Università degli Studi di Udine

Dispense del corso di
ANALISI MATEMATICA 7

tenuto presso la facoltà di Scienze

corso di Laurea in Matematica

Lorenzo Freddi

Anno Accademico 2009-2010

Capitolo 1

Compattezza, semicontinuità e problemi di minimo

Il principale riferimento bibliografico per questa lezione è il testo di Checcucci, Tognoli, Vesentini [3].

Assiomi di numerabilità

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Dato un punto $x \in X$ denoteremo con $\mathscr{U}(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di X.

Definizione 1.1 (Primo assioma di numerabilità (N_1)) *Si dice che X soddisfa al* primo assioma di numerabilità *se ogni punto di x ammette un* sistema fondamentale di intorni numerabile *(cioè una famiglia numerabile di intorni di x tale che ogni intorno di x contiene un intorno della famiglia).*

Definizione 1.2 (Secondo assioma di numerabilità (N_2)) *Si dice che X soddisfa al* secondo assioma di numerabilità*, o che è a* base numerabile*, se esiste una base di aperti numerabile per la topologia di X (cioè esiste una famiglia numerabile di aperti tale che ogni altro aperto è unione di aperti della famiglia).*

Si potrebbe dimostrare che $N_2 \Rightarrow N_1$ come conseguenza della proposizione seguente (cfr. Proposizione 5.8, Capitolo primo, di [3]).

Proposizione 1.3 *Una famiglia $\mathscr{B}$ di aperti di X è una base di X se, e solo se, per ogni $x \in X$ la famiglia*

$$\{B_x \in \mathscr{B} \ : \ x \in B_x\}$$

è un sistema fondamentale di intorni di x.

Osservazione 1.4 È facile vedere che gli spazi metrici soddisfano il primo assioma di numerabilità. In genere uno spazio metrico non soddisfa il secondo assioma di numerabilità (esempio $\mathbb{R}$ con la topologia discreta, indotta dalla metrica banale) a meno che, come dimostreremo, non si supponga che sia *separabile* cioè che contenga un sottoinsieme numerabile denso. È questo il caso degli spazi metrici compatti che vedremo nella prossima sezione. In ogni caso, gli spazi metrici separabili soddisfano entrambi gli assiomi di numerabilità.

Definizione 1.5 *Uno spazio topologico X si dice* separabile *se X contiene un sottoinsieme D numerabile denso (i.e. $\overline{D} = X$.*

Esempio 1.6 Sono spazi topologici separabili: $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea ($D = \mathbb{Q}$); i prodotti topologici, al più numerabili, di spazi separabili.

Proposizione 1.7 *Se X è uno spazio topologico a base numerabile allora X è separabile.*

Nella dimostrazione utilizzeremo il seguente lemma la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio (cfr. [3], Proposizione 6.10).

Lemma 1.8 *D è denso in X se, e solo se, per ogni aperto non vuoto A di X, $A \cap D \neq \varnothing$.*

Dimostrazione (della proposizione) Sia $\mathscr{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerabile di aperti di X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in B_n$. Per il lemma si ha che $D = \cup_{u\in\mathbb{N}}\{x_n\}$ è denso in X. □

Proposizione 1.9 *Se X è metrico e separabile allora X è N_2.*

Dimostrazione Sia d la metrica su X e sia $D = \cup_{u\in\mathbb{N}}\{x_n\}$ denso in X. Sia $B(x_n, r)$ la palla aperta di centro x_n e raggio $r > 0$. Dimostriamo che la famiglia

$$\mathscr{B} = \{B(x_n, q) \ : \ n \in \mathbb{N},\, q \in \mathbb{Q},\, q > 0\}$$

è una base di aperti di X.

Sia A aperto di X e $x \in A$. Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Siccome D è denso in X, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in B(x, \varepsilon/4)$. Sia $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$, tale che

$$\frac{\varepsilon}{4} < q < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Basta allora dimostrare che

$$x \in B(x_n, q) \subseteq B(x, \varepsilon).$$

Si ha infatti

$$d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{4} < q,$$

quindi $x \in B(x_n, q)$. Inoltre, dato $y \in B(x_n, q)$ si ha

$$d(y, x) \le d(y, x_n) + d(x_n, x) < q + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{3}{4}\varepsilon$$

e quindi $y \in B(x, \varepsilon)$. □

Dalle proposizioni 1.7 e 1.9 si ottiene il seguente corollario.

Corollario 1.10 *Sia X uno spazio metrico.*
X è separabile se e solo se è a base numerabile.

Compattezza

Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ (anche eventualmente $Y = X$). Una famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi di X si dice un *ricoprimento* di Y se

$$\bigcup_{i\in I} A_i \supseteq Y.$$

Se ciascuno degli A_i è aperto si parla di *ricoprimento aperto*.

Definizione 1.11 *Y si dice* compatto *se ogni ricoprimento aperto $\{A_i\}_{i\in I}$ di Y ammette un sottoricoprimento finito, cioè esiste un sottoinsieme finito di indici $J \subset I$ tale che $\cup_{i\in J} A_i \supseteq Y$.*

Osservazione 1.12 Se Y è compatto in X rispetto ad una topologia τ allora resta compatto anche in ogni topologia più debole (cioè meno fine). Non vale il viceversa.

Definizione 1.13 *Y si dice* sequenzialmente compatto, o compatto per successioni, *se da ogni successione di elementi di Y è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in Y.*

Tra compattezza e compattezza sequenziale non vale, in generale, alcuna delle due implicazioni. Tuttavia, come vedremo, le due nozioni coincidono negli spazi metrici.

Definizione 1.14 *Un sottoinsieme Y di uno spazio metrico X si dice* limitato *se esiste una palla che lo contiene.*

Definizione 1.15 *Un sottoinsieme Y di uno spazio metrico X si dice* totalmente limitato *se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito (detto una ε-*rete finita*) $\{x_1, ..., x_{n(\varepsilon)}\}$ di punti di X (non necessariamente di Y) tali che*

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} B(x_i, \varepsilon).$$

Esempio 1.16 *Ogni sottoinsieme B di $\mathbb{R}^n$ limitato è totalmente limitato.* Infatti esiste un quadrato Q contenente B che può essere suddiviso in un numero finito di quadratini di diametro $d < 2\varepsilon$, ovvero di lato $\ell = \frac{d}{\sqrt{n}} < \frac{2\varepsilon}{\sqrt{n}}$. L'insieme dei vertici dei quadratini è una ε-rete finita di B.

Esempio 1.17

$$\ell^2 = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \;:\; \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty\}$$

Con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare di serie convergenti, ℓ^2 è uno spazio vettoriale e l'applicazione bilineare

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

è un prodotto scalare, da cui si deduce la norma[1]

$$\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2,$$

La sfera unitaria chiusa, pur essendo limitata, non è totalmente limitata. Infatti, detto $\mathrm{e}_i = (0, ..., 1, ..., 0, ...)$ con l'1 al posto i-esimo, si ha $\|e_i\| = 1$ e

$$d(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = \|\, \mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j \,\| = (1+1)^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Scelto ad esempio $\varepsilon = 1/2$, se esistessero x_1,..., x_n in ℓ^2 tali che

$$\{e_i\} \subseteq B(x_1, 1/2) \cup ... \cup B(x_n, 1/2)$$

siccome le palle sono in numero finito una di esse dovrebbe contenere almeno due elementi distinti della famiglia $\{e_i\}$ che quindi avrebbero una distanza inferiore al diametro della palla, cioè 1.

[1]Rispetto a questa norma ℓ^2 è completo e quindi è uno spazio di Hilbert.

Esercizio 1.18 *Il cosiddetto* parallelepipedo fondamentale *o* mattone hilbertiano

$$\Pi := \{x \in \ell^2 \ : \ x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \ : \ |x_n| \leq \frac{1}{2^n}\}$$

è totalmente limitato.

Dato $\varepsilon > 0$ sia n tale che $1/2^n < \varepsilon/2$. Facciamo corrispondere a ciascun punto $x = (x_n)$ di Π il punto

$$x^* = (x_1, ..., x_n, 0, 0, ...)$$

che pure appartiene a Π. Allora

$$\|x - x^*\| = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4^k}} < \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

L'insieme Π^* dei punti della forma x^* è totalmente limitato, come sottoinsieme limitato dello spazio euclideo n-dimensionale e quindi ammette un $\varepsilon/2$-rete finita che risulta anche una ε-rete di Π.

Teorema 1.19 *Sia (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. *K è sequenzialmente compatto;*
2. *K è compatto;*
3. *K è completo e totalmente limitato.*

Nella dimostrazione faremo uso dei seguenti lemmi.

Lemma 1.20 (Teorema di Lindelöff) *Sia X uno spazio topologico a base numerabile. Per ogni famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ di aperti di X esiste una sotto-famiglia numerabile $\{A_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{i_n}$$

Dimostrazione Sia $\mathscr{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerabile di aperti di X. Indichiamo con $\mathscr{B}^0$ la sottofamiglia degli elementi di $\mathscr{B}$ che sono contenuti in qualche aperto A_i. Dunque, gli elementi di $\mathscr{B}^0$ sono gli aperti $B_n^0 \in \mathscr{B}$ tali che esiste $i_n \in I$ tale che

$$B_n^0 \subseteq A_{i_n}.$$

La famiglia $\{A_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è numerabile. Inoltre

$$\bigcup_{i\in I} A_i \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{i_n} \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Poiché $\mathscr{B}$ è una base e gli A_i sono aperti, per ogni $i \in I$ ed ogni $x \in A_i$ esiste $B_n \in \mathscr{B}$ tale che $x \in B_n \subseteq A_i$; inoltre quindi $B_n \in \mathscr{B}^0$. Ne consegue che

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^0$$

che, confrontata con la precedente, permette di concludere che

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{i_n}.$$

□

Lemma 1.21 *Uno spazio metrico X compatto per successioni è separabile.*

Dimostrazione Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathscr{D}^n$ la famiglia dei sottoinsiemi A di X tali che

$$d(x,y) \geq \frac{1}{n} \text{ per ogni } x, y \in A \text{ con } x \neq y. \tag{1.1}$$

Siccome X è compatto per successioni, allora ogni $A \in \mathscr{D}^n$ è finito. Infatti, se A fosse infinito, conterrebbe una successione di elementi tutti distinti da cui, per la (1.1), non sarebbe possibile estrarre alcuna sottosuccessione convergente.

Osserviamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathscr{D}^n \neq \varnothing$; inoltre $\mathscr{D}^n \subset \mathscr{D}^{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostriamo che esiste $A^n \in \mathscr{D}^n$ tale che

$$A^n \cup \{x\} \in \mathscr{D}^n \Rightarrow x \in A^n. \tag{1.2}$$

Sia $A \in \mathscr{D}^n$. Se A non ha la proprietà (1.2) allora esiste $x_1 \notin A$ tale che $A_1 := A \cup \{x_1\} \in \mathscr{D}^n$. Se neppure A_1 ha questa proprietà allora esiste $x_2 \notin A_1$ tale che $A_2 := A_1 \cup \{x_2\} \in \mathscr{D}^n$. Se dopo un numero finito n di passi non si perviene ad un A^n con la proprietà (1.2), allora la successione di elementi di $\mathscr{D}^n$

$$A_m := A_{m-1} \cup \{x_m\} \in \mathscr{D}^n, \quad x_m \notin A_{m-1}$$

avrebbe la proprietà seguente: $\cup_{m \in \mathbb{N}} A_m \in \mathscr{D}^n$ ed è infinito.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia dunque $A^n \in \mathscr{D}^n$ con la proprietà (1.2). Il sottoinsieme

$$D = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m$$

è numerabile. Dimostriamo che è denso in X. Sia $x \in X$. Se per assurdo $x \notin \overline{D}$, allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $d(x,y) \geq 1/m$ per ogni $y \in D$. Ne segue che $A^m \cup \{x\} \in \mathscr{D}^m$ e quindi $x \in A^m \subset D$, contro l'ipotesi. □

Dimostrazione (del Teorema 1.19) (1⇒2). Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimemto aperto di K. Siccome, per il precedente lemma, X è N_2, per il teorema di Lindelöff da questo ricoprimento si può estrarre un sotto-ricoprimento numerabile (i.e. $I = \mathbb{N}$). Supponiamo che per ogni $n \in N$ si abbia

$$K \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

cioè esista $x_n \in K$, $x_n \in (\cup_{i=1}^n A_i)'$. Poiché K è compatto per successioni, esiste $x \in K$ ed una sottosuccessione

$$x_{n_j} \to x \in K.$$

Per definizione di limite (per assurdo) risulta

$$x \in \big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big)' \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque risulta

$$x \notin \bigcup A_i$$

e quindi $x \notin K$. CD

(2⇒3). Sia K compatto. Dimostriamo che è totalmente limitato. Sia $\varepsilon > 0$. La famiglia di palle

$$\{B(x,\varepsilon)\}_{x \in K}$$

è un ricoprimento aperto di K. Poiché K è compatto esistono $x_1, ..., x_n \in K$ tali che

$$K \subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup B(x_n, \varepsilon)$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε, K è totalmente limitato.

Proviamo la completezza. Sia (x_n) successione di Cauchy in K. Cominciamo col dimostrare che (x_n) ammette una sottosuccessione convergente ad un punto x di K. Ciò è vero se (x_n) ha un numero finito di valori. Supponiamo quindi che l'insieme S dei punti (x_n) sia infinito e dimostriamo che

- esiste $x \in K$ ogni intorno del quale contiene infiniti punti di S.

Se per assurdo ciò non fosse vero, esisterebbe un ricoprimento $\{U_i\}$ di K tale che $U_i \cap S$ è finito per ogni i. Da questo ricoprimenyto non sarebbe allora possinile estrarre un sotto-ricoprimento finito, contro il fatto che K è compatto.

Sia (U_n) un sistema fondamentale di intorni di x tale che $U_n \supset U_{n+1}$ per ogni n. In ogni U_n cadono infiniti punti di S. Sia $x_{i_1} \in S \cap U_1$. Esiste $i_2 > i_1$ tale che $x_{i_2} \in S \cap U_2$. Per induzione esiste $i_{n+1} > i_n$ tale che $x_{i_n} \in S \cap U_n$. Allora x_{i_n} è una sottosuccessione di (x_n) che converge ad x.

Rimane da dimostrare che allora $x_n \to x$.....

(3⇒1).

Sia (y_n) una successione di elementi di K. Poiché K è totalmente limitato, per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ ($\varepsilon = 1/\nu$) esistono x_1^ν,..., $x_{n(\nu)}^\nu$ in X tali che

$$K \subseteq B(x_1^\nu, 1/\nu) \cup ... \cup B(x_{n(\nu)}^\nu, 1/\nu)$$

Di conseguenza, per $\nu = 1$, almeno una tra le palle $B(x_1^1, 1)$,..., $B(x_{n(1)}^1, 1)$ contiene una sottosuccessione $(y_n^{(1)})$ di (y_n).

Analogamente, per $\nu = 2$, almeno una tra le palle $B(x_1^2, 1/2)$,..., $B(x_{n(2)}^2, 1/2)$ contiene una sottosuccessione $(y_n^{(2)})$ di $(y_n^{(1)})$.

Per induzione su ν si ottiene una successione di sottosuccessioni $(y_n^{(\nu)})$ di (y_n) tali che

$$(y_n^{(1)}) \supseteq (y_n^{(2)}) \supseteq ... \supseteq (y_n^{(\nu)}) \supseteq ...$$

Poiché $(y_n^{(\nu)})$ è contenuta in una palla di diametro $2/\nu$, allora, per ogni $\mu > \nu$ si ha

$$d(y_n^{(\nu)}, y_m^{(\mu)})) < \frac{2}{\nu} \quad \text{per ogni } m, n \in \mathbb{N}.$$

Considerata allora la successione (y_n') di (y_n) definita da

$$y_n' = y_n^{(n)}$$

si ha

$$d(y_n', y_m') = d(y_n^{(n)}, y_m^{(m)})) < \frac{2}{n} \quad \text{per ogni } m \geq n \in \mathbb{N}.$$

cioè (y_n') è una successione di Cauchy in K. Per la completezza di K allora (y_n') è convergente in K. Dunque (y_n) possiede una sottosuccessione convergente in K e quindi K è sequenzialmente compatto. □

Osservazione 1.22 Se K è un sottoinsieme compatto di uno spazio topologico X allora K è uno spazio topologico compatto per la topologia indotta da X.

Ne consegue che ogni proprietà stabilita per gli spazi topologici compatti si può applicare anche a tutti i sottoinsiemi compatti riguardandoli come spazi topologici compatti con la topologia di sottospazio.

Proposizione 1.23 *I sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea sono tutti e soli quelli chiusi e limitati.*

Dimostrazione Segue immediatamente dal fatto che i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}^n$ sono totalmente limitati e che i sottoinsiemi chiusi sono completi (infatti i sottoinsiemi chiusi di uno spazio metrico completo sono completi). $\square$

È subito visto che la proprietà stabilita dalla Proposizione non è soddisfatta in tutti gli spazi topologici. Per esempio, in uno spazio X costituito da almeno due punti con la topologia banale un punto è un sottoinsieme compatto ma non chiuso (il complementare non è aperto). Negli spazi metrici le cose vanno un po' meglio, nel senso che vale una delle due implicazioni del teorema precedente. Precisamente:

Proposizione 1.24 *Sia X uno spazio metrico e $K \subseteq X$. K compatto $\Rightarrow$ K chiuso e limitato.*

È importante però rilevare che il viceversa in generale non è vero nemmeno negli spazi metrici dove i compatti sono caratterizzati dal fatto di essere *completi* e *totalmente limitati* che sono condizioni più forti della chiusura e della limitatezza. Ad esempio la sfera unitaria chiusa di ℓ^2 non è compatta pur essendo chiusa e limitata. Tuttavia, gli spazi metrici sono meglio degli altri almeno per il fatto che la compattezza è caratterizzabile sequenzialmente nello stesso modo di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1.25 *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico compatto è compatto.*

Dimostrazione Se lo spazio è metrico si può far seguire dalla precedente caratterizzazione. In generale, sia X compatto e C un sottoinsieme chiuso. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di aperti tali che

$$C \subseteq \cup_{i\in I} A_i.$$

Il complementare C' è aperto e si ha

$$X = C \cup C' \subseteq \big(\cup_{i\in I} A_i\big) \cup C'.$$

Poichè X è compatto esiste $J \subseteq I$ finito tale che

$$X \subseteq \big(\cup_{j\in J} A_j\big) \cup C'.$$

Ne segue che

$$C \subseteq \cup_{j\in J} A_j$$

e pertanto C è compatto. $\square$

Teorema di Ascoli-Arzelà

Teorema 1.26 *Sia K un sottonsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $S = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di funzioni $f_n : K \to \mathbb{C}$ tali che*

1. *S è* equicontinua *in ogni $x \in \mathbb{K}$, cioè*

$$\forall\, x \in K\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(x,\varepsilon) > 0 \;:\; y \in K,\, |y - x| < \delta \Rightarrow |f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon$$

2. *S è* equilimitata*, cioè*

$$\exists\, M > 0 \;:\; |f_n(x)| \le M \;\forall\, x \in K.$$

Allora da S è possibile estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente.

Dimostrazione Anzitutto,essendo K compatto si dimostra che è possibile scegliere δ indipendente da x e quindi in effetti la famiglia S è *uniformemente equicontinua*.

Sia $X = \big(C(K;\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty\big)$. È noto che X è uno spazio metrico completo. Indichiamo con $\mathcal{K}$ la chiusura di S in X. Si ha che $\mathcal{K}$ è completo perché sottospazio chiuso di uno spazio completo. Dimostriamo che è totalmente limitato.

Per la dimostrazione vedere [1], pagina 114.

La proprietà dell'intersezione finita

Definizione 1.27 *Si dice che una famiglia $\{B_i\}_{i\in I}$ ha la* proprietà dell'intersezione finita *se per ogni sottoinsieme finito J di I l'intersezione $\cap_{j\in J} B_j$ è non vuota.*

Esempio 1.28 Le famiglie $B_n =]0, 1/n[$ e $C_n = [0, 1/n]$ godono entrambe della proprietà dell'intersezione finita. La prima ha intersezione vuota, la seconda no.

