Università degli Studi di Udine

Dispense del corso di

FISICA MATEMATICA

tenuto presso la facoltà di Scienze

corso di Laurea in Matematica

Lorenzo Freddi

Roberto Paroni

Anno Accademico 2009-2010

Capitolo 1

Cinematica dei continui

1.1 Riferimenti bibliografici

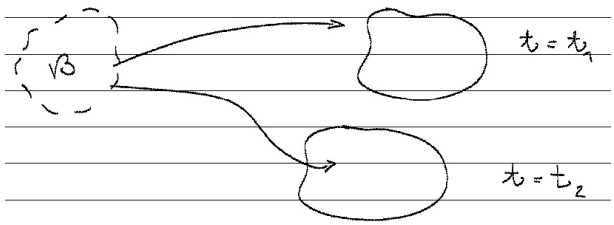
I testi di carattere generale a cui ci si può riferire per il presente capitolo sono [35, 18].

1.2 Notazioni

Tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ sono considerati vettori colonna, cioè matrici $n \times 1$. I vettori riga sono i loro trasposti. Il prodotto scalare verrà indicato con il punto, i prodotti righe per colonne senza.

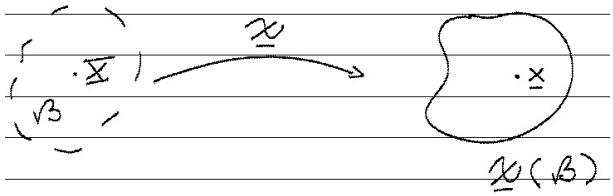
1.3 Corpi e piazzamenti

Non è banale dare una definizione di corpo. I "corpi" si presentano a noi occupando regioni dello spazio e lo stesso corpo può occupare, in istanti diversi, diverse regioni. Quindi ciò che noi vediamo non è il "corpo", ma i piazzamenti (placements) del corpo nello spazio.



È possibile dare una definizione di corpo (per esempio come varietà differenziabile) ma per i nostri scopi forse conviene considerare il "corpo" come un concetto primitivo. I punti X del corpo $\mathcal{B}$ sono chiamati *punti materiali*.

Definizione 1.1. *Un* piazzamento *del corpo $\mathcal{B}$ è una funzione invertibile $\chi : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ che mappa i punti materiali X in punti x dello spazio euclideo tridimensionale.*



D'ora in avanti assumeremo che le immagini dei piazzamenti, $\chi(\mathcal{B})$, siano domini regolari; in particolare si tratterà di insiemi limitati e aperti (o chiusura di aperti) con frontiera localmente grafico di funzioni lipschitziane (brevemente si dirà che la frontiera è lipschitziana). Sono ammessi quindi domini poligonali. Invece un semplice esempio di aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$ con frontiera non localmente lipschitziana è il seguente

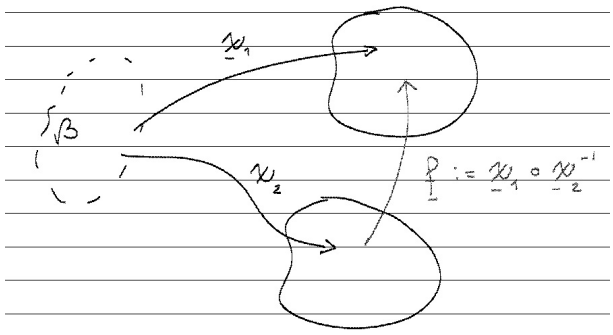
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ : \ \sqrt{|x|} < y < 1\}.$$

1.4 Deformazioni

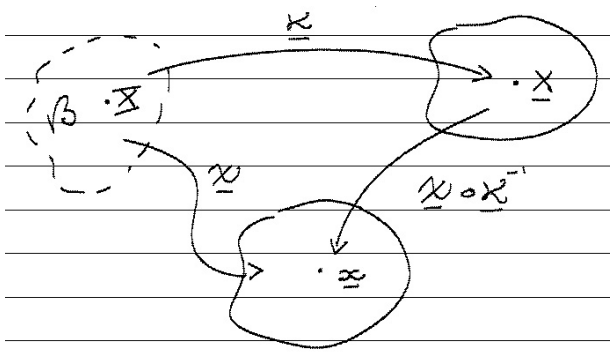
Dati due piazzamenti χ_1 e χ_2 chiameremo la mappa

$$f = \chi_1 \circ \chi_2^{-1},$$

la *deformazione* da χ_2 in χ_1. La definizione precisa di deformazione, in particolare la sua regolarità, verrà data verso la fine di questa sezione.



Anzichè lavorare con il corpo $\mathcal{B}$, conviene scegliere, tra i vari piazzamenti, un piazzamento privilegiato che indicheremo con κ ed utilizzare come dominio per le deformazioni l'insieme $\kappa(\mathcal{B})$. Questo piazzamento κ viene detto *configurazione di riferimento*.



La configurazione di riferimento κ potrebbe essere, ma non è necessario che lo sia, la posizione occupata dal corpo in un determinato istante.

La posizione di X in κ verrà indicata con x, i.e. $x = \kappa(X)$.

Sia χ un piazzamento (che potrebbe rappresentare la posizione attuale del corpo). Indicheremo con f_κ la funzione

$$f_\kappa := \chi \circ \kappa^{-1}$$

che, per quanto detto sopra, rappresenta la deformazione a partire dalla configurazione di riferimento. Per semplicità di notazione, se non ci sono ambiguità, lasceremo cadere l'indice κ.

Le deformazioni dovranno sottostare ad alcune naturali richeste fisiche:

1. durante la deformazione non c'è compenetrazione, cioè punti materiali diversi vengano mandati in punti diversi;

2. non vengono creati punti materiali.

La prima richiesta ci conduce a chiedere l'iniettività della deformazione mentre la seconda la suriettività. Come conseguenza le deformazioni sono invertibili.

Durante la nostra trattazione non ammetteremo nè fratture nè saldature del corpo, quindi assumeremo f ed f^{-1} continue. Inoltre richiederemo che la deformazione e la sua inversa siano sufficientemente "liscie", che hai fini di questo capitolo significa C^1. Indicheremo con $F := \nabla f$ il gradiente di f, e lo chiameremo *gradiente di deformazione*; per cui per ogni $x \in \kappa(\mathcal{B})$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x)h|}{|h|} = 0.$$

Si osservi che, dato che $f^{-1} \circ f = id$, dove id indica l'identità, si ha

$$(\det \nabla f^{-1}) \circ f \det F = 1,$$

e quindi $\det F \neq 0$. Quindi, durante un processo deformativo il gradiente di deformazione non potrà mai avere determinante nullo. Dato che la deformazione identità ha determinate positivo richederemo che $\det F > 0$.

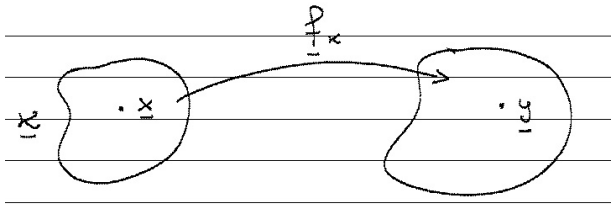
Osserviamo che se f è C^1 e il $\det \nabla f > 0$, allora per il teorema della funzione inversa, la funzione f è localmente invertibile e la sua inversa è C^1.[1]

Dopo queste considerazioni siamo in grado di dare una definizione completa di deformazione.

Una funzione $f : \kappa(\mathcal{B}) \to f(\kappa(\mathcal{B}))$ si dice deformazione, a partire dalla configurazione $\kappa(\mathcal{B})$, se è un diffemorfismo di classe C^1 (cioè f è biiettiva e di classe C^1 insieme alla sua inversa) e se conserva l'orientazione locale, cioè $\det \nabla f > 0$.

L'ipotesi di positività del determinante del gradiente della deformazione impedisce ad esempio che una terna destra possa essere deformata in una sinistra. In particolare le riflessioni non sono considerate "deformazioni".

D'ora in avanti indicheremo con y l'immagine $f(x)$.



[1] Se f anzichè essere C^1 è semplicemente una funzione in qualche spazio di Sobolev, come verrà richiesto nel seguito del corso, questa proprietà non è più vera.

1.5 Deformazioni omogenee

Le deformazioni affini, cioè deformazioni con gradiente costante, vengono chiamate deformazioni omogenee. Particolari deformazioni omogenee sono:

- Traslazioni, cioè deformazioni della forma $f(x) = x + t$, con $t \in \mathbb{R}^3$, in cui il corpo viene traslato di t. Per le traslazioni il gradiente di deformazione è uguale all'identità, $F = I$.
- Rotazioni, deformazioni del tipo $f(x) = x_0 + R(x - x_0)$ con R una matrice di rotazione (una matrice ortogonale con determinante positivo) e $x_0 \in \mathbb{R}^3$. In questo caso si ha $F = R$.
- Stiramenti, cioè deformazioni del tipo[2] $f(x) = x + \varepsilon d \otimes d(x - x_0) = x + \varepsilon d \cdot (x - x_0)\, d$ con $x_0 \in \kappa(\mathcal{B})$, $d \in \mathbb{R}^3$ e $|d| = 1$, in cui il corpo viene "stirato" nella direzione d di ε. In questo caso avremo $F = I + \varepsilon d \otimes d$.
- Omotetie, deformazioni del tipo $f(x) = x_0 + \alpha(x - x_0)$, in cui $F = \alpha I$.
- Scorrimenti, deformazioni della forma $f(x) = x + \gamma a \otimes b(x - x_0)$, con $a, b \in \mathbb{R}^3$. $|a| = |b| = 1$ e $a \cdot b = 0$. Per gli scorrimenti si ha $F = I + \gamma a \otimes b$.

Un altro tipo di deformazioni omogenee sono le deformazioni rigide che qui di seguito studieremo in dettaglio. Come vedremo queste sono la composizione di una traslazione con una rotazione.

Definizione 1.2. *Una deformazione f si dice* rigida *se lascia inalterata la distanza mutua tra i punti del corpo, vale a dire*

$$|f(x) - f(\bar{x})| = |x - \bar{x}| \qquad \forall\, x, \bar{x} \in \kappa(\mathcal{B})$$

ovvero, se f è un'isometria.

Sia

$$O(n) := \{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \ : \ Q^T Q = I\},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

il cosiddetto *gruppo ortogonale*, un gruppo moltiplicativo i cui elementi sono le matrici ortogonali di ordine n ($\mathbb{R}^{n\times n}$ indica le matrici reali di ordine n e Q^T denota la trasposta di Q).

Teorema 1.3. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f è un'isometria;*
2. *esiste $Q \in O(n)$ tale che*
$$f(x) = f(\bar{x}) + Q(x - \bar{x}).$$

Dimostrazione *2⇒1* è un facile esercizio; infatti, se $f(x) = f(\bar{x}) + Q(x - \bar{x})$ allora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\bar{x})|^2 &= |Q(x - \bar{x})|^2 = Q(x - \bar{x}) \cdot Q(x - \bar{x}) \\ &= Q^T Q(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = (x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = |x - \bar{x}|^2. \end{aligned}$$

[2] Il prodotto diadico o tensoriale tra due vettori $a, b \in \mathbb{R}^3$ è l'applicazione lineare $a \otimes b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$a \otimes b\ c = a(b \cdot c)$$

per ogni $c \in \mathbb{R}^3$

La dimostrazione di *1⇒2* è invece decisamente più complicata. Un modo di provarla è quello di utilizzare un risultato piuttosto raffinato di teoria della misura noto come Teorema di Rademacher (cfr. ad esempio Evans e Gariepy [14] Capitolo 3, oppure Ziemer [37], che afferma che le funzioni Lipschitziane (e quindi le isometrie in particolare) di $\mathbb{R}^n$ in sè sono funzioni differerenziabili quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Partiamo dunque dall'ipotesi che f sia un'isometria, quindi lipschitziana e perciò differenziabile in $\mathbb{R}^n \setminus N$ dove N è un insieme di misura nulla. Allora si ha

$$[f(x) - f(\bar{x})] \cdot [f(x) - f(\bar{x})] = (x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x}).$$

Differenziando rispetto ad u si ottiene

$$\nabla f(x)^T [f(x) - f(\bar{x})] = x - \bar{x} \tag{1.1}$$

per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni x in $\mathbb{R}^n \setminus N$. Differenziando quest'ultima rispetto a $\bar{x}$ si ottiene

$$\nabla f(x)^T \nabla f(\bar{x}) = I \tag{1.2}$$

per ogni $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Prendendo $x = \bar{x}$ si ha $\nabla f(x)^T \nabla f(x) = I$, cioè $\nabla f(x) \in O(n)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Dalla (1.2), moltiplicando a sinistra per $\nabla f(x)$, si ottiene allora che $\nabla f(x) = \nabla f(\bar{x})$ per quasi ogni x e $\bar{x}$, cioè esiste una matrice ortogonale Q tale che $\nabla f(x) = Q$ per quasi ogni x. Infine, dalla (1.1) si ha $f(x) - f(\bar{x}) = Q(x - \bar{x})$ quasi ovunque, quindi su un insieme denso. La tesi segue allora dalla continuità di f. □

Indichiamo con

$$SO(n) := \{Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \ : \ Q^T Q = I, \det Q = 1\}, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2,$$

il cosiddetto *gruppo speciale ortogonale*, i cui elementi, detti *rotazioni*, sono le matrici ortogonali di ordine n con determinante positivo.

Introducendo il vincolo della positività del determinante il precedente teorema ha la seguente controparte meccanica.

Teorema 1.4. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f è una deformazione rigida;*
2. *esiste $Q \in SO(n)$ tale che*
$$f(x) = f(\bar{x}) + Q(x - \bar{x});$$
3. *f è differenziabile e si ha $\nabla f(x) \in SO(n)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

L'equivalenza di *1* e *2* è un semplice corollario del teorema precedente.

2 implica *3* è immediato (basta derivare).

Dimostreremo che *3* implica *2*, proponendo un'elegante dimostrazione di David Kinderlehrer [21].

Prima conviene ricordare la definizione di cofattore di una matrice (o di un'applicazione lineare).

Consideriamo una matrice A quadrata di ordine n e indichiamo con M_{ij} la sottomatrice di A di ordine $n-1$ ottenuta da A cancellandone la riga i-esima e la colonna j-esima. Il determinante $\det(M_{ij})$ si chiama *minore* dell'elemento a_{ij} di A; si definisce *cofattore* di a_{ij} il minore con segno

$$(\mathrm{cof} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Indicheremo con $\mathrm{cof}A$ la matrice dei cofattori degli elementi di A. È ben noto che il determinante della matrice A è uguale alla somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando gli elementi di ogni riga (o colonna) per i rispettivi cofattori:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\mathrm{cof}A)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathrm{cof}A)_{ij},$$

non sommato su j e i, rispettivamente. Da questa definizione discende il seguente teorema.

Teorema 1.5. *Per qualsiasi matrice quadrata A*

$$A(\mathrm{cof}A)^T = (\mathrm{cof}A)^T A = I \det A \tag{1.3}$$

in cui I è la matrice identica. Così, se $\det A \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{cof}A)^T$$

Corollario 1.6. *Per ogni $A \in SO(n)$ si ha*

$$\mathrm{cof}A = A$$

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e $F = \nabla u$. Grazie alla possibiità di invertire l'ordine di derivazione, si ha

$$\mathrm{Div}(\mathrm{cof}F) := \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{cof}F)_{ij,j} = 0,$$

come è facile dimostrare per $n = 2, 3$, si veda Lemma 8.1.4 di [13] per n generica.

Dimostrazione (del Teorema 1.4) Rimaneva da dimostrare che *3⇒2*. Diamo la dimostrazione solo per $f \in C^3$. In seguito tale ipotesi verrà rimossa. Indicato con $F = \nabla f$, si ha

$$\mathrm{Div}(\mathrm{cof}F) = 0. \tag{1.4}$$

Ora, siccome per ipotesi $F \in SO(n)$ allora, per il corollario si ha $\mathrm{cof}F = F$, cosicchè la formula precedente diventa

$$\mathrm{Div}\nabla f = 0$$

cioè

$$\Delta f = 0. \tag{1.5}$$

Si ha quindi che f è una funzione armonica. Si ha inoltre

$$|\nabla f|^2 = |F|^2 = \sum_{ij} F_{ij}^2 = \mathrm{tr}(F^T F) = \mathrm{tr}(I) = n.$$

Riunendo il tutto si ha dunque

$$2|\nabla^2 f|^2 = \Delta|\nabla f|^2 - 2\nabla f \cdot \nabla\Delta f = 0$$

da cui segue che ∇f è costante e quindi, integrando, si ottiene la *(2)*.[3] □

Corollario 1.7. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. f è una deformazione rigida se e solo se esistono $Q \in SO(3)$ ed $a \in \mathbb{R}^n$ tali che*

$$f(x) = Qx + a \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Osserviamo che se $f(x) = Qx + a$ è una deformazione rigida si ha ovviamente $F = \nabla f = Q$.

[3] Per rimuovere l'ipotesi aggiuntiva $f \in C^3$, si può osservare che la (1.4) vale nel senso delle distribuzioni. Allora vale nel senso delle distribuzioni anche la (1.5), da cui segue che f è armonica e quindi addirittura C^∞. Siamo così ricondotti al caso precedente.

1.6 Teorema di decomposizione polare

Teorema 1.8. *Sia F una matrice di ordine n con $\det F > 0$. Allora esistono uniche $R \in SO(n)$ ed $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva tali che*

$$F = RU.$$

Dimostrazione Sia $C = F^T F$. Allora C è simmetrica (ovvio) e definita positiva. Infatti, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$Cv \cdot v = F^T F v \cdot v = Fv \cdot Fv = |Fv|^2$$

quindi $Cv \cdot v \geq 0$ per ogni v e, siccome F è invertibile allora $Cv \cdot v = 0 \iff Fv = 0 \iff v = 0$.

Per un corollario del teorema spettrale esiste una matrice ortogonale Q tale che $Q^T C Q = \Lambda := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ con $\lambda_i > 0$ per ogni i. Sia $\sqrt{\Lambda} := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ e definiamo $U := Q\sqrt{\Lambda}Q^T$. Allora si ha che U è simmetrica e definita positiva e inoltre

$$U^2 = QHQ^T QHQ^T = QH^2Q^T = Q\Lambda Q^T = C.$$

Posto $R := FU^{-1}$ si ha ovviamente $F = RU$ e $R \in SO(n)$, infatti

$$R^T R = U^{-T} F^T F U^{-1} = U^{-T} C U^{-1} = U^{-T} U^2 U^{-1} = I.$$

Dimostriamo l'unicità. Supponiamo dunque che $F = RU = SV$. Da $U = R^T F$ e $V = S^T F$ si ha che $U^2 = V^2 = F^T F = C$. Anzitutto osserviamo che, siccome C è simmetrica allora esistono n autovettori linearmente indipendenti che quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$. Sia a uno degli autovettori di questa base. Siccome a è un autovettore di C allora esiste un autovalore $\omega > 0$ tale che $Ca = \omega a$. Allora $U^2 a = \omega a$ e quindi

$$0 = (U^2 - \omega I)a = (U + \sqrt{\omega} I)(U - \sqrt{\omega} I)a.$$

Posto $v = (U - \sqrt{\omega} I)a$ si ha $Uv = -\sqrt{\omega} v$ da cui seguirebbe che U avrebbe un autovalore negativo. Ne consegue che $v = 0$, per cui $Ua = \sqrt{\omega} a$. Ragionando alla stessa maniera con V si ottiene che $Va = \sqrt{\omega} a$ quindi U e V coincidono sugli autovettori di C cioè su una base di $\mathbb{R}^n$ e quindi, per la linerità, coincidono su tutto lo spazio. □

Se f è una deformazione omogenea allora, dal teorema di decomposizione polare, si ha che $F(x) = F = RU$. Possiamo interpretare tale deocmposizione nel seguente modo: la deformazione "prodotta" da F è la composizione della deformazione "prodotta" da U seguita da una rotazione rigida. In altre parole, la deformazione "prodotta" da F, a meno di una rotazione rigida, è uguale a quella prodotta da U. Se f non è omogenea allora le precedenti considerazioni hanno soltanto un valore locale.

Ci si può quindi attendere, da quanto appena detto, che le variazioni geometriche del corpo siano determinate dalla sola U e non da R. Questo è quanto verrà dimostrato nella prossima sezione.

Esercizio Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormale. Trovare la decomposizione polare della matrice F definita da

$$\begin{aligned} Fe_1 &= \frac{3\sqrt{3}+1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}-3}{2} e_2, \\ Fe_2 &= \frac{\sqrt{3}+3}{2} e_1 + \frac{3\sqrt{3}-1}{2} e_2, \\ Fe_3 &= e_3. \end{aligned}$$

Soluzione.

La matrice rappresentativa di F è

$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+3 & 0 \\ \sqrt{3}-3 & 3\sqrt{3}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un semplice calcolo mostra che la matrice rappresentativa di $C = F^T F$ è

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-3 & 0 \\ \sqrt{3}+3 & 3\sqrt{3}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+3 & 0 \\ \sqrt{3}-3 & 3\sqrt{3}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La sua equazione caratteristica risulta

$$\det(C - \lambda I) = ((10-\lambda)^2 - 6^2)(\lambda - 1) = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_1 = 16, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 1,$$

ed i corrispondenti autovettori sono

$$n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \quad n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \quad n_3 = e_3.$$

Quindi si ha

$$C = 16 n_1 \otimes n_1 + 4 n_2 \otimes n_2 + n_3 \otimes n_3,$$

e

$$U := \sqrt{C} = 4 n_1 \otimes n_1 + 2 n_2 \otimes n_2 + n_3 \otimes n_3.$$

La matrice inversa di U risulta quindi essere

$$U^{-1} = \frac{1}{4} n_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2} n_2 \otimes n_2 + n_3 \otimes n_3.$$

Utilizzando le espressioni degli autovettori si ottiene

$$U = 3(\mathrm{e}_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3,$$

e

$$U^{-1} = \frac{3}{8}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) - \frac{1}{8}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + e_3 \otimes e_3.$$

Il tensore $R = FU^{-1}$ ha come matrice rappresentativa

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+3 & 0 \\ \sqrt{3}-3 & 3\sqrt{3}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e quindi possiamo scrivere

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) + e_3 \otimes e_3.$$

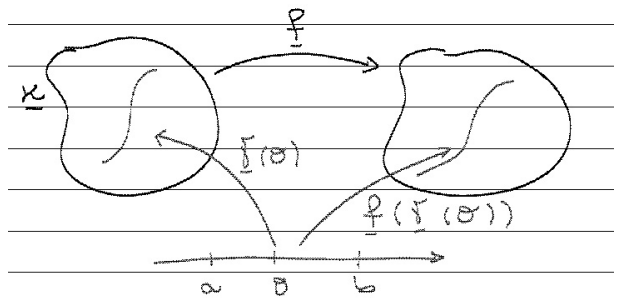
1.7 Variazioni di volume, di area, di lunghezza e di angolo

Variazione di lunghezza

Sia $f : \kappa(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}^3$ una deformazione.

Consideriamo una curva γ di classe C^1 in $\kappa(\mathcal{B})$. Sia $\gamma : [a, b] \to \kappa(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^3$ una sua rappresentazione parametrica.

Alla curva γ corrisponderà una curva deformata $f \circ \gamma$, di cui vogliamo calcolare la lunghezza.



La lunghezza ℓ_0 della curva indeformata (nella configurazione κ) è data da (essendo di classe C^1)

$$\ell_0 = \int_a^b |\frac{d\gamma}{d\theta}| d\theta = \int_a^b |\dot{\gamma}(\theta)| d\theta$$

mentre a deformazione avvenuta si ha

$$\ell = \int_a^b |\frac{d(f \circ \gamma)}{d\theta}| d\theta.$$

Per la formula di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{d(f\circ\gamma)}{d\theta}\right| &= |[(\nabla f) \circ \gamma]\, \dot{\gamma}| = |F(\gamma)\dot{\gamma}| = \big(F(\gamma)\dot{\gamma} \cdot F(\gamma)\dot{\gamma}\big)^{1/2} \\ &= \big(F(\gamma)^T F(\gamma)\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}\big)^{1/2} = \big(C(\gamma)\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}\big)^{1/2}, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$C(\gamma) = F(\gamma)^T F(\gamma) = U^2 \tag{1.6}$$

dove U è la matrice simmetrica definita positiva della decomposizione polare di F. Per cui

$$\ell = \int_a^b \big(C(\gamma)\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}\big)^{1/2} d\theta,$$

e la variazione di lunghezza è data da

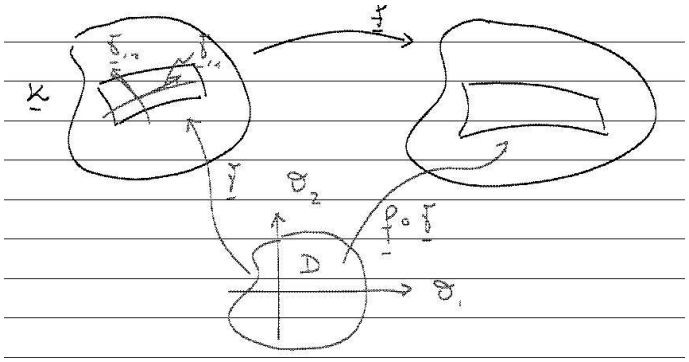
$$\ell - \ell_0 = \int_a^b \big(C(\gamma)\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}\big)^{1/2} - |\dot{\gamma}|\, d\theta.$$

Variazioni di area

Sia $f : \kappa(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}^3$ una deformazione.

Consideriamo una superficie γ di classe C^1 in κ. Sia $\gamma : D \to \kappa(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^3$ una sua rappresentazione parametrica, con D sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ diffeomorfo ad una palla aperta.

Alla superficie γ corrisponderà una superficie deformata $f \circ \gamma$, di cui vogliamo calcolare l'area.



L'area a_0 della superficie indeformata è data da

$$a_0 = \int_D \left|\gamma_{,1} \wedge \gamma_{,2}\right| d\theta_1 d\theta_2$$

mentre a deformazione avvenuta si ha

$$a = \int_D \left|(f \circ \gamma)_{,1} \wedge (f \circ \gamma)_{,2}\right| d\theta_1 d\theta_2.$$

Per la formula di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\left|(f \circ \gamma)_{,1} \wedge (f \circ \gamma)_{,2}\right| = \left|F(\gamma)\gamma_{,1} \wedge F(\gamma)\gamma_{,2}\right|$$

È facile verificare usando le multilinearità (esercizio) che nel caso $n = 3$ si ha

$$\mathrm{cof}F(\alpha \wedge \beta) = F\alpha \wedge F\beta \quad \forall \alpha, \beta,$$

per cui

$$F(\gamma)\gamma_{,1} \wedge F(\gamma)\gamma_{,2} = \mathrm{cof}F(\gamma)\, \gamma_{,1} \wedge \gamma_{,2}.$$

Sia $\nu := \gamma_{,1} \wedge \gamma_{,2}$ e $n := (f \circ \gamma)_{,1} \wedge (f \circ \gamma)_{,2}$. Si osservi che ν e n sono dei vettori ortogonali alle superfici $\gamma(D)$ e $f(\gamma(D))$, rispettivamente, e che, dalla precedente equazione, vale la relazione

$$n = \mathrm{cof}F(\gamma)\nu. \tag{1.7}$$

Dunque, ricordando che $\mathrm{cof}F = F^{-T} \det F$ e che $\det F > 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\left|(f \circ \gamma)_{,1} \wedge (f \circ \gamma)_{,2}\right| &= \left|\mathrm{cof}F(\gamma)\nu\right| = \det F(\gamma)\left|F(\gamma)^{-T}\nu\right| = \det F(\gamma)\big(F(\gamma)^{-T}\nu \cdot F(\gamma)^{-T}\nu\big)^{1/2} \\
&= \det F(\gamma)\big(F(\gamma)^{-1}F(\gamma)^{-T}\nu \cdot \nu\big)^{1/2} = \det F\big((F(\gamma)^T F(\gamma))^{-1}\nu \cdot \nu\big)^{1/2} \\
&= \big(\det C(\gamma)\ C(\gamma)^{-1}\nu \cdot \nu\big)^{1/2}
\end{aligned}$$

dove $C(\gamma)$ è come nella (1.6). Quindi

$$a = \int_D \big(\det C(\gamma)\ C(\gamma)^{-1}\nu \cdot \nu\big)^{1/2} d\theta_1 d\theta_2$$

Variazioni di volume

Il volume iniziale di un insieme misurabile $A \subset \kappa(\mathcal{B})$ è dato da

$$v_0 := \int_A dx$$

mentre a deformazione avvenuta è

$$v := \int_{f(A)} dy = \int_A \det F \, dx = \int_A (\det C)^{1/2} \, dx.$$

Si osservi che la richesta $\det F > 0$ implica che una configurazione di volume strettamente positivo non può essere deformata in una configurazione di volume nullo.

