Corso di Laurea in Matematica
Anno accademico 2010-2011

Analisi I

prova del 18/07/2011

1 *(10 punti)* Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$x^5 = 3^{-\sqrt{1+x^2}}$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/8, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento Cominciamo con l'osservare che la funzione che compare a secondo membro assume sempre valori positivi mentre quella al primo è negativa se $x < 0$. Ne consegue che non esistono soluzioni in $]-\infty, 0[$. In $[0, +\infty[$ consideriamo la funzione $f(x) = x^5 - 3^{-\sqrt{1+x^2}}$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. f è strettamente decrescente, quindi vi potrà essere al più uno zero. Inoltre

$$f(0) = -1/3 < 0 \qquad \text{e} \qquad f(1) = 1 - \frac{1}{3^{\sqrt{2}}} > 0,$$

infatti quest'ultima equivale a $3^{\sqrt{2}} > 1$ che è vera in quanto $3^{\sqrt{2}} > 3^0 = 1$. f è continua, quindi per il teorema degli zeri esiste uno zero di f, x_0, tra 0 e 1, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^5} - \frac{1}{3^{\sqrt{5}}} < 0$$

infatti quest'ultima equivale a $2^5 > 3^{\sqrt{5}}$ che è vero in quanto $2^5 = 32 > 27 = 3^3 > 3^{\sqrt{5}}$, si ha $x_0 \in]1/2, 1[$. Avendosi

$$f(\frac{3}{4}) = \frac{3^5}{4^5} - \frac{1}{3^{\frac{5}{4}}} < 0$$

infatti quest'ultima equivale a $3^5 < 2^8$ che è vero in quanto $3^5 = 243 < 256 = 2^8$, si ha $x_0 \in]3/4, 1[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 7/8$.

2 *(10 punti)* Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{2}, \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento Osserviamo che

$$a_2 = \frac{\alpha^2 + 1}{2} \geq \alpha = a_1 \quad \text{e} \quad a_3 = \frac{\left(\frac{\alpha^2+1}{2}\right)^2 + 1}{2} \geq \frac{\alpha^2 + 1}{2} = a_2.$$

Congetturiamo dunque che la successione sia crescente, cioè che $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ciò e vero in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n \leq a_{n+1} \iff a_n \leq \frac{a_n^2 + 1}{2} \iff (a_n - 1)^2 \geq 0$$

e quest'ultima è banalmente vera. Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste dunque il limite

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in] - \infty, +\infty].$$

Passando al limite nella uguaglianza $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+1}{2}$ si ottiene, per l'unicità del limite, che L deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{L^2+1}{2} \iff L = 1 \text{ o } L = +\infty.$$

Se $|\alpha| > 1$ allora si ha $a_3 \geq \frac{\alpha^2+1}{2} > 1$ e, siccome la successione è crescente, allora il limite non può essere 1 e quindi $L = +\infty$. Se invece $|\alpha| \leq 1$ allora si dimostra facilmente per induzione che $|a_n| \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ e pertanto $L = 1$.

3 *(6 punti)* La funzione $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\cosh x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ è detta *coseno iperbolico* di x. Senza ricorrere al calcolo differenziale, dimostrare che $\cosh(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$.

Svolgimento Anzitutto si osserva che $\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto ciò equivale a

$$\mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x} \geq 2 \iff \frac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{\mathrm{e}^x} \geq 2 \iff \mathrm{e}^{2x} + 1 \geq 2\,\mathrm{e}^x \iff (\mathrm{e}^x - 1)^2 \geq 0$$

e quest'ultima è vera per ogni x. Si poi $\cosh 0 = 1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$. Trattandosi di una funzione continua, per il teorema dei valori intermedi essa assume tutti i valori compresi tra 1 e $+\infty$ (escluso). Segue la tesi.

4 *(4 punti)* Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(1+\operatorname{sen}|\tan x|)}{\sqrt[3]{\tan x(\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - 1)^2}}.$$

Svolgimento Si ha

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(1+\operatorname{sen}|\tan x|)}{\sqrt[3]{\tan x(\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - 1)^2}} = \lim_{x\to0} \frac{\log(1+\operatorname{sen}|\tan x|)}{\operatorname{sen}|\tan x|} \frac{\operatorname{sen}^{2/3} x}{(\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - 1)^{2/3}} \frac{\operatorname{sen}|\tan x|}{\tan^{1/3} x \operatorname{sen}^{2/3} x}.$$

I primi due fattori tendono a 1. Quanto al terzo si ha

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}|\tan x|}{\tan^{1/3} x \operatorname{sen}^{2/3} x} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}|\tan x|}{|\tan x|} \frac{x^{2/3}}{\operatorname{sen}^{2/3} x} \frac{|\tan x|}{\tan^{1/3} x\, x^{2/3}}.$$

Di nuovo, i primi due fattori tendono a 1. Quanto al terzo si ha

$$\lim_{x\to0} \frac{|\tan x|}{\tan^{1/3} x^{2/3}} = \lim_{x\to0} \frac{|\tan x|}{|x|} \frac{x1/3}{\tan^{1/3}} \frac{|x|}{x^{1/3}x^{2/3}} = \lim_{x\to0} \frac{|\tan x|}{|x|} \frac{x1/3}{\tan^{1/3}} \frac{|x|}{x}.$$

Di nuovo, i primi due fattori tendono a 1, mentre terzo ha limite 1 se $x \to 0^+$ e -1 se $x \to 0^-$. Ne consegue che

$$\lim_{x\to0^-} \frac{\log(1+\operatorname{sen}|\tan x|)}{\sqrt[3]{\tan x(\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - 1)^2}} = -1 \neq 1 = \lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+\operatorname{sen}|\tan x|)}{\sqrt[3]{\tan x(\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - 1)^2}}$$

e pertanto il limite non esiste.