Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 17/9/2001

Analisi 1

Data la successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n(2+3a_n)}{4(a_n+1)} \end{cases}$$

1. dimostrare che la successione è limitata inferiormente;
2. studiarne la monotonia;
3. studiarne il comportamento al limite per $n \to \infty$.

Svolgimento

1. Si prova per induzione che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. La successione è decrescente. Infatti

$$a_n > a_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad a_n > \frac{a_n(2+3a_n)}{4(a_n+1)} \quad \Longleftrightarrow \quad a_n > -2$$

che è vero perchè $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
3. Essendo decrescente e inferiormente limitata la successione ammette limite finito l. Passando al limite nella

$$a_{n+1} = \frac{a_n(2+3a_n)}{4(a_n+1)}$$

si deve quindi avere

$$l = \frac{l(2+3l)}{4(l+1)}$$

che ha le due soluzioni $l = 0$ oppure $l = -2$. Poichè la successione ha termini positivi non può essere $l = -2$ e pertanto a_n converge a 0.