Con la proprietà dell'intersezione finita si può dare la seguente caratterizzazione degli insiemi compatti.

Teorema 1.29 *Sia X uno spazio topologico. X è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi di X che abbia la proprietà dell'intersezione finita ha un'intersezione non vuota.*

Dimostrazione ($\Rightarrow$) Sia $\{C_i\}$ una famiglia di chiusi di X con la proprietà dell'intersezione finita e supponiamo per assurdo che

$$\cap_{i\in I} C_i = \varnothing.$$

Allora

$$X = \big(\cap_{i\in I} C_i\big)' = \cup_{i\in I} C_i'.$$

Poichè X è compatto allora esiste J finito tale che

$$X = \cup_{j\in J} C_J',$$

vale a dire

$$\cap_{j\in J} C_J = \varnothing$$

contro la proprietà dell'intersezione finita.

($\Leftarrow$) Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Allora, posto $C_i = A_i'$ per ogni $i \in I$, si ha che $\{C_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di chiusi tale che $\cap_{i\in I} C_i = (\cup_{i\in I} A_i)' = \varnothing$. Per ipotesi dunque la famiglia $\{C_i\}_{i\in I}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita. Ma allora esiste un sottoinsieme finito J di I tale che $\cap_{j\in J} C_j = \varnothing$ e quindi $\cup_{j\in J} A_j = (\cap_{j\in J} C_j)' = X$. Allora $\{A_j\}_{j\in J}$ è un sottoricoprimento finito e X risulta compatto per l'arbitrarietà del ricoprimento $\{A_i\}_{i\in I}$. □

Semicontinuità

Definiamo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. In $\overline{\mathbb{R}}$ considereremo sempre la topologia in cui gli intorni sono definiti come in $\mathbb{R}$ ed in più

- un intorno di $-\infty$ è qualunque sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ contenente un intervallo del tipo $[-\infty, a[$,
- un intorno di $+\infty$ è qualunque sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ contenente un intervallo del tipo $]b, +\infty]$.

Definizione 1.30 *Una funzione* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *si dice*

- *semicontinua inferiormente se* $f^{-1}(]c, +\infty]) = \{x \in X \;:\; f(x) > c\}$ *è aperto in* X *(o equivalentemente se l'insieme di sottolivello* $\{x \in X \;:\; f(x) \leq c\}$ *è chiuso) per ogni* $c \in \mathbb{R}$*;*
- *semicontinua superiormente se* $f^{-1}([-\infty, c[) = \{x \in X \;:\; f(x) < c\}$ *è aperto in* X *per ogni* $a \in \mathbb{R}$*.*

Esempio 1.31 Le funzioni caratteristiche di aperti sono semicontinue inferiormente, mentre le funzioni caratteristiche di chiusi sono semicontinue superiormente.

Esempio 1.32 Sia S un sottoinsieme di X. Si chiama *funzione indicatrice* di S la funzione

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in S \\ +\infty & \text{se } x \in X \setminus S \end{cases}$$

Le funzioni indicatrici di aperti sono semicontinue superiormente, mentre le funzioni indicatrici di chiusi sono semicontinue inferiormente.

Ricordiamo che una funzione è continua se le controimmagini degli aperti di $\overline{\mathbb{R}}$ sono aperti in X. Il seguente teorema è di agevole dimostrazione se si usa il fatto, non banale, che ogni aperto di $\overline{\mathbb{R}}$ si può scrivere come unione di intervalli aperti di $\overline{\mathbb{R}}$ (quindi compresi quelli del tipo $[-\infty, a[$ e $]b, +\infty]$), cioè gli intervalli aperti costituiscono una *base* per la topologia di $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione 1.33 f *è continua se e solo se è semicontinua superiormente e inferiormente.*

Dimostrazione La necessità è banale. Proviamo la sufficienza, cioè supponiamo che f sia semicontinua superiormente ed inferiormente e dimostriamo che è continua. Sia A un insieme aperto di $\overline{\mathbb{R}}$, allora

$$A = \cup_{\gamma \in I} J_\gamma$$

dove J_γ sono intervalli aperti del tipo $]\alpha_\gamma, \beta_\gamma[$, $]\alpha_\gamma, +\infty]$ o $[-\infty, \beta_\gamma[$. Dimostriamo che $f^{-1}(A)$ è aperto. Poiché

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\big(\cup_{\gamma \in I} J_\gamma\big) = \cup_{\gamma \in I} f^{-1}\big(J_\gamma\big),$$

e, poiché in conseguenzea delle ipotesi di semicontinuità ciascuno degli insiemi $f^{-1}\big(J_\gamma\big)$ è aperto (in particolare si usa il fatto che $f^{-1}(]\alpha, \beta[) = f^{-1}(]\alpha, +\infty][) \cap f^{-1}([-\infty, \beta[))$, allora $f^{-1}(A)$ è aperto perché è unione di insiemi aperti. $\square$

Dal momento che, fissato c, $\{x \in X \;:\; f(x) > c\}$ è aperto in X se e solo se per ogni $x \in X$ tale che $f(x) > c$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) > c$ per ogni $y \in U$, risulta ben posta la seguente definizione.

Definizione 1.34 *Una funzione* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *si dice* semicontinua inferiormente nel punto x *se e solo se per ogni* $c \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) > c$ *esiste un intorno* U *di* x *tale che* $f(y) > c$ *per ogni* $y \in U$*. Diremo poi che* f *è s.c.i. in un insieme se lo è in tutti i punti dell'insieme.*

Esercizio 1.35 Scrivere, in analogia con la precedente, la definizione di funzione semicontinua superiormente in un punto x e in un insieme di punti.

Chiaramente, f è s.c.i. ai sensi della Definizione 1.30 se e solo se f è s.c.i. in X.

Teorema 1.36 *Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua inferiormente nel punto x se e solo se*

$$f(x) \leq \sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y). \tag{1.3}$$

Dimostrazione Supponiamo che f sia semicontinua inferiormente. Preso un arbitrario $\varepsilon > 0$ sia $c = f(x) - \varepsilon$. Allora, per la definizione 1.34, esiste un intorno U di x tale che

$$\inf_{y \in U} f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

e si ha quindi, a maggior ragione

$$\sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

e la disuguaglianza cercata si ottiene ora passando al limite per $\varepsilon \to 0$. Viceversa, supponiamo che f soddisfi la condizione

$$f(x) \leq \sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y),$$

e sia $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > c$. Allora

$$c < \sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y)$$

e pertanto esiste $U \in \mathscr{U}(x)$ tale che $\inf_{y \in U} f(y) > c$, da cui $f(y) > c$ per ogni $y \in U$, e quindi per la definizione 1.34 f è semicontinua inferiormente in x. $\square$

Osservazione 1.37 Osservato che

$$\sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y) \leq \sup_{U \in \mathscr{U}(x)} f(x) = f(x),$$

allora si ha sempre che

$$f(x) \geq \sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y),$$

e quindi la disuguaglianza in (1.3) è in realtà un'uguaglianza.

Osservazione 1.38 *Ricordando che, per definizione,*

$$\liminf_{y \to x} f(y) = \sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U \setminus \{x\}} f(y),$$

osserviamo che si ha

$$\sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y) = f(x) \wedge \liminf_{y \to x} f(y) \leq \liminf_{y \to x} f(y).$$

Semicontinuità sequenziale

Definizione 1.39 *Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* sequenzialmente semicontinua inferiormente *in un punto $x \in X$ se*[2]

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n) \quad \textit{per ogni } x_n \to x.$$

[2]Ricordiamo che $\liminf_{n \to \infty} f(x_n) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f(x_k) = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} f(x_k)$.

È facile verificare, utilizzando il Teorema 1.36 che la semicontinuità implica la semicontinuità sequenziale. Il viceversa, che non vale in generale (vedi Dal Maso [4], Example 1.6), è però vero negli spazi topologici che soddisfano il primo assioma di numerabilità e quindi negli spazi metrici. Vale cioè il seguente teorema.

Teorema 1.40 *Sia X uno spazio topologico soddisfacente al primo assioma di numerabilità. Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua inferiormente in $x_0 \in X$ se e solo se f è sequenzialmente semicontinua inferiormente in $x_0 \in X$.*

Dimostrazione Dimostriamo la necessità lasciando la sufficienza, che come già detto vale anche se X non soddisfa al primo assioma di numerabilità, per esercizio. Supponiamo dunque che f sia sequenzialmente semicontinua inferiormente in $x_0 \in X$ e supponiamo per assurdo che non sia semicontinua inferiormente, cioè che esista $c < f(x_0)$ tale che per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ esiste $y \in U$ tale che $f(y) \leq c$.

Sia (U_n) un sistema fondamentale numerabile di intorni di x_0 tale che $U_{n+1} \subseteq U_n$ per ogni $n \in N$. Per quanto osservato sopra, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in U_n$ tale che

$$f(y_n) \leq c.$$

Allora $y_n \to x_0$ in X e si ha

$$\liminf_{n\to\infty} f(y_n) \leq c < f(x_0),$$

contro la semicontinuità inferiore sequenziale. □

Le seguenti proprietà delle funzioni semicontinue inferiormente sono elementari e seguono direttamente dalle definizioni.

Proposizione 1.41 *Sia $\{f_i\}_{i\in I}$ una famiglia di funzioni s.c.i. (rispettivamente seq. s.c.i.) definite su X. Si ha che*

- *la funzione $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ è s.c.i. (rispettivamente seq. s.c.i.);*
- *se I è finito allora la funzione $g(x) = \inf_{i\in I} f_i(x)$ è s.c.i. (rispettivamente seq. s.c.i.).*

Proposizione 1.42 *Se f e g sono s.c.i. (rispettivamente seq. s.c.i.) e se $f + g$ è ben definita, allora $f + g$ è s.c.i. (rispettivamente seq. s.c.i.).*

Applicazioni a problemi di minimo

Teorema 1.43 (Weierstrass). *Sia X un spazio topologico, $K \subseteq X$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Assumiamo che*

1. *f sia semicontinua inferiormente su X;*
2. *K sia compatto e chiuso.*

Allora esiste il minimo di f su K.

