Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 23/9/2010

Analisi 1

1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$\sqrt[3]{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{1+2x}}$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/4, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

Cominciamo con l'osservare che la funzione che compare a secondo membro è definita su $\mathbb{R}\backslash -1/2$ e che per $x < 0$ il primo membro è negativo e il secondo positivo. Ne consegue che non esistono soluzioni in $]-\infty, 0[$.

In $[0, +\infty[$ consideriamo la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1+2x}} - \sqrt[3]{x}$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. f è continua e strettamente decrescente e vi potrà quindi essere al più uno zero. Inoltre

$$f(1) = \sqrt[3]{\mathrm{e}} - 1 > 0$$

mentre

$$f(2) = \mathrm{e}^{1/5} - 2^{1/3} < 0,$$

infatti quest'ultima equivale a $\mathrm{e}^3 < 2^5$ che è vera in quanto $\mathrm{e}^3 < 3^3 = 27 < 32 = 2^5$. Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 1 e 2, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{3}{2}) = \mathrm{e}^{1/4} - (3/2)^{1/3} > 0$$

infatti quest'ultima equivale a $\mathrm{e}^3 > 3^4/2^4$ che è vero in quanto $\mathrm{e}^3 > 2^3 = 8$ mentre $3^4/2^4 = 81/16 < 8$.

Allora si ha $x_0 \in]3/2, 1[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 7/4$.

2

Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = |\operatorname{sen} a_n|. \end{cases}$$

Svolgimento

Anzitutto, per definizione, si ha $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, ricordando che $\operatorname{sen} x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$a_{n+1} = |\operatorname{sen} a_n| \leq |a_n| = a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

cioè la successione è decrescente.

Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste dunque il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in [0,1].$$

Passando al limite nella uguaglianza $a_{n+1} = |\operatorname{sen} a_n|$ si ottiene, per l'unicità del limite, che L deve soddisfare l'equazione

$$L = |\operatorname{sen} L| \iff L = 0.$$

Ne consegue che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

3

Siano $A = [0, +\infty[$, $x \in \mathbb{R}$ e (a_n) una successione di elementi di A. Discutere le seguenti affermazioni.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \implies x \in A$;

2. $\operatorname*{minlim}\limits_{n\to\infty} a_n = x \implies x \in A$;

3. $\operatorname*{maxlim}\limits_{n\to\infty} a_n = x \implies x \in A$.

Svolgimento Le proposizioni sono tutte vere e si possono dimostrare con il medesimo argomento. Ciascuna ipotesi (i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, $\operatorname*{minlim}\limits_{n\to\infty} a_n = x$, $\operatorname*{maxlim}\limits_{n\to\infty} a_n = x$) implica che esiste una sottosuccessione (a_{n_k}) di (a_n) convergente a x. Poiché $a_{n_k} \in A = [0, +\infty[$ allora $a_{n_k} \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per il teorema del confronto si ha quindi che $x \geq 0$. Siccome per ipotesi $x \in \mathbb{R}$ allora si ha $x \in [0, +\infty[= A$.