Variazioni d'angolo

Si considerino due curve $\gamma, \mu : [a, b] \to \kappa(\mathcal{B})$ di classe C^1 passanti entrambi per un punto x_0 parametrizzate dalla lunghezza d'arco. Siano g^0 e m^0, rispettivamente, i vettori tangenti alle due curve in x_0. Allora l'angolo sotteso dalle due curve α^0 è dato da

$$\alpha^0 = \arccos(g^0 \cdot m^0).$$

Alle curve γ e μ corrisponderanno due curve $f \circ \gamma$ e $f \circ \mu$ passanti entrambi per $f(x_0)$. Siano

$$g := \frac{f \circ \gamma}{d\theta}\Big|_{y=f(x_0)}, \qquad m := \frac{f \circ \mu}{d\theta}\Big|_{y=f(x_0)}.$$

L'angolo sotteso dalle due curve sarà

$$\alpha = \arccos(\frac{g}{|g|} \cdot \frac{m}{|m|}).$$

Per la formula di derivazione composta si ha

$$g = \frac{f \circ \gamma}{d\theta}\Big|_{y=f(x_0)} = (F(\gamma)\dot{\gamma})\Big|_{y=f(x_0)} = F(f(x_0))g^0,$$

e quindi

$$\alpha = \arccos(\frac{F(f(x_0))g^0}{|F(f(x_0))g^0|} \cdot \frac{F(f(x_0))m^0}{|F(f(x_0))g^0|}) = \arccos(\frac{C(f(x_0))g^0 \cdot m^0}{(C(f(x_0))g^0 \cdot g^0)^{1/2} \, (C(f(x_0))m^0 \cdot m^0)^{1/2}}).$$

1.8 I tensori di Cauchy-Green e di Green-Saint Venant

Si osserva quindi che le variazioni di lunghezza, d'area, di volume e d'angolo dipendono semplicemente da $C = U^2$ e non da F. In altre parole non dipendono dalla rotazione R nella decomposizione polare $F = RU$.

L'applicazione lineare individuata dalla matrice

$$C = F^T F$$

è detta *tensore destro di Cauchy-Green*.

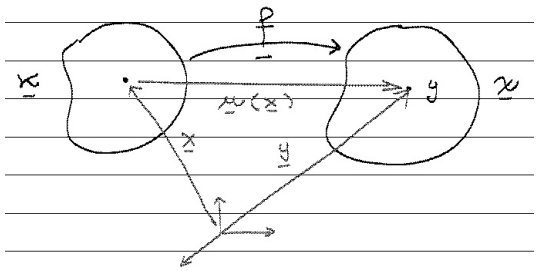
A deformazione nulla si ha $F = I$ e $C = I$. La misura di deformazione

$$E = \frac{1}{2}(C - I)$$

fa corrispondere ad una deformazione nulla il tensore nullo ed è chiamata *tensore di Green-Saint Venant o lagrangiano*.

1.9 Deformazioni infinitesime

Sia κ la configurazione di riferimento in un dato corpo e χ un piazzamento.



Indichiamo, come al solito, con $x = \kappa(X)$ e con $y = \chi(X) = f(x)$.

Si definisce *spostamento* del punto X dalla posizione occupata nella configurazione κ a quella occupata nel piazzamento χ la funzione

$$u(x) = f(x) - x$$

Il *gradiente di spostamento* si indica con

$$H(x) := \nabla u(x) = F(x) - I$$

Una deformazione f è "piccola" se il gradiente di deformazione F differisce di poco da I. Indichiamo con

$$\varepsilon(x) := |F(x) - I| = |H(x)|$$

il *parametro di piccolezza* della deformazione.

Dato un gradiente di spostamento H, sia $\tilde{H}(x) = \frac{H(x)}{|H(x)|}$ se $H(x) \neq 0$ e $\tilde{H}(x) = A$, dove A è una qualsiasi matrice, altrimenti. Si ha $|\tilde{H}| = 1$ e

$$H = \varepsilon \tilde{H}$$

che vale anche se $H = 0$ perchè in tal caso $\varepsilon = 0$.

Nella cosiddetta *teoria infinitesima* si suppone che

$$\varepsilon_{\max} := \sup_{x \in \kappa(\mathcal{B})} \varepsilon(x)$$

sia piccolo e si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore al primo di $\varepsilon_{\max}$.

Ad esempio si ha

$$\begin{aligned} C &= F^T F = U^2 = (I + \varepsilon \tilde{H})^T (I + \varepsilon \tilde{H}) = I + \varepsilon \tilde{H}^T + \varepsilon \tilde{H} + \varepsilon^2 \tilde{H}^T \tilde{H} \\ &\simeq I + \varepsilon \tilde{H}^T + \varepsilon \tilde{H} = I + H^T + H, \end{aligned} \tag{1.8}$$

dove $\simeq$ va interpretato, in teoria infinitesima, come un uguale.

Deformazioni rigide infinitesimi

Se inoltre la deformazione è rigida, i.e. $F = Q \in SO(3)$, siccome $C = F^T F = Q^T Q = I$ allora la (1.8) diviene

$$I = I + H^T + H$$

da cui segue che $H = -H^T$, cioè il gradiente di spostamento H è un tensore emisimmetrico (skew symmetric), ovvero

$$H \in \mathrm{Skw} := \{W \in R^{3\times 3} \ : \ W = -W^T\}.$$

Dal fatto che $u(x) = f(x) - x$ e che se f è rigida allora $f(x) = Qx + a$ (Corollario (1.7)) e quindi $u(x) = (Q - I)x + a = Hx + a$, discende la definizione seguente.

Definizione 1.9. *Uno spostamento u si dice* rigido infinitesimo *se esiste $W \in \mathrm{Skw}$ ed un vettore $a \in \mathbb{R}^3$ per cui si ha*

$$u(x) = a + Wx$$

Osservazione 1.10. Osserviamo che $W \in \mathrm{Skw}$ se e solo se, in una fissata base ortogonale $\{e_1, e_2, e_3\}$, W è della forma

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ & 0 & -\alpha \\ \mathrm{Skw} & & 0 \end{pmatrix}$$

quindi W è completamente individuata da sole 3 componenti. Il vettore assiale ω associato a W è il vettore che, nella base $\{e_1, e_2, e_3\}$, ha lo sviluppo

$$\omega = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3.$$

Come si verifica facilmente, se ω è il vettore assiale associato a W si ha

$$Wa = \omega \wedge a \qquad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}^3.$$

Tensore di deformazione infinitesimo

Dalla (1.8) si ha

$$\begin{aligned} U^2 &= I + \varepsilon \tilde{H}^T + \varepsilon \tilde{H} = I + \varepsilon \tilde{H}^T + \varepsilon \tilde{H} + \varepsilon^2 \big(\frac{\tilde{H}^T + \tilde{H}}{2}\big)^2 \\ &= \big(I + \varepsilon \frac{\tilde{H}^T + \tilde{H}}{2}\big)^2 = \big(I + \frac{H^T + H}{2}\big)^2, \end{aligned}$$

per cui U, a meno di infinitesimi di ordine superiore a ε, è dato da

$$U = I + \frac{H^T + H}{2} =: I + E, \tag{1.9}$$

dove abbiamo posto

$$E := \frac{H^T + H}{2}.$$

La matrice E, che altro non è che la *parte simmetrica* di H, viene chiamata *tensore di deformazione infinitesima*, o brevemente, utilizzando la terminologia inglese, *strain*. Con $H(x) = \nabla u(x) =$ si ha

$$E(x) =: Eu(x) = \frac{1}{2}\big(\nabla u(x) + \nabla u(x)^T\big).$$

Si osservi che abbiamo denotato con la stessa lettera lo strain e il tensore di Green-Saint Venant. Questo abuso di notazione è stato fatto in quanto questi due tensori, in teoria infinitesima, coincidono.

Teorema di decomposizione polare infinitesimo

Indicando con $\tilde{E} = (\tilde{H}^T + \tilde{H})/2$ si ha che

$$U = I + \varepsilon \tilde{E},$$

e quindi a meno di infinitesimi di ordine superiore, come si può facilmente verificare, si ha

$$U^{-1} = I - \varepsilon \tilde{E}.$$

Dalteorema di decomposizione polare abbiamo $F = RU$ e quindi

$$\begin{aligned} R &= FU^{-1} = (I + \varepsilon \tilde{H})(I - \varepsilon \tilde{E}) = I + \varepsilon \tilde{H} - \varepsilon \tilde{E} = I + \varepsilon \frac{\tilde{H} - \tilde{H}^T}{2} = I + \frac{H - H^T}{2} \\ &= I + W, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$W := \frac{H - H^T}{2}.$$

La matrice W è la parte emisimmetrica di H. Con $H(x) = \nabla u(x)$ indicheremo anche con $W(x) = Wu(x) := \frac{1}{2}\big(\nabla u(x) - \nabla u(x)^T\big)$.

Ponendo, con ovvia notazione, $W = \varepsilon \tilde{W}$ possiamo riscrivere il teorema di decomposizione polare nel seguente modo

$$I + H = I + \varepsilon \tilde{H} = F = RU = (I + \varepsilon \tilde{W})(I + \varepsilon \tilde{E}) = I + \varepsilon \tilde{E} + \varepsilon \tilde{W} = I + E + W,$$

ossia, in teoria infinitesima si reduce alla uguaglianza

$$H = E + W.$$

Mentre in teoria finita il teorema di decomposizione polare è la composizione di due matrici, in teoria infinitesima è semplicemente la somma di due matrici.

Osserviamo che se $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ (o anche semplicemente una distribuzione, cioè $u_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$) allora si ha

$$W_{ij,k} = E_{ik,j} - E_{jk,i};$$

infatti, grazie alla possibilità di scambiare l'ordine di integrazione

$$2W_{ij,k} = (u_{i,j} - u_{j,i})_{,k} = u_{i,jk} - u_{j,ik} = u_{i,kj} + u_{k,ij} - u_{k,ji} - u_{j,ki} = 2E_{ik,j} - 2E_{jk,i} \tag{1.10}$$

Teorema 1.11. *Sia $u \in \mathscr{D}'(\Omega; \mathbb{R}^3) := \mathscr{D}'(\Omega)^3$. Le seguenti proposizioni sono equivalenti*

1. *u è uno spostamento rigido infinitesimo;*
2. *$Eu = 0$.*

Dimostrazione *1⇒2* è banale perchè il gradiente di u è emisimmetrico e quindi ha parte simmetrica nulla.

Mostriamo che *2⇒1*. Sia $u \in C^2$. Se $Eu = 0$ allora, per la relazione (1.10) si ha

$$W_{ij,k} = 0,$$

da cui

$$H_{ij,k} = E_{ij,k} + W_{ij,k} = 0.$$

Le distribuzioni H_{ij}, avendo gradiente nullo, sono dunque costanti. Dunque $H(x) = C$ (matrice costante) per ogni x. Ne consegue che esiste $a \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$u(x) = a + Hx.$$

Dato che $Eu(x) = 0$ si ha $H \in \mathrm{Skw}$ e quindi u è uno spostamento rigido infinitesimo. La stessa dimostrazione, interpretando opportunamente le derivate, vale anche per $u \in \mathscr{D}'(\Omega; \mathbb{R}^3)$. □

1.10 Variazioni di volume, di area, di lunghezza e di angolo in teoria infinitesima

In questa sezione utilizzeremo la notazione introdotta nella Sezione 1.7.

Variazioni di lunghezza in teoria infinitesima

Dalla (1.8) e dalla definizione di strain si ha

$$C = I + 2E,$$

per cui

$$\begin{aligned}(C\dot\gamma\cdot\dot\gamma)^{1/2} &= (|\dot\gamma|^2 + 2E\dot\gamma\cdot\dot\gamma)^{1/2} = |\dot\gamma|(1 + 2E\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\cdot\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|} + (E\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\cdot\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|})^2)^{1/2}\\ &= |\dot\gamma|(1 + E\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\cdot\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}).\end{aligned}$$

Per cui

$$\ell = \int_a^b \big(C(\gamma)\dot\gamma\cdot\dot\gamma\big)^{1/2} d\theta = \int_a^b |\dot\gamma|(1 + E\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\cdot\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|})d\theta,$$

e la variazione di lunghezza è data da

$$\ell - \ell_0 = \int_a^b \big(C(\gamma)\dot\gamma\cdot\dot\gamma\big)^{1/2} - |\dot\gamma|\, d\theta = \int_a^b E\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\cdot\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}|\dot\gamma|\, d\theta.$$

La variazione di lunghezza può essere scritta in maniera più suggestiva in forma differenziale. Poniamo

$$\mathcal{L}(\theta) := \int_a^\theta |\dot\gamma|(1 + E\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\cdot\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|})d\theta, \qquad \mathcal{L}_0(\theta) := \int_a^\theta |\dot\gamma|\, d\theta.$$

Dato che $\mathcal{L}_0$ è una funzione crescente di θ possiamo invertire $\ell_0 = \mathcal{L}_0(\theta)$ e scrivere $\theta = \mathcal{L}_0^{-1}(\ell_0)$. Si ha

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\theta} = |\dot\gamma|(1 + E\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\cdot\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}), \quad \frac{d\mathcal{L}_0^{-1}}{d\ell_0} = \frac{1}{\frac{d\mathcal{L}_0}{d\theta}\circ\mathcal{L}_0^{-1}} = \frac{1}{|\dot\gamma|\circ\mathcal{L}_0^{-1}},$$

e quindi posto $\ell := \mathcal{L}\circ\mathcal{L}_0^{-1}$ si ha

$$\frac{d\ell}{d\ell_0} = \frac{d\mathcal{L}\circ\mathcal{L}_0^{-1}}{d\ell_0} = \frac{d\mathcal{L}}{d\theta}\circ\mathcal{L}_0^{-1}\frac{d\mathcal{L}_0^{-1}}{d\ell_0} = (1 + E\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\cdot\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|})\circ\mathcal{L}_0^{-1}.$$

Da cui

$$\frac{d(\ell - \ell_0)}{d\ell_0} = E\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\cdot\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\circ\mathcal{L}_0^{-1}.$$

Quest'ultima relazione afferma che la variazione relativa di lunghezza nella direzione $\dot\gamma/|\dot\gamma|$ è data $E\dot\gamma/|\dot\gamma|\cdot\dot\gamma/|\dot\gamma|$.

Variazioni di volume in teoria infinitesima

La variazione di volume in teoria finita è data da

$$v - v_0 = \int_A (\det C)^{1/2} - 1\, dx,$$

dove $C = I + 2E$.

Per linearizzare il determinante utilizziamo la ben nota formula

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + I_A \lambda^2 - \mathit{II}_A \lambda + \mathit{III}_A$$

che vale per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, con

$$I_A := \text{tr } A = A \cdot I, \qquad \mathit{II}_A := \text{tr cof} A, \qquad \mathit{III}_A := \det A.$$

Quindi, a meno di infinitesimi di ordine superiore a ε, si ha

$$\det C = \det(2E - (-1)I) = 1 + 2\text{tr } E = 1 + 2\text{tr } E + (\text{tr } E)^2,$$

e

$$(\det C)^{1/2} = 1 + \text{tr } E.$$

Deduciamo quindi che in teoria infinitesima la variazione di volume è data da

$$v - v_0 = \int_A \text{tr } E\, dx.$$

Variazioni di area in teoria infinitesima

La variazione d'area, in teoria finita, è data da

$$a - a_0 = \int_D \left(\det C(\gamma)\ C(\gamma)^{-1}\nu \cdot \nu\right)^{1/2} - |\nu|\, d\theta_1 d\theta_2.$$

Dato che, in teoria infinitesima, $(\det C)^{1/2} = 1 + \text{tr } E$ e $C^{-1} = I - 2E$ si ha

$$\begin{aligned}
\left(\det C(\gamma)\ C(\gamma)^{-1}\nu \cdot \nu\right)^{1/2} &= (1 + \text{tr } E)((I - 2E)\nu \cdot \nu)^{1/2} \\
&= (1 + \text{tr } E)|\nu|(1 - 2E\frac{\nu}{|\nu|} \cdot \frac{\nu}{|\nu|})^{1/2} \\
&= (1 + \text{tr } E)|\nu|(1 - E\frac{\nu}{|\nu|} \cdot \frac{\nu}{|\nu|}) = (1 + \text{tr } E - E\frac{\nu}{|\nu|} \cdot \frac{\nu}{|\nu|})|\nu| \\
&= (1 + E \cdot (I - \frac{\nu}{|\nu|} \otimes \frac{\nu}{|\nu|}))|\nu|,
\end{aligned}$$

e quindi

$$a - a_0 = \int_D E \cdot (I - \frac{\nu}{|\nu|} \otimes \frac{\nu}{|\nu|})|\nu|\, d\theta_1 d\theta_2.$$

Variazioni di angolo in teoria infinitesima

Siano g^0 e m^0, due vettori unitari e, per semplicità, ortogonali. Allora l'angolo sotteso dai due vettori è $\alpha^0 = \pi/2$. Dato che l'angolo sotteso dai vettori deformati è stato denotato con α si ha che la variazione d'angolo è data da $\delta\alpha = \pi/2 - \alpha$. Per cui $\sin\delta\alpha = \cos\alpha$ dove, in teoria finita,

$$\cos\alpha = \frac{C(f(x_0))g^0 \cdot m^0}{(C(f(x_0))g^0 \cdot g^0)^{1/2}\,(C(f(x_0))m^0 \cdot m^0)^{1/2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\sin\delta\alpha &= \frac{(I+2E)g^0\cdot m^0}{((I+E)g^0\cdot g^0)\,((I+E))m^0\cdot m^0)} = \frac{2Eg^0\cdot m^0}{1+Eg^0\cdot g^0+Em^0\cdot m^0} \\
&= \frac{2Eg^0\cdot m^0}{1+Eg^0\cdot g^0+Em^0\cdot m^0}\frac{1-Eg^0\cdot g^0-Em^0\cdot m^0}{1-Eg^0\cdot g^0-Em^0\cdot m^0} \\
&= 2Eg^0\cdot m^0.
\end{aligned}$$

Per cui a meno di infinitesimi di ordine superiore in ε si ha

$$\delta\alpha = 2Eg^0\cdot m^0.$$

1.11 Significato delle componenti del tensore di deformazione infinitesima

Lo strain, in una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ ha la seguente rappresentazione matriciale

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ & E_{22} & E_{23} \\ \text{Sym} & & E_{33} \end{pmatrix}$$

ed è quindi rappresentato da 6 componenti. Per capire il significato di E_{11} si consideri una retta, denotata con γ, parallela all'asse x_1. Allora

$$\frac{d(\ell-\ell_0)}{d\ell_0}\circ\mathcal{L}_0 = E\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\cdot\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|} = Ee_1\cdot e_1 = E_{11},$$

e quindi E_{11} denota l'allungamento relativo lungo la direzione e_1. In maniera simile s'interpretano le componenti E_{22} e E_{33}.

Consideriamo ora E_{12}. Consideriamo la retta parallela all'asse x_1 e la retta parallela all'asse x_2, denotate rispettivamente con γ e μ i cui vettori tangenti sono $g^0 = e_1$ e $m^0 = e_2$. L'angolo sotteso dalle due curve è ovviamente $\pi/2$. La metà della variazione d'angolo è

$$\frac{\delta\alpha}{2} = Eg^0\cdot m^0 = Ee_1\cdot e_2 = E_{12}.$$

Analogo è il significato delle componenti E_{13} e E_{23}.

1.12 Proiezioni

Sia $\Omega := \kappa(\mathcal{B})$. Indichiamo con

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\Omega : \quad &= \{u(x) = a + Wx \ : \ W\in\text{Skw},\ a\in\mathbb{R}^3\} \\
&= \{u(x) = a + \omega\wedge x \ : \ \omega\in\mathbb{R}^3,\ a\in\mathbb{R}^3\}
\end{aligned}$$

l'insieme degli spostamenti rigidi infinitesimi su Ω.

Si osservi che se $|\Omega| = \mathcal{L}^3(\Omega) < +\infty$ allora

$$\mathcal{R}_\Omega \subset L^2(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

Esercizio 1.12. *$\mathcal{R}_\Omega$ è un sottospazio di $L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ di dimensione finita.*

Dato che $\mathcal{R}_\Omega$ è un sottospazio di dimensione finita di uno spazio di Hilbert allora è chiuso in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ quindi, per il Teorema delle Proiezioni (vedi Rudin [31], Teorema 4.11), esiste una ed una sola coppia di applicazioni P e Q tali che $P : L^2(\Omega;\mathbb{R}^3) \to \mathcal{R}_\Omega$, $Q : L^2(\Omega;\mathbb{R}^3) \to \mathcal{R}_\Omega^\perp$ e

$$u = Pu + Qu$$

per ogni $u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$. P e Q sono chiamate *proiezioni ortogonali* di $L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ su $\mathcal{R}_\Omega$ e $\mathcal{R}_\Omega^\perp$ e godono delle seguenti proprietà:

1. se $u \in \mathcal{R}_\Omega$ allora $Pu = u$ e $Qu = 0$;
2. se $u \in \mathcal{R}_\Omega^\perp$ allora $Pu = 0$ e $Qu = u$;
3. $\|u - Pu\| = \inf\{\|u - q\| \ : \ q \in \mathcal{R}_\Omega\}$ per ogni $u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$;
4. $\|u\|_2^2 = \|Pu\|_2^2 + \|Qu\|_2^2$;
5. P e Q sono lineari.

Esercizio 1.13. *Sia $u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Dimostrare che $r = Pu$ se e solo se $r \in \mathcal{R}_\Omega$ e*

$$\int_\Omega (u - r) \cdot q \, dx = 0 \quad \forall\, q \in \mathcal{R}_\Omega$$

Calcolo di Pu

Partiamo dal fatto che

$$\int_\Omega (u - Pu) \cdot q \, dx = 0 \quad \forall\, q \in \mathcal{R}_\Omega.$$

Poichè $q \in \mathcal{R}_\Omega$ se e solo se esistono $\omega, a \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$q = a + \omega \wedge x$$

allora la condizione precedente diviene

$$\int_\Omega (u - Pu) \cdot (a + \omega \wedge x) \, dx = 0 \quad \forall\, a,\, \omega \in \mathbb{R}^3. \tag{1.11}$$

Prendendo $\omega = 0$ si ha

$$\int_\Omega (u - Pu) \cdot a \, dx = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}^3,$$

da cui segue che

$$\int_\Omega (u - Pu) \, dx = 0.$$

Poichè $Pu \in \mathcal{R}_\Omega$ allora esistono $\omega^u \in \mathbb{R}^3$ e $a^u \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$Pu = a^u + \omega^u \wedge x$$

che sostituito sopra da

$$\int_\Omega (u(x) - a^u - \omega^u \wedge x) \, dx = 0$$

equivalente a

$$\int_\Omega u(x) \, dx - |\Omega| a^u - |\Omega| \omega^u \wedge x(\Omega) = 0 \tag{1.12}$$

dove $x(\Omega) := |\Omega|^{-1} \int_\Omega x\,dx$ è il baricentro di Ω.

Prendendo $a = 0$ nella (1.11) e sostituendo anche Pu si ha invece

$$\int_\Omega (u - a^u - \omega^u \wedge x) \cdot (\omega \wedge x)\,dx = 0 \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}^3.$$

da cui (scambiando i prodotti)

$$\int_\Omega (u - a^u - \omega^u \wedge x) \wedge x\,dx = 0$$

e quindi

$$\int_\Omega u \wedge x\,dx - \int_\Omega (\omega^u \wedge x) \wedge x\,dx - |\Omega| a^u \wedge x(\Omega) = 0. \tag{1.13}$$

Scegliendo un riferimento centrale cioè con origine in $x(\Omega)$ si ha $x(\Omega) = 0$ e (1.12) e (1.13) si semplificano in

$$\int_\Omega u(x)\,dx - |\Omega| a^u = 0 \tag{1.14}$$

$$-\int_\Omega x \wedge u\,dx + \int_\Omega x \wedge (\omega^u \wedge x)\,dx = 0. \tag{1.15}$$

Dalla (1.14) segue che

$$a^u = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\,dx$$

Nella (1.15), ricordando che $a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ si ha

$$x \wedge (\omega^u \wedge x) = |x|^2 \omega^u - (x \cdot \omega^u)x = (|x|^2 I - x \otimes x)\omega^u$$

dove, dati due vettori $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \otimes b$ denota il tensore di tipo $(1,1)$ (matrice)

$$a \otimes b = (a_i b^j)_{i,j=1,\dots,n}$$

detto *prodotto tensoriale di a e b* o *diade*.

Si ha dunque

$$\int_\Omega x \wedge (\omega^u \wedge x)\,dx = \int_\Omega (|x|^2 I - x \otimes x)\,dx\,\omega^u = I_O \omega^u$$

dove

$$I_O = \int_\Omega (|x|^2 I - x \otimes x)\,dx$$

è il tensore d'inerzia di Ω (pensato come corpo omogeneo di densità unitaria). Ricordiamo che si tratta di un tensore simmetrico (ovvio) e definito positivo a meno di casi degeneri.

Dalla (1.15) si ottiene quindi

$$\omega^u = I_O^{-1} \int_\Omega x \wedge u\,dx$$

Ne consegue che

$$\boxed{Pu = a^u + \omega^u \wedge x = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u\,dx + I_O^{-1} \int_\Omega x \wedge u\,dx \wedge x}$$

Capitolo 2

Dinamica dei continui

2.1 Riferimenti bibliografici

I principali riferimenti bibliografici per questo capitolo sono [26, 34].

2.2 Moto di un corpo

Il *moto* di un corpo $\mathcal{B}$ in un intervallo di tempo I è definito da una famiglia di deformazioni $t \mapsto f_t$, dove $f_t : \kappa(\mathcal{B}) \to \chi_t(\mathcal{B})$ è una deformazione per ogni $t \in I$. Sia

$$f : \kappa(\mathcal{B}) \times I \to \chi_t(\mathcal{B}) =: \Omega_t, \quad t \in I,$$

definita da

$$f(\cdot, t) := f_t.$$

Il moto si dirà *regolare (di classe C^2)* se $f \in C^2(\Omega \times I)$. Se f si può prolungare ad una funzione di classe $C^2(\overline{\Omega \times I})$ allora diremo che il moto è *regolare fin sulla frontiera*.

