Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 20/12/2001

Analisi 1

1

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi. Dimostrare che valgono le leggi di De Morgan

$$\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A\Big)^C = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A^C, \qquad \Big(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A\Big)^C = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A^C,$$

tenendo conto del fatto che la famiglia $\mathcal{F}$ può anche avere cardinalità più che numerabile.

Svolgimento

Ricordiamo che le definizioni di unione e intersezione della famiglia $\mathcal{F}$ sono, rispettivamente,

$$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \{a \ : \ \exists A \in \mathcal{F} \ : \ a \in A\}, \qquad \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \{a \ : \ a \in A \ \forall\, A \in \mathcal{F}\}.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A\Big)^C &= \{a \ : \ \text{non}(\exists A \in \mathcal{F} \ : \ a \in A)\}\\ &= \{a \ : \ \forall A \in \mathcal{F} \ : \ a \notin A\}\\ &= \{a \ : \ \forall A \in \mathcal{F} \ : \ a \in A^C\} = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A^C\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}\Big(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A\Big)^C &= \{a \ : \ \text{non}(a \in A \ \forall\, A \in \mathcal{F})\}\\ &= \{a \ : \ \exists\, A \in \mathcal{F} \ : \ a \notin A\}\\ &= \{a \ : \ \exists\, A \in \mathcal{F} \ : \ a \in A^C\} = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A^C.\end{aligned}$$

2

Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Svolgimento

Procediamo per induzione. Per $n=1$ la formula è vera perchè si riduce a $1=1$. Per ipotesi di induzione la supponiamo vera per n e dimostriamo che vale per $n+1$, cioè che

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{[(n+1)(n+2)]^2}{4}.$$

Si ha infatti

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + n + 1\right] = (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}.$$

3

Determinare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n/2]}\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sum_{i=1}^{n} i^3}$$

dove $[n/2]$ denota la parte intera di $n/2$.

Svolgimento

La prima serie converge assolutamente perchè

$$\left|(-1)^{[n/2]}\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Per quanto riguarda la seconda, in base all'esercizio precedente si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sum_{i=1}^{n} i^3} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$$

che diverge poichè

$$\frac{n}{(n+1)^2} \geq \frac{n}{(2n)^2} = \frac{1}{4n}$$

e la serie armonica diverge.