Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 3/9/2001

Analisi 1

Dimostrare che l'equazione

$$e^x \sqrt[3]{x} = 1$$

ha un'unica soluzione reale e determinarne un valore approssimato con un errore non superiore ad 1/8, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

L'equazione si può scrivere nella forma equivalente

$$f(x) := \sqrt[3]{x} - e^{-x} = 0$$

dove la funzione f è continua e strettamente crescente su $\mathbb{R}$ (come somma di funzioni strettamente crescenti). Poichè $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 - 1/e > 0$, allora l'esistenza di una soluzione x_0 dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $]0, 1[$ segue dal teorema degli zeri; l'unicità segue poi dal fatto che f è strettamente monotona e quindi iniettiva. Inoltre

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{e}\sqrt[3]{2}}$$

e risulta

$$f(\frac{1}{2}) > 0$$

poichè

$$\sqrt{e} - \sqrt[3]{2} > 0 \iff \sqrt{e} > \sqrt[3]{2} \iff e > 2^{2/3} \iff e^3 > 2^2 \iff e^3 > 4$$

che è vero in quanto $e > 2$ e quindi $e^3 > 2^3 > 8$. Ne consegue che $x_0 \in]0, 1/2[$. Proseguendo,

$$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[4]{e}} = \frac{\sqrt[4]{e} - \sqrt[3]{4}}{\sqrt{e}\sqrt[3]{2}}$$

e risulta

$$f(\frac{1}{4}) < 0$$

poichè

$$\sqrt[4]{e} - \sqrt[3]{4} < 0 \iff \sqrt[4]{e} < \sqrt[3]{4} \iff e < 4^{4/3} \iff e^3 < 2^8 = 256$$

che è vero in quanto $e < 3$ e quindi $e^3 < 3^3 = 27$. Ne consegue che $x_0 \in]1/2, 1/4[$. Assumendo 3/8 come valore approssimato per x_0 si commette un errore inferiore ad 1/8.