Il moto si dice *rigido* se le deformazioni $f(\cdot, t)$ sono isometrie per ogni $t \in I$.

Per semplicità di notazione definiamo $\Omega := \kappa(\mathcal{B})$ e identifichiamo il corpo $\mathcal{B}$ con la regione che occupa nella configurazione di riferimento. Di conseguenza chiameremo i punti $x \in \Omega$ *punti materiali*.

Fissato $x \in \Omega$, la curva di rappresentazione parametrica $t \mapsto f(x, t)$ è la *traiettoria* percorsa durante il moto dal punto materiale x.

In accordo con le notazioni del capitolo precedente, indicheremo con x la posizione nella configurazione di riferimento $\Omega = \kappa(\mathcal{B})$ e con y la posizione nella configurazione attuale (deformata), ovvero

$$y = f(x, t).$$

Si definisce *velocità (lagrangiana)* o *velocità materiale*, scritta $\dot{y}$, del punto materiale x, il vettore derivato della traiettoria, cioè

$$\boxed{\dot{y} := \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)}$$

useremo anche la notazione $\dfrac{dy}{dt}$ in luogo di $\dot{y}$.

Si definisce *accelerazione (lagrangiana)* o *accelerazione materiale*, scritta $\ddot{y}$, del punto materiale x, il vettore derivato della velocità, cioè

$$\boxed{\ddot{y} := \frac{\partial}{\partial t}\dot{y}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t).}$$

Dato che f_t è una deformazione, per ogni $t \in I$, si ha che f_t^{-1} esiste.

Si definiscono *velocità ed accelerazioni (euleriane)* o *velocità ed accelerazioni spaziali*, rispettivamente

$$\boxed{v := \dot{y} \circ f_t^{-1}, \quad a := \ddot{y} \circ f_t^{-1}}$$

che sono abusi di notazione per scrivere

$$v := \dot{y} \circ (f_t^{-1}, id), \quad a := \ddot{y} \circ (f_t^{-1}, id)$$

Per cui $\dot{y}$ e $\ddot{y}$ sono funzioni di (x,t), mentre v e a sono funzioni di (y,t).

Relazione tra le derivate

Nel capitolo precedente abbiamo indicato con ∇ e Div il gradiente e la divergenza rispetto alla variabile x. Indicheremo d'ora in avanti con D e div il gradiente e la divergenza rispetto alla variabile y.

Se $g : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora si ha che anche $h(y,t) := g(f^{-1}(y,t),t)$ è derivabile e sussiste la seguente relazione tra le derivate

$$\frac{dg}{dt}(x,t) = \frac{d}{dt}[h(f(x,t),t)] = \big[\frac{\partial h}{\partial t}(y,t) + \mathrm{D}h(y,t) \cdot \dot{y}\big]^{y=f(x,t)}$$

che si scrive anche, con abuso di notazione, semplicemente

$$\dot{g} := \frac{dg}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{D}h \cdot v.$$

In tal caso, per evitare confusione, conviene tenere sempre distinte le differenti notazioni $\frac{d}{dt}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$, per ricordare che il primo membro è espresso nelle variabili lagrangiane (x,t) e il secondo nelle variabili euleriane (y,t) e c'è di mezzo un cambiamento di variabile per passare dalle une alle altre. Un ulteriore abuso di notazione consiste nell'identificare g e h e si usa quindi anche scrivere

$$\boxed{\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \mathrm{D}} \tag{2.1}$$

Quest'ultima formula definisce un operatore differenziale $\frac{d}{dt}$ detto *derivata materiale (o sostanziale, o totale, o convettiva)*. Quando applicato ad una grandezza euleriana il simbolo $\frac{d}{dt}$ avrà quindi da ora in poi sempre il significato di derivata materiale.

Applicando tale formula a ciascuna componente di v si ha

$$\ddot{y} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \mathrm{D}v.$$

Infine, diremo che una funzione $h(y,t)$ è di classe C^k in $y \in \Omega_t$ e $t \in I$ (rispettivamente, di classe C^k fin sulla frontiera) se la funzione $(x,t) \mapsto h(f(x,t),t)$ è di classe $C^k(\Omega \times I)$ (rispettivamente si può prolungare ad una funzione di classe $C^k(\overline{\Omega \times I})$).

2.3 Conservazione della massa

Assumiamo che il corpo $\mathcal{B}$, e quindi Ω, sia equipaggiato con una funzione scalare su Ω chiamata *densità di massa*. La densità di massa al tempo $t \in I$ in $y \in \Omega_t$ è data da $\rho(y,t)$. Assumeremo che $\rho(y,t)$ sia di classe C^1 rispetto al complesso delle variabili (y,t), e che per ogni $t \in I$, $\rho(\cdot,t)$ sia integrabile. Con un abuso di notazione indicheremo con ρ pure $\rho \circ f_t$.

Sia P un sottoinsieme "regolare" (misurabile secondo Lebesgue) di Ω. Si definisce *massa* di P nella configurazione f al tempo t la quantità

$$m(P,t) := \int_{f_t(P)} \rho(\cdot,t)\,dy = \int_P \rho(\cdot,t)\det \nabla f_t\,dx = \int_P \rho(\cdot,t)\det F(\cdot,t)\,dx$$

dove $F(x,t) := \nabla f(x,t)$. Poniamo

$$\rho_\kappa(x,t) := \rho(x,t)\det F(x,t),$$

la densità di massa nella configurazione di riferimento nel punto x al tempo t, in modo che

$$m(P,t) = \int_P \rho_\kappa(\cdot,t)\,dx.$$

Assioma 2.1 (Principio di conservazione della massa)**.** *Per ogni sottoinsieme "regolare" P di Ω la massa $m(P,t)$ è costante nel tempo.*

L'assioma è tradotto dalla condizione

$$\frac{d}{dt}\int_{f_t(P)} \rho(\cdot,t)\,dy = 0, \quad \text{per ogni } P \subset \Omega \text{ "regolare"}, \tag{2.2}$$

o dalla condizione

$$\int_P \rho_\kappa(\cdot,t) - \rho_\kappa(\cdot,\tau)\,dx = 0, \quad \text{per ogni } P \subset \Omega \text{ "regolare" e per ogni } t,\tau \in I.$$

La seconda di queste implica immediatamente che ρ_κ non dipende da t, ossia

$$\rho_\kappa(x) := \rho_\kappa(x,t) = \rho(x,t)\det F(x,t). \tag{2.3}$$

Esercizio 2.2. *Dimostrare, utilizzando il polinomio caratteristico, che $\nabla_F \det F = F^{-T}\det F$ per ogni matrice invertibile F.*

Lemma 2.3. *Indicato on $F(x,t)$ il gradiente di deformazione, e supponendo che il moto sia regolare, si ha*

$$\frac{d}{dt}\det F(x,t) = \mathrm{div} v \circ f_t \det F.$$

Dimostrazione Per l'esercizio precedente

$$\frac{d}{dt}\det F = \nabla_F \det F \cdot \dot F = F^{-T}\det F \cdot \dot F$$

Dato che $F = \nabla f$ si ha $\dot F = \nabla \dot f = \nabla \dot y = \nabla(v \circ f_t) = \mathrm{D}v \circ f_t \nabla f_t = \mathrm{D}v \circ f_t\, F$ e quindi

$$F^{-T} \cdot \dot F = F^{-T} \cdot \mathrm{D}v \circ f_t\, F = I \cdot \mathrm{D}v \circ f_t = \mathrm{div} v \circ f_t,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'identità $F^{-T} \cdot (AF) = I \cdot A$ per ogni matrice A. Riunendo con la precedente, si ottiene la tesi. □

Assumendo $\rho \in C^1$ e il moto di classe C^2 si ha, differenziando (2.3) rispetto al tempo,

$$0 = \dot{\rho} \det F + \rho \frac{d}{dt} \det F = \dot{\rho} \det F + \rho \mathrm{div} v \circ f_t \det F,$$

e, tralasciando la composizione, si ha quindi

$$\dot{\rho} + \rho \, \mathrm{div} v = 0.$$

Dalla precedente equazione, utilizzando (2.1), si ottiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v) = 0, \tag{2.4}$$

chiamata *equazione di continuità della massa.*

L'equazione (2.4) si poteva ottenere direttamente dalla (2.2) usando il risultato seguente.

Teorema 2.4 (del trasporto)**.** *Sia $h = h(y,t)$ una funzione scalare di classe C^1 in $y \in \Omega_t$ e $t \in I$ fin sulla frontiera e supponiamo che il moto sia regolare fin sulla frontiera. Allora la funzione*

$$t \mapsto \int_{f_t(P)} h(y,t)\, dy$$

è derivabile in I e si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{f_t(P)} h(y,t)\, dy = \int_{f_t(P)} \Big(\frac{\partial h}{\partial t}(y,t) + \mathrm{div}(hv)(y,t) \Big)\, dy,$$

per ogni sottoinsieme regolare P di Ω.

Dimostrazione Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, le cui ipotesi sono soddisfatte sotto le condizioni di regolarità di h e del moto, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{f_t(P)} h(y,t)\, dy = \frac{d}{dt} \int_P h(f(x,t),t) \det F(x,t)\, dx = \int_P \frac{d}{dt} \big(h(f(x,t),t) \det F(x,t) \big)\, dx$$

quindi, posto $g(x,t) := h(f(x,t),t)$ si ha che l'ultimo integrale è uguale a

$$\begin{aligned}
\int_P \frac{d}{dt} \big(g(x,t) \det F(x,t) \big)\, dx &= \int_P \dot{g} \det F + g(x,t) \frac{d}{dt} (\det F)\, dx \\
&= \int_P \Big(\frac{\partial h}{\partial t} + h \cdot \mathrm{D}v \Big) \det F\, dx + \int_P g \, \mathrm{div} v \det F\, dx \\
&= \int_{f_t(P)} \Big(\frac{\partial h}{\partial t} + h \cdot \mathrm{D}v \Big)\, dy + \int_{f_t(P)} h \, \mathrm{div} v\, dy \\
&= \int_{f_t(P)} \frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}(hv)\, dy
\end{aligned}$$

e quindi la tesi. □

Dal teorema del trasporto, usando il teorema della divergenza, si deduce il seguente corollario.

Corollario 2.5. *Nelle ipotesi del teorema precedente, e se P ha frontiera sufficientemente regolare (ad esempio lipschitziana), allora si ha*

$$\frac{d}{dt} \int_{f_t(P)} h\, dy = \int_{f_t(P)} \frac{\partial h}{\partial t}\, dy + \int_{\partial f_t(P)} hv \cdot n\, d\sigma$$

dove n è il versore normale esterno a $f_t(P)$ (che deve esistere in ogni punto della frontiera, con l'eccezione al più di un insieme di misura nulla).

Nella ipotesi di validità del principio di conservazione della massa, dal teorema del trasporto si ottiene la seguente proposizione che fornisce una semplice regola di derivazione sotto il segno di integrale.

Proposizione 2.6. *Sia P un sottoinsieme regolare di Ω. Supponiamo che, fin sulla frontiera, $h = h(y,t)$ sia una funzione vettoriale di classe C^1, il moto sia regolare e la densità di massa sia di classe C^1. Se vale il principio di conservazione della massa, allora si ha*

$$\frac{d}{dt}\int_{f_t(P)} h(y,t)\rho(y,t)\,dy = \int_{f_t(P)} \dot{h}(y,t)\rho(y,t)\,dy$$

dove $\dot{h}$ a secondo membro denota la derivata materiale di h.

Dimostrazione La dimostrazione è immediata, infatti applicando la (2.4) ad ogni componente di h si ha

$$\frac{\partial h\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(h\rho v) = h\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial h}{\partial t} + h\mathrm{div}(\rho v) + \rho v\cdot \mathrm{D}h = \rho\frac{\partial h}{\partial t} + \rho v\cdot \mathrm{D}h = \rho\dot{h},$$

e la tesi segue dal teorema del trasporto. □

Assumeremo d'ora in poi che valga il principio di conservazione della massa.

2.4 Quantità di moto

Dato un sottoinsieme regolare P di Ω definiamo *quantità di moto di P*

$$Q(P,t) := \int_{f_t(P)} v(y,t)\rho(y,t)\,dy.$$

Indichiamo con $\mathfrak{F}(f_t(P))$ la risultante delle forze agenti su $f_t(P)$ all'istante t. Nelle ipotesi di regolarità C^2 del moto e C^1 della densità di massa, per il Teorema 2.4 si ha che $Q(P,t)$ è derivabile rispetto a t.

Assumiamo che valga il seguente *principio di conservazione della quantità di moto* (prima equazione cardinale).

Assioma 2.7 (Principio di conservazione della quantità di moto)**.** *Per ogni sottoinsieme regolare P di Ω e in ogni istante $t \in I$*

$$\frac{d}{dt}Q(P,t) = \mathfrak{F}(f_t(P)).$$

Sulla natura di $\mathfrak{F}(f_t(P))$ assumiamo che valga il seguente assioma.

Assumiamo che la risultante delle forze esercitate su P dall'esterno e dal resto del corpo Ω sia somma di due termini

$$\mathfrak{F}(f_t(P)) = \mathfrak{F}_b(f_t(P)) + \mathfrak{F}_c(f_t(P))$$

in cui $\mathfrak{F}_b(f_t(P))$ rappresenta *forze di volume*, causate per esempio dalla gravità o da campi elettromagnetici mentre $\mathfrak{F}_c(f_t(P))$ rappresenta le *forze di contatto*, dovute per esempio all'interazione tra i sottocorpi attraverso le parti comuni della frontiera.

Per quanto riguarda le forze di volume, è naturale assumere che si possano scrivere nella forma

$$\mathfrak{F}_b(f_t(P)) = \int_{f_t(P)} b\,dy, \quad b \in L^1(f_t(P);\mathbb{R}^3)$$

Quanto alle forze di contatto, assumeremo che per ogni insieme $f_t(P)$ esiste un vettore $t(y, \partial f_t(P)) \in L^1(\partial f_t(P); \mathbb{R}^3)$ (L^1 rispetto alla misura di Hausdorff bidimensionale) tale che

$$\mathfrak{F}_c(f_t(P)) = \int_{\partial f_t(P)} t(\cdot, \partial f_t(P))\, da.$$

La densità delle forze di contatto t dipende dal punto di applicazione e dalla superficie. Il postulato di Cauchy, che subito enunceremo, afferma che t dipende dalla superficie soltanto attraverso la normale.

Indichiamo con $S^2 := \{n \in \mathbb{R}^3 \ : \ |n| = 1\}$ la sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$.

Assioma 2.8 (Postulato di Cauchy o principio degli sforzi)**.** *Per ogni $t \in I$ esiste una funzione detta* tensione *tale che*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{t}(\cdot,\cdot,t): & \overline{\Omega}_t \times S^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (y,n) & \mapsto & \mathrm{t}(y,n,t) \end{array}$$

tale che,

$$\mathrm{t}(y,n,t) = \mathrm{t}(y, \partial f_t(P)),$$

dove n rappresenta il versore normale esterno a $f_t(P)$, per ogni $y \in \Omega_t$ e per ogni sottoinsieme P tale che $y \in \partial f_t(P)$.

Se si ammette che i domini $f_t(P)$ abbiano frontiera regolare, basta C^2, allora il Postulato di Cauchy può essere dimostrato, si veda [35].

Esercizio 2.9. *Sia $y_G(P,t)$ il baricentro di $f_t(P)$, ossia*

$$y_G(P,t) := \frac{1}{m(P,t)} \int_{f_t(P)} \rho\, y\, dy.$$

Assumendo che valga il principio di conservazione della massa, densità di massa di classe C^1 e moto regolare, dimostrare che il principio di conservazione della quantità di moto vale se e solo se

$$m(P,t)\ddot{y}_G(P,t) = \mathfrak{F}(f_t(P))$$

per ogni sottoinsieme regolare P di Ω. Il centro di massa di ogni sottocorpo si muove quindi come un punto materiale di massa $m(P,t)$ soggetto ad una forza pari alla risultante delle forze applicate al sottocorpo.

2.5 Il lemma fondamentale di Cauchy

Omettiamo per comodità di indicare la variabile t, ovvero supponiamo di considerare il corpo in un istante t fissato.

Lemma 2.10 (lemma fondamentale di Cauchy)**.** *Assumiamo che le funzioni $(y,n) \mapsto \mathrm{t}(y,n)$ e $y \mapsto b(y)$ siano continue nei rispettivi domini. Allora esiste un campo tensoriale del second'ordine continuo (i.e. una funzione continua a valori matrici) $T(y)$, detta* tensore degli sforzi*, tale che*

$$\mathrm{t}(y,n) = T(y)n \text{ per ogni } y \in \Omega_t \text{ e ogni } n \in S^2.$$

Prima di dare la dimostrazione proponiamo un paio di esercizi.

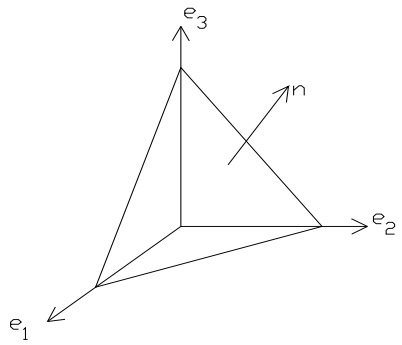


Figura 2.1: Tetraedro

Esercizio 2.11. *Si consideri un tetraedro, vedi Figura 2.1, avente una superficie, di area A, con normale esterna n e le altre tre superfici, di area A_i, aventi normale esterna $-\mathrm{e}_i$, per $i = 1, 2, 3$. Si dimostri che*

$$A_i = A\, n \cdot \mathrm{e}_i\,.$$

Soluzione Si denoti con a^i l'ascissa del punto d'intersezione del piano obliquo con l'asse parallelo a e_i, e con $v_i := a^i\,\mathrm{e}_i$ (non sommato su i). I vettori $v_3 - v_1$ e $v_2 - v_1$ appartengono alla superficie con normale n, quindi la normale n può scriversi come $n = (v_2 - v_1) \wedge (v_3 - v_1)/2A$, dove si é utilizzato il fatto che $2A = |(v_2 - v_1) \wedge (v_3 - v_1)|$. Quindi

$$\begin{aligned} 2An \cdot \mathrm{e}_i &= [(v_2 - v_1) \wedge (v_3 - v_1)] \cdot \mathrm{e}_i = (v_2 \wedge v_3 - v_1 \wedge v_3 - v_2 \wedge v_1) \cdot \mathrm{e}_i \\ &= (2A_1\,\mathrm{e}_1 + 2A_2\,\mathrm{e}_2 + 2A_3\,\mathrm{e}_3) \cdot \mathrm{e}_i = 2A_i. \end{aligned}$$

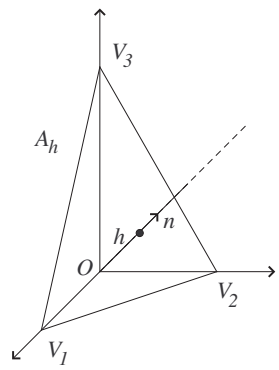
Esercizio 2.12. *Sia x_0 un punto di un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$, e sia $\{\omega_i\}$ una successione di sottoinsiemi di Ω tali che $0 < \mu(\omega_i) < +\infty$ dove μ denota la misura d'area o di volume. Supponiamo inoltre che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un $I \in \mathbb{N}$ tale che $\omega_i \subset B(x_0, \varepsilon)$ per $i \geq I$, dove $B(x_0, \varepsilon)$ denota la palla di centro x_0 e raggio ε. Allora se ψ è una funzione continua definita su Ω si ha*

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{\mu(\omega_i)} \int_{\omega_i} \psi\, d\mu = \psi(x_0).$$

Dimostrazione del Lemma 2.10. Fissato $t \in I$ possiamo supporre, a meno di una traslazione d'assi, che $0 \in \Omega_t$. Sia $n \in S^2$. Fissiamo una base $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ in $\mathbb{R}^3$, in modo che $n = (n_1, n_2, n_3) \in S^2$ con $n_i > 0$ per ogni $i = 1, 2, 3$. In tal caso la semiretta di direzione n uscente da 0 non è parallela ad alcun piano coordinato. Fissato $h > 0$, il piano ortogonale alla semiretta e distante h da 0 ha equazione

$$x \cdot n = h.$$

Questo piano individua un tetraedro aperto A_h di vertici 0, V_1, V_2 e V_3. Sia R^h la parte di bordo con normale esterna n ed R^h_i la parte di bordo avente normale esterna $-\mathrm{e}_i$, per $i = 1, 2, 3$.



Siccome 0 è un punto interno di Ω_t, allora si ha $\overline{A}_h \subset \Omega_t$ per ogni h abbastanza piccolo. Per il principio di conservazione della quantità di moto si ha

$$\frac{d}{dt}Q(A_h, t) = \mathfrak{F}(f_t(A_h)).$$

che esplicitiamo usando le definizioni di Q ed f. A primo membro abbiamo

$$\frac{d}{dt}Q(A_h, t) = \frac{d}{dt}\int_{A_h} v\rho\, dy = \int_{A_h} \frac{dv}{dt}\rho\, dy = \int_{A_h} a\rho\, dy$$

e al secondo

$$\mathfrak{F}(f_t(A_h)) = \int_{A_h} b\, dy + \int_{\partial A_h} t(y, n(y))\, da(y).$$

Allora la prima equazione cardinale diviene

$$\int_{A_h} (a\rho - b)\, dy = \int_{\partial A_h} t(y, n(y))\, da(y) \tag{2.5}$$

Esplicitando ulteriormente il secondo membro si ha

$$\int_{\partial A_h} t(y, n(y))\, da(y) = \int_{R^h} t(y, n)\ da(y) + \sum_{i=1}^{3} \int_{R_i^h} t(y, -\mathrm{e}_i)\, da(y) \tag{2.6}$$

Indicando con $|R^h|$ ed $|R_i^h|$ l'area della regioni R^h ed R_i^h e con $|A_h|$ il volume del tetraedro, possiamo riscrivere (2.5), come

$$\frac{|A_h|}{|R^h|}\frac{1}{|A_h|}\int_{A_h} (a\rho - b)\, dy = \frac{1}{|R^h|}\int_{R^h} t(y, n)\ da(y) + \sum_{i=1}^{3} \frac{|R_i^h|}{|R^h|}\frac{1}{|R_i^h|}\int_{R_i^h} t(y, -\mathrm{e}_i)\, da(y).$$

Tenendo presente i risultati dei due esercizi si ha, passando al limite

$$0 = \mathrm{t}(0, n) + \sum_{i=1}^{3} n_i \mathrm{t}(0, -\mathrm{e}_i),$$

che possiamo riscrivere come

$$\mathrm{t}(0, n) = -\sum_{i=1}^{3} \mathrm{t}(0, -\mathrm{e}_i) \otimes \mathrm{e}_i\ n. \tag{2.7}$$

Ponendo $T(0) = -\sum_{i=1}^{3} \mathrm{t}(0, -\mathrm{e}_i) \otimes \mathrm{e}_i$ abbiamo che

$$\mathrm{t}(0, n) = T(0)n \text{ per ogni } n \in S^2 \text{ tale che } n_i > 0,\ i = 1, 2, 3. \tag{2.8}$$

Questa relazione continua a valere, per la supposta continuità di $\mathrm{t}(0, n)$ rispetto a n e per la continuità del secondo membro, anche se una o due componenti di n si annullano. In particolare allora la formula vale per $n = \mathrm{e}_j$ nel qual caso si ha (cfr. (2.7))

$$\mathrm{t}(0, \mathrm{e}_j) = -\sum_{i=1}^{3} \delta_{ij} \mathrm{t}(0, -\mathrm{e}_i) = -\mathrm{t}(0, -e_j). \tag{2.9}$$

Se invece si prende un $n \in S^2$ con componenti negative, ad esempio con $n_1 < 0$ per fissare le idee, allora in luogo della base $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ sceglieremo la base $(\tilde{\mathrm{e}}_1, \tilde{\mathrm{e}}_2, \tilde{\mathrm{e}}_3)$ con $\tilde{e}_1 = -\mathrm{e}_1$, $\tilde{\mathrm{e}}_2 = \mathrm{e}_2$, $\tilde{\mathrm{e}}_3 = \mathrm{e}_3$, rispetto alla quale n avrà tutte le componenti $\tilde{n}_i$ positive e si otterrà che

$$0 = \mathrm{t}(0, n) + \sum_{i=1}^{3} \tilde{n}_i \mathrm{t}(0, -\tilde{\mathrm{e}}_i) = \mathrm{t}(0, n) - \sum_{i=1}^{3} n_1 \mathrm{t}(0, e_1) + \sum_{i=2}^{3} n_i \mathrm{t}(0, -\mathrm{e}_i).$$

D'altra parte, dalla (2.9) si ha $\mathrm{t}(0, \mathrm{e}_1) = -\mathrm{t}(0, -\mathrm{e}_1)$ e quindi dalla precedente si riottiene di nuovo la (2.7) e quindi la (2.8), che vale quindi per ogni $n \in S^2$. In maniera ovvia essa si generalizza poi ad ogni $y \in \Omega_t$ e la continuità di $y \mapsto T(y)$ segue direttamente da quella di $y \mapsto \mathrm{t}(y, n)$. □

Osserviamo che il Lemma 2.10 stabilisce una proprietà di azione e reazione dello sforzo che vale in generale. Dal lemma fondamentale si trae infatti la seguente conseguenza.

Corollario 2.13 (principio di azione e reazione degli sforzi)**.** *Per ogni $y \in \Omega_t$ e per ogni $n \in S^2$ si ha*

$$t(y, n) = -t(y, -n).$$

Dimostrazione Per la linearità si ha $-t(y, -n) = -T(y)(-n) = T(y)n = t(y, n)$. □

In pratica ciò significa che all'azione esercitata sul sottocorpo P dal resto del corpo corrisponde un'azione opposta (reazione) esercitata da P sul resto del corpo.

2.6 Prima equazione fondamentale del moto di un corpo continuo

Reintroducendo la variabile t abbiamo che, in generale, $T = T(y, t)$. In questa sezione riscriviamo il principio di conservazione della quantità di moto, usando il tensore degli sforzi di Cauchy. In seguito ci occuperemo anche del principio di conservazione del momento della quantità di moto, ovvero della seconda equazione cardinale.

Supponiamo, in questa sezione, che T sia di classe C^1 in (y, t).

