Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 22/3/2002

Analisi 1

1

Sia x^n la funzione potenza ad esponente naturale definita su $\mathbb{R}$. Dimostrare, utilizzando qualche noto teorema sulle funzioni continue, che

1. se n è pari l'immagine è $[0, +\infty[$;
2. se n è dispari l'immagine è $\mathbb{R}$.

Svolgimento

1. per n pari si ha $x^n \geq 0$, quindi l'immagine è contenuta in $[0, +\infty[$. Viceversa occorre dimostrare che per ogni $y \in [0, +\infty[$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^n = y$. Fissato un tale y indichiamo con $f_n(x) := x^n - y$. f_n è una funzione continua sul suo dominio. Inoltre
$$f_n(0) = -y, \quad \lim_{x \to +\infty} = +\infty.$$
Per il teorema degli zeri esiste allora $x \in [0, +\infty[$ (e quindi in $\mathbb{R}$) tale che $f_n(x) - y = 0$, come volevasi dimostrare.

2. per n dispari occorre dimostrare che per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^n = y$. Fissato un tale y indichiamo con $f_n(x) := x^n - y$. f_n è una funzione continua sul suo dominio. Inoltre
$$\lim_{x \to -\infty} = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} = +\infty.$$
Per il teorema degli zeri esiste allora $x \in \mathbb{R}$ tale che $f_n(x) - y = 0$, come volevasi dimostrare.

2

Sia
$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\mathrm{e}^{2x} - 1)}{\log_2(1 + \operatorname{sen} x)}, \quad x \in]-\pi/2, 0[.$$
Determinare, qualora esista, una funzione continua su $[-\pi/2, 0]$ che coincida con f nei punti interni all'intervallo di definizione.

Svolgimento

Osserviamo anzitutto che f è continua in $]-\pi/2,0[$ in quanto somma, composizione e quoziente di funzioni continue (si osservi che il denominatore è definito e non si annulla in tale intervallo).

Occorre dunque calcolare i limiti di f in $-\pi/2$ da destra e in 0 da sinistra.

Si ha

$$\lim_{x\to-\pi/2^+} f(x) = 0$$

in quanto il denominatore diverge e al numeratore c'è una funzione limitata.

Per quanto riguarda l'altro limite si può osservare che

$$\frac{\operatorname{sen}(\mathrm{e}^{2x}-1)}{\log_2(1+\operatorname{sen} x)} = \frac{\operatorname{sen}(\mathrm{e}^{2x}-1)}{\mathrm{e}^{2x}-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}\cdot 2x\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\log_2(1+\operatorname{sen} x)}$$

e quindi, utilizzando i limiti fondamentali, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2\log 2.$$

Ne consegue che una funzione continua su $[-\pi/2,0]$ coincidente con f in $]-\pi/2,0[$ è data da

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = -\pi/2 \\ f(x) & \text{se } x \in]-\pi/2,0[\\ 2\log 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

3

Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n$$

Svolgimento

La serie diverge positivamente perchè è a termini positivi e non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza che richiede che il termine generale sia infinitesimo per $n\to+\infty$. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}} = 1$$

in quanto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \mathrm{e}\,.$$