Corso di Laurea in Matematica - Anno accademico 2010-2011

# Analisi I

## prova del 27/06/2011

**1** *(10 punti)* Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$\log_2^3(1+2x) = 10 - \sqrt{2x}$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/4$, senza fare uso del calcolatore.

**Svolgimento** Definendo $f(x) = \log_2^3(1+2x) + \sqrt{2x} - 10$ il problema è ricondotto a stabilire quante zeri reali ammette la funzione $f$ e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/4$.

Cominciamo con l'osservare che $f$ è definita su $[0,+\infty[$ Ne consegue che non esistono soluzioni in $]-\infty, 0[$.

$f$ è continua e strettamente decrescente e vi potrà quindi essere al più uno zero. Inoltre

$$f(1) = \log_2^3 3 + \sqrt{2} - 10 < \log_2^3 4 + \sqrt{2} - 10 = 2^3 + \sqrt{2} - 10 = \sqrt{2} - 2 < 0$$

mentre

$$f(2) = \log_2^3 5 + 2 - 10 > \log_2^3 4 - 8 = \log_2^3 2^2 - 8 = 2^3 - 8 = 0.$$

Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di $f$, $x_0$, tra 1 e 2, che è anche unico per la stretta monotonia di $f$. Avendosi

$$f(\frac{3}{2}) = \log_2^3 4 + \sqrt{3} - 10 = 2^3 + \sqrt{3} - 10 = 2 - \sqrt{3} > 2 - \sqrt{4} = 0$$

allora si ha $x_0 \in ]3/2, 2[$. Un valore approssimato di $x_0$ con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 7/4$. Proseguendo si troverebbe che un valore approssimato di $x_0$ con un errore inferiore ad $1/8$ è $x_0 \simeq 13/8$.

**2** *(10 punti)* Studiare il comportamento al limite della successione $(a_n)$ definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \alpha(a_n + 1), \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in [0, +\infty[$.

**Svolgimento** Anzitutto, se $\alpha = 0$ allora $a_n = 0$ e quindi il limite è 0.

Osserviamo che

$$a_2 = \alpha(\alpha+1) \geq \alpha = a_1$$

e dimostriamo per induzione che $(a_n)$ è crescente. Infatti, supposto per ipotesi di induzione che $a_{n-1} \leq a_n$ si ha

$$a_{n+1} = \alpha(a_n + 1) \geq \alpha(a_{n-1} + 1) = a_n$$

da cui la tesi. Per il teorema sul limite delle successioni monotone ne consegue che per ogni $\alpha \in [0, +\infty[$ esiste dunque il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in [0, 1].$$

Passando al limite nella uguaglianza $a_{n+1} = \alpha(a_n + 1)$ si ottiene, per l'unicità del limite, che $L$ deve soddisfare l'equazione

$$L = \alpha(L + 1)$$

che, se $\alpha = 1$ ha l'unica soluzione $L = +\infty$. Se $\alpha \neq 1$ vi sono invece le 2 soluzioni

$$L = \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{ e } L = +\infty.$$

Se $\alpha > 1$ la prima soluzione è negativa e possiamo dunque scartarla in quanto, essendo la successione crescente e $a_1 = \alpha \geq 0$, il suo limite non può essere negativo. Si ha quindi in tal caso $L = +\infty$.

Infine, se $0 \leq \alpha < 1$ si dimostra per induzione che $a_n \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi il limite non può essere $+\infty$. In tal caso si ha quindi $L = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

Riassumendo si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha} & \text{se } 0 \leq \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

**3** *(7 punti)* Sia $(a_n)$ una successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$. Discutere le seguenti affermazioni

1. ogni sottosuccessione di $(a_n)$ ammette una ulteriore sotto-sottosuccessione convergente a 0;
2. $(a_n)$ converge a 0.

**Svolgimento** Anzitutto sappiamo, per un noto teorema, che le due proposizioni sono equivalenti e quindi sono entrambe false o entrambe vere.

Se si decide di lavorare sulla prima si può osservare che ogni sottosuccessione di $(a_n)$ contiene o infiniti termini di indice pari o infiniti di indice dispari (altrimenti sarebbe costituita da un numero finito di termini, cosa impossibile per una sottosuccessione). In entrambi i casi essa contiene dunque una sotto-sottosuccessione convergente a zero (quella dei termini di indice pari o dispari). Poiché ciò vale per ogni sottosuccessione, ne consegue che la prima proposizione è vera.

Se si decide di lavorare sulla seconda allora si può osservare che, per definizione di limite,

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0 \iff \forall\, \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon^1 \in \mathbb{N}\ :\ |a_{2n}| < \epsilon\ \forall\, n > n_\epsilon^1,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0 \iff \forall\, \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon^2 \in \mathbb{N}\ :\ |a_{2n}| < \epsilon\ \forall\, n > n_\epsilon^2.$$

Definito allora $n_\epsilon := \max\{2n_\epsilon^1 + 1, 2n_\epsilon^2\}$, si ha che

$$\forall\, \epsilon > 0\ |a_n| < \epsilon\ \forall\, n > n_\epsilon$$

cioè $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**4** *(3 punti)* Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{y\to 1} \frac{\sqrt[3]{\log(2-2y+y^2)}}{1-\cos\sqrt[3]{y-1}}.$$

**Svolgimento** Anzitutto si osserva che il limite si presenta in forma indeterminata poichè numeratore e denominatore tendono entrambi a 0. Con il cambiamento di variabile $y - 1 = x \iff y = x + 1$ il limite diviene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\log(1+x^2)}}{1-\cos\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\log(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(\sqrt[3]{x})^2} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x})^2}{1-\cos\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x})^2}{1-\cos\sqrt[3]{x}} = 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

grazie ai limiti notevoli

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}.$$