Teorema 2.14 (Prima equazione fondamentale)**.** *Dato un corpo continuo in moto regolare con densità di massa $\rho(y, t)$ di classe C^1 e soggetto all'azione di forze esterne di volume con densità $b(y, t)$ continua in y, si ha, per ogni $t \in I$*

$$\rho a_i - T_{ij,j} = b_i \quad \text{in } \Omega_t, \qquad i = 1, 2, 3$$

ovvero, in forma vettoriale,

$$\rho a - \mathrm{div} T = b \quad \text{in } \Omega_t. \tag{2.10}$$

Dimostrazione Consideriamo un sottocorpo che occupi all'istante t la regione $f_t(P) =: A_t \subset\subset \Omega_t$[1]. Le forze esterne $\mathfrak{F}(A_t)$ agenti su P sono forze di volume di densità $b(y,t)$ e le forze di contatto esercitate dal resto del corpo su P e prescritte dal principio degli sforzi. Per il principio di conservazione della quantità di moto e il teorema della divergenza si ha dunque

$$\begin{aligned}\int_{A_t} a_i(y,t)\rho(y,t)\,dy &= \int_{A_t} b_i(y,t)\,dy + \int_{\partial A_t} t(y,n)_i\,da(y)\\ &= \int_{A_t} b_i(y,t)\,dy + \int_{\partial A_t} T_{ij}(y,t)n_j\,da(y)\\ &= \int_{A_t} b_i(y,t)\,dy + \int_{A_t} T_{ij,j}(y,t)\,da(y)\end{aligned}$$

dove da indica la misura di superficie. Poiché l'uguaglianza vale su ogni sottoinsieme aperto $A_t \subset\subset \Omega_t$ e la funzione integranda è continua, segue la tesi. □

L'equazione (2.10) è anche detta *prima equazione indefinita* della dinamica dei continui perché in essa non compare una condizione al contorno che deve essere necessariamente soddisfatta quando il corpo è soggetto all'azione di forze esterne di contatto.

Proposizione 2.15. *Se sulla frontiera di Ω_t, che supponiamo sufficientemente regolare, agisce una forza di contatto di densità superficiale $c(y,t)$ continua in y, allora si ha*

$$T(y,t)n(y,t) = c(y,t)$$

per ogni $t \in I$ e per ogni $y \in \partial\Omega_t$ in cui esiste il versore normale $n(y,t)$.

Dimostrazione Diamo qui solo uno sketch della dimostrazione, omettendo i dettagli. Supponiamo che che la frontiera di Ω_t sia di classe C^1. Sia $y_0 \in \partial\Omega_t$. In tale punto esiste il versore normale $n(y_0,t)$. Considerato un sistema di riferimento locale con $\mathrm{e}_3 = n$, si pone l'origine del riferimento in y_0. Nel piano $y_3 = -\delta$ si considera una palla B^2_δ di $\mathbb{R}^2$ con centro in $(y_1,y_2) = (0,0)$ e raggio δ. Per δ abbastanza piccolo è possibile considerare la superficie $\partial\Omega_t$ in un intorno di 0 come grafico della funzione $\gamma_\delta : B^2_\delta \to \partial\Omega_t$, tale che $\gamma_\delta(0) = y_0$.

Per δ abbastanza piccolo si avrà che l'aperto

$$\Omega_\delta = \{(y_1,y_2,y_3)\ :\ (y_1,y_2) \in B^2_\delta, -\delta < y_3 < \gamma_\delta(y_1,y_2)\}$$

è contenuto in Ω_t. A questo punto la tesi si ottiene esprimendo la conservazione della quantità di moto su Ω_δ

$$\int_{\Omega_\delta} (\rho a - b)\,dy = \int_{\partial\Omega_\delta} t(y,n)\,da(y),$$

ricordando che $t(y,n) = c(y,t)$ su $\partial\Omega_\delta \cap \partial\Omega_t$ e facendo tendere δ a 0 dopo essere passati alle medie in maniera simile a quanto fatto nella dimostrazioen del lemma fondamentale di Cauchy. □

2.7 Seconda equazione fondamentale e simmetria del tensore degli sforzi

Dato un sottoinsieme regolare $P \subseteq \Omega$ definiamo *momento della quantità di moto di P* rispetto ad 0 (origine del riferimento)

$$K_0(P,t) := \int_{f_t(P)} y \wedge v(y,t)\rho(y,t)\,dy$$

[1] In generale la notazione $A \subset\subset \Omega$ significherà che A è un aperto con chiusura compatta in Ω

Nelle ipotesi di regolarità C^2 del moto e C^1 della densità di massa, per il Teorema 2.4 si ha che $K_0(P,t)$ è derivabile rispetto a t.

Assumiamo che valga il seguente *principio di conservazione del momento della quantità di moto* (seconda equazione cardinale).

Assioma 2.16 (Principio di conservazione del momento della quantità di moto)**.** *Per ogni sottoinsieme regolare P di Ω e in ogni istante $t \in I$*

$$\frac{d}{dt}K_0(P,t) = \Omega_0(f_t(P))$$

dove

$$\Omega_0(f_t(P)) := \int_{f_t(P)} y \wedge b(y)\,dy + \int_{\partial f_t(P)} y \wedge t(y,n)\,da(y)$$

è il momento risultante delle forze agenti su $f_t(P)$ rispetto al polo O supposto fisso o con velocità parallela a quella del centro di massa.

Esercizio 2.17. *Dimostrare che se il principio di conservazione del momento della quantità di moto è soddisfatto rispetto al polo O allora è soddisfatto rispetto ad un qualsiasi altro polo fisso o con velocità parallela a quella del centro di massa.*

Usando il principio degli sforzi come abbiamo fatto in precedenza con la prima equazione cardinale, si perviene al seguente risultato.

Teorema 2.18 (seconda equazione fondamentale)**.** *Nelle ipotesi di regolarità C^2 del moto e C^1 della densità di massa e del tensore degli sforzi (rispetto ad y), nonché la continuità di b rispetto ad y, si ha, in ogni istante $t \in I$*

$$T^T = T \quad \text{in } \Omega_t.$$

Dimostrazione Consideriamo un sottocorpo che occupi all'istante t la regione $f_t(P) =: A_t \subset\subset \Omega_t$. Le forze esterne $\mathfrak{F}(P,t)$ agenti su P sono forze di volume di densità $b(y,t)$ e le forze di contatto esercitate dal resto del corpo su P e prescritte dal principio degli sforzi. Rispetto ad un riferimento centrale, per il principio di conservazione del momento della quantità di moto si ha dunque

$$\int_{A_t} y \wedge a(y,t)\rho(y,t)\,dy = \int_{A_t} y \wedge b(y,t)\,dy + \int_{\partial A_t} y \wedge t(y,n)\,da(y) \tag{2.11}$$

Si tratta di un'equazione vettoriale la cui prima componente è

$$\begin{aligned}\int_{A_t} (y_2a_3 - y_3a_2)\rho(y,t)\,dy &= \int_{A_t} (y_2b_3 - y_3b_2)\,dy + \int_{\partial A_t} (y_2T_{3j}n_j - y_3T_{2j}n_j)\,da(y)\\ &= \int_{A_t} (y_2b_3 - y_3b_2)\,dy + \int_{A_t} [(y_2T_{3j})_{,j} - (y_3T_{2j})_{,j}]\,dy\\ &= \int_{A_t} (y_2b_3 - y_3b_2)\,dy + \int_{A_t} [y_2T_{3j,j} + T_{32} - y_3T_{2j,j} - T_{23}]\,dy.\end{aligned}$$

Raccogliendo y_2 e y_3 si ha

$$\int_{A_t} [y_2(a_3\rho - b_3 - T_{3j,j}) - y_3(a_2\rho - b_2 - T_{2j,j}) + T_{32} - T_{23}]\,dy = 0.$$

Per la prima equazione fondamentale si ha, d'altra parte, che i termini entro le parentesi tonde nell'integrale sono nulli e di conseguenza si ha

$$\int_{A_t} [T_{32} - T_{23}]\,dy = 0 \quad \text{per ogni } A_t \subset\subset \Omega_t,$$

da cui segue che $T_{32} = T_{23}$. Le uguaglianze $T_{13} = T_{31}$ e $T_{12} = T_{21}$ seguono analogamente dalla seconda e dalla terza componente dell'equazione (2.11). □

2.8 Equazioni del moto ed equazioni di equilibrio

Il *problema fonadamentale della dinamica* dei corpi continui consiste nel determinarne il moto quando si suppongono assegnate le forze esterne di volume e di superficie e le condizioni iniziali e al contorno.

A tale scopo abbiamo a disposizione le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \rho\ddot{y} - \mathrm{div}T = b & \text{in } \Omega_t \\ T^T = T & \text{in } \Omega_t \\ Tn = g & \text{su } \partial\Omega_t \end{cases}$$

a cui può essere eventualmente aggiunta l'equazione di continuità della massa. Dalle equazioni del moto si traggono poi le seguenti equazioni di equilibrio

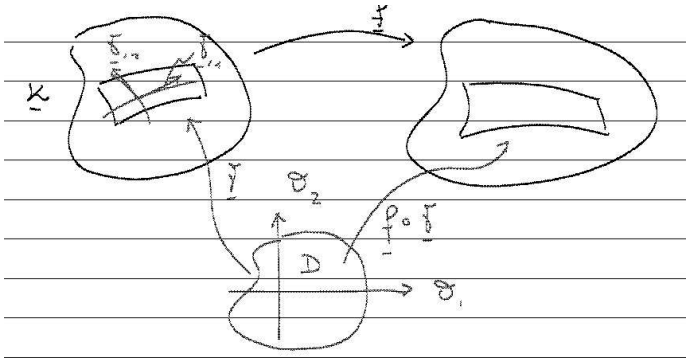
$$\begin{cases} -\mathrm{div}T = b & \text{in } \Omega_t \\ T^T = T & \text{in } \Omega_t \\ Tn = g & \text{su } \partial\Omega_t \end{cases}$$

2.9 Il tensore di Piola-Kirchhoff

Il tensore di Cauchy è definito sulla configurazione attuale del corpo che in generale non è nota.

Il tensore di Piola-Kirchhoff è, in un certo senso, la controimmagine del tensore di Cauchy nella configurazione di riferimento.

Come abbiamo fatto quando abbiamo calcolato la variazione di area corrispondente ad un'assegnata deformazione, consideriamo una superficie γ di classe C^1 in κ. Sia $\gamma : D \to \kappa(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^3$ una sua rappresentazione parametrica, con D sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ diffeomorfo ad una palla aperta.



I versori normali esterni alla superficie indeformata e a quella deformata sono dati, rispettivamente, da

$$n_\kappa = \frac{\gamma_{,1} \wedge \gamma_{,2}}{|\gamma_{,1} \wedge \gamma_{,2}|}, \quad n = \frac{(f \circ \gamma)_{,1} \wedge (f \circ \gamma)_{,2}}{|(f \circ \gamma)_{,1} \wedge (f \circ \gamma)_{,2}|}.$$

Ripetendo un conto già fatto in precedenza si ha

$$(f \circ \gamma)_{,1} \wedge (f \circ \gamma)_{,2} = F\gamma_{,1} \wedge F\gamma_{,2} = \mathrm{cof}F\gamma_{,1} \wedge \gamma_{,2} = \mathrm{cof}Fn_\kappa|\gamma_{,1} \wedge \gamma_{,2}|.$$

Per cui, se $\Sigma_\kappa = \gamma(D)$ e $\Sigma = f \circ \gamma(D)$, allora si ha

$$\int_\Sigma Tn\, da = \int_\Sigma T\mathrm{cof}Fn_\kappa \frac{|\gamma_{,1} \wedge \gamma_{,2}|}{|F\gamma_{,1} \wedge F\gamma_{,2}|}\, da = \int_D T\mathrm{cof}Fn_\kappa|\gamma_{,1}\wedge\gamma_{,2}|\, d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\Sigma_\kappa} T\mathrm{cof}Fn_\kappa\, da_\kappa$$

Poniamo

$$S := T\mathrm{cof}F = TF^{-T}\det F, \tag{2.12}$$

in modo che

$$\int_\Sigma Tn\,da = \int_{\Sigma_\kappa} Sn_\kappa\,da_\kappa.$$

S è detto *primo tensore di Piola-Kirchhoff.*

2.10 Equazioni del moto nella configurazione di riferimento

Le equazioni indefinite del moto nella configurazione attuale (i.e. in coordinate euleriane) sono quelle scritte sopra. In questa sezione vogliamo scriverle nella configurazione di riferimento (i.e. in coordinate lagrangiane).

Osserviamo che dalla (2.12) si può ricavare T in termini di S. Infatti

$$T = \frac{1}{\det F} SF^T.$$

Ne consegue immediatamente che

$$T^T = T \iff SF^T = FS^T \iff SF^T \in \mathrm{Sym}$$

che traduce quindi la simmetria del tensore degli sforzi.

La prima equazione fondamentale in forma integrale è

$$\int_{f_t(P)} \rho\ddot{y}\,dy = \int_{\partial f_t(P)} Tn\,da(y) + \int_{f_t(P)} b\,dy$$

che, col cambiamento di variabile $y = f(x,t)$, cioè riportata sulla configurazione di riferimento, diviene

$$\int_P \rho\ddot{y}\det F\,dx = \int_{\partial P} Sn_\kappa\,da_\kappa(x) + \int_P b\det F\,dy$$

e, col teorema della divergenza

$$\int_P \rho\ddot{y}\det F\,dx = \int_P \mathrm{Div}S\,dx + \int_P b\det F\,dx$$

da cui si ottiene, per l'arbitrarietà di P aperto in Ω,

$$\boxed{\rho_\kappa\ddot{y} - \mathrm{Div}S = b_\kappa \quad \text{in } \Omega} \tag{2.13}$$

dove $\rho_\kappa := \rho\det F$ e $b_\kappa = b\det F$. A questa va aggiunta la condizione al contorno

$$\boxed{Sn_\kappa = g_\kappa \quad \text{su } \partial\Omega} \tag{2.14}$$

dove $g_\kappa = g\det F$, la condizione di simmetria

$$\boxed{SF^T \in \mathrm{Sym}} \tag{2.15}$$

e l'equazione di continuità della massa[2]

$$\boxed{\frac{\partial \rho_\kappa}{\partial t} = 0}$$

Nella impostazione del problema del moto, sia che la si faccia in variabili euleriane che lagrangiane, abbiamo dunque a disposizione 7 equazioni scalari in 13 incognite.

Il fatto che quindi il problema dinamico rimanga largamente indeterminato non deve sorprendere. Infatti le equazioni sopra scritte, che sono state ottenute combinando opportunamente gli assiomi fondamentali della meccanica dei continui (conservazione della massa, equazioni cardinali, principio degli sforzi) esprimono solamente quanto vi è di comune a tutti i corpi continui.

In generale, corpi costituiti da materiali diversi si comportano in maniera diversa. Questa *diversità* è specificata attraverso le *equazioni costitutive*, ovvero specificando un legame tra *sforzo* e *deformazione*. Materiali diversi saranno caratterizzati da equazioni costitutive diverse.

Sarà questo l'oggetto del prossimo capitolo in cui introdurremo le equazioni costitutive di alcuni particolari corpi solidi.

[2] equivalente alla (2.3) se il corpo è connesso.

Capitolo 3

Materiali iperelastici

3.1 Riferimenti bibliografici

I principali riferimenti per questo capitolo sono Paroni [30] e Ciarlet [10].

3.2 Equazione costitutiva e potenziale elastico

Sia come al solito $\Omega = \kappa(\mathcal{B})$.

Definizione 3.1. *Il corpo $\mathcal{B}$ si dice costituito di* materiale elastico *se il tensore di Piola-Kirchhoff è determinato, in ogni punto, dal gradiente di deformazione, cioè se esiste una funzione tensoriale (detta* funzione di risposta*)*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{F}: & \Omega \times \mathbb{R}^{3\times 3}_{+} & \to & \mathbb{R}^{3\times 3} \\ & (x, F) & \mapsto & \mathscr{F}(x, F) \end{array}$$

tale che

$$S(x) = \mathscr{F}(x, F(x)) \text{ per ogni } x \in \Omega.$$

Definizione 3.2. *Un materiale elastico si dice* iperelastico *se il tensore di Piola-Kirchhoff ammette un potenziale, cioè se esiste una funzione scalare*

$$\begin{array}{rccc} W: & \Omega \times \mathbb{R}^{3\times 3}_{+} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, F) & \mapsto & W(x, F) \end{array}$$

tale che

$$S(x) = D_F W(x, F(x))$$

dove D_F indica il gradiente rispetto ad F. La funzione W è detta potenziale elastico*.*

Se $W = W(F)$, cioè W è indipendente da x, il materiale si dice *omogeneo*. Il motivo di questa denominazione deriva dal fatto che in tal caso anche la funzione di risposta $\mathscr{F}$ dipende solo dal gradiente di deformazione e non dal punto x, cioè il materiale risponde omogeneamente alle sollecitazioni.

É il caso di osservare che, come succede per i campi vettoriali, non tutti i campi tensoriali sono gradienti di un potenziale. Per i campi vettoriali una condizione necessaria affinché ciò avvenga è che il rotore sia nullo. Una condizione analoga può essere stabilita anche per i campi tensoriali con un'opportuna nozione di rotore.

Osserviamo infine che il potenziale elastico, essendo definito nella configurazione di riferimento, esprime, come il tensore di Piola-Kirchhoff, delle proprietà "materiali" del corpo.

Esempio 3.3. Nel caso di alcune gomme (materiali di Mooney-Rivlin) un potenziale elastico appropriato è

$$W(F) = a|F|^2 + b|\mathrm{cof}F|^2 + \Gamma(\det F)$$

con $a > 0$, $b > 0$ e $\Gamma(\delta) = c\delta^2 - d\log(\delta)$ $(c, d > 0)$ o più in generale una funzione convessa di $\delta > 0$ tale che $\lim_{\delta\to 0^+} \Gamma(\delta) = +\infty$.

Osserviamo che per ogni $Q \in SO(3)$ si ha $\det Q = 1$, $|Q|^2 = \mathrm{tr}(Q^T Q) = \mathrm{tr}\, I = 3$ e $|\mathrm{cof}Q|^2 = \mathrm{tr}\left((\mathrm{cof}Q)^T \mathrm{cof}Q\right) = \mathrm{tr}\, I = 3$ e quindi

$$W(Q) = 3a + 3b + \Gamma(1) = \text{ costante}$$

quindi il potenziale risulta lo stesso su tutte le rotazioni.

3.3 Cambiamento della configurazione di riferimento

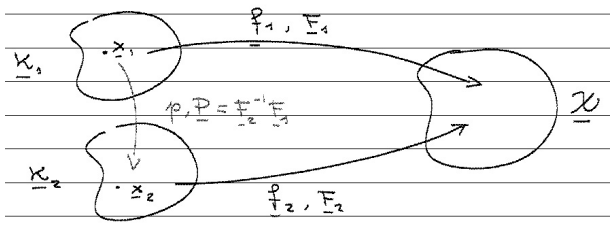
La definizione di materiale iperelastico è stata data fissando una configurazione di riferimento. Dimostriamo ora che la definizione è indipendente da questa scelta cambiando configurazione di riferimento e mostrando che il materiale rimane iperelastico anche con questa nuova scelta.

Consideriamo quindi due configurazioni κ_1 e κ_2. Indichiamo con

$$p := \kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}$$

Consideriamo due deformazioni f_1 e f_2 legate dalla relazione $f_1 = f_2 \circ p$, che portano quindi nella medesima configurazione; dunque $p = f_2^{-1} \circ f_2$. Indichiamo con $P = \nabla p$ e, come al solito, $F_1 = \nabla f_1$ e $F_2 = \nabla f_2$. Si ha

$$P = F_2^{-1} F_1.$$



Relativamente ai tensori di Piola-Kirchhoff si ha

$$S_1 = T F_1^{-T} \det F_1,$$

e

$$S_2 = T F_2^{-T} \det F_2 \Rightarrow T = S_2 F_2^T \det F_2^{-1},$$

per cui, sostituendo T nell'espressione di S_1 si ottiene

$$S_1 = (\det P) S_2 P^{-T}$$

Supponiamo che il materiale sia iperelastico rispetto a κ_2 e sia W_2 il potenziale elastico, cioè

$$S_2(x_2) = D_{F_2} W_2(x_2, F_2(x_2))$$

e definiamo, per ogni $F_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}_+$,

$$W_1(x_1, F_1) := W_2(p(x_1), F_1 P^{-1}(p(x_1))) \det P \tag{3.1}$$

Verificare che allora si ha

$$D_{F_1} W_1(x_1, F_1(x_1)) = S_1(x_1).$$

3.4 Simmetria materiale

Nella sezione precedente abbiamo visto che al variare della configurazione di riferimento in generale il potenziale elastico non rimane costante, ma varia secondo la legge (3.1).

In particolare, se la mappa p ruota la configurazione di riferimento attorno ad un punto fisso x_0 cioè

$$p(x) = Q(x - x_0) + x_0$$

con $Q \in SO(3)$, allora per la (3.1), si ha

$$W_\kappa(x_0, F) = W_{Q_\kappa}(x_0, FQ^T)$$

dove Q_κ denota la configurazione $p \circ \kappa$ (cioè quella che prima chiamavamo κ_2). Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{G}_\kappa(x_0) = \{Q \in SO(3) \ : \ W_\kappa(x_0, F) = W_{Q_\kappa}(x_0, F) \ \forall\, F \in \mathbb{R}^{3\times 3}_+\}.$$

Proposizione 3.4. *$\mathcal{G}_\kappa(x_0)$ è un gruppo moltiplicativo detto* gruppo di simmetria di x_0 *nella configurazione κ. Si ha inoltre*

$$\mathcal{G}_\kappa(x_0) = \{Q \in SO(3) \ : \ W_\kappa(x_0, FQ) = W_\kappa(x_0, F) \ \forall\, F \in \mathbb{R}^{3\times 3}_+\}.$$

Dimostrazione Dimostrare per esercizio che $\mathcal{G}_\kappa(x_0)$ gode delle proprietà di gruppo

- $I \in \mathcal{G}_\kappa(x_0)$;
- $Q \in \mathcal{G}_\kappa(x_0) \Rightarrow Q^{-1} = Q^T \in \mathcal{G}_\kappa(x_0)$;
- $Q, P \in \mathcal{G}_\kappa(x_0) \Rightarrow QP \in \mathcal{G}_\kappa(x_0)$.

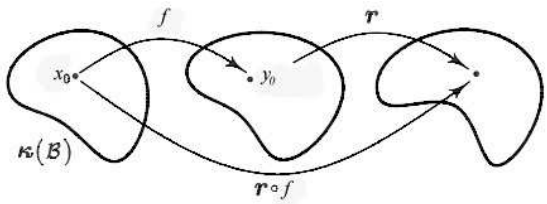
Concludere la dimostrazione per esercizio. □

Definizione 3.5. *Un materiale iperelastico si dice* isotropo *in x_0 se $\mathcal{G}_\kappa(x_0) = SO(3)$.*

Esempi di materiali isotropi: $W(x, F) = f(x, \det F, |\mathrm{cof} F|, FF^T)$ (tra cui vi sono anche le funzioni di $|F| = \sqrt{\mathrm{tr}(FF^T)}$).

3.5 Obiettività o indifferenza materiale

Andiamo ora ad introdurre il concetto di *superimposed rigid motion* che risulta essere equivalente, ma più semplice da spiegare, del cosiddetto principio di obiettività, in inglese *material frame indifference*. Se anzichè ruotare la configurazione di riferimento, ruotiamo la configurazione attuale, otteniamo una configurazione con le stesse proprietà materiali, dato che ruotando una configurazione non si variano le distanze mutue tra i punti. È quindi naturale assumere che il potenziale elastico in tal caso non cambi.



Data la deformazione f indichiamo con $y_0 = f(x_0)$. La rotazione è effettuata tramite la mappa

$$r(y) = Q(y - y_0) + y_0, \quad Q \in SO(3).$$

Indicato come al solito $\nabla f = F$ si ha

$$\nabla(r \circ f) = QF$$

Assioma 3.6 (principio di indifferenza materiale)**.** *Il potenziale elastico è invariante per composizione con spostamenti rigidi , ovvero*

$$W_\kappa(x_0, F) = W_\kappa(x_0, QF) \quad \forall\, Q \in SO(3),\ F \in \mathbb{R}^{3\times 3}_+,\ x_0 \in \Omega.$$

Una ovvia conseguenza di questo fatto è che se $F = RU$ è la decomposizione polare di F allora si ha

$$W(x_0, F) = W(x_0, U).$$

Se il materiale è anche isotropo si ha che

$$W(x_0, U) = W(x_0, QUQ^T)$$

e quindi si ha che il potenziale elastico non dipende dall'intero gradiente di deformazione ma solo dagli autovalori di U, detti *deformazioni (o stretches) principali.*

Esempio 3.7. Soddisfano l'assioma di obiettività i potenziali del tipo

$$W(x, F) = W(x, \det F, |\mathrm{cof} F|, F^T F).$$

Tra questi ve ne sono di anisotropi (i.e. non isotropi), come ad esempio il potenziale $W(F) = (F^T F)_{12}$ (provare per esempio con $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$).

Proposizione 3.8. *W soddisfa il principio di obiettività materiale se e solo se $W(\cdot, F) = W(\cdot, \sqrt{F^T F})$ per ogni matrice F con determinante positivo.*

Dimostrazione Omettiamo per semplicità l'indicazione della dipendenza da t scrivendo $W(F)$ in luogo di $W(\cdot, F)$.

($\Rightarrow$). Per il teorema di decomposizione polare, $F = RU$ con $R \in SO(3)$ e U simmetrica. Quindi

$$F^T F = (RU)^T RU = U^T R^T RU = U^T R^T RU = U^T U = U = 2,$$

quindi $U = \sqrt{F^T F}$ e, per l'obiettività, $W(F) = W(U) = W(\sqrt{F^T F})$.

($\Leftarrow$). Viceversa, basta osservare che, per ogni $Q \in SO(3)$, si ha

$$W(QF) = W(\sqrt{(QF)^T QF}) = W(\sqrt{(F^T Q^T QF}) = W(\sqrt{F^T F}) = W(F).$$

□

Derivando la relazione che esprime l'obiettività materiale si ottengono due identità differenziali che saranno utili nel seguito ed in particolare in teoria infinitesima.

Proposizione 3.9. *Se la W è derivabile rispetto ad F un numero sufficiente di volte si ha*

1. *$D_F W(\cdot, F) = Q^T D_F W(\cdot, QF)$ per ogni $Q \in SO(3)$;*
2. *$D_F^2 W(\cdot, F) \cdot (ZF) = Z D_F W(\cdot, F)$ per ogni $Z \in \mathrm{Skw}$.*

Si osservi che nella *2* l'hessiano $D^2_F W(\cdot, F)$ è un tensore di ordine 4 di componenti $A_{ijrs} = \frac{\partial}{\partial F_{ij}}(\frac{\partial W}{\partial F_{rs}})$ e $A \cdot (ZF)$ indica il tensore di ordine 2 di componenti $A_{ijrs}(ZF)_{rs} = A_{ijrs} Z_{rh} F_{hs}$ detto *prodotto contratto* dei tensori A e ZF. Avvertiamo fin da subito che nel seguito un abuso di notazione farà cadere il punto e si scriverà AM per indicare $A \cdot M$ (M tensore di ordine 2).

Dimostrazione Per dimostrare la *1* basta derivare rispetto ad F l'equazione

$$W(\cdot, F) = W(\cdot, QF).$$

Proviamo la *2*. Dimostrare per esercizio che, per ogni $Z \in \mathrm{Skw}$ tale che esiste $\omega \in \mathbb{R}^3$ con $|\omega| = 1$ tale che $Za = \omega \wedge a$ per ogni $a \in \mathbb{R}^3$, e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ si ha

$$Q := I + \sin\varepsilon Z + (1 - \cos\varepsilon) Z^2 \in SO(3)$$

(suggerimento: osservare che $Z^3 = -Z$).

