Analisi 1

Corso di Laurea in Matematica
prova del 29/07/2013

1 Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione $\dfrac{1}{\sqrt{2^x - 8}} = x$ e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/4$, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento In $(3, +\infty)$ consideriamo la funzione $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{2^x-8}}$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. Osserviamo che f è strettamente crescente . Ne consegue che se uno zero esiste nell'intervallo $(3, +\infty)$ questo è unico. f è continua e inoltre

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

mentre

$$f(4) = 4 - \frac{1}{\sqrt{8}} > 4 - 1 = 3 > 0.$$

Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 3 e 4, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{7}{2}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{\sqrt{2^{\frac{7}{2}} - 2^3}} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{2^{\frac{1}{2}} - 1}} > 0$$

in quanto equivalente a $7^2 2(\sqrt{2}-1) > 1$ che è vero in quanto, ad esempio, $\sqrt{2}-1 > \sqrt{\frac{25}{16}} - 1 = \frac{1}{4}$. Allora si ha $x_0 \in (3, 7/2)$ e un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione richiesta è quindi $x_0 \simeq 13/4$.

2 Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 4}, \end{cases}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Svolgimento Il denominatore si annullerebbe per $a_n = -4$, che non può mai verificarsi per $\alpha > 0$. Infatti in tal caso si ha (per induzione) $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi la successione è ben definita. Osserviamo, poi, che

$$a_2 = \frac{2\alpha}{\alpha + 4} < \alpha = a_1.$$

Si vede poi che anche $a_3 < a_2$. Utilizzando il fatto che $a_n > 0$ si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{2a_n}{a_n + 4} < a_n \iff a_n > -2.$$

Dunque la successione è monotona decrescente. Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste quindi il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in [0,\alpha).$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ ambo i membri dell'uguaglianza $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n+4}$ si ottiene

$$\ell = \frac{2\ell}{\ell+4} \iff \ell = 0 \text{ o } \ell = -2.$$

Poiché $\ell = -2$ è escluso in quanto la successione ha termini non negativi, si ha $\ell = 0$.

3 Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni con g crescente e biiettiva. Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni:

1. $g \circ f$ decrescente $\implies$ f decrescente;
2. $f \circ g$ decrescente $\implies$ f decrescente.

Svolgimento Le proposizioni sono entrambre vere. Per dimostrare la prima basta osservare che g^{-1} è crescente e che $f = g^{-1} \circ g \circ f$. Quindi f è composizione di una funzione crescente (g^{-1}) e una decrescente ($g \circ f$) e pertanto è decrescente.

L'altra si dimostra analogamente osservando che $f = f \circ g \circ g^{-1}$.

4 Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log(x^2-2x+3^x)}{|\operatorname{sen}(2x)|}$.

Svolgimento Il limite si presenta in forma indeterminata $0/0$. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} \frac{\log(x^2-2x+3^x)}{|\operatorname{sen}(2x)|} &= \lim_{x\to0^+} \frac{\log(x^2-2x+3^x)}{\operatorname{sen}(2x)} \\ &= \lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+x^2-2x+3^x-1)}{x^2-2x+3^x-1}\,\frac{x^2-2x+3^x-1}{2x}\,\frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)}.\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2-2x+3^x-1}{2x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x-2}{2} + \frac{1}{2}\frac{3^x-1}{x} = -1 + \frac{1}{2}\log 3 = \log\sqrt{3} - 1$$

mentre

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+x^2-2x+3^x-1)}{x^2-2x+3^x-1} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)} = 1$$

e quindi

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log(x^2-2x+3^x)}{|\operatorname{sen}(2x)|} = \log\sqrt{3} - 1.$$

Per quanto riguarda il limite da sinistra si ha poi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-} \frac{\log(x^2-2x+3^x)}{|\operatorname{sen}(2x)|} &= \lim_{x\to0^-} \frac{\log(x^2-2x+3^x)}{-\operatorname{sen}(2x)} \\ &= -\lim_{x\to0^+} \frac{\log(x^2-2x+3^x)}{\operatorname{sen}(2x)} = 1 - \log\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Il limite per $x \to 0$ non esiste poiché i limiti da destra e da sinistra sono diversi.