Dimostrazione Se f è la costante $+\infty$ non c'è nulla da provare. Altrimenti si ha

$$\inf\{f(x) \; : \; x \in K\} = M < +\infty$$

Poiché f è s.c.i. allora per ogni t l'insieme

$$C_t := \{x \in K : \; f(x) \leq t\} = K \cap \{x \in X : \; f(x) \leq t\}$$

è un sottoinsieme chiuso di K (come intersezione di due chiusi; qui si usa l'ipotesi: K chiuso) e quindi è compatto; per $t > M$ è anche non vuoto. La famiglia di chiusi $\{C_t\}_{t>M}$ essendo monotona crescente rispetto all'inclusione, gode della proprietà dell'intersezione finita e quindi, siccome K è compatto, non può essere vuoto l'insieme

$$\bigcap_{t>M} \{x \in K : \ f(x) \leq t\} = \{x \in K \ : \ f(x) \leq M\}.$$

□

Teorema 1.44 (Weierstrass, versione sequenziale). *Sia X un spazio topologico, $K \subseteq X$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Assumiamo che*

1. *f sia sequenzialmente semicontinua inferiormente su X;*
2. *K sia sequenzialmente compatto.*

Allora esiste il minimo di f su K.

Dimostrazione Diamo la dimostrazione dapprima nel caso in cui X è uno spazio metrico così si possono usare le caratterizzazioni sequenziali della semicontinuità e della compattezza. Sia (x_n) una successione *minimizzante*, cioè una successione di punti di U tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_K f$$

(dimostrare per esercizio che una successione siffatta esiste sempre, usando le proprietà dell'estremo inferiore). Poichè K è compatto, esiste (x_{n_k}) tale che $x_{n_k} \to x \in K$, ma f è semicontinua inferiormente, quindi

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_K f.$$

da cui segue che x è un punto di minimo. □

Esempio 1.45 In ℓ^2 la funzione

$$f(x) = \|x\|^2 - 2\langle y, x\rangle$$

con $y \in \ell^2$ assegnato, è continua. Infatti, data $x_n \to x$ si dimostra dapprima che $\|x_n\|$ è limitata, aggiungendo e togliendo x. Poi si stima

$$\left|\|x_n\|^2 - \|x\|^2\right|$$

con Cauchy-Schwarz.

Capitolo 2

Approssimazioni regolari di funzioni L^p

Il teorema di Lusin (N.N. Luzin, 1883-1950) afferma che ogni funzione misurabile f definita su un insieme di misura finita coincide con una funzione continua ad eccezione di un sottoinsieme del proprio dominio di misura arbitrariamente piccola. Se su f si fanno ulteriori ipotesi, per esempio che la potenza p-esima sia sommabile (cioè che f appartenga allo spazio L^p), allora si riesce anche ad approssimare f con funzioni continue a supporto compatto dimostrando che queste ultime costituiscono un sottospazio denso di L^p ($1 \leq p < +\infty$).

2.1 Preliminari topologici

Proposizione 2.1 *Sia $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^N$ con $\cap_{\alpha \in I} K_\alpha = \varnothing$. Allora esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in I$ tali che $\cap_{j=1}^r K_{\alpha_j} = \varnothing$.*

Dimostrazione Sia $V_\alpha = K_\alpha^c$. Si osserva che

$$\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha^c = (\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha)^c = \mathbb{R}^N.$$

Sia $K_1 \in \{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Allora $K_1 \subset \cup_{\alpha \in I} V_\alpha$. Poiché K_1 è compatto, dal ricoprimento dei V_α si può estrarne uno finito tale che $K_1 \subset V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_m}$. Dimostriamo ora che

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_m} = \varnothing.$$

Supponiamo per assurdo

$$\exists\, p \in K_1 : p \in \bigcap_{j=1}^m K_{\alpha_j}.$$

Ma allora $p \notin (\cap_{j=1}^m K_{\alpha_j})^c$, cioè $p \notin \cup_{j=1}^m V_{\alpha_j}$, contro l'ipotesi fatta che $p \in K_1 \subset V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_m}$.

□

Proposizione 2.2 *Sia K un sottoinsieme compatto e U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ con $K \subset U$. Allora esiste un insieme aperto V tale che $K \subset V$ e $\overline{V} \subset U$.*

Dimostrazione Sia B una palla aperta di $\mathbb{R}^N$ tale che $K \subset B$. B esiste perché K è compatto, quindi limitato.

- 1^o caso: se $U = \mathbb{R}^N$ basta prendere $V = B$ per dimostrare la tesi.
- 2^o caso: se $U \neq \mathbb{R}^N$ allora esiste $p \in U^c$. Poichè $p \notin K$ e $\mathbb{R}^N$ è uno spazio di Hausdorff esiste un insieme aperto W_p tale che $K \subset W_p$ e $p \notin \overline{W}_p$. Consideriamo la famiglia di insiemi compatti
$$\{U^c \cap \overline{B} \cap \overline{W}_p\}_{p \in U^c}.$$
Per come sono stati definiti i W_p, questa famiglia ha intersezione vuota. Per la proposizione 2.1 esistono allora $p_1, \ldots, p_m \in U^c$ tali che
$$U^c \cap \overline{B} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \ldots \cap \overline{W}_{p_m} = \varnothing.$$
Definiamo
$$V = S \cap W_{p_1} \cap \ldots \cap W_{p_m}.$$
V gode delle proprietà indicate nella tesi. Infatti $K \subset V$ perché $K \subset B$ e $K \subset W_{p_1}, \ldots, K \subset W_{p_m}$. Inoltre
$$\overline{V} = \overline{B} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \ldots \cap \overline{W}_{p_m}$$
è compatto perché è chiuso e limitato. Infine $U^c \cap \overline{V} = \varnothing$, quindi $\overline{V} \subset U$.

□

2.2 Il lemma di Uryshon

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$. Indicheremo con
$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$$
la *funzione caratteristica* di Ω.

Ricordiamo che il , *supporto* di una funzione reale f definita su uno spazio topologico X è la chiusura dell'insieme su cui f non si annulla, cioè
$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$
$f \in C_c(X)$ se f è continua e il suo supporto è contenuto in un insieme compatto di X.

Lemma 2.3 (di Urysohn) *Siano K un sottoinsieme compatto e U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ con $K \subset U$. Allora esiste $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $f(x) = 1$ per ogni $x \in K$ e* $\text{supp}(f) \subset U$.

Dimostrazione In termini di funzioni caratteristiche il teorema afferma l'esistenza di una funzione continua f soddisfacente la diseguaglianza
$$\chi_K \leq f \leq \chi_U.$$
Consideriamo l'insieme numerabile $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_0 = 0, r_1 = 1, \ldots, r_m, \ldots\}$ disponendo i suoi elementi in successione. Proviamo che in corrispondenza di ciascun r_j possiamo costruire un insieme aperto V_{r_j} con le seguenti proprietà:

$$r_i < r_j \Rightarrow \overline{V}_{r_j} \subset V_{r_i}, \overline{V}_{r_0} \subset U, K \subset V_{r_j}. \tag{2.1}$$

Dimostriamolo per induzione. Nel caso $r_0 = 0, r_1 = 1$, quindi $r_0 < r_1$ applichiamo la proposizione 2.2: poiché $K \subset U$ esiste un insieme V_{r_0} aperto tale che $\overline{V}_{r_0}$ è un insieme compatto , $K \subset V_{r_0}$ e $\overline{V}_{r_0} \subset U$. Applicando di nuovo la proposizione 2.2 a $K \subset V_{r_0}$ si ha che esiste un insieme V_{r_1} aperto tale che $\overline{V}_{r_1}$ è un insieme compatto, $K \subset V_{r_1}$ e $\overline{V}_{r_1} \subset V_{r_0}$. Supponiamo ora di avere $V_{r_0}, \ldots, V_{r_m}$ tali che per ogni $i, j \leq m$

$$r_i < r_j \Rightarrow \overline{V}_{r_j} \subset V_{r_j}, \overline{V}_0 \subset U.$$

Consideriamo $r_{m+1} \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Esistono allora due indici i,j minori di m tali che $r_i < r_{m+1} < r_j$ dove r_j è il più piccolo dei maggioranti di r_{m+1} in $\{r_0, \ldots, r_m\}$ e r_i è il più grande dei minoranti di r_{m+1} in $\{r_0, \ldots, r_m\}$. Poiché se $r_i < r_j$ allora $\overline{V}_{r_j} \subset V_{r_i}$ e applicando ancora la proposizione 2.2 possiamo trovare un insieme aperto $V_{r_{m+1}}$ tale che:

$$\overline{V}_{r_j} \subset V_{r_{m+1}}, \overline{V}_{r_{m+1}} \subset V_{r_i}.$$

Gli insieme aperti $V_{r_0}, \ldots, V_{r_{m+1}}$ godono ancora delle proprietà (2.1) . Infatti

- $\forall\, r_i : r_i < r_{m+1}$ si ha $\overline{V}_{r_{m+1}} \subset V_{r_i}$, $V_{r_0} \subset U$, $K \subset V_{r_{m+1}}$
- $\forall\, r_j : r_{m+1} < r_j$ si ha $\overline{V}_{r_j} \subset V_{r_{m+1}}$, $V_{r_0} \subset U$, $K \subset V_{r_j}$

Per induzione su m si ottiene, allora, una collezione di insiemi aperti, uno per ogni $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ dotato delle proprietà (2.1). Poniamo per definizione

$$f_r(x) = \begin{cases} r & x \in V_r \\ 0 & x \notin V_r \end{cases}, \qquad g_s(x) = \begin{cases} 1 & x \in \overline{V}_s \\ s & x \notin \overline{V}_s \end{cases}.$$

Le f_r sono semicontinue inferiormente perché $f_r = r\chi_{V_r}$ e V_r è aperto. Le g_s sono semicontinue superiormente perché $g_s = (1-s)\chi_{\overline{V}_s} + s$ e $\overline{V}_s$ è compatto. Poniamo per definizione

$$f = \sup_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} f_r, \qquad g = \inf_{s \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} g_s.$$

È ovvio che $0 \leq f \leq 1$ perchè f é il sup di una successione di funzioni non negative a valori minori o uguali ad 1. Proviamo che $f(x) = 1$ per ogni $x \in K$. Sia $x_0 \in K$. Allora $x_0 \in V_1$. Quindi

$$1 \geq f(x) = \sup_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} f_r(x_0) \geq f_1(x_0) = 1.$$

