Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica - prova del 30/07/2012

Analisi 1

1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$x^3(x+1)^2 2^x = 10$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/4, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento Cominciamo con l'osservare che se $x < 0$ allora il primo membro è negativo mentre il secondo è positivo. Non esistono quindi soluioni negative. In $[0, +\infty[$ consideriamo la funzione $f(x) = x^3(x+1)^2 2^x - 10$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. f è continua e strettamente crescente e vi potrà quindi essere al più uno zero. Inoltre

$$f(1) = -2$$

mentre

$$f(2) = 278 > 0.$$

Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 1 e 2, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{3^3 5^2}{2^{7/2}} - 10 > 0$$

infatti quest'ultima equivale a $3^6 5^2 > 2^9$ che è vero poiché $3^6 5^2 > 2^6 4^2 = 2^10 > 2^9$.

Allora si ha $x_0 \in]1, 3/2[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 5/4$.

2

Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \dfrac{1 + n a_n}{1 + 2n}. \end{cases}$$

Svolgimento Poiché $1 + 2n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora la successione è ben definita.

Osservato che $a_2 = \frac{2}{3} < 1 = a_1$, $a_3 = \frac{7}{15} < \frac{2}{3} = a_2$, congetturiamo che la successione sia decrescente. Per dimostrarlo osserviamo che

$$a_n \geq a_{n+1} \iff a_n \geq \frac{1 + n a_n}{1 + 2n} \iff a_n \geq \frac{1}{1 + n}$$

e si dimostra per induzione che ciò è vero per ogni n. Infatti è vero per $n = 1$ e, supposto vero per n si ha

$$a_{n+1} = \frac{1+2n}{(}1 + na_n) \geq \frac{1+2n}{(}1 + \frac{n}{1+n}) = \frac{1}{1+n} > \frac{n}{1+(n+1)}.$$

Poiché la successione è decrescente, per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in [0,1[.$$

Passando al limite nell'uguaglianza

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+2n} + \frac{n}{1+2n}a_n$$

si ha, per l'unicità del limite, che L deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{L}{2}$$

e quindi $L = 0$.

3

Sia (a_n) una successione di numeri reali. Stabilire se la proposizione

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad (a_n) \text{ limitata superiormente}$$

è vera o falsa dimostrando quanto affermato.

Svolgimento Dimostriamo che la proposizione è vera. Infatti, per definizione di limite si ha

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, n_M \in \mathbb{N}\ :\ a_n < M\ \forall\, n > n_M.$$

In particolare per $M = 0$ si ha che

$$a_n < 0\ \forall\, n > n_0$$

Preso $L = \max\{0, a_1, ..., a_{n_0}\}$ si ha $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque L è un maggiorante e la successione è limitata superiormente.

4

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x} - \cos x}{x^2}.$$

Svolgimento Il limite si presenta in forma indeterminata $0/0$. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x} + \cos x$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x} - \cos x}{x^2} \quad &= \lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)}{x^2(\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x} + \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x} + \cos x} = 1.
\end{aligned}$$