Dalla *1* si ha

$$Q D_F W(\cdot, F) = D_F W(\cdot, QF) \ \text{ per ogni } Q \in SO(3).$$

Allora, denotato con

$$Q_\varepsilon := I + (\sin\varepsilon) Z + (1 - \cos\varepsilon) Z^2, \ Z \in \mathrm{Skw} \ : \ Za = \omega \wedge a, \ |\omega| = 1,$$

si ha $Q_\varepsilon \in SO(3)$, quindi

$$Q_\varepsilon D_F W(\cdot, F) = D_F W(\cdot, Q_\varepsilon F) \ \text{ per ogni } \varepsilon.$$

Indicato, per comodità con $\mathscr{F}(F) := D_F W(\cdot, F)$ e sostituito Q_ε, si ha

$$\mathscr{F}(F) + \sin\varepsilon Z \mathscr{F}(F) + (1 - \cos\varepsilon) Z^2 \mathscr{F}(F) = \mathscr{F}(F + \sin\varepsilon ZF + (1 - \cos\varepsilon) Z^2 F). \tag{3.2}$$

A F fissato, indichiamo con $g(\varepsilon) := \mathscr{F}(F + \sin\varepsilon ZF + (1 - \cos\varepsilon) Z^2 F)$ il secondo membro dei quest'ultima identità. Per F fissato osserviamo che

$$g_{ij}(\varepsilon) = g_{ij}(0) + g'_{ij}(0)\varepsilon + o(\varepsilon)$$

e che

$$g'_{ij}(\varepsilon) = D_F \mathscr{F}_{ij}(F + \sin\varepsilon ZF + (1 - \cos\varepsilon) Z^2 F) \cdot (\cos\varepsilon ZF + \sin\varepsilon Z^2 F),$$

da cui

$$g'_{ij}(0) = D_F \mathscr{F}_{ij}(F) \cdot (ZF)$$

e quindi

$$g(\varepsilon) = \mathscr{F}(F) + \varepsilon D_F \mathscr{F}(F) \cdot (ZF) + o(\varepsilon).$$

Sostituendo nella (3.2) si ha dunque

$$\varepsilon D_F \mathscr{F}(F) \cdot (ZF) = \sin\varepsilon Z \mathscr{F}(F) + (1 - \cos\varepsilon) Z^2 \mathscr{F}(F) + o(\varepsilon)$$

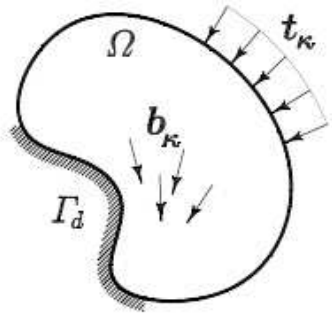
dalla quale, dividendo per ε e passando al limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene

$$D_F \mathscr{F}(F) \cdot (ZF) = Z \mathscr{F}(F) \ \forall\, Z \in \mathrm{Skw} \ : \ Za = \omega \wedge a, \ |\omega| = 1.$$

La tesi segue per ogni $Z \in \mathrm{Skw}$ dalla linearità in Z dei due membri dell'equazione. $\square$

3.6 Equazioni di equilibrio

Sia come al solito $\Omega = \kappa(\mathcal{B})$ un aperto di $\mathbb{R}^3$ con frontiera regolare. Consideriamo una partizione di $\partial\Omega$ in due regioni Γ_d e Γ_t (i.e. $\Gamma_d \cap \Gamma_t = \varnothing$, $\Gamma_d \cup \Gamma_t = \partial\Omega$).



Supponiamo che il corpo sia incastrato (clamped) in Γ_d cioè $f(x) = x$ per ogni $x \in \Gamma_d$, mentre su Γ_t agiscano delle forze di superficie di densità t_κ. Γ_d è detta *regione di Dirichlet* e Γ_t è detta *regione di Neumann*.

Denotiamo con b_κ la densità delle forze di volume ed n_κ il versore normale esterno a $\partial\Omega$. Se i campi vettoriali e tensoriali in gioco sono sufficientemente regolari, allora le equazioni di equilibrio sono (cfr. (2.13), (2.14), (2.15))

$$\begin{cases} \mathrm{div} S + b_\kappa = 0 & \text{in } \Omega \\ S n_\kappa = t_\kappa & \text{su } \Gamma_t \\ S F^T \in \mathrm{Sym} & \text{in } \Omega \\ S = D_F W(\cdot, F) & \text{in } \Omega \\ F = \nabla f & \text{in } \Omega \\ f(x) = x & \text{su } \Gamma_d \end{cases}$$

Osserviamo che si tratta di un sistema di 24 equazioni scalari nelle 22 incognite S_{ij}, F_{ij}, W, f_i $(i, j = 1, 2, 3)$.

Generalmente, tuttavia, il potenziale elastico è noto essendo noto il materiale di cui è costituito il corpo, mentre sono incognite le tre componenti della deformazione f.

Il sistema di equazioni di equilibrio, in termini della sola incognita f diviene

$$\begin{cases} \mathrm{div} D_F W(\cdot, \nabla f) + b_\kappa = 0 & \text{in } \Omega \\ D_F W(\cdot, \nabla f) n_\kappa = t_\kappa & \text{su } \Gamma_t \\ D_F W(\cdot, \nabla f)(\nabla f)^T \in \mathrm{Sym} & \text{in } \Omega \\ f(x) = x & \text{su } \Gamma_d \end{cases}$$

per un totale di 6 equazioni. Va detto però che la condizione $D_F W(\cdot, F) F^T \in \mathrm{Sym}$ è sempre soddisfatta, facendo quindi scomparire la corrispondente equazione di simmetria nel sistema che quindi si riduce a 3 equazioni con 3 incognite. L'introduzione dell'equazione costitutiva $S = D_F W(\cdot, F)$ ha quindi condotto al pareggiamento del numero di equazioni con quello delle incognite.

Iniziamo, per esercizio, a stabilire quanto affermato per qualche caso particolare.

Esercizio 3.10. *Dimostrare per esercizio che la condizione* $D_F W(x, F) F^T \in \mathrm{Sym}$ *è sempre soddisfatta nei seguenti casi*

1. $W(F) = |F|^p$, $p > 0$;
2. $W(F) = \Gamma(\det F)$ *dove* Γ *è una funzione scalare derivabile.*

1. Si ha $|F|^p = (|F|^2)^{\frac{p}{2}}$. Dunque $D_F|F|^p = \frac{p}{2}(|F|^2)^{\frac{p}{2}-1}2F = p|F|^{p-2}F$ e quindi

$$|F|^p F^T = p|F|^{p-2}FF^T \in \mathrm{Sym}.$$

2. Supponiamo per cominciare che $\Gamma(\delta) = \delta$. Essendo $\det F = \sum_{j=1}^3 F_{ij}(\mathrm{cof}F)_{ij}$ dove $(\mathrm{cof}F)_{ij} = (-1)^{i+j}\det|M_{ij}|$, allora si ha

$$\frac{\partial \det F}{\partial F_{ij}} = \sum_{j=1}^3 F_{ij}\frac{\partial}{\partial F_{ij}}(\mathrm{cof}F)_{ij} + (\mathrm{cof}F)_{ij} = (\mathrm{cof}F)_{ij}$$

dal momento che $\frac{\partial}{\partial F_{ij}}(\mathrm{cof}F)_{ij} = 0$. Si ha dunque

$$D_F \det F = \mathrm{cof}F$$

e quindi

$$(D_F \det F)F^T = (\mathrm{cof}F)F^T = (\det F)F^{-T}F^T = I\det F \in \mathrm{Sym}.$$

La tesi per Γ qualunque si ottiene osservando che

$$D_F\Gamma(\det F) = \Gamma'(\det F)D_F \det F)$$

e applicando i risultati precedenti.

Il caso generale segue dal seguente esercizio.

Esercizio 3.11. *Sia W un potenziale elastico che soddisfa il principio di obiettività. Dimostrare che:*

1. *esiste un potenziale $\widetilde{W}$ tale che $W(x,F) = \widetilde{W}(x, F^TF)$,*
2. *$D_FW(x,F) = F\big(D_F\widetilde{W}(x,F^TF) + D_F\widetilde{W}(x,F^TF)^T\big)$,*

e quindi concludere che $D_FW(x,F)F^T \in \mathrm{Sym}$.

Teorema 3.12. *Sia $W \in C^2(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^{3\times 3})$.* [1] *Sono soluzioni del problema di equilibrio tutti e soli i punti stazionari del funzionale*

$$I(g) = \int_\Omega W(x,\nabla g(x))\,dx - \int_\Omega b_\kappa\cdot g\,dx - \int_{\Gamma_t} t_\kappa\cdot g\,da,$$

sul dominio

$$\mathcal{A} = \{g:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3 \ : \ g\in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3) \ \text{ e } \ g(x) = x \ \textit{su}\ \Gamma_d\},$$

detto insieme delle deformazioni cinematicamente ammissibili. *Il funzionale $I(g)$ è detto* energia elastica totale *ed è dato dalla somma dell'*energia elastica immagazzinata (stored energy) $\int_\Omega W(x,\nabla g(x))\,dx$ *e del lavoro compiuto dalle forze esterne agenti sul corpo. Il potenziale W è quindi anche detto* densità di energia elastica.

Dimostrazione $f\in\mathcal{A}$ è un punto stazionario per I se e solo se

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I(f+\varepsilon\psi)-I(f)}{\varepsilon} = 0$$

per ogni ψ tale che $f+\varepsilon\psi\in\mathcal{A}$, cioè per ogni $\psi\in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$ tale che $\psi = 0$ su Γ_d, vale a dire

$$\frac{d}{d\varepsilon}I(f+\varepsilon\psi)_{|\varepsilon=0} = 0.$$

[1] Questa ipotesi esclude il caso $\lim_{\det F\to 0^+} W(F) = +\infty$.

Le funzioni $f + \varepsilon\psi$ si chiamano *variazioni* di f e la derivata a primo membro è detta *variazione prima* del funzionale I. Da questa terminologia prende il nome il *Calcolo delle Variazioni*.

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\varepsilon} I(f+\varepsilon\psi) = \\
&\quad = \frac{d}{d\varepsilon}\Big(\int_\Omega W(x, \nabla f(x) + \varepsilon\nabla\psi(x))\,dx - \int_\Omega b_\kappa \cdot (f+\varepsilon\psi)\,dx - \int_{\Gamma_t} t_\kappa \cdot (f+\varepsilon\psi)\,da\Big) \\
&\quad = \int_\Omega \frac{d}{d\varepsilon}\Big(W(x, \nabla f(x) + \varepsilon\nabla\psi(x))\Big)\,dx - \int_\Omega b_\kappa \cdot \psi\,dx - \int_{\Gamma_t} t_\kappa \cdot \psi\,da
\end{aligned}$$

dove il passaggio della derivata sotto il segno di integrale è giustificato dall'usuale teorema di derivazione sotto il segno di integrale di Lebesgue (cfr. ad esempio Giusti [16], Capitolo sesto, Teorema 9.1) che, oltre alla derivabilità con continuità della funzione integranda rispetto ad ε, garantita dal fatto che $W \in C^1$, richiede l'esistenza di due funzioni sommabili φ_0 e φ_1 tali che

1. $|W(x, \nabla f(x) + \varepsilon\nabla\psi(x))| \le \varphi_0(x) \quad$ q.o. $x \in \Omega$,

2. $|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\big(W(x, \nabla f(x) + \varepsilon\nabla\psi(x))\big)| \le \varphi_1(x) \quad$ q.o. $x \in \Omega$,

per ogni ε in un intorno di 0. La prima condizione è soddisfatta perché la funzione $(x, \varepsilon) \mapsto \nabla f(x) + \varepsilon\nabla\psi(x)$ è limitata in $\Omega \times [-\delta, \delta]$ ($\delta > 0$ qualunque) grazie al fatto che $f, \psi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, quindi ha valori in un compatto K di $\mathbb{R}^{3\times 3}$ e dunque

$$|W(x, \nabla f(x) + \varepsilon\nabla\psi(x))| \le \sup_{\overline{\Omega}\times K} |W| =: \varphi_0$$

dove il sup è massimo, e quindi finito, perché W è continua sul compatto $\overline{\Omega} \times K$. Per quanto riguarda la seconda, usando il fatto che $W \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{3\times 3})$ si ha

$$\begin{aligned}
|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\big(W(x, \nabla f(x) + \varepsilon\nabla\psi(x))\big)| &= |D_F W(x, \nabla f(x) + \varepsilon\nabla\psi(x))\big) \cdot \nabla\psi(x)| \\
&\le \|\nabla\psi\|_\infty \sup_{\overline{\Omega}\times K} |D_F W| =: \varphi_1.
\end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(f+\varepsilon\psi)_{|\varepsilon=0} = \int_\Omega D_F W(x, \nabla f(x)) \cdot \nabla\psi(x)\,dx - \int_\Omega b_\kappa \cdot \psi\,dx - \int_{\Gamma_t} t_\kappa \cdot \psi\,da$$

e, dal momento che

$$D_F W \cdot \nabla\psi = (D_F W)^{ij}\psi_{i,j} = [(D_F W)^{ij}\psi_i]_{,j} - (D_F W)^{ij}_{,j}\psi_i = \mathrm{div}(\psi D_F W) - \psi \cdot \mathrm{div} D_F W$$

per il teorema della divergenza, e usando il fatto che $\psi = 0$ su Γ_d, si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\varepsilon} I(f+\varepsilon\psi)_{|\varepsilon=0} = \\
&= \int_\Omega \mathrm{div}[\psi(x) D_F W(x, \nabla f(x))]\, dx - \int_\Omega \psi(x) \cdot \mathrm{div} D_F W(x, \nabla f(x))\, dx + \\
&\qquad - \int_\Omega b_\kappa \cdot \psi\, dx - \int_{\Gamma_t} t_\kappa \cdot \psi\, da \\
&= \int_{\partial\Omega} \psi(x) D_F W(x, \nabla f(x)) n_\kappa\, da - \int_\Omega \psi(x) \cdot \mathrm{div} D_F W(x, \nabla f(x))\, dx + \\
&\qquad - \int_\Omega b_\kappa \cdot \psi\, dx - \int_{\Gamma_t} t_\kappa \cdot \psi\, da \\
&= -\int_\Omega \big(\mathrm{div} D_F W(x, \nabla f) + b_\kappa\big) \cdot \psi\, dx + \int_{\Gamma_t} (D_F W(x, \nabla f) n_\kappa - t_\kappa) \cdot \psi\, da
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto che $f \in \mathcal{A}$ *è un punto stazionario per* I *se e solo se*

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} -\displaystyle\int_\Omega \big(\mathrm{div} D_F W(x, \nabla f) + b_\kappa\big) \cdot \psi\, dx + \int_{\Gamma_t} (D_F W(x, \nabla f) n_\kappa - t_\kappa) \cdot \psi\, da = 0 \\ \textit{per ogni } \psi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3) \textit{ tale che } \psi = 0 \textit{ su } \Gamma_d. \end{cases}$$

Questa equivalenza è nota come *teorema dei lavori virtuali* mentre la (3.3) è l'*equazione di Eulero* in forma integrale.

È evidente che la (3.3) è soddisfatta se valgono le equazioni di equilibrio. Viceversa, dalla (3.3) prendendo $\psi \in C^1_c(\Omega; \mathbb{R}^3)$, col che $\psi = 0$ su $\partial\Omega$, si ha

$$\int_\Omega \big(\mathrm{div} D_F W(x, \nabla f(x)) + b_\kappa\big) \cdot \psi\, dx = 0 \quad \forall\, \psi \in C^1_c(\Omega)$$

da cui, usando il fatto che W è di classe C^2, si ottiene

$$\mathrm{div} D_F W(x, \nabla f(x)) + b_\kappa = 0 \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Prendendo $S(x) = D_F W(x, \nabla f(x))$ si ha dunque

$$\mathrm{div} S + b_\kappa = 0 \ \text{ in } \Omega.$$

Quindi la (3.3) si riduce a

$$\int_{\Gamma_t} (D_F W(x, \nabla f(x)) n_\kappa - t_\kappa) \cdot \psi\, da = 0$$

per ogni $\psi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ tale che $\psi = 0$ su Γ_d, da cui segue che

$$D_F W(x, \nabla f(x)) n_\kappa - t_\kappa = 0 \ \text{ su } \Gamma_t,$$

ovvero

$$S n_\kappa = t_\kappa \ \text{ su } \Gamma_t.$$

□

3.7 Teoria infinitesima

Ricordando la relazione tra spostamento e deformazione

$$u(x) = f(x) - x,$$

indicato con $F = \nabla f$ e $H = \nabla u$ si ha

$$F = I + H = I + \varepsilon \tilde{H}$$

dove $\varepsilon := |H|$ e $\tilde{H} = H/|H|$.

Potenziale elastico

Se W è un potenziale elastico, che supponiamo almeno di classe C^2 rispetto ad F, si ha dunque

$$W(x, F) = W(x, I + \varepsilon \tilde{H}).$$

Per semplicità di notazione scriveremo $W(F)$ al posto di $W(x, F)$. Sviluppando intorno ad $\varepsilon = 0$ la funzione di classe C^2

$$\varepsilon \mapsto W(I + \varepsilon \tilde{H})$$

si ha

$$\begin{aligned} W(I + \varepsilon \tilde{H}) &= W(I) + \varepsilon D_F W(I) \cdot \tilde{H} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 D_F^2 W(I) \tilde{H} \cdot \tilde{H} + o(\varepsilon^2) \\ &= W(I) + D_F W(I) \cdot H + \frac{1}{2} D_F^2 W(I) H \cdot H + o(|H|^2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Poniamo

$$\boxed{\mathring{T} := D_F W(I), \qquad \mathbb{C} := D^2 W(I)}$$

$\mathbb{C}$ è un tensore del quart'ordine detto *tensore elastico*, mentre $\mathring{T}$ è lo sforzo a deformazione nulla, ovvero nella configurazione di riferimento. Esso è detto *tensore degli sforzi iniziali o residui*. Si osservi che, dalla relazione $D_F W(F) F^T \in \mathrm{Sym}$ segue, prendendo $F = I$ che $\mathring{T}$ *è simmetrico*. A proposito di $\mathbb{C}$, se $W \in C^2$ oppure se le derivate sono intese nel senso delle distribuzioni, si ha (*simmetrie maggiori*)

$$\mathbb{C}_{ijpq} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{pq} \partial F_{ij}} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{pq}} = \mathbb{C}_{pqij}. \tag{3.5}$$

Esercizio 3.13. *Dalle simmetrie maggiori di* $\mathbb{C}$ *segue che*

$$\mathbb{C} A \cdot B = \mathbb{C} B \cdot A$$

per ogni coppia di matrici $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Dalla *2* della Proposizione 3.9 si ha

$$\mathbb{C} \cdot Z = Z \mathring{T} \quad \forall\, Z \in \mathrm{Skw} \tag{3.6}$$

per cui, sostituendo nella (3.4) e scomponendo H nella somma della parte simmetrica E e della parte emisimmetrica Z, si ha (attenzione agli abusi di notazione)

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}H \cdot H &= \mathbb{C}(Z+E)\cdot H + o(|H|^2)\\
&= Z\mathring{T}\cdot H + \mathbb{C}E\cdot H + o(|H|^2)\\
&= Z\mathring{T}\cdot H + \mathbb{C}H\cdot E + o(|H|^2)\\
&= Z\mathring{T}\cdot H + \mathbb{C}(Z+E)\cdot E + o(|H|^2)\\
&= Z\mathring{T}\cdot H + Z\mathring{T}\cdot E + \mathbb{C}E\cdot E + o(|H|^2)\\
&= (H-E)\mathring{T}\cdot H + E\mathring{T}\cdot(H-E) + \mathbb{C}E\cdot E + o(|H|^2)\\
&= H\mathring{T}\cdot H - E\mathring{T}\cdot E + \mathbb{C}E\cdot E + o(|H|^2)
\end{aligned}$$

É facile mostrare (farlo per esercizio) che esiste un tensore del quart'ordine $\mathbb{L}$, detto *tensore di elasticità incrementale*, tale che

$$\boxed{\mathbb{L}E = \mathbb{C}E - E\mathring{T}}.$$

Si ha quindi

$$\mathbb{C}H\cdot H = H\mathring{T}\cdot H - E\mathring{T}\cdot E + \mathbb{C}E\cdot E + o(|H|^2) = H\mathring{T}\cdot H + \mathbb{L}E\cdot E + o(|H|^2).$$

In definitiva, quindi,

$$W(F) = W(I+H) = W(I) + \mathring{T}\cdot H + \frac{1}{2}H\mathring{T}\cdot H + \frac{1}{2}\mathbb{L}E\cdot E + o(|H|^2)$$

Se $W(I)=0$ (cosa che si può sempre assumere in quanto il potenziale elastico è definito a meno di una costante additiva).

Trascurando i termini di ordine superiore, allora l'energia totale elastica in teoria infinitesima è data da

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega Hu\mathring{T}\cdot Hu + \mathbb{C}Eu\cdot Eu\,dx + \int_\Omega \mathring{T}\cdot Hu\,dx - \int_\Omega b_\kappa\cdot u\,dx - \int_{\Gamma_t} t_\kappa\cdot u\,da,$$

dove u appartiene allo spazio degli spostamenti ammissibili

$$\mathcal{A} = \{u\in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)\ \text{ e }\ u(x)=0 \text{ su } \Gamma_d\}.$$

D'altra parte, supponendo che in assenza di forze esterne il corpo sia in equilibrio nella configurazione di riferimento[2] allora si ha $\int_\Omega \mathring{T}\cdot Hu\,dx = 0$. Infatti in tal caso si ha

$$\begin{cases}\operatorname{div}\mathring{T} = 0 & \text{su } \Omega\\ \mathring{T}\cdot n = 0 & \text{su } \partial\Omega\end{cases}$$

e quindi

$$\int_\Omega \mathring{T}\cdot H\,dx = -\int_\Omega u\operatorname{div}\mathring{T}\,dx + \int_{\partial\Omega} u\mathring{T}\cdot n\,da = 0.$$

In tal caso allora l'espressione dell'energia elastica totale diviene

$$\boxed{F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega Hu\mathring{T}\cdot Hu + \mathbb{C}Eu\cdot Eu\,dx - \int_\Omega b_\kappa\cdot u\,dx - \int_{\Gamma_t} t_\kappa\cdot u\,da.}$$

In assenza di tensione residua, cioè se $\mathring{T}=0$, allora si ha $\mathbb{L}=\mathbb{C}$ e

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbb{C}Eu\cdot Eu\,dx - \int_\Omega b_\kappa\cdot u\,dx - \int_{\Gamma_t} t_\kappa\cdot u\,da$$

[2] Si definisce *naturale* ogni configurazione che assunta come riferimento dia luogo ad uno sforzo residuo nullo, cioè $\mathring{T}=0$ (naturalmente non è detto che una tale configurazione esista).

Equazioni costitutive

Per quanto riguarda il tensore di Piola-Kirchhoff, si ha

$$S = D_F W(F) = D_H W(I + H) = \mathring{T} + H\,\mathring{T} + \mathbb{L}E + o(|H|)$$

In *elasticità lineare con tensione residua* si trascurano i termini di ordine superiore al primo in $|H|$ e quindi il tensore di Piola-Kirchhoff ha l'espressione

$$\boxed{S = \mathring{T} + H\,\mathring{T} + \mathbb{L}E}$$

Se la tensione residua è nulla, cioè $\mathring{T} = 0$, allora

$$\boxed{S = \mathbb{C}E}$$

Altre proprietà di simmetria di $\mathbb{C}$

Abbiamo già osservato che $\mathbb{C}$ gode delle simmetrie maggiori espresse dalla (3.5). Inoltre dalla (3.6) si ha, se $\mathring{T} = 0$,

$$\mathbb{C}Z = 0 \quad \forall\, Z \in \mathrm{Skw}$$

da cui segue (esercizio) che (*simmetrie minori*)

$$\mathbb{C}_{ijpq} = \mathbb{C}_{ijqp} \tag{3.7}$$

Combinando poi la (3.5) con la (3.7) si ha che anche

$$\mathbb{C}_{ijpq} = \mathbb{C}_{jipq}.$$

In definitiva, in assenza di tensione residua, basta ricordare che

$$\boxed{\mathbb{C}_{ijpq} = \mathbb{C}_{pqij} = \mathbb{C}_{jipq}}$$

Densità di energia di Kirchhoff-De Saint Venant

Se il materiale è omogeneo e isotropo e supponiamo anche che valga l'assioma di indifferenza materiale allora il tensore $\mathbb{C} = D^2W(I)$ eredita da W certe proprietà di invarianza e simmetria. Si potrebbe dimostrare (cfr. ad esempio Gurtin [18] (Appendix)) che in tal caso esistono due costanti λ e μ dette *costanti di Lamè* tali che

$$\mathbb{C}_{ijpq} = \lambda\delta_{ij}\delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{jp}\delta_{iq})$$

dove $\delta_{rs} = 1$ se $r = s$ e 0 altrimenti.

È facile verificare che allora si ha

$$\mathbb{C}E = 2\mu E + \lambda\,\mathrm{tr}(E)I$$

e di conseguenza

$$\boxed{\frac{1}{2}\mathbb{C}E \cdot E = \mu|E|^2 + \frac{\lambda}{2}|\,\mathrm{tr}(E)|^2} \tag{3.8}$$

Dunque la (3.8) è la densità di energia elastica lineare di un materiale omogeneo e isotropo. Essa è detta *densità di energia di Kirchhoff-De Saint Venant*.

Capitolo 4

L'integrale di Lebesgue

La teoria dell'integrazione secondo Riemann, pur avendo il pregio della semplicità, non è del tutto soddisfacente perchè

– molte funzioni non sono integrabili;

– è scarsamente flessibile nei confronti del passaggio al limite sotto il segno di integrale.

4.1 Misure e insiemi misurabili

Definizione 4.1. *Sia Ω un insieme non vuoto. Una famiglia $\mathscr{M}$ di sottoinsiemi di Ω è detta una* σ-algebra *se gode delle seguenti proprietà*

1. $\varnothing \in \mathscr{M}$;
2. $E \in \mathscr{M} \Rightarrow \Omega \setminus E \in \mathscr{M}$;
3. *se* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \in \mathscr{M}$ *allora* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{M}$.

Dimostrare, per esercizio, che, come conseguenza di queste proprietà, $\mathscr{M}$ risulta chiusa anche rispetto all'intersezione numerabile e alla differenza di insiemi.

Esempi banali di σ-algebre sono $\{\varnothing, \Omega\}$ e $\wp(\Omega)$ (insieme delle parti di Ω).

Definizione 4.2. *Sia Ω un insieme non vuoto e $\mathscr{M}$ una* σ-algebra *di sottoinsiemi di Ω. Una funzione $\mu : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$ è detta una* misura (positiva) *se gode delle seguenti proprietà*

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. *(additività numerabile) se* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \in \mathscr{M}$ *sono due a due disgiunti allora*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Gli elementi di $\mathscr{M}$ sono detti insiemi misurabili.

Come conseguenza di queste proprietà, valgono anche le seguenti altre

1. (*monotonia*) se E_1 ed E_2 sono misurabili ed $E_1 \subseteq E_2$ allora $m(E_1) \leq m(E_2)$;

2. (*subadditività numerabile*) se (E_n) è una successione di misurabili allora

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n);$$

3. (*continuità* sulla catene crescenti) se (E_n) è una successione crescente di misurabili, cioè $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n);$$

4. (*continuità* sulle catene decrescenti) se (E_n) è una successione decrescente di misurabili, cioè $E_{n+1} \subseteq E_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e se esiste n_0 tale che $m(E_{n_0}) < +\infty$ allora

$$m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Sia $x_0 \in \Omega$. Un semplice esempio di misura è la funzione

$$\mu : \wp(\Omega) \to [0, +\infty]$$

definita da

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E, \end{cases}$$

detta *delta di Dirac* in x_0 e denotata con δ_{x_0}.

