Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 30/3/2005

Analisi 1

1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$\log(x+3) = (2-x)^3$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/4, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

Osserviamo che, posto $f(x) = \log(x+3) - (2-x)^3$, l'equazione data è equivalente all'equazione $f(x) = 0$. La funzione f è strettamente crescente e continua in $]-3, +\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e crescenti di cui almeno una strettamente. Poiché

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $x_0 \in]-3, +\infty[$ tale che $f(x_0) = 0$ che, per l'iniettività di f (conseguenza della stretta monotonia) è anche unico. Ne consegue che l'equazione data ha esattamente una soluzione. Per calcolarne un valore approssimato, osserviamo che

$$f(0) = \log 3 - 8 < 0$$

in quanto $\log 3 < \log 4 = 2\log 2 < 2 \log \mathrm{e} = 2 < 8$. Allora $x_0 \in]0, +\infty[$. Poiché

$$f(1) = \log 4 - 1 > \log \mathrm{e} - 1 = 0,$$

allora $x_0 \in]0, 1[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è 1/2 e l'errore che si commetterebbe approssimando x_0 con questo valore sarebbe inferiore a 1/2, che è maggiore di 1/4. Dobbiamo quindi procedere con la bisezione dell'intervallo. Si ha

$$f(\frac{1}{2}) = \log(\frac{7}{2}) - \frac{27}{8} < 0.$$

Infatti

$$\log(\frac{7}{2}) < \log 4 = 2\log 2 < 2\log \mathrm{e} = 2 < \frac{27}{8}.$$

Ne consegue che $x_0 \in]1/2, 1[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è 3/4 e l'errore che si commette approssimando x_0 con questo valore è inferiore a 1/4. Pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 3/4$.

Data la successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 1/2 \\ a_{n+1} = 2a_n - a_n^2, \end{cases}$$

1. dimostrare per induzione che

$$a_n < 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\};$$

2. studiare il comportamento al limite di (a_n) per $n \to +\infty$.

Svolgimento

1. $a_1 = 1/2 < 1$ è vero. Supponiamo, per ipotesi di induzione, che $a_n < 1$ e proviamo che $a_{n+1} < 1$, cioè che

$$2a_n - a_n^2 < 1$$

che è vero in quanto si può riscrivere nella forma $(a_n - 1)^2 > 0$, vera ogniqualvolta $a_n \neq 1$.

3. Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{4} > a_1, \quad a_3 = \frac{15}{16} > a_2.$$

Congetturiamo che la successione sia crescente e lo dimostriamo. Si ha

$$a_n \leq a_{n+1} \iff a_n \leq 2a_n - a_n^2\,. \tag{1}$$

Sarebbe qui comodo dividere ambo i membri per a_n, quindi, per poterlo fare dimostriamo dapprima che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Procedendo per induzione, osservato che ciò è vero per a_1, supponiamo che $a_n > 0$ e dimostriamo che $a_{n+1} > 0$. La tesi equivale a $2a_n - a_n^2 > 0$, cioè, dividendo per $a_n > 0$ a $a_n < 2$ che è vero in quanto abbiamo già provato che $a_n < 1$.

Torniamo alla dimostrazione della monotonia. Dividendo per $a_n > 0$ la (1) diviene $a_n \leq 1$ che è vera. Quindi (a_n) è crescente.

Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste dunque il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in]0,1].$$

Passando al limite nell'uguaglianza $a_{n+1} = 2a_n - a_n^2$ si ottiene, per l'unicità del limite, che ℓ deve soddisfare l'equazione

$$\ell = 2\ell - \ell^2 \iff \ell = 0 \text{ oppure } \ell = 1.$$

Poichè $\ell = 0$ è da escludere in quanto la successione è crescente e $a_1 = 1/2$, allora ne consegue che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

3

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(2\log x)}{e^{3x}-e^{3}}.$$

Svolgimento

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Eseguiamo, per comodità, il cambiamento di variabile $x = 1 + y$ ottenendo

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(2\log x)}{e^{3x}-e^{3}} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\log(1+y))}{e^{3(1+y)}-e^{3}} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\log(1+y))}{e^{3}(e^{3y}-1)}.$$

Osservato che

$$\frac{\operatorname{sen}(2\log(1+y))}{e^{3}(e^{y}-1)} = \frac{1}{e^{3}} \frac{\operatorname{sen}(2\log(1+y))}{2\log(1+y)} \frac{2\log(1+y)}{y} \frac{y}{e^{3y}-1}$$

e che

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\log(1+y))}{2\log(1+y)} = 1, \quad \lim_{y\to 0} \frac{2\log(1+y)}{y} = 2, \quad \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^{3y}-1} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{3} \frac{3y}{e^{3y}-1} = \frac{1}{3}$$

allora si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(2\log x)}{e^{3x}-e^{3}} = \frac{2}{3\,e^{3}}\,.$$