Corso di Laurea in Matematica
Anno accademico 2010-2011

Analisi I

prova del 22/09/2011

1 *(10 punti)* Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$\log_2 = 1 - \sqrt{1+x^2}$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/4$, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento Cominciamo con l'osservare che la funzione che compare a primo membro è definita su $]0,+\infty[$. Ne consegue che non esistono soluzioni in $]-\infty,0]$.

In $]0,+\infty[$ consideriamo la funzione $f(x) = \log_2 x + \sqrt{1+x^2} - 1$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. f è continua e strettamente crescente (come somma di funzioni crescenti di cui almeno una strettamente) e vi potrà quindi essere al più uno zero. Inoltre

$$f(\frac{1}{2}) = -1 + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-4}{2} < 0$$

mentre

$$f(1) = \sqrt{2} - 1 > 0.$$

Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra $1/2$ e 1, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{3}{4}) = \log_2 3 - \log_2 4 + \sqrt{\frac{25}{16}} - 1 = \log_2 3 - 2 + \frac{5}{4} - 1 = \log_2 3 - \frac{7}{4} < 0$$

infatti quest'ultima equivale a $3^4 < 2^7$ che è vero in quanto $3^4 = 81$ e $2^7 = 128$.

Allora si ha $x_0 \in]3/4,1[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 7/8$.

2 *(10 punti)* Sia (a_n) una successione di numeri reali non negativi tale che esiste il $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. Dimostrare che

a) $0 < \ell < +\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} (1+na_n)^{1/n} = 1$;

b) $\ell = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} (1+na_n)^{1/n} = 1$;

c) fornendo opportuni esempi, nulla si può dire sull'esistenza e sul valore del limite della successione $(1+na_n)^{1/n}$ nel caso $\ell = +\infty$.

Svolgimento a) Nell'ipotesi $0 < \ell < +\infty$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = +\infty$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} (1+na_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\log(1+na_n)}{na_n} a_n} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

in quanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(1+na_n)}{na_n} = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell < +\infty$.

b) Nel caso $\ell = 0$ si ha che $a_n \leq 1/2$ per ogni n abbastanza grande. Per tali n si ha dunque

$$1 \leq (1+na_n)^{1/n} \leq (1+\frac{n}{2})^{1/n} \leq n^{1/n} \to 1$$

e il risultato segue dal teorema dei carabinieri.
c) Scegliamo a_n in modo che

$$1 + na_n = \begin{cases} b^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ c^n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

con $c, d > 1$, ovvero

$$a_n = \begin{cases} \frac{b^n-1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{c^n-1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Si verifica che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ mentre

$$(1 + na_n)^{1/n} = \begin{cases} b & \text{se } n \text{ è pari} \\ c & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} (1 + na_n)^{1/n} = \begin{cases} b & \text{se } b = c \\ \text{non esiste} & \text{se } b \neq c. \end{cases}$$

3 *(10 punti)* Data la successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = (1 + na_n)^{1/n} - 1, \end{cases}$$

a) dimostrare che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

b) studiare l'andamento di monotonia di (a_n);

c) dimostrare che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Attenzione: nel testo distribuito in aula, per un errore di stampa non compariva il termine -1 a secondo membro della definizione di a_{n+1}. Nella valutazione dei temi si è tenuto conto di questo inconveniente.

Svolgimento a) Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ è vero in quanto $a_1 = 2 \geq 0$. Se la proposizione è vera per a_n, cioè $a_n \geq 0$ allora si ha $1 + na_n \geq 1$ e pertanto $a_{n+1} = (1 + na_n)^{1/n} - 1 \geq 1^{1/n} - 1 = 0$.
b) Osservato che $a_2 = 2 = a_1$, e $a_3 = \sqrt{7} - 1 \geq 2 = a_2$ congetturiamo che la successione sia decrescente. Per dimostrarlo osserviamo che

$$a_{n+1} \leq a_n \iff (1 + na_n)^{1/n} \leq 1 + a_n \iff 1 + na_n \leq 1 + a_n^n$$

e quest'ultima è vera in quanto la disuguaglianza (di Bernoulli) $1 + nd \leq (1 + d)^n$ vale per ogni $d \geq -1$ (si dimostra per induzione o utilizzando la formula del binomio di Newton). Dunque la successione è non crescente.
c) Per il teorema sul limite delle successioni monotone allora si ha che esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in [0, 2]$. Per quanto dimostrato nell'esercizio precedente si ha allora

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (1 + na_n)^{1/n} - 1 = 0.$$