Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 17/12/2002

Analisi 1

1

Sapendo che la successione $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ converge ad e, dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

(dove la funzione $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ si intende definita in $]0,+\infty[$).

Svolgimento

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$[x] \leq x \leq [x]+1$$

da cui, per ogni $x > 0$

$$\frac{1}{[x]+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}$$

e quindi, per la monotonia dell'esponenziale, si ottiene

$$\left(\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

per ogni $x > 0$.

D'altra parte si ha che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$$

e ciò implica che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \mathrm{e}\,.$$

Infatti, ad esempio,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \iff \forall\,\epsilon>0\ \exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N}\ :\ \left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n - \mathrm{e}\right| < \epsilon\ \forall\, n > n_\epsilon$$

e quindi

$$\forall\,\epsilon>0\ \exists\, n_\epsilon\in\mathbb{N}\ :\ \Big|\Big(\frac{1}{[x]+1}\Big)^{[x]}-\mathrm{e}\Big|<\epsilon\ \forall\, x\ :\ [x]>n_\epsilon$$

cioè

$$\forall\,\epsilon>0\ \exists\, n_\epsilon\in\mathbb{N}\ :\ \Big|\Big(\frac{1}{[x]+1}\Big)^{[x]}-\mathrm{e}\Big|<\epsilon\ \forall\, x>n_\epsilon\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{1}{[x]+1}\Big)^{[x]}=\mathrm{e}\,.$$

L'altro limite si calcola analogamente. Dal teorema del confronto segue infine la tesi.

2

Dimostrare che l'equazione

$$\sqrt{\log_2 x}=2-x$$

ammette un'unica soluzione e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/4$, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

Considerata la funzione $f(x)=\sqrt{\log_2 x}-2+x$, il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un sol punto x_0 tale che $f(x_0)=0$. A tal fine osserviamo che $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua in quanto somma di funzioni continue e crescenti, di cui almeno una strettamente. Poiché

$$f(1)=-1<0,\qquad\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto x_0 esiste e, per l'iniettività di f è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione. Poiché $f(2)=1$ allora $x_0\in]1,2[$. Poiché

$$f(\tfrac{3}{2})=\sqrt{\log_2\tfrac{3}{2}}-2+\tfrac{3}{2}=\sqrt{\log_2\tfrac{3}{2}}-\tfrac{1}{2}>0\iff$$

$$\iff\sqrt{\log_2\tfrac{3}{2}}>\tfrac{1}{2}\iff\log_2\tfrac{3}{2}>\tfrac{1}{4}\iff\tfrac{3}{2}>2^{1/4}\iff$$

$$\iff\tfrac{3^4}{2^4}>2\iff 3^4>2^5\iff 81>32$$

allora $x_0\in]1,\frac{3}{2}[$. Ne consegue che un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0\simeq 5/4$.

3

Studiare il comportamento al limite della successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{2}. \end{cases}$$

Svolgimento

Cominciamo con l'osservare che $a_2 = 1/2 > a_1$, $a_3 = 5/8 > a_2$. Si può dimostrare che la successione è crescente per induzione, oppure osservando che

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \frac{a_n^2 + 1}{2} \geq a_n \iff (a_n - 1)^2 \geq 0$$

e che quest'ultima è vera per ogni n.

Ne consegue che la successione ammette limite λ, finito o infinito.

D'altra parte la successione è superiormente limitata. Si dimostra infatti facilmente per induzione che 1 è un maggiorante. Ne consegue che $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora passando al limite per $n \to +\infty$ nella

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}$$

si ottiene

$$2\lambda = \lambda^2 + 1 \iff (\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda = 1.$$

Pertanto

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1.$$