Verifichiamo che $f(x) = 0$ se $x \notin U$. Sia dunque $x_0 \notin U$. Allora $x_0 \notin V_0$ e $0 < r$ implica $\overline{V}_r \subset V_0$. Ma allora

$$f_r(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \sup_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} f_r(x_0) = 0.$$

Proviamo che

$$f(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

f risulta così semicontinua inferiormente e superiormente, quindi continua. Vediamo sotto quali condizioni può verificarsi

$$f_r(x_0) > g_s(x_0).$$

Si osserva che essa vale solo se $r > s$. Essendo $g_s \geq 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^N$, dobbiamo avere $f_r(x_0) = r$, cioé $x_0 \in V_r$. D'altronde $f_r(x_0) \leq 1$, allora $g_s(x_0) < 1$, cioè $x_0 \notin \overline{V}_s$, ma per costruzione risulta $\overline{V}_r \subset V_s$. Pertanto dovrà necessariamente accadere che

$$f_r(x) \leq g_s(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \forall\, r, s \in [0,1] \cap \mathbb{Q}.$$

Passando al sup al primo membro e all'inf al secondo risulta

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tale che $0 \leq f(x_0) < g(x_0) \leq 1$. Allora esistono $r, s \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ tali che $f(x_0) < r < s < g(x_0)$, ma allora $f_r(x_0) < r$, quindi $x_0 \notin V_r$, mentre $g_s(x_0) > s$, quindi $x_0 \in \overline{V}_s$, ma per costruzione se $r < s$ allora $\overline{V}_s \subset V_r$. Quindi

$$f(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

□

Vediamo ora un'importante applicazione del lemma di Uryshon.

Teorema 2.4 *(Partizione dell'unità) Siano $V_1, \dots, V_m$ sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^N$ e sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$ tale che $K \subset V_1 \cup \ldots \cup V_m$. Esistono allora delle funzioni $\varphi_j \in C_c(\mathbb{R}^N)$ con $j = 1, \dots, m$ tali che*

$$\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset V_j \ , \ 0 \leq \varphi_j \leq 1 \ e \ \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1 \ \forall\, x \in K.$$

Dimostrazione Osservato che per ogni $x \in K$ esiste un indice j_x compreso tra 1 ed m tale che $x \in V_{j_x}$ per la proposizione 2.2 esiste un insieme W_x tale che $x \in W_x$ e $\overline{W}_x \subset V_{j_x}$. La famiglia di insiemi aperti $\{W_x\}_{x \in K}$ ricopre K. Poiché K è compatto possiamo estrarre un ricoprimento finito, cioè

$$\exists\, x_1, \dots, x_r \in K : K \subset W_{x_1} \cup \ldots \cup W_{x_r}.$$

Preso V_1, consideriamo tutti gli insiemi compatti $\overline{W}_{x_i} \subset V_1$, la cui unione genera $H_1 \subset V_1$. Ripetiamo analogamente per gli altri insiemi aperti V_i. Otteniamo così degli insiemi compatti $H_j \subset V_j$. Il lemma di Uryshon garantisce l'esistenza di funzioni f_j, con

$$H_j \prec f_j \prec V_j.$$

Poniamo per definizione

$$\begin{aligned} \varphi_1 = &\quad f_1 \\ \varphi_2 = &\quad (1 - f_1) f_2 \\ \dots & \\ \varphi_m = &\quad (1 - f_1)(1 - f_2) \dots (1 - f_{m-1}) f_m. \end{aligned}$$

Le φ_i godono delle proprietà enunciate nella tesi. Infatti le φ_i sono continue perché sono prodotto di funzioni continue.

$$0 \leq \varphi_1 \leq 1 \qquad \text{perché} \qquad 0 \leq f_1 \leq 1,$$

$$0 \leq \varphi_2 \leq 1 \qquad \text{perché} \qquad 0 \leq f_2 \leq 1,\ 0 \leq (1 - f_1) \leq 1 \quad \text{e} \quad \varphi_2 \leq f_2,$$

$$\dots$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_m \leq 1 \qquad & \text{perché } 0 \leq f_m \leq 1,\ 0 \leq (1 - f_1) \leq 1, \dots, \\ & 0 \leq (1 - f_{m-1}) \leq 1 \quad \text{e} \quad \varphi_m \leq f_m. \end{aligned}$$

φ_j ha il supporto contenuto in V_j perché si annulla almeno dove si annulla f_j. Verifichiamo per induzione che

$$\varphi_1 + \ldots + \varphi_m = 1 - (1 - f_1) \dots (1 - f_m).$$

Infatti

$$\begin{aligned}\varphi_1 + \varphi_2 &= f_1 + (1 - f_1) f_2 \\ &= f_1 + f_2 - f_1 f_2 \\ &= 1 - (1 - f_1)(1 - f_2).\end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva supponiamo

$$\varphi_1 + \ldots + \varphi_{m-1} = 1 - (1 - f_1) \ldots (1 - f_{m-1})$$

e proviamo per m:

$$\begin{aligned}\varphi_1 + \ldots + \varphi_m &= 1 - (1 - f_1) \ldots (1 - f_{m-1}) + (1 - f_1) \ldots (1 - f_{m-1}) f_m \\ &= 1 - [(1 - f_1) \ldots (1 - f_{m-1}) - (1 - f_1) \ldots (1 - f_{m-1}) f_m] \\ &= 1 - [(1 - f_1) \ldots (1 - f_{m-1})(1 - f_m)].\end{aligned}$$

Poiché la famiglia dei W_x ricopre K e per qualche j compreso tra 1 ed m $W_x \subset H_j$, allora

$$\forall\, x \in K \;\; \exists\, j : x \in H_j \Rightarrow f_j(x) = 1$$

e ciò implica

$$\varphi_1 + \ldots + \varphi_m = 1.$$

$\square$

2.3 Il teorema di Lusin

Definizione 2.5 *Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{M}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di Ω. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ si dice* $\mathcal{M}$-misurabile *se $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ per ogni insieme aperto A di $\mathbb{R}^m$.*

Se $\mathcal{L}$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, le funzioni $\mathcal{L}$-misurabili saranno dette, semplicemente, misurabili.
Dato un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ misurabile secondo Lebesgue, la sua misura sarà denotata con $|E|$.

Definizione 2.6 *f si dice funzione semplice misurabile se è combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ misurabili, limitati e a due a due disgiunti.*

Teorema 2.7 (di discretizzazione) *Sia $f : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Esiste allora una successione $\{s_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di funzioni semplici misurabili tali che:*

1) $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_{\nu+1} \le \ldots \le f$;

2) $\lim_{\nu \to \infty} s_\nu(x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$. *Inoltre, se f é limitata allora la convergenza é uniforme.*

Dimostrazione Per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ consideriamo $[0, \nu[\subset [0, +\infty]$ e lo suddividiamo in intervalli di ampiezza $\frac{1}{2^\nu}$ del tipo $[0, \frac{1}{2^\nu}[$, $[\frac{1}{2^\nu}, \frac{2}{2^\nu}[$, ... Poniamo per definizione per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ e $j = 1, 2, \ldots, \nu 2^\nu$

$$E_{\nu,j} = \big\{ x \in \mathbb{R}^N : \frac{j-1}{2^\nu} \le f(x) < \frac{j}{2^\nu} \big\},$$

$$F_\nu = \big\{ x \in \mathbb{R}^N : f(x) \ge \nu \big\},$$

$$s_\nu = \sum_{j=1}^{\nu 2^\nu} \frac{j-1}{2^\nu} \chi_{E_{\nu,j}} + \nu \chi_{F_\nu},$$

e proviamo che la successione così definita gode delle proprietà enunciate.

Anzitutto, poiché f é misurabile, allora gli insiemi $E_{\nu,j}$ e F_ν sono misurabili.

Si ha poi $s_\nu \geq 0$ perché combinazione lineare di funzioni non negative. Proviamo che

$$s_\nu(x) \leq f(x) \qquad \forall\, \nu \in \mathbb{N}.$$

- 1^o caso: $f(x) \geq \nu \Rightarrow s_\nu(x) = \nu$;
- 2^o caso: $f(x) < \nu \Rightarrow \exists\,!\, j : \frac{j-1}{2^\nu} \leq f(x) < \frac{j}{2^\nu} \Rightarrow s_\nu(x) = \frac{j-1}{2^\nu}$.

Proviamo il punto 2) della tesi.

- 1^o caso: se $x \in \mathbb{R}^N \,:\, f(x) = +\infty \Rightarrow s_\nu = \nu\ \forall\, \nu \in \mathbb{N}$ perciò
$$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu(x) = +\infty;$$
- 2^o caso: se $x \in \mathbb{R}^N$ tale che $f(x) < +\infty$, allora preso $\nu > f(x)$ si ha
$$0 \leq f(x) - s_\nu(x) < 2^{-\nu},$$
perciò
$$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu(x) = f(x).$$
SEgue anche che se f è limitata allora la convergenza è uniforme.

Ora dimostriamo che
$$s_\nu(x) < s_{\nu+1}(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$
Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}^N$ arbitrario.

- 1^o caso: $f(x_0) < \nu \Rightarrow \exists\,!\, j : \frac{j-1}{2^\nu} \leq f(x_0) < \frac{j}{2^\nu}$ e $s_\nu(x_0) = \frac{j-1}{2^\nu}$. Allora
$$\frac{2j-2}{2^{\nu+1}} \leq f(x_0) < \frac{2j}{2^{\nu+1}}.$$
Distinguiamo due casi:
$$\frac{2j-2}{2^{\nu+1}} \leq f(x_0) < \frac{2j-1}{2^{\nu+1}} \qquad \Rightarrow \qquad s_{\nu+1}(x_0) = \frac{2j-2}{2^{\nu+1}} = s_\nu(x_0),$$
$$\frac{2j-1}{2^{\nu+1}} \leq f(x_0) < \frac{2j}{2^{\nu+1}} \qquad \Rightarrow \qquad s_{\nu+1}(x_0) = \frac{2j-1}{2^{\nu+1}} = s_\nu(x_0) + \frac{1}{2^{\nu+1}}.$$
Riassumendo, nel caso in cui $f(x_0) < \nu$ si ha che
$$s_{\nu+1} - s_\nu = 2^{\nu-1} \chi_{T_{\nu+1}} \tag{2.2}$$
dove
$$T_{\nu+1} = \bigcup_{j=1}^{\nu 2^\nu} f^{-1}\Big([\frac{2j-1}{2^{\nu+1}}, \frac{2j}{2^{\nu+1}} [\Big) \tag{2.3}$$
che è un insieme misurabile perché f è misurabile.