4.2 La misura di Lebesgue

È possibile definire su $\Omega = \mathbb{R}^n$ una misura che coincida con l'area (nel caso $n = 2$) o il volume (nel caso $n = 3$) delle figure o dei solidi elementari.

Non è possibile farlo definendo

$$m(E) = \int_E dx$$

con l'integrale di Riemann, perché l'insieme di Dirichlet non sarebbe misurabile, contro il fatto che è unione numerabile di singoletti che sarebbero invece misurabili (di misura nulla).

La cosa si può invece fare con una procedura diversa, che porta alla cosiddetta *misura di Lebesgue*[1], nel modo seguente.

[1] Lebesgue, Henri-Léon (Beauvais 1875 - Parigi 1941), matematico francese. Insegnò all'Università di Rennes e di Poitiers e, più tardi, al Collége de France a Parigi; fu membro dell'Accademia delle Scienze francese e della Royal Society di Londra. Dedicatosi allo studio della teoria degli insiemi di Georg Cantor e in particolare al problema della misura di un insieme, nel 1902, durante la stesura della sua tesi di dottorato, sviluppò una nuova e piú ampia nozione di integrale. Per far ciò prese le mosse dalla nozione di integrale di Riemann, giungendo a una nozione più ampia che poteva essere adoperata anche per il calcolo dell'integrale di funzioni molto discontinue (integrale secondo Lebesgue). Tale teoria, all'inizio considerata nell'ambiente scientifico una pura curiosità matematica, conobbe in seguito vasta diffusione e il riconoscimento che meritava.

Definizione 4.3. *Si chiama* intervallo o rettangolo *di* $\mathbb{R}^n$ *il prodotto cartesiano di* n *intervalli chiusi e limitati di* $\mathbb{R}$*, cioè ogni insieme* R *del tipo*

$$R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Si definisce misura *di* R *il numero*

$$m(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Si ammette inoltre che l'insieme vuoto sia un rettangolo e si pone, per definizione, $m(\varnothing) = 0$.

Definizione 4.4. *Un insieme* Y *si dice* pluri-intervallo o pluri-rettangolo *se* Y *è unione di un numero finito di rettangoli di* $\mathbb{R}^n$ *non aventi punti interni comuni.*

Dato un pluri-rettangolo $Y = \bigcup_{i=1}^{N} R_i$, con R_i intervalli non aventi punti interni comuni, si definisce *misura* di Y il numero

$$m(Y) = \sum_{i=1}^{N} m(R_i).$$

Osserviamo che un medesimo pluri-rettangolo può essere rappresentato in modi diversi. Si può tuttavia dimostrare che *la misura di* Y *non dipende dalla sua decomposizione come unione di rettangoli.*

Siano A un aperto e K un compatto di $\mathbb{R}^n$. Si definiscono *misura* di A e di K, rispettivamente, i numeri

$$m(A) = \sup\{m(Y) \ : \ Y \text{ pluri-rettangolo}, \ Y \subseteq A\},$$

$$m(K) = \inf\{m(Y) \ : \ Y \text{ pluri-rettangolo}, \ K \subseteq Y\}.$$

Si osservi che nessuno degli insiemi a secondo membro può essere vuoto e che un insieme aperto può avere misura infinita.

Sia poi E un sottoinsieme, qualunque, di $\mathbb{R}^n$. Si definiscono *misura esterna* e *misura interna* di E secondo Lebesgue, i numeri

$$m^*(E) = \inf\{m(A) \ : \ A \text{ aperto}, \ A \supseteq E\}$$

$$m_*(E) = \sup\{m(K) \ : \ K \text{ compatto}, \ K \subseteq E\}.$$

Si dimostra che per ogni insieme E si ha $m_*(E) \leq m^*(E)$.

Definizione 4.5. *Sia* E *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^n$*. Se* $m^*(E) < +\infty$ *si dice che* E *è* misurabile *secondo Lebesgue se*

$$m_*(E) = m^*(E)$$

ed il loro valore comune si chiama misura *di* E *e si indica con* $m(E)$*.*

Se invece $m^*(E) = +\infty$*, si dice che* E *è* misurabile *secondo Lebesgue se*

$$m_*(E \cap B_R(0)) = m^*(E \cap B_R(0)) \quad \forall\, R > 0$$

dove $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| < R\}$ *è la palla aperta di centro* 0 *e raggio* R*, e si chiama* misura *di* E *il limite*

$$m(E) = \lim_{R \to +\infty} m^*(E \cap B_R(0)). \tag{4.1}$$

Si osservi che il limite (4.1) esiste sempre perchè la funzione $R \mapsto m^*(E \cap B_R(0))$ è monotona.

Esercizio 4.6. *Provare che gli aperti e i compatti sono misurabili e la loro misura coincide con quella definita precedentemente. In particolare le palle sono misurabili.*

Si dimostra che la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Lebesgue costituisce una σ-algebra.

Osservazione 4.7. Ci si potrebbe chiedere per quale motivo ci sia bisogno di distinguere, nella definizione, gli insiemi di misura finita e infinita. La ragione è che se semplicemente si definisse misurabile qualunque insieme E tale che $m_*(E) = m^*(E)$ allora l'intersezione di due insiemi misurabili potrebbe non essere misurabile. Supponiamo che esista un insieme limitato V non misurabile (la cui esistenza equivale all'Assioma della Scelta) e sia B una palla che lo contiene. Sia poi $E = (\mathbb{R}^n \setminus B) \cup V$. Avremmo che E sarebbe misurabile in quanto la misura esterna e quella interna sarebbero entrambe infinite, ma $E \cap B = V$ sarebbe non misurabile.

Naturalmente questo fenomeno non può accadere con l'accorgimento adottato nella definizione in quanto, in base ad essa, E non è misurabile.

Dimostrare, per esercizio la seguente condizione necessaria e sufficiente di misurabilità.

Teorema 4.8. *Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $m^*(E) < +\infty$ è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un aperto A e un compatto K con $K \subseteq E \subseteq A$ tali che*

$$m(A) - m(K) < \varepsilon.$$

Esempi

Esempio 4.9. $\mathbb{Q}$ è misurabile e $m(\mathbb{Q}) = 0$. È un'immediata conseguenza della proprietà 3 dell'insieme $\mathscr{M}$ e della σ-additività della misura. Infatti, $\mathbb{Q}$ è unione numerabile di misurabili disgiunti (i suoi punti, ciascuno dei quali è un intervallo e pertanto misurabile) ciascuno dei quali ha misura nulla. Di questo fatto si può dare anche la seguente dimostrazione diretta. Si ordinano gli elementi di $\mathbb{Q}$ in una successione $\mathbb{Q} = (r_n)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme aperto

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon 2^{-n-1}}(r_n)$$

contiene $\mathbb{Q}$. Per la subadditività numerabile della misura si ha

$$m(A_\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(B_{\varepsilon 2^{-n-1}}(r_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon.$$

Ne consegue che $m^*(\mathbb{Q}) \leq \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, quindi, per l'arbitrarietà di ε, si ha $m^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Esempio 4.10. L'insieme di Dirichlet, $D = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ essendo intersezione di misurabili è misurabile e, per la monotonia della misura, ha misura nulla.

Esempio 4.11. L'insieme degli irrazionali tra 0 e 1 è misurabile e $m([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$.

Esempio 4.12. Sia C l'insieme di Cantor[2], costruito partendo dall'intervallo $[0,1]$, suddividendolo in tre parti e togliendo l'intervallo aperto centrale $E_1 = (1/3, 2/3)$ (di ampiezza $1/3$); si suddivide poi ciascuno dei 2 intervalli rimanenti in tre parti e si tolgono i 2 intervalli centrali, di ampiezza $1/3^2$ che riuniamo in un insieme E_2. Iterando il procedimento, si viene a costruire una successione di insiemi (E_n) ciascuno dei quali è unione di 2^{n-1} intervalli di ampiezza $1/3^n$. Sia $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ed, infine, $C = [0,1] \setminus E$ l'insieme di Cantor. Per calcolarne la misura, osserviamo che $m(E_n) = 2^{n-1}/3^n$, e poichè gli E_n sono aperti (quindi misurabili) e due a due disgiunti, allora E è misurabile e si ha

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = 1.$$

Anche C è misurabile, come differenza di misurabili, e si ha

$$m(C) = m([0,1]) - m(E) = 0.$$

Concludiamo osservando che C ha la cardinalità del continuo, e quindi non è numerabile. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 4.13. *L'insieme di Cantor è costituito dagli $x \in [0,1]$ che si rappresentano nella forma*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \tag{4.2}$$

con $a_n = 0$ oppure $a_n = 2$.

Dimostrazione L'intervallo $E_1 = (1/3, 2/3)$ è costituito da numeri la cui rappresentazione in base 3 ha come primo coefficiente, dopo la virgola, $a_1 = 1$, e non appartengono all'insieme di Cantor; gli estremi dell'intervallo, che invece vi appartengono, ammettono le rappresentazioni

$$\frac{1}{3} = 0,1\overline{0} = 0,0\overline{2}, \qquad \frac{2}{3} = 0,2\overline{0}$$

Iterando il procedimento ne consegue che l'insieme di Cantor è costituito esattamente da quei numeri la cui rappresentazione ternaria non comprende la cifra 1. □

La non numerabilità dell'insieme di Cantor segue quindi dall'osservazione che esso può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme $[0,1]$ sostituendo nella (4.2) la cifra 2 con la cifra 1 ed il 3 al denominatore con un 2, vale a dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

[2]Georg Cantor nacque a San Pietroburgo nel 1845 e morì nel 1918 ad Halle. Espose la teoria dei numeri irrazionali, definì i numeri cardinali, i concetti di numerabilità e potenza di un insieme. Nel 1895 elaborò la teoria degli insiemi. Stabilì inoltre, grazie al suo famoso teorema, l'esistenza di diversi livelli di infinito, risolvendo così il problema posto dai paradossi dell'equinumerosità. A tale proposito formulò l'Ipotesi del continuo. I principali indirizzi di ricerca facenti capo alla teoria degli insiemi furono due: uno verteva sulle proprietà piú generali degli insiemi, l'altro faceva riferimento all'analisi e alla topologia. Cantor diceva: "l'essenza della matematica risiede nella sua libertà: la rivoluzione attuale non è che una nuova affermazione di questa libertà.

4.3 Esistenza di insiemi non misurabili

Anche rispetto alla misura di Lebesgue esistono insiemi non misurabili, ma non è facile dimostrarne l'esistenza.

Esempio 4.14. di insieme limitato non misurabile secondo Lebesgue (Vitali[3], 1905) Nell'intervallo $[0,1]$ si consideri la relazione di equivalenza

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}$$

e sia $\mathscr{F} := [0,1]/\sim$. Per ogni classe di equivalenza $A \in \mathscr{F}$ si scelga un punto $x_A \in A$, e sia E l'insieme costituito da tutti questi punti. E non è misurabile secondo Lebesgue.[4]

Questo esempio usa l'Assioma della Scelta[5]; è stato dimostrato, all'inizio degli anni '80, che l'esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue è, in effetti, equivalente ad esso.

4.4 Integrale di Lebesgue

Integrale di una funzione semplice

Definizione 4.15. *Si chiama* funzione semplice*, in $\mathbb{R}^n$, ogni combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili, limitati, due a due disgiunti. Detti $E_1,\ldots,E_k$ tali sottoinsiemi si ha dunque*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i}(x),$$

per opportune costanti reali $c_1,\ldots,c_k$. Data una funzione semplice φ come sopra, si definisce integrale di φ *il numero*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx := \sum_{i=1}^{k} c_i m(E_i).$$

Poiché una funzione semplice si può rappresentare in modi diversi come combinazione lineare di funzioni caratteristiche, sarebbe necessario dimostrare che la definizione di integrale non dipende dalla rappresentazione.

Integrale di funzioni limitate a supporto compatto

Definizione 4.16. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione limitata a supporto compatto. Si definiscono gli integrali superiore e inferiore come*

$$\int^* f(x)\,dx := \inf\{\int \varphi(x)\,dx \ : \ f \le \varphi\},$$
$$\int_* f(x)\,dx := \sup\{\int \varphi(x)\,dx \ : \ \varphi \le f\}.$$

[3]Giuseppe Vitali (1875–1932), nato a Modena, studiò a Bologna e Pisa e dopo un periodo trascorso nell'insegnamento nelle scuole medie, fu professore a Modena, Parma e Bologna. È stato uno dei piú originali e profondi matematici di questo secolo. Fu essenzialmente un self made man che, per buona parte della sua carriera, lavorò quasi senza contatti con altri scienziati, e gli capitò così di arrivare simultaneamente ad altri, ma indipendentemente da loro, specie dal Lebesgue, a fondamentali risultati di teoria delle funzioni di variabile reale, che altrimenti gli avrebbero data fama mondiale.

[4]Per la dimostrazione, che si basa sull'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue, vedi Giusti, Analisi Matematica 2, Esempio 3.4

[5]Assioma della Scelta: "data una famiglia $\mathscr{F}$ non vuota di insiemi non vuoti e due a due disgiunti esiste un sottoinsieme E della loro unione tale che $E \cap A$ ha cardinalità 1 per ogni $A \in \mathscr{F}$.

La funzione f si dice integrabile *secondo Lebesgue se gli integrali inferiore e superiore coincidono; il loro comune valore si chiama integrale di f e si indica con uno dei simboli*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx, \quad \int f(x)\,dx, \quad \int f(x)\,dx_1 \cdots dx_n.$$

Osservazione 4.17. Si ha sempre $\int_* f\,dx \leq \int^* f\,dx$. Inoltre, poichè f è limitata e nulla fuori di un compatto, allora l'insieme $\{\int \varphi(x)\,dx \ : \ f \leq \varphi\}$ non è mai vuoto, cioè l'integrale superiore è sempre finito. Dunque, se una funzione limitata a supporto compatto è integrabile, allora il suo integrale è finito: si usa anche dire in questo caso che f è *sommabile*.

Integrale di una funzione limitata su di un insieme limitato

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $f : E \to \mathbb{R}$. Indichiamo con

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus E \end{cases}$$

il *prolungamento a zero* di f su $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che se E è limitato allora f_0 ha supporto compatto.

Definizione 4.18. *Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$ e $f : E \to \mathbb{R}$ un funzione limitata. f si dice* integrabile su E *se f_0 è integrabile ai sensi della definizione precedente, e si pone*

$$\int_E f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\,dx.$$

Osserviamo che se E è misurabile allora si ha

$$\int_E 1\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1_E\,dx = m(E).$$

4.5 Confronto con l'integrale di Riemann

$$f \text{ Riemann integrabile} \Rightarrow f \text{ Lebesgue integrabile}^6$$

ed i due integrali coincidono sulle funzioni Riemann integrabili. In particolare, per le funzioni continue a tratti valgono quindi le stesse regole di calcolo che valevano per l'integrale di Riemann.

Non vale il viceversa perché, ad esempio, la funzione di Dirichlet 1_D con $D = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ non è integrabile secondo Riemann, ma lo è secondo Lebesgue (ed il suo integrale è 0).

4.6 Estensioni della definizione di integrale

Integrale di una funzione su un insieme qualunque

Definizione 4.19. *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.*

[6] cfr. Giusti, Analisi Matematica 2, Esempio 1.1, Capitolo 6

- *Se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in E$, diremo che f è* integrabile in E *se per ogni $r > 0$ la funzione $f_r(x) = \min\{f_0(x), r\} \cdot 1_{B_r(0)}(x)$ è integrabile; in tal caso il limite*

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_r(x)\, dx$$

si chiama integrale di f su E *e si indica col simbolo*

$$\int_E f(x)\, dx;$$

- *se f non è sempre positiva, si dice che f* è integrabile *se lo sono le due funzioni (positive)*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \textit{(parte positiva di } f\textit{)}$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} \quad \textit{(parte negativa di } f\textit{)}$$

e se i loro integrali non sono entrambi uguali a $+\infty$. In tal caso si pone

$$\int_E f(x)\, dx = \int_E f^+(x)\, dx - \int_E f^-(x)\, dx$$

Infine, f si dice sommabile *se è integrabile con integrale finito.*

Osservazione 4.20. Osserviamo che se si assume che $f \geq 0$ allora

$$r < s \Rightarrow f_r \leq f_s. \tag{4.3}$$

Ne consegue che il limite

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_r(x)\, dx$$

che compare nella definizione esiste sempre, finito o infinito, perchè, per la positività di f e la monotonia dell'integrale, si tratta del limite per $r \to +\infty$ di una funzione crescente di r.

Sommabilità e valore assoluto

La seguente importante proprietà è una conseguenza diretta della definizione.

Proposizione 4.21. *f è sommabile $\iff$ $|f|$ è sommabile.*

Dimostrazione Segue immediatamente dal fatto che $|f| = f^+ + f^-$. Completare la prova per esercizio. □

4.7 Proprietà dell'integrale

L'integrale di Lebesgue su insiemi misurabili gode delle ususali proprietà di linearità, monotonia e additività degli integrali.

Tra le altre proprietà sono di un certo interesse le seguenti:

- se $f(x) \geq 0$ su un insieme misurabile E e se $\displaystyle\int_E f(x)\, dx = 0$, allora f è uguale a zero *quasi ovunque* (si dice che una proprietà sussiste *quasi ovunque* quando è soddisfatta con l'eccezione al più di un insieme di misura nulla).

- sia f una funzione sommabile su un insieme misurabile E. Allora f assume valori finiti quasi ovunque.

4.8 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Problema: data una successione di funzioni sommabili (f_h) convergenti puntualmente in un insieme E, si può concludere che

$$\lim_{h\to\infty} \int_E f_h \, dx = \int_E \lim_{h\to\infty} f_h \, dx?$$

Sappiamo che la risposta è positiva se E è un intervallo chiuso e limitato, le funzioni f_h sono Riemann-integrabili e la convergenza è uniforme.

Esempio 4.22. Consideriamo la successione

$$f_n(x) = n^p x \, \mathrm{e}^{-nx}, \ x \in [0,1]$$

dove p è un parametro reale. La successione converge puntualmente alla funzione identicamente nulla per ogni $p \in \mathbb{R}$, converge uniformemente per ogni $p < 1$, e gli integrali convergono per ogni $p < 2$.

Il teorema della convergenza monotona

Teorema 4.23. (Beppo Levi[7]) *Sia (f_h) una successione di funzioni integrabili su un sottoinsieme misurabile E di $\mathbb{R}^n$, con*

$$0 \le f_1 \le f_2 \le f_3 \le \cdots .$$

Allora si ha

$$\int_E \lim_{h\to\infty} f_h(x) \, dx = \lim_{h\to\infty} \int_E f_h(x) \, dx.$$

Osservazione 4.24. L'ipotesi di non negatività delle funzioni non è essenziale, potendosi sostituire con la più debole

$$\int_E f_1(x) dx > -\infty;$$

infatti in tal caso si può applicare il teorema alle funzioni positive $g_h = f_h - f_1$ (farlo per esercizio). Quest'ultima ipotesi è invece essenziale, come si vede prendendo $E = \mathbb{R}$ e $f_h = -1/h$ (costanti).

Lemma di Fatou

Teorema 4.25 (lemma di Fatou)**.** *Sia (f_h) una successione di funzioni integrabili e non negative su un sottoinsieme misurabile E di $\mathbb{R}^n$. Allora si ha*

$$\int_E \liminf_{h\to\infty} f_h(x) \, dx \le \liminf_{h\to\infty} \int_E f_h(x) \, dx.$$

[7] Nato a Torino il 14 maggio 1875; morto a Rosario (Argentina) il 28 agosto 1961. Si laureò in Matematica a Torino nel 1896. Fu professore nelle università di Cagliari, Parma e Bologna. Nel 1938 le leggi razziali lo costrinsero all'esilio in Argentina, ove ottenne l'incarico di Direttore del nascente Istituto Matematico di Rosario e ove fondò alcune riviste matematiche. La sua attività scientifica spazia dalla Geometria algebrica alla Logica (assioma della scelta) alla teoria dell'integrazione e delle equazioni alle derivate parziali (il famoso teorema di Beppo Levi sull'integrazione delle successioni monotone e i lavori sul principio di Dirichlet in cui viene introdotto un nuovo spazio funzionale che ha dato origine ai cosiddetti spazi di Beppo Levi). Ai precedenti filoni di ricerca si aggiunsero anche la Teoria dei numeri, l'Analisi complessa, l'Elettrotecnica, la Teoria delle misure fisiche e la Fisica teorica.

Osservazione 4.26. L'ipotesi di non negatività si può sostituire con la più generale

$$f_h(x) \geq \varphi(x) \quad \text{q.o.}\, x \in E$$

con φ sommabile in E ed E misurabile; basta infatti applicare il teorema alla successione $g_h = f_h - \varphi$ (esercizio).

Applicando il Lemma di Fatou alla successione $(-f_h)$ si ottiene il seguente corollario.

Corollario 4.27. *Sia (f_h) una successione di funzioni integrabili su un sottoinsieme misurabile E di $\mathbb{R}^n$ e tali che*

$$f_h(x) \leq \varphi(x) \quad \text{q.o.}\, x \in E$$

con φ sommabile in E. Allora si ha

$$\int_E \limsup_{h\to\infty} f_h(x)\, dx \geq \limsup_{h\to\infty} \int_E f_h(x)\, dx.$$

Il teorema della convergenza dominata

Teorema 4.28 (Lebesgue)**.** *Sia (f_h) una successione di funzioni integrabili su un sottoinsieme misurabile E di $\mathbb{R}^n$ e tali che*

1. $\lim_{h\to\infty} f_h(x) = f(x) \quad \text{q.o.}\, x \in E,$
2. *esista una funzione φ sommabile in E tale che*

$$|f_h(x)| \leq \varphi(x) \quad \text{q.o.}\, x \in E.$$

Allora

$$\lim_{h\to\infty} \int_E f_h(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx.$$

Dimostrazione Si ha $-\varphi(x) \leq f_h(x) \leq \varphi(x)$ q.o. $x \in E$, sicchè, per il Lemma di Fatou

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\, dx &= \int_E \liminf_{h\to\infty} f_h(x)\, dx \leq \liminf_{h\to\infty} \int_E f_h(x)\, dx \leq \\ &\leq \limsup_{h\to\infty} \int_E f_h(x)\, dx \leq \int_E \limsup_{h\to\infty} f_h(x)\, dx = \int_E \lim_{h\to\infty} f_h(x)\, dx.\end{aligned}$$

□

Esercizio 4.29. *Provare*[8] *che la successione $f_n(x) = n^p x\, \mathrm{e}^{-nx}$, $x \in [0,1]$ è dominata da una funzione sommabile (cioè soddisfa l'ipotesi 2. del Teorema di Lebesgue) per ogni $p < 2$.*

Naturamente i teoremi di Beppo Levi, Fatou e Lebesgue si applicano anche a serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Ad esempio, applicando Beppo Levi alla successione delle ridotte $g_h(x) = \sum_{n=1}^{h} f_n(x)$, si ha che se le f_n sono funzioni misurabili positive allora vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\, dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx. \tag{4.4}$$

[8] Suggerimento: sostituire n con un parametro reale t e massimizzare rispetto a t.

Applicando invece il Teorema di Lebesgue si ha lo scambio tra serie e integrale come in (4.4) nel caso in cui[9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x)|\, dx < +\infty$$

o, equivalentemente (esercizio),

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|\, dx < +\infty.$$

4.9 Derivazione sotto il segno di integrale

Consideriamo, in questa sezione, una funzione del tipo

$$F(t) = \int_E f(x,t)\, dx$$

dove E è un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, ed $f : E \times A \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile rispetto ad t su un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}$. Ci si chiede sotto quali condizioni la funzione F risulti derivabile e in tal caso quale sia la sua derivata.

Teorema 4.30 (di derivazione sotto il segno di integrale)**.** *Se*

1. *la funzione $t \mapsto f(x,t)$ è derivabile in A per quasi ogni $x \in E$,*
2. *esiste una funzione φ sommabile in E tale che*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big| \le \varphi(x) \quad \forall\, t \in A \ \text{ e } \ \text{q.o.}\, x \in E,$$

allora F è derivabile in A e si ha

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_E f(x,t)\, dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx.$$

Dimostrazione Per definizione, F è derivabile se esiste finito il limite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \int_E \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}\, dx.$$

Considerata una qualunque successione $t_n \to t_0$, si può applicare il Teorema di Lebesgue, poichè per il Teorema di Lagrange

$$\Big|\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\Big| = \Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi_n)\Big| \le \varphi(x).$$

Si ha pertanto

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \int_E \lim_{n \to \infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\, dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\, dx.$$

□

[9] cfr. Giusti, Analisi Matematica 2, Capitolo 6.

4.10 Funzioni misurabili

Definizione 4.31. *Sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\mathscr{M}$ una σ-algebra su Ω. f si dice* misurabile *se $f^{-1}(A) \in \mathscr{M}$ per ogni aperto A di $\overline{\mathbb{R}}$.*

Teorema 4.32. *Sia E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ ed $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione non negativa. Allora*

$$f \text{ è misurabile} \iff f \text{ è integrabile}$$

4.11 Gli spazi L^p

Definizioni e principali proprietà

In questa sezione ricordiamo brevemente le definizioni e le principali proprietà degli spazi L^p, omettendo le dimostrazioni, per cui si rimanda a [31] e [33].

Definizione 4.33. *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ si dice una* seminorma *di X se gode delle seguenti proprietà:*

1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$;*

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *per ogni $x, y \in X$.*

Una seminorma $\| \ \|$ su X si dice norma *se gode dell'ulteriore proprietà:*

3) $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$

Sia $1 \leq p < +\infty$ e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Indicheremo con $\mathcal{L}^p(A)$ l'insieme delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ misurabili tali che

$$\int_A |f|^p dx < +\infty.$$

Proposizione 4.34. *Sia $1 \leq p < +\infty$ e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Allora $\mathcal{L}^p(A)$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione $\| \ \|_{p,A} : \mathcal{L}^p(A) \to \mathbb{R}$ definita da $\|f\|_{p,A} = \left(\int_A |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ è una seminorma.*

Sia $1 \leq p < +\infty$ e sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile. Due funzioni f, $g \in \mathcal{L}^p(A)$ si dicono equivalenti, e si scrive $f \sim g$ se $f = g$ quasi ovunque in A.

Si verifica facilmente che $\sim$ è una relazione d'equivalenza in $\mathcal{L}^p(A)$ e si definisce

$$L^p(A) := \mathcal{L}^p(A)/\sim .$$

Gli elementi di $L^p(A)$ vengono spesso indicati con gli stessi simboli usati per quelli di $\mathcal{L}^p(A)$, ad esempio f. Tuttavia, quando si scrive $f \in L^p(A)$ occorre ricordare che f non indica una sola funzione ma l'intera classe di equivalenza $[f]$.

Sia $1 \leq p < +\infty$ e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Sia $[f] \in L^p(A)$. Poniamo per definizione

$$\|[f]\|_{p,A} := \|f\|_{p,A}.$$

Proposizione 4.35. *Sia $1 \leq p < +\infty$ e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Allora $L^p(A)$ è uno spazio vettoriale e $\| \ \|_{p,A}$ è una norma in $L^p(A)$.*

In seguito indicheremo con f anche gli elementi di $L^p(A)$.

