Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica
correzione della prova del 19/7/2001

Analisi 1

1

Sia (a_n) la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{n}{1+2n}(a_n + 1). \end{cases}$$

1. Dimostrare che $a_n \leq \dfrac{n}{1+n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. dimostrare che (a_n) è monotona;
3. studiare il comportamento al limite, per $n \to +\infty$.

Svolgimento

1. Lo proviamo per induzione. $a_1 = 0 < 1/2$ è vero. Supponiamo vero che $a_n \leq \dfrac{n}{1+n}$ e dimostriamo che $a_{n+1} \leq \dfrac{n+1}{2+n}$.

Per definizione di a_{n+1} e per l'ipotesi di induzione

$$a_{n+1} = \frac{n}{1+2n}(a_n + 1) \leq \frac{n}{1+2n}\left(\frac{n}{1+n} + 1\right) = \frac{n}{1+n} \leq \frac{n+1}{2+n}$$

dove l'ultima disuguaglianza si verifica direttamente in quanto equivale a $n(2+n) \leq (1+n)^2$ che, semplificando, diviene $0 \leq 1$.

2. Poichè $a_2 = 1/3 > a_1$, $a_3 = 8/15 > a_2$, $a_4 = 23/35 > a_3$, la successione sembra essere crescente. Dimostriamo quindi che

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per definizione di a_{n+1} è equivalente provare che

$$a_n \leq \frac{n}{1+2n}(a_n + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

che, dopo le opportune semplificazioni diventa

$$a_n \leq \frac{n}{1+n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

provata precedentemente.

3. La successione è crescente e superiormente limitata (si osservi infatti che $\dfrac{n}{1+n} \leq 1$) e quindi ha limite $l \in \mathbb{R}$. Passando al limite per $n \to +\infty$ nella

$$a_{n+1} = \frac{n}{1+2n}(a_n + 1)$$

si ottiene l'equazione

$$l = \frac{1}{2}(l + 1)$$

che ha l'unica soluzione $l = 1$. Pertanto

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1.$$