- 2^o caso: se $f(x_0) \geq \nu$ allora $s_\nu(x_0) = \nu$
  - se si ha $f(x_0) \geq \nu + 1$ allora $s_{\nu+1}(x_0) = \nu + 1 > \nu = s_\nu(x_0)$,
  - se $\nu \leq f(x_0) < \nu+1$ allora $\exists!\, j : \frac{j-1}{2^{\nu+1}} \leq f(x_0) < \frac{j}{2^{\nu+1}}$, quindi $s_{\nu+1}(x_0) = \frac{j-1}{2^{\nu+1}}$. D'altra parte, poiché
  $$\nu \leq f(x_0) < \nu + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(\nu 2^{\nu+1} + 1) - 1}{2^{\nu+1}} \leq f(x_0) < \frac{(\nu + 1)2^{\nu+1}}{2^{\nu+1}}$$
  allora si ha $j \geq \nu 2^{\nu+1} + 1$ e quindi
  $$s_{\nu+1}(x_0) = \frac{j-1}{2^{\nu+1}} \geq \nu = s_\nu(x_0).$$
  Perciò per ogni $x \in \mathbb{R}^N \quad s_{\nu+1}(x) \geq s_\nu(x)$.

$\square$

Teorema 2.8 (di Lusin) *Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile con $f(x) = 0$ per ogni $x \notin A$, dove A è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ con $|A| < +\infty$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che:*

1) $|\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq g_\varepsilon(x)\}| \leq \varepsilon$;
2) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} |g_\varepsilon(x)| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x)|$.

Dimostrazione

- 1^o caso: supponiamo che A sia compatto e $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.
  Per il teorema 2.7, esiste una successione di funzioni non decrescenti tali che
  $$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu(x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$
  Inoltre, essendo $f(x)$ una funzione limitata, le s_ν convergono uniformemente. Poniamo:
  $$\begin{aligned} t_1 &= s_1 2^{-1}\chi_{T_1} \\ t_\nu &= s_\nu - s_{\nu-1} = 2^{-\nu}\chi_{T_\nu} \quad \nu = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$
  con $T_\nu \subset A$ insieme misurabile (T_ν è definito come nella (2.3) del teorema 2.7). Consideriamo la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} t_\nu$: questa converge a f uniformemente su $\mathbb{R}^N$. Consideriamo ora un insieme aperto limitato V tale che $A \subset V$. Poiché T_ν è misurabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono K_ν insieme compatto e V_ν insieme aperto tali che
  $$K_\nu \subseteq T_\nu \subseteq V_\nu \subseteq V \quad \text{e} \quad |V_\nu \setminus K_\nu| < \varepsilon 2^{-\nu}.$$
  Applichiamo il lemma di Uryshon a $K_\nu \subset V_\nu$:
  $$\exists\, h_\nu \in C_c(\mathbb{R}^N) : \quad K_\nu \prec h_\nu \prec V_\nu.$$
  Consideriamo la serie
  $$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} h_\nu.$$
  Poiché $0 \leq h_\nu \leq 1$ allora
  $$||2^{-\nu} h_\nu||_\infty \leqslant 2^{-\nu},$$

quindi la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}^N$ ad una funzione

$$g_\varepsilon(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} h_\nu(x).$$

Poiché il termine generale della serie è continuo e la convergenza è uniforme, allora $g_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^N)$. Inoltre $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N)$ perché il suo supporto è contenuto in $\overline{V}$, che è compatto. Infatti

$$x \notin \overline{V} \quad \Rightarrow \quad x \notin V_\nu \quad \Rightarrow \quad h_\nu(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_\varepsilon(x) = 0.$$

g_ε gode della proprietà 1) della tesi. Infatti

– se $x \in K_\nu$ allora $2^{-\nu} h_\nu(x) = 2^{-\nu} = t_\nu(x)$

– se $x \notin V_\nu$ allora $2^{-\nu} h_\nu(x) = 0 = t_\nu(x)$.

Quindi

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq g_\varepsilon(x)\}| &\leq |\bigcup_{\nu=1}^{+\infty} (V_\nu \setminus K_\nu)| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{+\infty} |V_\nu \setminus K_\nu| \leq \varepsilon \sum_{\nu=1}^{+\infty} 2^{-\nu} = \varepsilon.\end{aligned}$$

- 2^o caso: supponiamo che A sia compatto e f limitata.
Sia in particolare $a \leq f(x) \leq b$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Definiamo

$$\widetilde{f}(x) = \frac{f(x) - a}{b - a}.$$

Allora $0 \leq \widetilde{f} \leq 1$. Per il 1^o caso esiste $\widetilde{g}_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$|\{x \in \mathbb{R}^N : \widetilde{f}(x) \neq \widetilde{g}_\varepsilon(x)\}| \leq \varepsilon.$$

Definiamo

$$g_\varepsilon(x) = \widetilde{g}_\varepsilon(x)(b - a) + a.$$

Allora

$$|\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq g_\varepsilon(x)\}| = |\{x \in \mathbb{R}^N : \widetilde{f}(x) \neq \widetilde{g}_\varepsilon(x)\}| \leq \varepsilon.$$

- 3^o caso: supponiamo A misurabile con $|A| < +\infty$ ed f limitata.
Poiché A ha misura finita, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono K insieme compatto e V insieme aperto tali che

$$K \subset A \subset V \quad \text{e} \quad |V \setminus K| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Indichiamo con

$$f_1(x) = f(x)\chi_K(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

f_1 è limitata ed ha supporto compatto, quindi per il 2^o caso

$$\exists\, g_1 \in C_c(\mathbb{R}^N) : \text{supp}(g_1) \subset V,\ |\{x \in \mathbb{R}^N : f_1(x) \neq g_1(x)\}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora

$$|\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq g_1(x)\}| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + |V \setminus K| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

- 4^o caso: supponiamo $|A| < +\infty$ e f misurabile.
  Sia $\nu \in \mathbb{N}$. Definiamo $B_\nu = \{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| > \nu\}$.
  Si ha $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \supseteq B_\nu \ldots$ e B_ν è misurabile, perché f è misurabile, e di misura finita perché $B_\nu \subseteq A$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Definiamo
  $$B = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} B_\nu = \{x \;:\; f(x) = +\infty\} = \varnothing.$$
  Allora
  $$|B| = \lim_{\nu \to \infty} |B_\nu| = 0,$$
  cioè
  $$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : |B_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, \nu > \nu_\varepsilon.$$
  Sia $\overline{\nu} > \nu_\varepsilon$. Definiamo
  $$f_1(x) = f(x)\chi_{B^c_{\overline{\nu}}}(x)$$
  dove $B^c_{\overline{\nu}} = \mathbb{R}^N \setminus B_{\overline{\nu}}$. f_1 soddisfa le ipotesi del 3^o caso, quindi
  $$\exists\, g_1 \in C_c(\mathbb{R}^N) : |\{x \in \mathbb{R}^N : g_1(x) \neq f_1(x)\}| < \frac{\epsilon}{2}.$$
  Allora
  $$\begin{aligned}\big\{x \in \mathbb{R}^N : g_1(x) \neq f(x)\big\} = \;& \big\{x \in B_{\overline{\nu}} : g_1(x) \neq f(x)\big\} \cup \\ & \cup \big\{x \notin B_{\overline{\nu}} : g_1(x) \neq f_1(x)\big\}.\end{aligned}$$
  Passando alle misure
  $$|\big\{x \in \mathbb{R}^N : g_1(x) \neq f(x)\big\}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
  Dimostriamo ora il punto 2) della tesi. Se $\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f| = +\infty$, qualsiasi $g_\varepsilon(x)$ che soddisfi il punto 1) va bene. Supponiamo $\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f| = R$ con $R \in \mathbb{R}$. Definiamo la seguente trasformazione: sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| \leq R \\ R\frac{x}{|x|} & \text{se } |x| > R. \end{cases}$$
  $\varphi(x)$ è continua e $|\varphi(x)| \leq R$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Fissato un $\varepsilon > 0$ sia g_ε un'applicazione che soddisfa il punto 1) della tesi con $\frac{\varepsilon}{2}$ in luogo di ε. Definiamo
  $$\widetilde{g_\varepsilon}(x) = (\varphi \circ g_\varepsilon)(x).$$
  $\widetilde{g}$ gode delle proprietà 1) e 2) della tesi. Infatti
  $$\begin{aligned}\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\widetilde{g}(x)| & = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi\big(g_\varepsilon(x)\big)| \\ & \leq R = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)|.\end{aligned}$$
  $\widetilde{g}(x)$ è continua perché è composizione di funzioni continue e il suo supporto coincide con quello di $g_\varepsilon(x)$. Quindi $\widetilde{g} \in C_c(\mathbb{R}^N)$. Infine
  $$\begin{aligned}\big\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq \widetilde{g}(x)\big\} = \;& \big\{x \in \mathbb{R}^N : |g_\varepsilon(x)| \leq R \text{ e } f(x) \neq g_\varepsilon(x)\big\} \cup \\ & \cup \big\{x \in \mathbb{R}^N : |g_\varepsilon(x)| > R \text{ e } f(x) \neq R)\big\}.\end{aligned}$$
  Passando alle misure
  $$|\big\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq \widetilde{g}(x)\big\}| < \varepsilon.$$

$\square$

2.4 Approssimazione di funzioni L^p con funzioni continue

In questa sezione dimostreremo che, dato un sottoinsieme A misurabile di $\mathbb{R}^N$, $C_c(A)$ è denso in $L^p(A)$ per ogni $p \in [1, +\infty[$, cioè, fissato $f \in L^p(A)$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, g_\varepsilon \in C_c(A) : \|f - g_\varepsilon\|_p < \varepsilon.$$

Lemma 2.9 *Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. L'insieme S di tutte le funzioni $s : A \to \mathbb{R}$ semplici misurabili è denso in $L^p(A)$ se $p \in [1, +\infty]$.*

Dimostrazione Ogni funzione semplice in S è combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ misurabili, limitati, a due a due disgiunti

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x) \qquad E_j \subset \mathbb{R}^N \;\; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Supponiamo che $f \in L^p(A)$ sia una funzione non negativa.
Per il teorema 2.7, esiste una successione $\{s_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di funzioni semplici misurabili tali che

1) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_{\nu+1} \leq \ldots \leq f$

2) $\lim_{\nu \to \infty} s_\nu(x) = f(x) \quad \forall\, x \in A$ e la convergenza è uniforme se f è limitata.

