonelli)** *Data una curva (continua) rettificabile*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

e detta  $\ell$  la sua lunghezza, risulta

1.  $\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \leq \ell;$

2.  $\ell = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$  se e solo se  $x(t)$  e  $y(t)$  sono AC.

## Bibliografia

- [1] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, Berlin, 1969.
- [2] H.L. Royden, *Real analysis*, MacMillian Publishing co., New York, 1963.