Definizione 4.36. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile e sia $f : A \to \mathbb{R}$. f si dice* essenzialmente limitata *su A se esiste un numero $k \in \mathbb{R}$ tale che*

$$|f(x)| \leq k \qquad \text{per quasi ogni } x \in A;$$

k è detto un maggiorante essenziale *di f.*

Se $g : A \to \mathbb{R}$ è essenzialmente limitata in A, allora il minimo dei maggioranti essenziali di g in A è detto estremo superiore essenziale *di g in A e si scrive* $\operatorname{esssup}_A |f|$.

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile. Indicheremo con $\mathcal{L}^\infty(A)$ l'insieme delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ misurabili ed essenzialmente limitate. In tal modo si ha

$$A \text{ limitato} \Rightarrow \mathcal{L}^\infty(A) \subset \mathcal{L}^p(A) \text{ per ogni } p \geq 1.$$

Proposizione 4.37. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile. Allora $\mathcal{L}^\infty(A)$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione $\| \ \|_{\infty,A} : \mathcal{L}^\infty(A) \to \mathbb{R}$ definita da $\|f\|_{\infty,A} = \operatorname{esssup}_A |f|$ è una seminorma.*

Ripetiamo per $p = +\infty$ lo stesso procedimento seguito per $1 \leq p < +\infty$.

Definizione 4.38. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Siano f, g funzioni in $\mathcal{L}^\infty(A)$; $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ quasi ovunque in A.*

Si verifica facilmente che $\sim$ è una relazione d'equivalenza in $\mathcal{L}^\infty(A)$.

Definizione 4.39. *Definiamo $L^\infty(A) = \mathcal{L}^\infty(A)/\sim$.*

Gli elementi di $L^\infty(A)$ sono classi di equivalenza di funzioni e li denoteremo con il simbolo di $[f]$ o senplicemente con f.

Definizione 4.40. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Sia $[f] \in L^\infty(A)$. Poniamo per definizione*

$$\|[f]\|_{\infty,A} = \|f\|_{\infty,A}.$$

Proposizione 4.41. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Allora $L^\infty(A)$ è uno spazio vettoriale e $\| \ \|_{\infty,A}$ è una norma in $L^\infty(A)$.*

In seguito indicheremo con f anche gli elementi di $L^\infty(A)$. Inoltre scriveremo $\| \ \|_p$ in luogo di $\| \ \|_{p,A}$ con $1 \leq p \leq +\infty$, ogni volta in cui risulta evidente dal contesto a quale A ci si riferisce.

Osserviamo infine che si ha

$$A \text{ limitato} \Rightarrow L^\infty(A) \subset L^p(A) \text{ per ogni } p \geq 1.$$

Alcune utili disuguaglianze

Definizione 4.42. *Una funzione reale φ definita su un segmento (a, b) si dice convessa se vale la disuguaglianza*

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \tag{4.5}$$

per ogni $a < x < b$, $a < y < b$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

La (4.5) equivale anche alla condizione

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \tag{4.6}$$

con $a < s < t < u < b$.

Teorema 4.43 (disuguaglianza di Jensen)**.** *Sia Ω un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ con $|\Omega| = 1$. Sia f una funzione in $L^1(\Omega)$. Se $a < f(x) < b$ per ogni $x \in \Omega$ e $a, b \in \mathbb{R}$ e se φ è una funzione convessa su (a, b) allora*

$$\varphi\Big(\int_\Omega f(x)dx\Big) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f)dx.$$

DIMOSTRAZIONE Poniamo $t = \int_\Omega f(x)dx$. Allora risulta $a < t < b$. Sia β l'estremo superiore dei quozienti al primo membro della (4.6), dove $a < s < t$. Segue che

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s - t) \qquad \forall\, a < s < t.$$

D'altra parte β non supera alcuno dei quozienti al secondo membro della stessa diseguaglianza per ogni $t < u < b$. Da ciò ricaviamo che

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x) - t) \geq 0$$

per ogni $x \in \Omega$. Poiché φ è continua, $\varphi \circ f$ è misurabile. Integrando ambo i membri della disequazione e ricordando che $t = \int_\Omega f(x)dx$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(f(x))dx &\geq \int_\Omega \varphi(t)dx + \int_\Omega \beta(f(x) - t)dx \\ &\geq \varphi\Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)|\Omega| + \beta\Big(\int_\Omega f(x)dx - |\Omega| \int_\Omega f(x)dx\Big) \\ &\geq \varphi\Big(\int_\Omega f(x)dx\Big).\end{aligned}$$

□

Notazione: sia $p \in [1, +\infty]$; denotiamo con p' l'esponente coniugato di p, cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ intendendo che se $p = +\infty$ allora $p' = 1$ e se $p = 1$ allora $p' = +\infty$.

Teorema 4.44. *(Disuguaglianza di Hölder) Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ misurabile e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $f \in L^p(A)$ e $g \in L^{p'}(A)$ con $p \in [1, +\infty]$. Allora $fg \in L^1$ e*

$$\int_A |fg|dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

DIMOSTRAZIONE vedi [31] cap.3.

□

Definizione 4.45. *Sia X uno spazio vettoriale e $\| \ \|$ una sua norma. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice una successione di Cauchy se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} \ \ \textit{tale che} \ \ \|x_m - x_n\| < \varepsilon \ \ \forall\, m, n > \overline{n}.$$

X si dice completo rispetto alla metrica indotta dalla norma $\| \ \|$ se ogni successione di Cauchy converge in X

Una proprietà fondamentale degli spazi L^p è la completezza rispetto alla metrica indotta della norma $\| \ \|_p$. Da questa proprietà risulta che se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{p,A} < +\infty$ allora la serie delle f_n converge in norma $\| \ \|_p$ ad una funzione f di $L^p(A)$. Un'altra importante caratteristica della norma $\| \ \|_p$ è quella che

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{p,A} = \|f\|_{\infty,A}$$

per ogni f in $L^\infty(A)$.

Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$. Indicheremo con $C_0(\Omega)$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle funzioni continue che tendono a zero sulla frontiera di Ω, cioè le $f \in C(\Omega)$ tali che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K_\varepsilon \subset \Omega$ compatto tale che $|f(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in \Omega \setminus K_\varepsilon$.

Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$. Indicheremo con $C_0^1(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che $f \in C^1(\Omega)$ e $f \in C_0(\Omega)$.
È noto che $C^1(\Omega)$ con la norma $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|Df\|_\infty$ è completo. Poiché, come si verifica facilmente, C_0^1 è un sottospazio chiuso di C^1, allora anche C_0^1 è completo con la $\| \ \|_{C^1}$. La seguente proposizione mostra che una norma equivalente in C_0^1 è data da $\|f\|_{C^1} = \|Df\|_\infty$; ne consegue che C_0^1 con quest'ultima norma è completo.

Proposizione 4.46. *(Disuguaglianza di Poincaré) Sia Ω un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^N$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f \in C_0^1(\Omega)$. Allora $\|f\|_p \le K\|Df\|_p$ dove K è una costante che dipende da Ω, ma non da p.*

Dimostrazione Definiamo $F(\rho, \theta)$ la funzione f espressa in coordinate polari

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos(\theta_1) && 0 \le \theta_1 \le \pi \\
x_2 &= \rho\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) && 0 \le \theta_2 \le \pi \\
&\dots \\
x_{N-1} &= \rho\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\dots\cos(\theta_{N-1}) && 0 \le \theta_{N-1} \le 2\pi \\
x_N &= \rho\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\dots\sin(\theta_{N-1}) && 0 \le \rho,
\end{aligned}$$

dove θ è il vettore $(\theta_1, \dots, \theta_{N-1})$ e la prolunghiamo a zero su una palla di centro O e raggio R contenente Ω. Se facciamo la derivata di F rispetto a ρ in valore assoluto otteniamo

$$\begin{aligned}
|F_\rho(\rho,\theta)| &= |f_{x_1}\big(\rho\cos(\theta_1), \dots\big)\cos(\theta_1) + \\
&\quad + f_{x_2}\big(\rho\cos(\theta_1), \rho\sin(\theta_1)\cos(\theta_2), \dots\big)\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \dots \\
&\quad + f_{x_N}\big(\dots, \rho\sin(\theta_1)\dots\sin(\theta_{N-1})\big)\sin(\theta_1)\dots\sin(\theta_{N-1})| \\
&\le |f_{x_1}\big(\rho\cos(\theta_1), \dots, \rho\sin(\theta_1)\dots\sin(\theta_{N-1})\big)| + \dots \\
&\quad + |f_{x_N}\big(\rho\cos(\theta_1), \dots, \rho\sin(\theta_1)\dots\sin(\theta_{N-1})\big)|.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$|F(\rho,\theta)|^p = \Big| \int_\rho^R \frac{\partial F(\tau,\theta)}{\partial \tau} d\tau \Big|^p \le \Big| \int_\rho^R \Big|\frac{\partial F}{\partial \tau}\Big| \frac{\tau^{\frac{N-1}{p}}}{\tau^{\frac{N-1}{p}}} d\tau \Big|^p$$

ed ora utilizzando la disuguaglianza di Hölder applicata a $|\frac{\partial F}{\partial \tau}|\tau^{\frac{N-1}{p}}$ ed a $\frac{1}{\tau^{\frac{N-1}{p}}}$ otteniamo

$$\begin{aligned}
|F(\rho,\theta)|^p &\le \Big| \Big(\int_\rho^R \Big|\frac{\partial F}{\partial \tau}\Big|^p \tau^{N-1} d\tau \Big)^{\frac{1}{p}} \Big|^p \cdot \Big| \Big(\int_\rho^R \Big(\frac{1}{\tau^{\frac{N-1}{p}}}\Big)^{p'} d\tau \Big)^{\frac{1}{p'}} \Big|^p \\
&\le C_p(\rho) \Big| \Big(\int_\rho^R \Big|\frac{\partial F}{\partial \tau}\Big|^p \tau^{N-1} d\tau \Big)^{\frac{1}{p}} \Big|^p
\end{aligned} \tag{4.7}$$

dove p' è l'esponente coniugato di p e

$$\begin{aligned}
C_p(\rho) &= \Big| \Big(\int_\rho^R \Big(\frac{1}{\tau^{\frac{N-1}{p}}}\Big)^{p'} d\tau \Big)^{\frac{1}{p'}} \Big|^p \\
&= \begin{cases} \Big| \frac{p-1}{p-N} \Big|^{p-1} \Big| R^{\frac{p-N}{p-1}} - \rho^{\frac{p-N}{p-1}} \Big|^{p-1} & \text{se } p \ge N \\ \Big| \log \frac{R}{\rho} \Big|^{p-1} & \text{se } p = N \end{cases}
\end{aligned}$$

Ricordando che $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p+b^p)$ per ogni $a,b>0$ e $p\in[1,+\infty[$ e indicando con $\omega(\theta)=(\operatorname{sen}\theta_1)^{N-2}(\operatorname{sen}\theta_2)^{N-3}\dots(\operatorname{sen}\theta_{N-2})$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_0^R\int_{S^{N-1}} |F(\rho,\theta)|^p\rho^{N-1}\omega(\theta)d\rho d\theta\\
&\le \int_0^R\int_{S^{N-1}} C_p(\rho)\int_0^R |\frac{\partial F}{\partial\tau}|^p\tau^{N-1}d\tau\rho^{N-1}\omega(\theta)d\rho d\theta\\
&\le \int_0^R\int_{S^{N-1}} C_p(\rho)\int_0^R 2^{p-1}\big(|f_{x_1}^p+\dots+f_{x_N}^p|\big)\tau^{N-1}d\tau\rho^{N-1}\omega(\theta)d\rho d\theta\\
&\le 2^{p-1}\int_0^R C_p(\rho)\rho^{N-1}d\rho\int_{B_R}(|f_{x_1}^p+\dots+f_{x_N}^p|)dx_1\dots dx_N\\
&\le \sqrt{N}\|Df\|_p^p 2^{p-1}\int_0^R C_p(\rho)\rho^{N-1}d\rho.
\end{aligned}$$

Osserviamo che, nel caso $p>N$

$$\max_{[0,R]} C_p(\rho)\le 2^{p-1}R^{p-N}\,|\,\frac{p-1}{p-N}\,|^{\,p-1}.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &\le 2^{\frac{p-1}{p}}N^{\frac{1}{2p}}\,|\,\frac{p-1}{p-N}\,|^{\,\frac{p-1}{p}}\|Df\|_p\big(\int_0^R\rho^{N-1}d\rho\,2^{p-1}R^{p-N}\big)^{\frac{1}{p}}\\
&\le K_p\|Df\|_p
\end{aligned}$$

dove $K_p=4^{\frac{p-1}{p}}N^{-\frac{1}{2p}}\,|\,\frac{p-1}{p-N}\,|^{\,\frac{p-1}{p}}R$. Inoltre

$$\lim_{p\to+\infty}K_p=4R,$$

quindi K_p è una successione limitata e quindi si ha $\|f\|_p\le K\|Df\|_p$ con K indipendente da p.

□

4.12 Approssimazione di funzioni L^p

Lemma 4.47. *Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. L'insieme S di tutte le funzioni $s:A\to\mathbb{R}$ semplici misurabili è denso in $L^p(A)$ se $p\in[1,+\infty[$.*

Teorema 4.48. *Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Per $1\le p<+\infty$ $C_c^\infty(A)$ è denso in $L^p(A)$, cioè, fissato $f\in L^p(A)$*

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,g_\varepsilon\in C_c^\infty(A):\|f-g_\varepsilon\|_p<\varepsilon.$$

4.13 Funzioni localmente sommabili

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue. Si definisce

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega):=\{u:\Omega\to\mathbb{K}\ :\ \forall\,x_0\in\Omega\ \exists\,V_{x_0}\ :\ u_{|V_{x_0}}\in L^1(V_{x_0})\}$$

o, equivalentemente (esercizio),

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega):=\{u:\Omega\to\mathbb{K}\ :\ u_{|K}\in L^1(K)\ \forall\,K\text{ compatto},\ K\subseteq\Omega\}.$$

Esercizio 4.49. *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue (non necessariamente di misura finita). Allora si ha*[10]

$$L^p(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega) \quad \forall\, p \in [1, +\infty]$$

4.14 Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni

Lemma 4.50. *Sia Ω un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$. Se $f \in L^1_{\text{loc}}\Omega$ è tale che*

$$\int_\Omega f u \, dx = 0 \ \forall u \in C_c^\infty(\Omega),$$

allora $f = 0$ quasi ovunque su Ω.

Dimostrazione Cfr. Brezis [9], Lemme IV.2.

4.15 Spazi di Sobolev

Per tutta la sezione, se non altrimenti specificato, tutte le derivate si intendono in senso debole o distribuzionale, e Ω indicherà un sottoinsieme aperto, limitato e regolare di $\mathbb{R}^n$ (o un intervallo se $n = 1$), anche se molti degli enunciati valgono per classi di insiemi più generali. Inoltre $m \in \mathbb{N}$ e $1 \le p \le +\infty$.

Lo *spazio di Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ è definito da

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D_\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } |\alpha| \le m\}.$$

Se $m = 0$ si ha $W^{m,p} = L^p$. Lo spazio vettoriale $W^{m,p}(\Omega)$ potrà essere munito della norma

$$\|u\|_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{se } p < +\infty,$$

oppure

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{se } p = +\infty,$$

o altre norme equivalenti.

Teorema 4.51. *$(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ è uno spazio di Banach per $1 \le p \le +\infty$.*

Dimostrazione Sia (u_h) una successione di Cauchy in $W^{m,p}$; allora $(D_\alpha u_h)$ è di Cauchy in L^p per $|\alpha| \le m$. Di conseguenza, poiché L^p è completo, esistono delle funzioni u e u_α, $0 < |\alpha| \le m$, in L^p tali che $u_h \to u$ e $D_\alpha u_h \to u_\alpha$ in L^p. Per ottenere la tesi basta provare che, per tali α, si ha $u_\alpha = D_\alpha u$ in L^p.

Per definizione di derivata debole si ha, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\langle D_\alpha u_h, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_h, D_\alpha \varphi \rangle. \tag{4.8}$$

Allora, passando al limite per $h \to \infty$ nella (4.8), si ha che

$$\langle u_\alpha, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D_\alpha \varphi \rangle;$$

d'altra parte, per definizione di derivata debole il secondo membro è uguale a $\langle D_\alpha u, \varphi \rangle$ per cui si ha

$$\langle u_\alpha, \varphi \rangle = \langle D_\alpha u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

cioè $u_\alpha = D_\alpha u$ in $\mathscr{D}'$, e la tesi segue dal lemma fondamentale del CdV. □

[10] Ricordiamo che se Ω ha misura finita allora $1 \le p < q \le \infty \Rightarrow L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$.

Funzioni di Sobolev nulle al bordo

Ricordiamo che, se $1 \leq p < +\infty$, le funzioni di L^p si possono approssimare con funzioni C_c^∞. In $W^{m,p}$ con $m > 0$ questa cosa risulta generalmente impossibile. Per rendersene conto basta cercare di approssimare una funzione costante diversa da zero nel caso $n = m = p = 1$, $\Omega = (0, 1)$.

Indichiamo con $W_0^{m,p}(\Omega)$ la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$ con la topologia della norma. Scriveremo anche

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Si ha che $(W_0^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ è completo, e quindi di Banach, in quanto è un sottospazio chiuso dello spazio completo $W^{m,p}(\Omega)$. I due spazi coincidono se $p < \infty$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$ oppure $m = 0$.

Approssimazione con funzioni regolari

Vale il seguente teorema di approssimazione; per la dimostrazione si può vedere Adams [3], Theorem 3.16.

Teorema 4.52 (di Meyers-Serrin ($H = W$))**.** *Sia $1 \leq p < +\infty$. Per ogni $u \in W^{m,p}(\Omega)$ esiste una successione di funzioni $u_h \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\|u - u_h\|_{m,p} \to 0$ per $h \to +\infty$.*

Dal teorema, e dal fatto che Ω è limitato, segue che la chiusura dell'insieme $\{u \in C^\infty(\Omega) \ : \ \|u\|_{m,p} < \infty\}$ in $W^{m,p}(\Omega)$ è tutto lo spazio $W^{m,p}(\Omega)$. In altri termini, le funzioni C^∞ sono dense in $W^{m,p}$. Il teorema di Meyers-Serrin è del 1964. Prima di allora questo risultato di chiusura non era noto e quindi si usava un altro simbolo, $H^{m,p}(\Omega)$, per indicare il completamento di $\{u \in C^\infty(\Omega) \ : \ \|u\|_{m,p} < \infty\}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p}$. Il teorema afferma quindi che $H = W$ (questo è anche il titolo che gli autori hanno dato all'articolo in cui pubblicarono il risultato, [25]).

Osservazione 4.53. Notiamo che il teorema $H = W$ non vale per $p = \infty$. Infatti la funzione $|x|$ appartiene a $W^{1,\infty}(-1, 1)$ ma non può essere approssimata da funzioni regolari nella norma di $W^{1,\infty}(-1, 1)$ che implica la convergenza uniforme delle derivate.

Proposizione 4.54. *$H^{m,p}(\bar{\Omega}) = H^{m,p}(\Omega)$.*

Dimostrazione vedi Agmon [4], n.2.

Notazione: $H^m = H^{m,2}$.

Capitolo 5

Spazi di Hilbert e convergenza debole

Come riferimento per questa sezione vedere [20], Capitolo 21.

Ricordiamo che uno spazio di Hilbert è uno spazio normato completo (Banach) in cui la norma proviene da un prodotto scalare, cioè

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle},\ \forall\, x \in H.$$

Negli spazi di Hilbert vale la seguente

Teorema 5.1 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.**

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|\ \forall\, x, y \in H.$$

Dimostrazione Osserviamo che, per ogni $r \in \mathbb{R}$ si ha

$$\langle x - ry, x - ry\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Posto $A = \|y\|^2$, $B = \langle x, y\rangle$ e $C = \|y\|^2$ si ha quindi

$$Ar^2 - 2Br + C \geq 0\ \forall\, r \in \mathbb{R}.$$

Di qui, se $A = 0$ allora si ha $B = 0$ e quindi la disuguaglianza è soddisfatta. Se $A > 0$, posto $r = B/A$, si ha $B^2 \leq CA$, cioè la tesi. □

Esempio 5.2. Sono spazi di Hilbert, lo spazio $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con il prodotto scalare

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x) \cdot v(x)\, dx.$$

e lo spazio di Sobolev $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con il prodotto scalare

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x) \cdot v(x)\, dx + \int_\Omega Du(x) \cdot Dv(x)\, dx,$$

e, più in generale, per $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} W^{m,2}(\Omega; \mathbb{R}^n) &= \{y \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)\ :\ D_\alpha y \in L^2\ \forall\, |\alpha| \leq 2\} \\ &= \{y \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)\ :\ Dy \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n}),\ D^2 y \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n\times n\times n})\} \end{aligned}$$

con il prodotto scalare

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\le 2} \int_\Omega D_\alpha u(x) \cdot D_\alpha v(x)\, dx.$$

Nel seguito H denoterà sempre un generico spazio di Hilbert.

Definizione 5.3. *Siano u e (u_n) in H. Diremo che u_n* converge debolmente *a u in H, e scriveremo $u_n \rightharpoonup u$ in H se*

$$\langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in H.$$

Riassumiamo nel seguente enunciato alcune importanti proprietà della convergenza debole

Proposizione 5.4. *Siano u e (u_n) in H. Si ha*

1. *$u_n \to u$ fortemente (cioè in norma) $\Rightarrow u_n \rightharpoonup u$ debolmente;*
2. *se $u_u \rightharpoonup u$ allora $(\|u_n\|)_n$ è limitata e $\|u\| \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$;*
3. *se $u_n \rightharpoonup u$ e $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|u\|$ allora $u_n \to u$ fortemente;*
4. *se $u_n \to u$ e $v_n \rightharpoonup v$ in H allora $\langle u_n, v_n\rangle \to \langle u, v\rangle$*
5. *$u_n \rightharpoonup u \iff u_n \to u$ in $\mathscr{D}'$* e *$\|u_n\| \le C\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione *1.* Segue immediatamente dalla disuguglianza di Cauchy-Schwarz.

2. Supponiamo che $u_n \rightharpoonup u$ e osserviamo che, per Cauchy-Schwarz

$$|\langle u_n, u\rangle| \le \|u_n\|\|u\|$$

e, passando al liminf per $n \to \infty$ ambo i membri si ha

$$\|u\|^2 \le \|u\| \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$$

da cui, dividendo per $\|u\| \ne 0$ si ottiene

$$\|u\| \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$$

che, d'altra parte, vale anche se $u = 0$. Ne consegue che la norma di H è un funzionale sequenzialmente semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole.

La limitatezza della successione $(\|u_n\|)$ è la cosa meno banale da provare. Osservato che

$$\|u_n\| = \langle u_n, \frac{u_n}{\|u_n\|}\rangle,$$

basta dimostrare che i funzionali lineari

$$L_n v = \langle u_n, v\rangle$$

sono uniformemente limitati sulla palla unitaria $B_1 = \{v \in H\ : \|v\| \le 1\}$, ovvero esiste $C \ge 0$ tale che

$$\|L_n v\| \le C\ \forall\, v \in B_1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

In effetti $u_n \rightharpoonup u$ implica che $L_n v \to \langle u, v\rangle$ $\forall v \in L^2$. Ne consegue che per ogni $v \in L^2$ la successione $(L_n v)_n$ è limitata, cioè esiste una costante C_v tale che

$$|L_n v| \le C_v \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se potessimo affermare che la costante C_v si può scegliere indipendentemente da v, cioè esiste C tale che

$$|L_n v| \le C \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall v \in B_1,$$

cioè che la limitatezza della successione è uniforme rispetto a v in B_1, allora la tesi sarebbe provata. La desiderata proprietà di limitatezza uniforme, non facile da dimostrare, è stabilita da uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Funzionale:

Teorema 5.5. (Banach-Steinhaus o di limitatezza uniforme) *Sia X uno spazio di Banach e sia $\{L_j\}_{j\in J}$ una famiglia (qualunque) di funzioni lineari e continue da X in $\mathbb{R}$.*

$$\sup_{j\in J} |L_j x| < +\infty \ \forall\, x \in X \quad \Rightarrow \quad \sup_{j\in J} \|L_j\| < +\infty$$

dove

$$\|L_j\| := \sup\{|L_j x| \ :\ \|x\| \le 1\}.$$

Per una dimostrazione che non fa uso del teorema di Banach-Steinhaus (ma che praticamente lo ridimostra nel caso degli spazi di Hilbert) vedere [20], Lemma 21.11.

3. Si ha

$$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2\langle u_n, u\rangle + \|u\|^2$$

e basta quindi passare al limite per $n \to \infty$ per ottenere la tesi.

4. Basta osservare che si ha

$$\begin{aligned} |\langle u_n, v_n\rangle - \langle u, v\rangle| &\le |\langle u_n, v_n\rangle - \langle u, v_n\rangle| + |\langle u, v_n\rangle - \langle u, v\rangle| \\ &\le \|u_n - u\|\|v_n\| + |\langle u, v_n\rangle - \langle u, v\rangle| \end{aligned}$$

e passare al limite per $n \to \infty$.

5. Esercizio.

□

Esempio 5.6. Mostriamo che il viceversa della *1* non vale. Un controesempio è dato in $L^2(0,1)$ dalla successione $u_n(x) = \operatorname{sen}(2\pi n x)$, che converge debolmente a 0. Questo segue dalla *5*; infatti la successione è limitata in L^2 e per ogni $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$ (denso in $L^2(0,1)$) si ha

$$\begin{aligned} \langle u_n, \varphi\rangle &= \int_0^1 \varphi(x)\operatorname{sen}(2\pi n x)\,dx = \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 \varphi(x)\frac{d}{dx}[\cos(2\pi n x)]\,dx \\ &= -\int_0^1 \varphi'(x)\frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n}\,dx \to 0, \end{aligned}$$

ma non converge fortemente a 0 poiché

$$\|u_n\|_2 = \Big(\int_0^1 |u_n|^2 dx\Big)^{1/2} = \Big(\int_0^1 |\operatorname{sen}(2\pi n x)|^2 dx\Big)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{5.2}$$

La stessa successione mostra anche che la *4* non vale se le convergenze sono entrambe deboli, considerando $v_n = u_n$.

Utilissimo nel Calcolo delle Variazioni è il teorema seguente, per la cui dimostrazione si rimanda a [20], Theorem 21.8.

Teorema 5.7. *Ogni successione limitata* (u_n) *in uno spazio di Hilbert ammette una sottosuccessione convergente debolmente.*

Segue immediatamente il seguente

Corollario 5.8 (Teorema di Alaoglu-Kakutani)**.** *Le palle chiuse di* H *sono debolmente compatte per successioni.*

Noi abbiamo definito qui solamente la convergenza debole senza definire la *topologia debole* e rimandiamo gli interessati per esempio al testo di Brezis [9]. In generale, a meno che lo spazio sia di dimensione finita, la topologia debole non è metrizzabile, cioè non esiste una metrica in H tale che la topologia ad essa associata coincida con la topologia debole. Si riesce però a dimostrare che sugli insiemi limitati, ed in particolare sulle palle, la topologia debole è metrizzabile; si ha inoltre che tutto lo spazio è debolmente metrizzabile se e solo se ha dimensione finita.

