Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Anno accademico 2010-2011

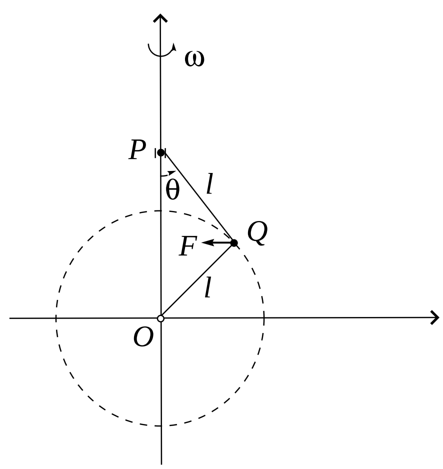
Meccanica Razionale

prova parziale del 22/02/2011

Istruzioni: Scrivere il nome su ogni foglio e indicare sul primo il numero totale di fogli che compongono l'elaborato. Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti.

Cognome	Nome
no. fogli (compreso questo)	N. Matricola

1 Si consideri un sistema materiale rigido costituito da due punti P e Q di ugual massa m vincolati a mantenersi a distanza fissa $\ell > 0$ e soggetti al proprio peso. Il punto P è vincolato a scorrere senza attrito lungo un asse verticale mentre Q appartiene ad un cerchio liscio di raggio ℓ disposto in un piano verticale che ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale. Determinare l'intensità da assegnare alla forza F come in figura per garantire che il sistema sia in equilibrio con un assegnato angolo $\vartheta \in (0, \pi/2)$.



Svolgimento. Indichiamo con x_1 l'asse orizzontale, con x_3 quello verticale e con x_2 il rimanente a formare una terna cartesiana ortogonale destra.

Le velocità virtuali di P e Q sono velocità rigide nel piano Ox_1x_3 e quindi del tipo

$$w_P = \tilde{\omega} \times (P - C), \quad w_Q = \tilde{\omega} \times (Q - C).$$

dove C indica il centro istantaneo di rotazione del moto del sistema nel piano verticale. Siccome $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_2\, \mathrm{e}_2$, $P - C = -2\ell \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{e}_1$ e $Q - C = -\ell \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{e}_1 - \ell\cos\vartheta\, \mathrm{e}_3$ allora

$$w_P = 2\ell\tilde{\omega}_2 \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{e}_3, \quad w_Q = -\ell\tilde{\omega}_2\cos\vartheta\, \mathrm{e}_1 + \ell\tilde{\omega}_2 \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{e}_3, \qquad \tilde{\omega}_2 \in \mathbb{R}.$$

Si ha poi

$$f_P^{(e)} = -mg\, \mathrm{e}_3, \quad f_Q^{(e)} = -mg\, \mathrm{e}_3 - |F|\, \mathrm{e}_1\,.$$

Secondo il principio di d'Alembert sono di equilibrio le posizioni θ che soddisfano, per $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, le equazioni

$$\begin{array}{l} f_P^{(e)} \cdot w_P + f_P^{(i)} \cdot w_P + \phi_P^{(e)} \cdot w_P + \phi_P^{(i)} \cdot w_P - \dot{p}_P \cdot w_P = 0, \\ f_Q^{(e)} \cdot w_Q + f_Q^{(i)} \cdot w_Q + \phi_Q^{(e)} \cdot w_Q + \phi_Q^{(i)} \cdot w_Q - \dot{p}_Q \cdot w_Q = 0. \end{array}$$

Osservato che, siccome i vincoli sono lisci e l'accelerazione di P è diretta lungo l'asse verticale, si ha $\phi_P^{(e)} \cdot w_P = \phi_Q^{(e)} \cdot w_Q = \dot{p}_P \cdot w_P = 0$, allora le precedenti equivalgono alle più semplici

$$\begin{array}{l} f_P^{(e)} \cdot w_P + f_P^{(i)} \cdot w_P + \phi_P^{(i)} \cdot w_P = 0, \\ f_Q^{(e)} \cdot w_Q + f_Q^{(i)} \cdot w_Q + \phi_Q^{(i)} \cdot w_Q - \dot{p}_Q \cdot w_Q = 0. \end{array}$$

Osservato poi che la potenza totale delle forze interne (attive e vincolari) è nulla per l'assioma delle forze interne e per il fatto che il sistema è rigido, allora conviene sommare le due equazioni che esprimono il principio di d'Alembert ottenendo

$$f_P^{(e)} \cdot w_P + f_Q^{(e)} \cdot w_Q - \dot{p}_Q \cdot w_Q = 0.$$

Per calcolare $\dot{p}_Q = m\ddot{x}(Q)$ osserviamo che, usando il fatto che $\omega = \omega_3\, \mathrm{e}_3$ e

$$\dot{\mathrm{e}}_1 = \omega \times \mathrm{e}_1 = \omega_3\, \mathrm{e}_2, \quad \dot{\mathrm{e}}_2 = \omega \times \mathrm{e}_2 = -\omega_3\, \mathrm{e}_1, \quad \dot{\mathrm{e}}_3 = 0$$

si ha

$$\begin{array}{l} x(Q) = \ell \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{e}_1 + \ell\cos\vartheta\, \mathrm{e}_3, \\ \dot{x}(Q) = \ell\cos\vartheta\dot{\vartheta}\, \mathrm{e}_1 + \ell \operatorname{sen}\vartheta|\omega|\, \mathrm{e}_2 - \ell \operatorname{sen}\vartheta\dot{\vartheta}\, \mathrm{e}_3 \\ \ddot{x}(Q) = \ell(-\operatorname{sen}\vartheta\dot{\vartheta}^2 + \cos\vartheta\ddot{\vartheta} - \operatorname{sen}\vartheta\omega_3^2)\, \mathrm{e}_1 + 2\ell\cos\vartheta\dot{\vartheta}\omega_3\, \mathrm{e}_2 - \ell(\cos\vartheta\dot{\vartheta}^2 + \operatorname{sen}\vartheta\ddot{\vartheta})\, \mathrm{e}_3, \\ \ddot{x}(Q)_{|\dot{\vartheta}=\ddot{\vartheta}=0} = -\ell \operatorname{sen}\vartheta\omega_3^2\, \mathrm{e}_1\,. \end{array}$$

Sostituendo si ottiene

$$-3mg \operatorname{sen}\vartheta + |F|\cos\vartheta - m\ell\omega_3^2 \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta = 0$$

da cui

$$|F| = 3mg\tan\vartheta + m\ell\omega_3^2 \operatorname{sen}\vartheta.$$

2 Rispondere al maggior numero possibile tra le seguenti richieste:

1. dare la definizione di movimento di un sistema materiale;
2. enunciare il teorema del Mozzi;
3. enunciare l'assioma delle forze interne;

4. enunciare il principio di azione e reazione;
5. dare la definizione di riferimento inerziale;
6. enunciare il principio d'inerzia;
7. enunciare il principio delle potenza virtuali di d'Alembert;
8. dare un esempio di sistema staticamente indeterminato;
9. dare la definizione di vincolo non dissipativo;
10. enunciare il principio delle velocità virtuali (relazione simbolica della statica).