Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

prova del 21/3/2001

Analisi 1

A1.1

Dimostrare, senza usare il calcolatore, ma servendosi eventualmente di considerazioni geometriche, che

$$\operatorname{arctg} 2 > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dimostrare poi che l'equazione

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ha un'unica soluzione reale e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/4$.

Svolgimento

Poichè l'arcotangente è crescente si ha

$$\operatorname{arctg} 2 > \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

e, d'altra parte

$$\frac{\pi}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

infatti quest'ultima equivale a $\pi > 2\sqrt{2}$ che è vera in quanto π è maggiore di 3 mentre $2\sqrt{2}$ è minore di 3.

La funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ è continua in $]0, +\infty[$, e inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

quindi per il Teorema degli Zeri esiste almeno uno zero di f in $]0, +\infty[$ ed è anche unico perchè f è strettamente crescente in quanto somma di funzioni (strettamente) crescenti.

Poichè $f(1) = \pi/4 - 1 < 0$ e $f(2) = \operatorname{arctg} 2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$, allora, indicato con x_0 lo zero di f, si ha $x_0 \in]1, 2[$. Poichè $f(3/2) > 0$ allora si ha $x_0 \in]1, 3/2[$, e assumendo $5/4$ come valore approssimato per x_0 si ha che l'errore è minore di $1/4$.

A1.2

Calcolare, se esistono, i limiti seguenti

a. $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n;$

b. $\lim_{n\to+\infty} \log_{\sqrt[n]{n}+1} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n;$

c. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{n}-1\right)^n;$

d. $\lim_{n\to+\infty} (2n^\alpha - 1)^n$ al variare di α in $\mathbb{R}$.

Svolgimento

a.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{2}{-n}\right)^{-n/2}\right]^{-2} = \mathrm{e}^{-2}\,.$$

b.

$$\lim_{n\to+\infty} \log_{\sqrt[n]{n}+1} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}{\log\left(\sqrt[n]{n}+1\right)} = -\frac{2}{\log 2}.$$

c. Il limite non esiste, perchè indicata con a_n la successione in questione si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \mathrm{e}^{-2}$$

perchè a_{2n} è una sottosuccessione della successione considerata nel punto a. D'altra parte $a_{2n+1} < 0$ per ogni n e quindi non può convergere al numero positivo e^{-2}. Ne consegue che il limite non esiste, perchè se esistesse tutte le sottosuccessioni dovrebbero tendere allo stesso limite.

d. Si ha facilmente

$$\lim_{n\to+\infty} (2n^\alpha - 1)^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ \text{non esiste} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$