Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

prova del 6/3/2001

Analisi 1

A1.1

Dimostrare che l'equazione

$$x^6 + 3\sqrt{|x|} - 5 = 0$$

ha due soluzioni reali e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a 1/4.

Svolgimento

Cominciamo con l'osservare che la funzione $f(x) = x^6 + 3\sqrt{|x|} - 5$ è pari, quindi se x_0 è uno zero di f anche $-x_0$ lo è. Inoltre $f(0) = -5$, mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Poichè f è continua su $\mathbb{R}$, per il Teorema degli Zeri esiste uno zero di f in $]0, +\infty[$ ed è anche unico perchè f è strettamente crescente in $]0, +\infty[$ in quanto somma di funzioni (strettamente) crescenti. Ne consegue che gli zeri di f in $\mathbb{R}$ sono due, uno positivo x_0 e uno negativo $-x_0$. È sufficiente trovare un valore approssimato per lo zero positivo in quanto per ottenere l'altro basterà cambiare di segno.

Poichè $f(1) = -1$ e $f(2) > 0$, allora, indicato con x_0 lo zero positivo di f, si ha $x_0 \in]1, 2[$. Poichè $f(3/2) > 0$ allora si ha $x_0 \in]1, 3/2[$, e assumendo $5/4$ come valore approssimato per x_0 si ha che l'errore è minore di $1/4$. Un valore approssimato con la stessa accuratezza per l'altro zero di f, cioè $-x_0$ è, naturalmente, $-5/4$.

A1.2

Sia

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 4}{2a_n}. \end{cases} \tag{1}$$

1. Dimostrare che le (1) definiscono per induzione una successione (a_n) di numeri reali.

2. Dimostrare che $a_n > 2$ per ogni $n \geq 2$.

3. Dimostrare che la successione è decrescente da $n = 2$ in poi.

4. Discutere la convergenza di (a_n) e calcolarne l'eventuale limite.

Svolgimento

1. Basta dimostrare che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e questo si può fare per induzione. Infatti $a_1 \neq 0$ mentre $a_n \neq 0$ implica $a_n^2 + 4 \neq 0$ e quindi $a_{n+1} \neq 0$.

2. Lo dimostriamo per induzione. Si ha $a_2 = 5/2 > 2$. Supponiamo che $a_n > 2$ e proviamo che $a_{n+1} > 2$. Infatti

$$a_{n+1} > 2 \iff \frac{a_n^2 + 4}{2a_n} > 2 \iff a_n^2 + 4 > 4a_n \iff (a_n - 2)^2 > 0 \iff a_n \neq 2$$

e l'ultima proposizione della catena di equivalenze è vera per ipotesi di induzione.

3. Infatti

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{a_n^2 + 4}{2a_n} < a_n \iff a_n^2 + 4 < 2a_n^2 \iff a_n^2 > 4$$

e questo è vero per ogni $n \geq 2$.

4. Per il teorema sul limite delle successioni monotone la successione è convergente ad un limite finito l. Passando al limite nella

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{2a_n}$$

si ottiene

$$l = \frac{l^2 + 4}{2l}$$

che ha le soluzioni $l = \pm 2$. Poichè d'altra parte $a_n > 2$ per ogni $n \geq 2$ ne consegue che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 2.$$