Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 21/06/2012

Analisi 1

1

(8 punti) Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$x + (\sqrt{x} - 2)^3 = 5$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/4, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

In $[0, +\infty[$ consideriamo la funzione $f(x) = x + (\sqrt{x} - 2)^3 - 5$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. f è continua e strettamente crescente e vi potrà quindi essere al più uno zero. Inoltre

$$f(4) = -1 < 0$$

mentre

$$f(5) = (\sqrt{5} - 2)^3 > 0$$

in quanto $(\sqrt{5} - 2)^3 > (\sqrt{4} - 2)^3 = 0$. Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 4 e 5, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{9}{2}) = \frac{99 - 71\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} < 0$$

infatti quest'ultima equivale a

$$99 < 71\sqrt{2} \iff 9801 < 10082$$

che è vero.

Allora si ha $x_0 \in]9/2, 5[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 19/4$.

2

(8 punti) Sia (b_n) una successione di numeri non negativi convergente ad un numero positivo b. Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n}. \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Svolgimento

Anzitutto, per definizione di (a_n) e per il principio di induzione, si ha $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osservato che $a_2 = \frac{\alpha^2}{\alpha+b_1} < \alpha = a_1$ congetturiamo che la successione sia decrescente. Per dimostrarlo osserviamo che

$$a_n \geq a_{n+1} \iff a_n \geq \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \iff 1 \geq \frac{a_n}{a_n + b_n}$$

che è vero per ogni n in quanto $b_n \geq 0$.

Poiché la successione è decrescente, per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in]0, \alpha[.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n + b_n} = \frac{L}{L+b} < 1$$

per il criterio del rapporto si ha che $L = 0$.

3

(7 punti) Determinare la frontiera di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento

Si ha $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \varnothing = \mathbb{R}$.

4

(7 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{x+1}}}{1 - \cos(2\sqrt[4]{x+1})}.$$

Svolgimento Il limite si presenta in forma indeterminata $0/0$.

Col cambiamento di variabile $y = \sqrt{x+1}$ si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-1^+} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{x+1}}}{1 - \cos(2\sqrt{x+1})} &= \lim_{y\to0^+} \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{1 - \cos(2\sqrt{y})} \\
&= \lim_{y\to0^+} \frac{\mathrm{e}^y - 1 + 1 - \mathrm{e}^{-y}}{y} \frac{y}{(2\sqrt{y})^2/2} \frac{(2\sqrt{y})^2/2}{1 - \cos(2\sqrt{y})} \\
&= \lim_{y\to0^+} \left(\frac{\mathrm{e}^y - 1}{y} + \frac{\mathrm{e}^{-y} - 1}{-y} \right) \frac{1}{2} \frac{(2\sqrt{y})^2/2}{1 - \cos(2\sqrt{y})} = 1
\end{aligned}$$