Definizione 5.9. *Si chiama* base hilbertiana *di* H *ogni successione* (e_n) *di elementi di* H *tale che*

(i) $\| \mathrm{e}_n \| = 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\langle \mathrm{e}_m, \mathrm{e}_n \rangle = 0 \ \forall\, m, n,\ m \neq n$*;*

(ii) lo spazio vettoriale generato da (e_n) *(i.e. combinazioni lineari finite di elementi della base) è denso in* H*.*

Definizione 5.10. H *si dice* separabile *se possiede un sottoinsieme numerabile denso (per la topologia della norma).*

Teorema 5.11. *Se* H *è separabile allora* H *possiede una base hilbertiana.*

Dimostrazione Sia (v_n) un sottoinsieme numerabile denso in H e sia $F_n = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ lo spazio vettoriale generato da $\{v_1, ..., v_n\}$. Gli F_n costituiscono una catena crescente di sottospazi di dimensione finita tali che $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ è denso in H. Scegliamo una base ortonormale in F_1 che completiamo in una base ortonormale di F_2, ecc. Otteniamo così una base hilbertiana di H. □

Teorema 5.12. *Se* H *è separabile allora la convergenza debole è metrizzabile sui limitati.*

Dimostrazione Dati $u, v \in H$ definiamo

$$d(u, v) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle u - v, \mathrm{e}_k \rangle|$$

Si verifica facilmente che d è una metrica in H.

Sia $u_n \rightharpoonup u$. Allora $\|u_n\| \leq C$ e $\lim_{n\to\infty} \langle u_n - u, \mathrm{e}_k \rangle = 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Dunque

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n_m \in \mathbb{N} \quad |\langle u_n - u, \mathrm{e}_k \rangle| < \frac{1}{m} \ \forall\, n \geq n_m,\ \forall\, k \leq m.$$

Allora, $\forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n_m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\begin{aligned} d(u_n, u) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} |\langle u_n - u, \mathrm{e}_k \rangle| + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle u_n - u, \mathrm{e}_k \rangle| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \frac{1}{m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|u_n - u\| \| \mathrm{e}_k \| \\ &\leq \frac{1}{m} + \|u_n - u\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \frac{1}{m} + 2C \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

e, siccome

$$\lim_{m \to \infty} \big(\frac{1}{m} + 2C \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \big) = 0$$

allora

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ d(u_n, u) < \varepsilon\ \forall\, n > n_{m_\varepsilon}$$

quindi $d(u_n, u) \to 0$.

Vicecersa, supponiamo che $\|u_n\| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $d(u_n, u) \to 0$. Per definizione di d allora si ha

$$|\langle u_n - u, \mathrm{e}_k \rangle| \to 0 \text{ per } n \to \infty \text{ e per ogni } k \in \mathbb{N}$$

e ciò implica $u_n \rightharpoonup u$. □

SI potrebbe dimostrare (vedi ad esempio Brezis) che gli spazi $W^{m,2}$, $m \geq 0$, sono separabili.

Capitolo 6

Convergenza debole negli spazi di Sobolev

L^2 e $W^{1,2}$ sono spazi di HIlbert separabili, quindi la convergenza debole è metrizzabile sugli insiemi limitati.

Teorema di Rellich

Chiaramente l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} W^{m,p} & \to & L^p, \\ u & \mapsto & D^\alpha u \end{array}$$

è continua, in quanto $\|D^\alpha u\|_p \leq \|u\|_{m,p}$. In particolare è continua l'immersione di $W^{m,p}$ in L^p $(u \mapsto u)$.

Quindi si ha

$$u_n \to u \text{ in } W^{m,p} \iff D^\alpha u_n \to D^\alpha u \text{ in } L^p,\ |\alpha| \leq m.$$

La seguente proposizione mostra che una proprietà analoga vale anche per la convergenza debole in $W^{1,2}$.

Proposizione 6.1. *Si ha*

$$u_n \rightharpoonup u \ in\ W^{1,2} \iff u_n \rightharpoonup u \ in\ L^2,\ Du_n \rightharpoonup Du \ in\ L^2.$$

Dimostrazione $\Leftarrow$ segue immediatamente dalle definizioni. Rimane da dimostrare che

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,2} \Rightarrow u_n \rightharpoonup u \text{ in } L^2,\ Du_n \rightharpoonup Du \text{ in } L^2.$$

Per le proprietà della convergenza debole, dall'ipotesi segue che $\|u_n\|_{1,2} \leq C$. Per definizione della norma in $W^{1,2}$ segue che le successioni (u_n) e (Du_n) sono limitate in L^2 e quindi ammettono sottosuccessioni debolmente convergenti

$$u_{n_k} \rightharpoonup v, \quad Du_{n_k} \rightharpoonup z \ \text{ in } L^2.$$

Usando la definizione di derivata debole debole si dimostra che $z = Dv$ e quindi $u_{n_k} \rightharpoonup v$ in $W^{1,2}$ da cui segue che $v = u$.

Ripetendo il ragionamento per ogni suttosuccessione si ha che da ogni sottosuccessione (u_{n_k}) si può estrarre una ulteriore sottosuccessione $(u_{n_{k_p}})$ tale che

$$u_{n_{k_p}} \rightharpoonup u \text{ in } L^2,\ Du_{n_{k_p}} \rightharpoonup Du \text{ in } L^2.$$

Per la metrizzabilità della convergenza debole si ha allora che la convergenza sussiste per l'intera sottosuccessione, e il teorema è dimostrato. □

Ma vale anche il seguente risultato più forte per la cui dimostrazione rinviamo a Brezis [**?**], Théorème IX.16.

Teorema 6.2 (Rellich)**.** *Si ha*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,2} \iff u_n \to u \text{ in } L^2,\ Du_n \rightharpoonup Du \text{ in } L^2.$$

Si usa dire che l'immersione è compatta.

Con il termine *immersione* si intende un'applicazione lineare, iniettiva, continua. Un'immersione si dice *compatta* se mappa insiemi limitati in relativamente compatti (in termini di successioni significa che da ogni successione limitata nel dominio è possibile estrarre una sottosuccessione convergente (fortemente) nel codominio).

Capitolo 7

Esistenza di configurazioni di equilibrio stabile. Metodo variazionale

7.1 Problema di minimo

Consideriamo qui il problema dell'esistenza di configurazioni di equilibrio stabile come soluzioni del problema di minimo dell'energia elastica.

Consideriamo in particolare il caso seguente.

Problema. Consideriamo materiali di potenziale $W(F)$. L'energia elastica da minimizzare è quindi

$$I(y) = \int_\Omega W(\nabla y)\, dx - \int_\Omega b_\kappa \cdot y\, dx - \int_{\Gamma_t} t_\kappa \cdot y\, da$$

dove y appartiene allo spazio delle deformazioni ammissibili

$$\mathcal{A} = \{y \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3) \ \text{ e } \ y(x) = x \text{ su } \Gamma_d\},$$

ed Ω è un aperto di $\mathbb{R}^3$ regolare, connesso e limitato.

7.2 Il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni

L'esistenza di una soluzione può essere dimostrata in vari modi. Quello che utilizzeremo noi è un esempio di applicazione del *metodo diretto del Calcolo delle Variazioni* il cui ingrediente principale è costituito dal seguente teorema di Tonelli.

Sia X uno spazio topologico.

Definizione 7.1. *Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* (sequenzialmente) semicontinua inferiormente *in un punto $x \in X$ se*[1]

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \quad \textit{per ogni } x_n \to x.$$

Esercizio 7.2. *Dimostrare che il sup di una famiglia di funzioni s.c.i. è una funzione s.c.i.*

[1] Ricordiamo che $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f(x_k) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f(x_k)$.

Definizione 7.3. *Una funzione $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* (sequenzialmente) coerciva *se per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste un sottoinsieme sequenzialmente compatto*[2] *K_t, di X tale che*

$$\{x \in X \ : \ F(x) \leq t\} \subseteq K_t.$$

Osservazione 7.4. Si verifica immediatamente che se F è coerciva e $G \geq F$ allora anche G è coerciva.

Teorema 7.5. (Tonelli) *Sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione*

1. *sequenzialmente semicontinua inferiormente;*
2. *sequenzialmente coerciva.*

Allora esiste il minimo di F su X.

Dimostrazione Se F è identicamente $+\infty$ non c'è nulla da provare. Altrimenti,

$$\inf\{F(x) \ : \ x \in X\} < +\infty. \tag{7.1}$$

Sia (x_n) una *successione minimizzante*, cioè tale che

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \inf\{F(x) \ : \ x \in X\} < +\infty;$$

è un facile esercizio mostrare che una tale successione esiste sempre, ma a priori la (x_n) potrebbe non essere convergente. La prima cosa da fare è allora cercare una successione minimizzante *convergente*. La $F(x_n)$, invece, essendo convergente o, al più, divergente a $-\infty$, è limitata superiormente, cioè esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x_n) \leq L \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Poiché F è sequenzialmente coerciva allora la successione (x_n) ammette una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente ad un elemento $\overline{x} \in X$ (questa è appunto una successione minimizzante convergente). A questo punto, $\overline{x}$ è candidato ad essere punto di minimo di F. Dobbiamo, cioè, provare che

$$F(\overline{x}) \leq \inf\{F(x) \ : \ x \in X\}. \tag{7.2}$$

Per ottenere la minorazione, dobbiamo mettere in relazione il valore in $\overline{x}$ con quelli nelle x_{n_k}. Per la semicontinuità di F Si ha

$$F(\overline{x}) \leq \liminf_{k\to+\infty} F(x_{n_k}) = \inf\{F(x) \ : \ x \in X\}$$

Segue la tesi. □

Il teorema ora dimostrato costituisce il fondamento del cosiddetto "metodo diretto del Calcolo delle Variazioni", che può essere riassunto nello schema seguente

$$\boxed{\text{coercività + semicontinuità inferiore} \Rightarrow \text{esistenza di punti di minimo}}$$

Osserviamo che le richieste *1.* e *2.* del Teorema di Tonelli sono tra loro contrastanti, in quanto la prima richiede che la topologia sia abbastanza forte (ipotesi di forza) mentre la seconda richiede che la topologia sia abbastanza debole (ipotesi di debolezza). Il *metodo diretto del Calcolo delle Variazioni*, per la dimostrazione dell'esistenza del minimo di un funzionale F su uno spazio topologico X, consiste nel determinare, quando ciò è possibile, una topologia τ su X che soddisfi entrambe le ipotesi di semicontinuità e coercività.

Sussiste anche una versione topologica del teorema di Tonelli.

[2] $K \subset X$ si dice *(sequenzialmente) compatto*, o *compatto per successioni* se da ogni successione in K è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un elemento di K.

7.3 Esistenza di soluzioni del problema di minimo

Considerata la *funzione indicatrice di* $\mathcal{A}$

$$\chi_{\mathcal{A}}(y) := \begin{cases} 0 & \text{se } y \in \mathcal{A} \\ +\infty & \text{altrimenti in } W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

si ha che il problema di minimo della sezione 7.1 è equivalente al seguente

$$\min\{I^\infty(y) \ : \ y \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)\}$$

dove $I^\infty := I + \chi_{\mathcal{A}}$.

Teorema 7.6 (di coercività)**.** *Se*

1. *il potenziale* $W : \mathbb{R}^{3\times 3} \to]-\infty, +\infty]$ *soddisfa la condizione di crescita*

$$W(F) \geq c|F|^2 - d \ \forall\, F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   per opportune costanti $c, d \geq 0$*,*

2. Γ_d *è una porzione di* $\partial\Omega$ *tale che* $\mathscr{H}^2(\Gamma_d) > 0$ *(ad esempio se* Γ_d *è una porzione di superficie regolare di area* > 0*),*

allora il funzionale I^∞ *dell'energia elastica totale è debolmente coercivo in* $W^{1,2}$*.*

Ingrediente fondamentale della dimostrazione è la disuguaglianza di Poincaré.

Teorema 7.7 (disuguaglianza di Poincaré)**.** *Supponiamo che* Ω *sia connesso e* $p > 1$*. Sia* Γ *una porzione di* $\partial\Omega$ *tale che* $\mathscr{H}^2(\Gamma) > 0$*. Allora esiste* $C > 0$ *tale che*

$$\|y\|_p \leq C\big(\|Dy\|_p + \|y_{|\Gamma}\|_p\big) \tag{7.3}$$

per ogni $y \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^k)$*.*

Dimostrazione Dimostrata da Paroni nel caso $y \in C^1(\overline{\Omega})$. Per densità si estende a $W^{1,p}$. □

Dimostrazione (del teorema di coercività). Affinchè il funzionale sia coercivo occorre che gli insiemi di sottolivello

$$\{y \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3) \ : \ I^\infty(y) \leq C\}$$

siano contenuti in un insieme sequenzialmente compatto. Consideriamo dunque una successione (y_n) in $W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ tale che

$$I^\infty(y_n) \leq C.$$

Riusciamo a dire che da (y_n) è possibile estrarre una sottosuccessione debolmente convergente? Osserviamo che $y_n \in \mathcal{A}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$I^\infty(y_n) = I(y_n) \geq c\int_\Omega |Dy_n|^2 dx - \|b\|_2\|y_n\|_2 - \|t\|_{2,\Gamma_t}\|y_n\|_{2,\Gamma} - d|\Omega|.$$

Utilizzando la disuguaglianza di Young

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$$

che vale per ogni $\varepsilon > 0$ e si ottiene da quella solita sostituendo a con $a\sqrt{\varepsilon}$ e b con $b/\sqrt{\varepsilon}$, si ha, per ogni $\varepsilon > 0$

$$I^\infty(y_n) \geq c\|Dy_n\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|y_n\|_2^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|b\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|y_n\|_{2,\Gamma_t}^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|t\|_{2,\Gamma_t}^2 - d|\Omega|$$

e, usando la *disuguaglianza di traccia* $\|y_n\|_{2,\Gamma_t} \leq C_t\|y_n\|_{1,2}$ si ha

$$\begin{aligned} I^\infty(y_n) &\geq c\|Dy_n\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|y_n\|_2^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|b\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}C_t\big(\|y_n\|_2^2 + \|Dy_n\|_2^2\big) - \frac{1}{2\varepsilon}\|t\|_{2,\Gamma_t}^2 - d|\Omega| \\ &\geq (c - \frac{\varepsilon}{2}C_t^2)\|Dy_n\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}(C_t^2+1)\|y_n\|_2^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|b\|_2^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|t\|_{2,\Gamma_t}^2 - d|\Omega|. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Poincaré (7.3) e ricordando che $y_n(x) = x$ su Γ_d, si ha

$$\|y_n\|_2^2 \leq C_p\big(\|Dy_n\|_2^2 + \|y_{n|\Gamma_d}\|_2^2\big) = C_p\big(\|Dy_n\|_2^2 + \|x\|_2^2\big) = C_p\big(\|Dy_n\|_2^2 + M\big)$$

e dunque

$$\begin{aligned} I^\infty(y_n) &\geq (c - \frac{\varepsilon}{2}C_t^2)\|Dy_n\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}(C_t^2+1)C_p\big(\|Dy\|_2^2 + M\big) - \frac{1}{2\varepsilon}\|b\|_2^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|t\|_{2,\Gamma_t}^2 - d|\Omega| \\ &\geq (c - \varepsilon\tilde{C})\|Dy_n\|_2^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|b\|_2^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|t\|_{2,\Gamma_t}^2 - \tilde{M}. \end{aligned}$$

Preso ε abbastanza piccolo ($\varepsilon < c/\tilde{C}$), si ha che esistono due costanti positive A e B tali che

$$C \geq I^\infty(y_n) \geq A\|Dy_h\|_2^2 - B.$$

Allora

$$\|Dy_n\|_2 \leq K = \sqrt{\frac{B+C}{A}}.$$

Sempre per la disuguaglianza di Poincaré (7.3) si ha anche

$$\|y_n\|_2 \leq C_p(\|Dy_n\|_2 + M) \leq \tilde{K}$$

quindi (y_n) è limitata in $W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ e pertanto ammette una sottosuccessione debolmente convergente. Quindi I^∞ è coercivo rispetto alla convergenza debole. □

Teorema 7.8 (di semicontinuità)**.** *Sia $W : \mathbb{R}^{3\times 3} \to [0,+\infty]$ una funzione convessa e semicontinua inferiormente. Sia Ω un sottoinsieme aperto, limitato e regolare di $\mathbb{R}^3$. Allora il funzionale $I : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3) \to \overline{\mathbb{R}}$ definito da*

$$I(y) = \int_\Omega W(Dy)\,dx$$

e sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente.

Osservazione 7.9. Il teorema vale anche se W ha valori in $]-\infty,+\infty]$. Infatti, siccome il valore $-\infty$ è escluso, allora $W(0) > -\infty$ e per la convessità (teorema di Hahn-Banach) esiste $\xi \in \mathbb{R}^3$ tale che $W(F) \geq W(0) + \xi \cdot F$ e il risultato si ottiene applicando il teorema alla funzione non negativa $W(F) - W(0) - \xi \cdot F$.

Dimostrazione Il teorema è già stato dimostrato nell'ipotesi supplementare che W sia lipschitziana. L'idea fondamentale consisteva nello sfruttare il fatto che in tal caso esiste quasi ovunque il gradiente di W (teorema di Rademaker) e vale la disuguaglianza di convessità

$$W(Dy_k) \geq W(Dy) + DW(Dy)\cdot(Dy_k - Dy).$$

Rinunciando all'ipotesi di lipschitzianità l'esistenza del gradiente di W non è più scontata e occorre procedere diversamente. Se $W \equiv +\infty$ allora $I^\infty \equiv +\infty$ e il teorema è vero. Supponiamo dunque che W sia finita in almeno un punto.

Sia $\lambda > 0$. Si chiama *trasformata di Moreau-Yosida* di W la funzione

$$W_\lambda(F) := \inf\{W(G) + \lambda|G - F| \ : \ G \in \mathbb{R}^{3\times 3}\}.$$

Essa gode delle seguenti proprietà (che valgono per ogni $W : X \to [0, +\infty]$ con X normato e finita in almeno un punto):

1. $W_\lambda(F) \le W(F)\ \forall F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;
2. $0 \le \lambda \le \eta \Rightarrow W_\lambda \le W_\eta$;
3. W_λ è ovunque finita e $|W_\lambda(F) - W_\lambda(G)| \le \lambda|F - G|\ \forall F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;
4. W convessa $\Rightarrow W_\lambda$ convessa;
5. W s.c.i. $\Rightarrow W(F) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} W_\lambda(F) = \sup\limits_{\lambda\ge 0} W_\lambda(F)$.

Sia $\lambda_j \nearrow \infty$ per $j \to \infty$. Allora si ha

$$W_{\lambda_j} \nearrow W$$

Sia $y_k \rightharpoonup y$ in $W^{1,2}$. Allora

$$\int W(\nabla y_k) \ge \int W_{\lambda_j}(\nabla y_k) \ge \int W_{\lambda_j}(Dy) + \int DW_{\lambda_j}(Dy)\cdot(Dy_k - Dy).$$

Giacché $|DW_{\lambda_j}| \le C\lambda_j$, passando al liminf su k si ha

$$\liminf_{k\to\infty} \int W(\nabla y_k) \ge \int W_{\lambda_j}(Dy)$$

e la tesi segue passando ali limite per $j \to \infty$ con Beppo-Levi. □

Verifica delle proprietà di W_λ

Le prime due sono banali.

Proseguiamo con la 5 che è la meno semplice tra le rimanenti.

Per 1 e 2 si ha

$$W(F) \ge \sup_{\lambda\ge 0} W_\lambda(F) = \lim_{\lambda\to+\infty} W_\lambda(F).$$

Dimostriamo l'altra. Fissato $F_0 \in X$, per definizione di W e le proprietà dell'inf si ha che esiste $F_\lambda \in X$ tale che

$$W(F_\lambda) + \lambda|F_\lambda - F_0| \le W_\lambda(F_0) + \frac{1}{\lambda}.$$

Per ogni $\lambda \ge 1$ si ha

$$W(F_0) + 1 \ge W(F_0) + \frac{1}{\lambda} \ge W_\lambda(F_0) + \frac{1}{\lambda} \ge W(F_\lambda) + \lambda|F_\lambda - F_0| \ge \lambda|F_\lambda - F_0|.$$

Si ha dunque $F_\lambda \to F_0$. Inoltre, dalla seconda e dalla penultima disuguaglianza si ha

$$\limsup_{\lambda\to+\infty} \lambda|F_\lambda - F_0| \le \limsup_{\lambda\to+\infty} \left[W(F_0) + \frac{1}{\lambda} - W(F_\lambda)\right] = W(F_0) - \liminf_{\lambda\to+\infty} W(F_\lambda) \le 0$$

per la semicontinuità di W, e quindi

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda|F_\lambda - F_0| = 0.$$

Passando al liminf nella terza disuguaglianza si ha quindi

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} W_\lambda(F_0) \geq W(F_0),$$

da cui segue la tesi. □

Corollario 7.10 (del teorema di semicontinuità)**.** *Il funzionale I^∞ è sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente.*

Dimostrazione Il teorema segue dal fatto che, per la disuguaglianza di traccia

$$\|y|_{\Gamma_d}\|_{L^2} \leq C\|y\|_{W^{1,2}}$$

l'insieme $\mathcal{A}$ è chiuso rispetto alla convergenza debole di $W^{1,2}$. □

Teorema 7.11 (di esistenza)**.** *Se $W : \mathbb{R}^{3\times 3} \to]-\infty, +\infty]$ è una funzione convessa e semicontinua inferiormente ed esiste $c, d > 0$ tali che*

$$W(F) \geq c|F|^2 - d \;\forall\, F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

allora esiste una soluzione del problema di minimo per l'energia elastica.

Dimostrazione Segue dal teorema di Tonelli. □

7.4 Unicità della soluzione

L'unicità del punto di minimo si può dedurre invece dalla stretta convessità in y del funzionale I^∞, in accordo con quanto segue.

Definizione 7.12. *Sia X uno spazio vettoriale e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. f si dice* convessa *se, per ogni $t \in]0, 1[$ e per ogni $x, y \in X$ tali che $f(x) < +\infty$ e $f(y) < +\infty$, si ha*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

f si dice strettamente convessa *se f non è identicamente $+\infty$ e per ogni $t \in]0, 1[$ e per ogni $x, y \in X$ tali che $x \neq y$, $f(x) < +\infty$ e $f(y) < +\infty$ si ha*

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Proposizione 7.13. *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione strettamente convessa. Allora f ha al più un punto di minimo in X.*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che x e y siano due punti di minimo per f in X, allora

$$f(x) = f(y) = \min_{z\in X} f(z) < +\infty.$$

Se $x \neq y$, per la stretta convessità di f abbiamo che

$$f(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = \min_{z\in X} f(z) < +\infty,$$

in contraddizione col fatto che x e y siano punti di minimo. Allora $x = y$. □

Proposizione 7.14. *Se W è strettamente convesa allora I^∞ è strettamente convesso e il punto di minimo è unico.*

Bibliografia

[1] E. Acerbi, G. Buttazzo, and D. Percivale. A variational definition of the strain energy for an elastic string. *Journal of Elasticity*, 25:137–148, 1991.

[2] E. Acerbi, S. Buttazzo, and D. Percivale. Thin inclusions in linear elasticity: a variational approach. *J. Reine Angew. Math.*, 386:99–115, 1988.

[3] R. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[4] S. Agmon. *Lectures on elliptic boundary value problems.* Prepared for publication by B. Frank Jones, Jr. with the assistance of George W. Batten, Jr. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 2. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London, 1965.

[5] G. Anzellotti, S. Baldo, and D. Percivale. Dimension reduction in variational problems, asymptotic development in γ-convergence and thin structures in elasticity. *Asymptotic Analysis*, 9(1):61–100, 1994.

[6] J. Ball and R. James. Fine phase mixtures as minimizers of energy. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 100(1):13–52, 1987.

[7] J. Barros-Neto. *An introduction to the theory of distributions.* Dekker, New York, 1973.

[8] F. Bourquin, P. Ciarlet, and G. Geymonat. Gamma-convergence et analyse asymptotique des plaques minces. *C.R. Acad. Sci. Paris, t.*, 315.

[9] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications.* Masson, Paris, 1983.

[10] P. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. I*, volume 20 of *Studies in Mathematics and its Applications.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. Three-dimensional elasticity.

[11] G. Dal Maso. *An Introduction to* Γ*-convergence.* Birkhäuser, Boston, 1993.

[12] E. De Giorgi and T. Franzoni. On a type of variational convergence. In *Proceedings of the Brescia Mathematical Seminar, Vol. 3 (Italian)*, pages 63–101, Milan, 1979. Univ. Cattolica Sacro Cuore.

[13] L. C. Evans *Partial differentiaal equations.* AMS, 1998.

[14] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[15] L. Freddi, A. Morassi, and R. Paroni. Thin-walled beams: the case of the rectangular cross-section. *J. Elasticity*, 76(1):45–66, 2004.

[16] E. Giusti. *Analisi Matematica 2*. Boringhieri.

[17] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*. Springer, Berlin, 1992.

[18] M. E. Gurtin. *An introduction to continuum mechanics*, volume 158 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1981.

[19] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Distribution theory and Fourier analysis.

[20] J. Jost. *Postmodern analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2005.

[21] D. Kinderlehrer. Remarks about equilibrium configurations of crystals. In *Material instabilities in continuum mechanics (Edinburgh, 1985–1986)*, Oxford Sci. Publ., pages 217–241. Oxford Univ. Press, New York, 1988.

[22] R. V. Kohn and M. Vogelius. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. II. A convergence proof. *Quart. Appl. Math.*, 43(1):1–22, 1985.

[23] H. Le Dret. An example of H^1-unboundedness of solutions to strongly elliptic systems of partial differential equations in a laminated geometry. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 105:77–82, 1987.

[24] H. Le Dret. *Problémes Variationnels dans les Multi-Domains*. Masson, Paris, 1991.

[25] N. Meyers and J. Serrin. H=w. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 51, 1964.

[26] A. Morassi. Strain, stress and linearized elasticity. In Springer, editor, *Classical And Advanced Theories Of Thin Structures: Mechanical And Mathematical Aspects, CISM Courses and Lectures Vol. 503*, pages 1–34. 2008.

[27] J. Nečas. *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*. Academia, Prague, 1967.

[28] J. A. Nitsche. On Korn's second inequality. *RAIRO Anal. Numér.*, 15(3):237–248, 1981.

[29] O. Oleinik, A. Shamaev, and G. Yosifian. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[30] R. Paroni. Constitutive equations and variational elasticity. In Springer, editor, *Classical And Advanced Theories Of Thin Structures: Mechanical And Mathematical Aspects, CISM Courses and Lectures Vol. 503*, pages 35–60. 2008.

[31] W. Rudin. *Analisi Reale e Complessa*. Boringhieri.

[32] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entiérement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966.

[33] A. Tesei, *Istituzioni di analisi superiore*, Boringhieri (1997).

[34] R. Temam and A. Miranville. *Mathematical modeling in continuum mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2005.

[35] C. A. Truesdell, III. *A first course in rational continuum mechanics. Vol. 1*, volume 71 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, second edition, 1991. General concepts.

[36] S. Vladimirov. *Le distribuzioni nella fisica matematica*. Edizioni Mir, Mosca, 1981.

[37] W. P. Ziemer. *Weakly differentiable functions*, volume 120 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1989. Sobolev spaces and functions of bounded variation.