La tesi è quindi già dimostrata nel caso $p = \infty$. Sia ora $p \in [1, +\infty[$. Poiché $0 < s_\nu \leq f$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$, allora $s_\nu \in L^p(A)$. Osservando che $f - s_\nu > 0$ è dominata da f e quindi utilizzando il teorema di Lebesgue, abbiamo che

$$\lim_{\nu \to +\infty} \int_A (f - s_\nu)^p dx = \int_A \lim_{\nu \to +\infty} (f - s_\nu)^p dx = 0$$

cioè $s_\nu \to f$ nella norma di $L^p(A)$. Se f ha segno non costante, si consideri la decomposizione di f nella parte positiva e negativa, $f = f^+ - f^-$. Poiché f^+, f^- sono funzioni positive, per quanto già dimostrato, S è denso in $L^p(A)$.

□

Teorema 2.10 *Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Per $1 \leq p < +\infty$ $C_c(A)$ è denso in $L^p(A)$.*

Dimostrazione Sia $f \in L^p(A)$. Definiamo S come nel lemma 2.9. Basta provare che per ogni $s \in S$ e per ogni intorno di s esiste una funzione $g \in C_c(A)$ con g appartenente a tale intorno.
Sia $s \in S$ in un intorno di f e sia $\varepsilon > 0$ fissato. Applichiamo il teorema di Lusin ad s: esiste $g_\varepsilon \in C_c(A)$ tale che $g_\varepsilon(x) = s(x)$, fuorché su un insieme A_1 di misura minore di ε e $\sup_{x \in A} |g_\varepsilon(x)| \leq \sup_{x \in A} |s(x)| = k \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}
\|g_\varepsilon - s\|_p &= \Big(\int_A |g_\varepsilon - s|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_{A_1} |g_\varepsilon - s|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big(\int_{A_1} 2^p k^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} k,
\end{aligned}$$

da cui segue la tesi. □

Capitolo 3

Convoluzione e regolarizzazione

Riferimenti bibliografici: Giusti [5], Rudin [6], 7.8 e Brezis [2], IV.4
Notazioni: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

3.1 Derivazione sotto il segno di integrale

Consideriamo, in questa sezione, una funzione del tipo

$$F(t) = \int_E f(x,t)\,dx$$

dove E è un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, ed $f : E \times A \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile rispetto a t su un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}$. Ci si chiede sotto quali condizioni la funzione F risulti derivabile e in tal caso quale sia la sua derivata.

Questo primo lemma stabilisce delle condizioni sufficienti a garantire la continuità di F.

Lemma 3.1 *Se*

1. *la funzione $t \mapsto f(x,t)$ è continua in A per quasi ogni $x \in E$,*
2. *esiste una funzione φ sommabile in E tale che*

$$|f(x,t)| \le \varphi(x) \quad \forall\, t \in A \ \text{ e } \ \text{q.o.}\, x \in E,$$

allora F è continua in A.

Dimostrazione La dimostrazione è immediata, infatti, presa una qualunque successione $t_n \to t_0$, per il teorema di Lebesgue si ha

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int_E f(x,t_n)\,dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f(x,t_n)\,dx = \int_E f(x,t_0)\,dx = F(t_0).$$

□

Per quanto riguarda la derivazione, vale il seguente

Teorema 3.2 (di derivazione sotto il segno di integrale) *Se*

1. *la funzione $t \mapsto f(x,t)$ è derivabile in A per quasi ogni $x \in E$,*

2. *esiste una funzione φ sommabile in E tale che*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big| \leq \varphi(x) \quad \forall\, t \in A \;\text{ e }\; \text{q.o.}\, x \in E,$$

allora F è derivabile in A e si ha

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_E f(x,t)\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Dimostrazione Sia $t_0 \in A$. Per definizione, F è derivabile se esiste finito il limite

$$\lim_{t\to t_0}\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\int_E \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\,dx.$$

Considerata una qualunque successione $t_n \to t_0$, si può applicare il Teorema di Lebesgue, poichè per il Teorema di Lagrange

$$\Big|\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}\Big| = \Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi_n)\Big| \leq \varphi(x) \text{ q.o. } x \in E.$$

Si ha pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0} = \int_E \lim_{n\to\infty}\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx.$$

La tesi segue dunque dall'arbitrarietà della successione $t_n \to t_0$. □

Generalizzazione

Il teorema di derivazione sotto il segno di integrale è immediatamente generalizzabile al caso in cui A sia un aperto di $\mathbb{R}^k$, con l'enunciato seguente.

Teorema 3.3 *Se*

1. *la funzione $t \mapsto f(x,t)$ è derivabile parzialmente in A per quasi ogni $x \in E$,*
2. *esiste una funzione φ sommabile in E tale che*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)\Big| \leq \varphi(x) \quad \forall\, t \in A,\; \text{q.o.}\, x \in E \;\text{ e }\; j = 1,\dots,k$$

allora F è derivabile parzialmente in A e si ha

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \frac{\partial}{\partial t_j}\int_E f(x,t)\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)\,dx.$$

Se, di più, $t \mapsto f(x,t)$ è di classe $C^1(A)$ per quasi ogni $x \in E$ allora anche $F \in C^1(A)$.

Applicazione

Insieme al teorema di derivazione delle funzioni composte, il teorema di derivazione sotto il segno di integrale si applica al calcolo delle derivate di funzioni del tipo

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx.$$

con α e β funzioni derivabili su $A \subseteq \mathbb{R}$. Infatti F si può scrivere come funzione composta

$$F(t) = G(\alpha(t), \beta(t), t)$$

dove

$$G(y, z, t) = \int_y^z f(x, t)\, dx.$$

Nelle ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno di integrale, e per la regola della catena, si ha infatti

$$\begin{aligned} F'(t) &= G_y(\alpha(t), \beta(t), t) \cdot \alpha'(t) + G_z(\alpha(t), \beta(t), t) \cdot \beta'(t) + G_t(\alpha(t), \beta(t), t) = \\ &= f(\beta(t), t) \cdot \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \cdot \alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx. \end{aligned}$$

Esercizio 3.4 *Studiare la funzione*

$$F(t) = \int_0^1 \operatorname{sen}(2 - x^2 t^2)\, dx, \quad t \in]-1, 1[.$$

3.2 Funzioni localmente sommabili

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si definisce

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{K} \ : \ \forall\, x_0 \in \Omega\ \exists\, V_{x_0} \ : \ u_{|V_{x_0}} \in L^1(V_{x_0})\}$$

o, equivalentemente (esercizio),

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{K} \ : \ u_{|K} \in L^1(K)\ \forall\, K \text{ compatto},\ K \subseteq \Omega\}.$$

Esercizio 3.5 *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue (non necessariamente di misura finita). Allora si ha*[1]

$$L^p(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad \forall\, p \in [1, +\infty]$$

3.3 Prodotto di convoluzione in L^1

Siano f e g due funzioni. L'integrale

$$f * g(x) = \int f(x - y) g(y) dy,$$

qualora abbia senso, si dice prodotto di convoluzione di f e g.

Casi in cui l'integrale ha senso sono ad esempio $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ e $g \in C_{\mathrm{c}}$, oppure $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$. Eseguendo il cambiamento di variabile $x - y = t$ si vede che $f * g = g * f$. Un fatto importante è che L^1 è chiuso rispetto a questo prodotto, quindi L^1 è un'algebra di convoluzione; vale infatti il seguente teorema.

Teorema 3.6 *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si ha*

(i) la funzione $y \mapsto f(x - y) g(y)$ è sommabile q.o. $x \in \mathbb{R}^n$. Per gli x in cui è sommabile si pone $f * g(x) = \displaystyle\int f(x - y) g(y) dy$.

[1] Ricordiamo che se Ω ha misura finita allora $1 \le p < q \le \infty \Rightarrow L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$.

(ii) $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f * g = g * f$, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

La dimostrazione è un'applicazione esemplare dei teoremi di Fubini e di Tonelli che qui ricordiamo.

Teorema 3.7 (di Fubini o di disintegrazione e scambio dell'ordine di integrazione) *Siano Ω_1 e Ω_2 sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$, rispettivamente. Se $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, allora*

1. *per q.o. $x \in \Omega_1$ $F(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$ e $\displaystyle\int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy \in L^1(\Omega_1)$;*

2. *per q.o. $y \in \Omega_2$ $F(\cdot, y) \in L^1(\Omega_1)$ e $\displaystyle\int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx \in L^1(\Omega_2)$.*

Inoltre

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)\,dxdy = \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx.$$

Teorema 3.8 (di Tonelli o di assoluta integrabilità) *Se $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile nella σ-algebra prodotto, e se*

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|\,dy < \infty \tag{3.1}$$

allora $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Osservazione 3.9 Osserviamo che l'applicazione consecutiva dei teoremi di Tonelli e di Fubini consente di affermare che se una funzione misurabile ha un integrale iterato assolutamente convergente (cioè vale la (3.1)), allora è sommabile e si può scambiare l'ordine di integrazione.

