Facoltà di Scienze M.F.N.

Corso di Laurea in Tecnologie Web e Multimediali
A.A. 2008-2009

Prova di Analisi Matematica del 15/02/2010

Voto

Istruzioni: scrivere la risposta nel riquadro a fianco dell'esercizio ed allegare lo svolgimento completo. Apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato.

Cognome	Nome
no. fogli (compreso questo)	N. Matricola

1. Data la funzione

$$f(x) = \log\big(\frac{x+2}{x^2}\big)$$

1. determinare il dominio;
2. calcolare i limiti agli estremi degli intervalli di cui è costituito il dominio;
3. determinare in quali intervalli la funzione è crescente e in quali decrescente;
4. determinare in quali intervalli la funzione è concava e in quali convessa;
5. determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(2, f(2))$;
6. disegnare un grafico approssimativo di f e della retta tangente precedentemente individuata.

1. dominio: $]-2,+\infty[\setminus\{0\}$
2. i limiti sono:

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = -\frac{x+4}{x(x+2)}$$

3. intervalli di crescenza: $]-2,0[$

   intervalli di decrescenza: $]0.+\infty[$
4. intervalli di concavità: $]-2,-2(2-\sqrt{2}]$

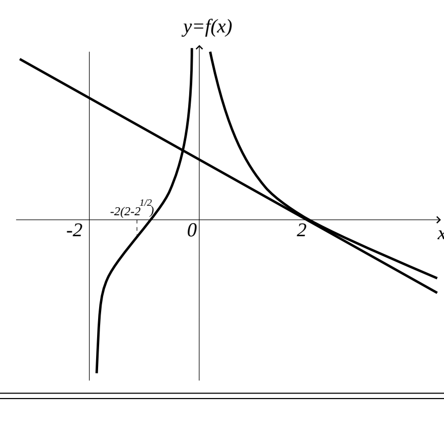
   intervalli di convessità:

$$[-2(2-\sqrt{2},0[\text{ e }]0,+\infty[$$

5. retta tangente:

$$y = -\frac{3}{4}(x-2)$$

6. grafico:



<table>
<tr><td>

2. Data la successione

$$a_n = \log\left(\frac{n+2}{n^2}\right), \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

1. dire se è limitata;
2. calcolare gli estremi superiore e inferiore e stabilire se sono rispettivamente massimo e minimo.

</td><td>

1. no
2. $$\max a_n = a_1 = \log 3$$ $$\inf a_n = -\infty$$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

3. Determinare eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione

$$f(x,y) = 3(x-5)^2 + 5(y+3)^2$$

</td><td>

punti stazionari: $(5,-3)$

punti di max locale: nessuno

punti di min locale: $(5,-3)$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

4. Studiare il carattere delle serie numeriche

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n!)}{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1/n)}{n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\arctan\sqrt{n})^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\frac{1}{n}$

</td><td>

1. converge
2. converge
3. converge
4. converge

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

5. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y-t}{3} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

1. dire se la funzione $y(t) = t/2 + 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ è una soluzione del problema;
2. determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia già la funzione di cui al punto precedente, ed eseguire la verifica;
3. dire se possono esistere altre soluzioni oltre a quella trovata, motivando la risposta.

</td><td>

1. no
2. $y(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}t}$
3. no, perché l'equazione è lineare

</td></tr>
</table>