Dimostrazione (del Teorema 3.6). Siccome f e g sono solo $L^1(\mathbb{R}^n)$, e la traslata di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ è $L^1(\mathbb{R}^n)$, ma il prodotto usuale di funzioni $L^1(\mathbb{R}^n)$ può non essere $L^1(\mathbb{R}^n)$, non possiamo concludere direttamente che $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è sommabile. Consideriamo invece la mappa $x \mapsto |f(x-y)g(y)|$ e, procedendo formalmente, eseguiamo il cambiamento di variabile $x - y = t$ ottenendo

$$\begin{aligned}\int \Big(\int |f(x-y)g(y)|\,dx\Big)\,dy &= \int |g(y)|\Big(\int |f(x-y)|\,dx\Big)\,dy = \int |g(y)|\Big(\int |f(t)|\,dt\Big)\,dy \\ &= \int |f(t)|\,dt \int |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

Le uguaglianze risultano quindi giustificate a posteriori e sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Tonelli (verificare per esercizio la misurabilità), per cui $F(x,y) = f(x-y)g(y)$ è una funzione $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Quindi, per Fubini, si ottiene la prima parte della tesi ed è inoltre lecito scambiare l'ordine di integrazione ottenendo

$$\int \Big| \int f(x-y)g(y)\,dy \Big|\,dx \leq \int \Big(\int |f(x-y)g(y)|\,dy\Big)\,dx = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$$

che traduce la seconda parte della tesi. □

3.4 Regolarizzazione per convoluzione

Indichiamo con $B(0,1)$ la palla unitaria di centro zero in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 3.10 *Una funzione* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tale che* $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B(0,1)}$, $\varphi \geq 0$, $\int \varphi = 1$ *si chiama mollificatore o nucleo regolarizzante.*

Una funzione che soddisfa tutte le condizioni della definizione è, per esempio, la seguente

$$\varphi(x) = \begin{cases} K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

dove la costante di normalizzazione K è

$$K = \left(\int_{|x|<1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|x|^2}}\, dx \right)^{-1}$$

Se φ è un mollificatore, lo sono anche tutte le funzioni (esercizio)

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}), \qquad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Si ha inoltre $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq \overline{B(0,\varepsilon)}$. I mollificatori sono utili per costruire approssimazioni regolari di funzioni L^p.

Teorema 3.11 *Sia* φ *un mollificatore e* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *una funzione con supporto in un aperto* A *di* $\mathbb{R}^n$ *e di classe* $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$. *Allora*

1. $\varphi_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. *se* $\operatorname{supp} u = K$ *è compatto, allora* $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon * u \subseteq K + \overline{B(0,\varepsilon)}$ *(in particolare quindi* $\varphi_\varepsilon * u \in C_c^\infty(A)$ *per ogni* $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, A^C)$*).*

Dimostrazione Anzitutto osserviamo che $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e che $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, quindi il prodotto di convoluzione è ben definito. Per definizione

$$\varphi_\varepsilon * u(x) = \int \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy = \int_{A\cap\overline{B(x,\varepsilon)}} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy$$

dal momento che $\operatorname{supp} u \subseteq A$ mentre $\operatorname{supp}\varphi(x-\cdot) \subseteq \overline{B(x,\varepsilon)}$. Per stabilire che $\varphi_\varepsilon * u(x)$ è derivabile parzialmente rispetto ad x, verifichiamo che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Fissiamo a tal scopo un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo un intorno compatto V di x_0. Poichè V è compatto allora l'insieme $W = \cup_{x\in V}\overline{B(x,\varepsilon)} = V + \overline{B(x,\varepsilon)}$ è limitato. Inoltre $A\cap\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq A\cap W$ per ogni $x \in V$. Dunque

$$\varphi_\varepsilon * u(x) = \int_{A\cap W} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \quad \text{ per ogni } x \in V,$$

cosicchè il dominio di integrazione, pur rimanendo limitato, non dipende più da x.

Poichè la funzione $x \mapsto \varphi_\varepsilon(x-y)u(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ per q.o. $y \in A\cap W$ e inoltre

$$\left|\partial_x^\alpha\big(\varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\big)\right| \leq \sup_{(x,y)\in V\times\overline{W}} \left|\partial_x^\alpha\big(\varphi_\varepsilon(x-y)\big)\right||u(y)| \leq C(\alpha,V)|u(y)|$$

dove $C(\alpha,V)$ è una costante dipendente solo da α e V, e poiché la funzione $C(\alpha,V)|u(y)|$ è sommabile sull'insieme limitato $A\cap W$ allora sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno di integrale da cui segue la parte *1* della tesi.

Per provare la *2* osserviamo che, poiché $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq \overline{B(0,\varepsilon)}$, allora

$$\varphi_\varepsilon * u(x) = \int u(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int_{\overline{B(0,\varepsilon)}} u(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy$$

Chiaramente

$$\varphi_\varepsilon * u(x) = 0 \quad \forall\, x \ : \ u(x-y) = 0 \;\forall\, y \in \overline{B(0,\varepsilon)}$$

ma, d'altra parte

$$u(x-y) = 0 \;\forall\, y \in \overline{B(0,\varepsilon)} \;\Leftarrow\; x \notin \operatorname{supp} u + y \;\forall\, y \in \overline{B(0,\varepsilon)}$$

sicchè

$$x \notin \operatorname{supp} u + \overline{B(0,\varepsilon)} \Rightarrow \varphi_\varepsilon * u(x) = 0$$

cioè

$$\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon * u \subseteq \operatorname{supp} u + \overline{B(0,\varepsilon)} = K + \overline{B(0,\varepsilon)}.$$

□

Teorema 3.12 *Sia φ un mollificatore e $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una funzione con supporto in un aperto A di $\mathbb{R}^n$ e di classe $L^p(A)$, $1 \le p < +\infty$. Allora*

1. $\varphi_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. *se* $\operatorname{supp} u = K$ *è compatto, allora* $\varphi_\varepsilon * u \in C^\infty_{\mathrm{c}}(A)$ *per ogni* $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, A^C)$;
3. $\varphi_\varepsilon * u \in L^p(A)$, $\|\varphi_\varepsilon * u\|_p \le \|u\|_p$;
4. $\varphi_\varepsilon * u \to u$ *in* $L^p(A)$ *per* $\varepsilon \to 0$;
5. u *continua in* $x_0 \Rightarrow \varphi_\varepsilon * u(x_0) \to u(x_0)$ *per* $\varepsilon \to 0$;
6. $u \in C_c(A) \Rightarrow \varphi_\varepsilon * u \to u$ *uniformemente in* A *per* $\varepsilon \to 0$.

Dimostrazione Le prime due sono già state provate. La *3* è una conseguenza della disuguaglianza di Hölder e di Tonelli-Fubini. Infatti,

$$\begin{aligned} |\varphi_\varepsilon * u(x)| &\le \int |\varphi_\varepsilon(x-y)u(y)|\,dy = \int \varphi_\varepsilon(x-y)^{1/p'}\varphi_\varepsilon(x-y)^{1/p}|u(y)|\,dy \\ &\le \Big(\int \varphi_\varepsilon(x-y)\,dy\Big)^{1/p'}\Big(\int \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy\Big)^{1/p} \end{aligned}$$

e, poichè il primo integrale a secondo membro è uguale a 1 (basta fare il cambiamento di variabile $x - y = t$), allora

$$\int |\varphi_\varepsilon * u(x)|^p\,dx \le \int \Big(\int \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy\Big)\,dx.$$

Scambiando l'ordine di integrazione a secondo membro si ha

$$\int \Big(\int \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dx\Big)\,dy = \int |u(y)|^p\Big(\int \varphi_\varepsilon(x-y)\,dx\Big)\,dy = \|u\|_p^p < +\infty$$

e la tesi segue dall'applicazione consecutiva dei teoremi di Tonelli e Fubini (cfr. osservazione (3.9)).

Proviamo la *4*. Poiché $C_c(A)$ à denso in $L^p(A)$ allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g \in C(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto contenuto in A tale che $\|g - u\|_p < \varepsilon$. Si ha quindi, usando anche la precedente *3*,

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon * u - u\|_p &\leq \|\varphi_\varepsilon * u - \varphi_\varepsilon * g\|_p + \|\varphi_\varepsilon * g - g\|_p + \|g - u\|_p \leq \\ &\leq 2\|g - u\|_p + \|\varphi_\varepsilon * g - g\|_p < 2\varepsilon + \|\varphi_\varepsilon * g - g\|_p, \end{aligned}$$

pertanto basta dimostrare la *4* nel caso in cui $u \in C_c(A)$. Osserviamo che, siccome $\int \varphi_\varepsilon(x-y)\,dy = 1$, allora

$$\begin{aligned} |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)| &= \left| \int \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy - u(x) \right| = \left| \int \varphi_\varepsilon(x-y)[u(y) - u(x)]\,dy \right| \\ &\leq \int_{|x-y|<\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y) - u(x)|\,dy \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è stato usato il fatto che $\varphi_\varepsilon(x-y) = 0$ per ogni $|x-y| \geq \varepsilon$. Poiché u è uniformemente continua, allora, per ogni $\eta > 0$ esiste $\delta_\eta > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta_\eta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \eta.$$

Di qui, utilizzando la stima precedente, si ha

$$|\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)| \leq \eta \int_{|x-y|<\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x-y)\,dy \leq \eta \;\forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Poiché δ_η non dipende da x ciò prova che $\varphi_\varepsilon * u \to u$ uniformemente (per $\varepsilon \to 0$), quindi in particolare risulta provata la *6*. Ne consegue che vi è anche convergenza in L^p, cosa che può anche essere provata direttamente osservando che, poiché $u \in C_c(A)$, esiste $a > 0$ tale che $\operatorname{supp} u \subseteq B(0, a)$, dove $B(0, a)$ denota la palla di $\mathbb{R}^n$ di centro 0 e raggio a. Per la *2* del teorema 3.11, allora

$$\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon * u \subseteq B(0, a + \varepsilon)$$

e quindi

$$\int |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)|^p\,dx = \int_{B(0,a+\varepsilon)} |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)|^p\,dx \leq |B(0, a+\varepsilon)|\varepsilon^p$$

e la *4* segue dunque passando al limite per $\varepsilon \to 0$. La *5* si dimostra analogamente usando la continuità in x_0 in luogo della continuità uniforme. □

Corollario 3.13 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. $C_c^\infty(A)$ è denso in $L^p(A)$.*

DIMOSTRAZIONE Basta applicare il teorema 2.10 e la *3* del teorema precedente. Sviluppare i dettagli per esercizio. □

Bibliografia

[1] Kolmogorov A.N. and Fomin S.V., *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Edizioni Mir, Milano, 1980.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.

[3] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.

[4] G. Dal Maso, *An introduction to γ-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[5] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.

[6] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.